

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Трусов Николай Всеволодович

**Математическое моделирование динамики
поведения экономических агентов**

Специальность 1.2.2.

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик РАН, д.ф.-м.н., профессор
Шананин Александр Алексеевич

Оглавление

Введение	4
Актуальность темы исследования	4
Научная новизна	7
Цель работы	9
Задачи	9
Методы исследования	9
Теоретическая значимость	10
Практическая значимость	10
Апробация результатов исследования	10
Публикации	12
Структура диссертации	16
1 Теория рационального экономического поведения домашнего хозяйства	20
1.1 Моделирование экономического поведения репрезентативного рационального домашнего хозяйства	22
1.2 Моделирование поведения коммерческих банков	63
1.3 Групповое поведение домашних хозяйств	69
1.3.1 Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана	71
1.3.2 Уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка	73
1.3.3 Численное решение уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка	76
2 Идентификация модели экономического поведения домашних хозяйств	81
2.1 Идентификация репрезентативного домашнего хозяйства	82
2.2 Программный комплекс моделирования экономического поведения домашних хозяйств	85
2.3 Построение сценариев экономического поведения домашних хозяйств	93
2.4 Идентификация группового поведения домашних хозяйств	101
3 Моделирование доходов населения	120
3.1 Моделирование динамики человеческого капитала	120
3.1.1 Исследование фазового портрета в окрестности положения равновесия.	128

3.2	Групповое поведение работников на рынке труда	135
3.2.1	Численное решение уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка для процесса Леви	138
3.3	Групповое поведение высокочастотных трейдеров	143
3.3.1	Численное решение экстремальной задачи	147
3.3.2	Монотонные разностные схемы	150
3.3.3	Численное исследование кризиса фондового рынка на основе игр среднего поля	159
Заключение		171
	Список литературы	173
А Идентификация поведенческих характеристик экономического поведения домашних хозяйств в России		181
A.1	Распределение регионов статистики ОБДХ по группам	181
A.2	Корпус статистики ОБДХ	183
A.3	Поведенческие характеристики социальных слоев в модели рамсеевского типа по корпусу статистики ОБДХ	184
A.4	Распределение регионов статистики РМЭЗ НИУ ВШЭ по группам	186
A.5	Корпус статистики РМЭЗ НИУ ВШЭ	187
A.6	Поведенческие характеристики социальных слоев в модели рамсеевского типа по корпусу статистики РМЭЗ НИУ ВШЭ	188
В Идентификация поведения работников на рынке труда		190
С Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ		192

Введение

Актуальность темы исследования

Разработка экономико-математических моделей для среднесрочного анализа основывается на принципах рациональности поведения экономических агентов. В отличие от физических процессов, где частицы подчиняются известным законам, экономические агенты принимают самостоятельные решения, что приводит к задачам управления их поведением. Такие задачи чаще всего возникают при моделировании поведения агентов на рынках. Диссертационная работа посвящена математическому моделированию экономических процессов в отечественной экономике, где ключевую роль играет население. Население является агентом, поведение которого необходимо моделировать в условиях глобальных структурных изменений.

Математические модели поведения населения являются составной частью вычислимых моделей экономического равновесия, используемых для среднесрочного анализа экономических процессов. С учетом специфики отечественной экономики такие модели активно развиваются на протяжении последних 40 лет научной школой академика А.А. Петрова. В рамках научной школы на языке математических моделей были проанализированы последовательные этапы эволюции российских экономических структур, примеры результатов исследований отражены в работах [24], [25], [1]. Среднесрочный анализ ориентирован на комплексное исследование последствий крупных экономических решений с учетом системы обратных связей в экономике на характерных временах, в течение которых не успевают произойти существенные технологические изменения. Результатом среднесрочного анализа могут являться, например, рекомендации по отбору наиболее эффективных мер по возобновлению экономического роста. Методы и цели среднесрочного прогнозирования существенно отличаются от методик краткосрочного прогнозирования, ориентированных на выработку сценариев государственного регулирования с целью стабилизации экономических показателей.

Рациональное экономическое поведение населения можно разделить на процессы в соответствии с несколькими ролями, выполняемые в экономике. В диссертационной работе рассматривается экономическое поведение населения на различных рынках. Население в роли домашнего хозяйства является потребителем товаров и услуг, оперирующим в соответствии со своими предпочтениями на рынке кредитов и сбережений. Другими ролями населения,

рассматриваемые в диссертационной работе, являются роль субъекта на рынке труда, изменяющего свои профессионально-квалификационные характеристики с целью увеличения заработной платы, роль участника фондовых рынков, оперирующего финансовыми инструментами для извлечения прибыли.

Основопологающей работой математического моделирования экономического поведения домашних хозяйств является работа Ф. Рамсея [100], в которой исследуется поведение рационального репрезентативного экономического агента в условиях совершенного рынка кредитов и депозитов. Модель формализована в виде задачи оптимального управления на конечном временном горизонте. Домашнее хозяйство максимизирует дисконтированное потребление с постоянным отвращением к риску, управляя динамикой своих расходов в зависимости от текущих параметров экономической конъюнктуры и поведенческих характеристик самого домашнего хозяйства. Модели рамсеевского типа в форме задач оптимального управления исследовались, например, в [55], [80], [31], [9]. Исследование экономического поведения рационального репрезентативного домашнего хозяйства на несовершенном рынке кредитов и депозитов мотивировано обстоятельствами российской экономики и занимает важное место в диссертационной работе. Так, на протяжении более десяти лет, отношение процентных ставок по потребительскому кредиту к депозитам варьировалось в диапазоне от 2.5 до 3.5. Проблема задолженности населения по потребительскому кредиту является актуальной. К апрелю 2024г задолженность населения по потребительскому кредиту превысила 16 трлн.руб., что составляет около 10% ВВП. Исследования [19], [108] показывают, что около половины заемщиков имеют высокую долговую нагрузку, а у 20% возникают просрочки по обслуживанию имеющихся кредитов. В [13] отмечено, что просроченная задолженность по кредитам выше в слаборазвитых регионах с низкими доходами. Большинство заемщиков имеют низкие реальные доходы и вынуждены занимать новый потребительский кредит для обслуживания ранее выданных. Такая ситуация приводит к образованию финансовой пирамиды. В 2019г в правительстве РФ обсуждалась проблема потребительского кредита как актива коммерческих банков [5], [32]. В аналитической записке ЦБ РФ [6] проводится анализ статистических данных «Всероссийское обследование домохозяйств по потребительским финансам» [8] за 2022г. Результаты анализа говорят о большом разрыве в доходах и расходах домашних хозяйств. Малообеспеченные домашние хозяйства, как правило, не располагают достаточными средствами для покрытия расходов, поэтому вынуждены осуществлять займы по потребительскому кредиту. Среди них большинство тратит значительную часть своего дохода на покрытие выплат по кредитам. Авторы [6] подчеркивают, что неустойчивое финансовое положение домохозяйств из низкодходных групп и семей с детьми в большей степени должно рассматриваться как социальная проблема.

С одной стороны, рост спроса на потребительский кредит отражает формирование «среднего слоя»: домашние хозяйства управляют динамикой своих расходов и соизмеряют свой спрос с величиной процентной ставки по кредиту. С другой стороны, потребительский кре-

дит в России являлся механизмом социальной адаптации: практически каждый третий заемщик является низкодоходным, предъявляющим спрос на кредит в сложных жизненных обстоятельствах. В новых реалиях данный механизм находится под угрозой исчезновения: высокая ключевая ставка центрального банка влечет высокие процентные ставки по потребительскому кредиту, что может приводить к формированию закредитованности населения и образованию финансовой пирамиды. Изучение формирования процентных ставок коммерческими банками по потребительским кредитам является новой задачей в условиях сложившейся экономической ситуации. Моделирование взаимодействия на рынке потребительского кредита коммерческих банков и домашних хозяйств основано на концепции равновесия по Штакельбергу. Коммерческие банки, оценив зависимость спроса на потребительский кредит от процентной ставки, устанавливают процент по потребительскому кредиту на уровне, который максимизирует их прибыль.

В современной экономике России происходят структурные изменения, связанные с переходом от приоритетного развития капиталоемких отраслей к трудоемким отраслям. Эти изменения вызывают изменения в фондах оплаты труда на отраслевом уровне. Увеличение фонда оплаты труда открывает две альтернативы. Первая альтернатива заключается в повышении заработной платы работникам отрасли за прежнюю работу в результате конкуренции предприятий на рынке труда. Вторая альтернатива состоит в развитии человеческого капитала работников, которая позволит повысить производительность труда. Современная неоклассическая теория человеческого капитала получила развитие во второй половине XX века [40], [46], [44], [63], [94], [101], [107], [41], [42]. В моделях экономического роста выделяют роль динамики человеческого капитала в повышении производительности труда и росте реальной заработной платы см., например, модель Р. Лукаса [90]. В диссертационной работе построена и исследована модель рационального репрезентативного работника на рынке труда, который распределяет свои ресурсы между потреблением и повышением своих компетенций.

В условиях нестабильной рыночной ситуации актуальны модели, которые позволяют следить за групповым поведением домашних хозяйств. Исследование группового поведения домашних хозяйств позволяет более качественно отслеживать их экономическую динамику. В настоящее время актуальны модели группового поведения экономических агентов на основе концепции игр среднего поля. Математические модели такого рода начали обсуждаться в начале XXI века. Их основоположниками являются Ж.-М. Ласри, П.-Л. Лионс [87], [88], [89], а также М. Хуанг, П. Каинс, Р.П. Маламэ [50], [51]. Математические модели группового поведения агентов на основе игр среднего поля с ведущим игроком были изучены в [69], [70], [71], [38]. Концепция игр среднего поля применяется при моделировании группового поведения в мультиагентных системах, встречающихся в задачах экономики, финансов, экологии, управлении транспортными потоками [83], [84], [85], [52], [54], [50], [103], [68], [37], [56], [57], [39], [81], [86], [78], [93]. Такие системы на микроуровне моделируются динамической игрой, в кото-

рой динамика состояния и целевая функция агентов описываются однотипно, а в результате взаимодействия устанавливается равновесие. В системах с большим количеством агентов концепция равновесия по Нэшу нуждается в модификации ввиду ограничений на сложность информации, используемой агентом при принятии решений [43], [62], [47], [77]. Концепция игры среднего поля является такой модификацией, согласно которой предполагается, что каждый агент, выбирая свою стратегию, не использует детальную информацию о состоянии других агентов, а учитывает макроописание системы в целом. С математической точки зрения такие модели представляют систему из уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, которое описывает выбор стратегии поведения агентов, и уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, которое описывает динамику состояния системы. В случае, например, наличия подражательного поведения экономических агентов (выбора индивидуальной стратегии в зависимости от принятия решений остальных агентов), данная система уравнений является связанной [49]. Условия на функцию распределения агентов по состояниям в фазовом пространстве из уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка задаются в начальный момент временного интервала, а на функцию цены из уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана задаются в конечный момент временного интервала. Такая постановка задачи порождает новые проблемы, связанные с корректностью по Адамару и численными методами решения [65], [2], [20], [21]. В настоящее время существование и единственность решения в такой системе уравнений в частных производных до сих пор является открытым вопросом. Доказано существование решения системы уравнений в частных производных лишь в частных случаях [53], [64]. Разработка численных методов решения задач группового поведения на основе концепции игр среднего поля является актуальной темой, имеющей практическое значение для приложений в различных областях математического моделирования.

Учитывая вышесказанное, актуальной задачей является исследование математических моделей экономического поведения населения, позволяющих проводить среднесрочный анализ, изучать подходы к анализу экономических проблем.

Научная новизна

В диссертационной работе исследованы экономико-математические модели, описывающие поведение рациональных агентов на рынках различной природы. Получены следующие основные результаты, характеризующиеся научной новизной:

1. В работе предложено исследование спроса на потребительский кредит в условиях несовершенного рынка для модифицированной модели рамсеевского типа. Модель формализована в виде задачи оптимального управления на конечном временном горизонте и имеет ряд особенностей: негладкость правой части дифференциального уравнения на фазовую переменную, некомпактность управления. С помощью теоремы Комлоша

[79] доказана теорема о существовании решения. Получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка [15]. Построен синтез оптимального управления на бесконечном временном горизонте, допускающий особые режимы.

2. Разработана и исследована новая модель формирования процентных ставок по потребительскому кредиту на основе анализа интересов и логики поведения коммерческих банков. Коммерческие банки оценивают риски дефолта заемщиков. По формуле Фейнмана–Каца учет рисков невозврата потребительского кредита сводится к решению краевой задачи для уравнения с частными производными. Установив связь с уравнением Абеля, удается свести решение краевой задачи к задаче Коши для уравнения теплопроводности с внешним источником и получить оценку рисков в аналитической форме. Модели экономического поведения домашних хозяйств на рынке потребительского кредита и поведения коммерческих банков идентифицированы по данным российской статистики.
3. Разработан специализированный программный комплекс для анализа спроса на потребительский кредит. С его помощью проанализированы проблемы рынка потребительского кредитования в России.
4. Разработана и исследована модель поведения репрезентативного работника на рынке труда в виде задачи оптимального управления на бесконечном временном горизонте. Доказана теорема о существовании решения, получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Модель идентифицирована по данным российской статистики в различных социальных слоях населения.
5. Групповое поведение экономических агентов моделируется на основе концепции игр среднего поля. Модель состоит из системы уравнений в частных производных: уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, эволюционирующего в обратном времени и описывающее стратегии агентов, и уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, эволюционирующего в прямом времени и описывающее изменение плотности распределения агентов по фазовым координатам. В диссертационной работе разработаны численные методы для решения задачи группового поведения экономических агентов.

Автору диссертационной работы была присуждена золотая медаль РАН с премией для молодых ученых России за работу «Численные методы решения задачи среднего поля при наличии магистрального эффекта и их приложение к анализу кризиса на фондовом рынке» (см. Постановление президиума РАН от 25 мая 2021г, с.8, п.2.1.)

Цель работы

Целью настоящей работы является создание набора математических моделей экономического поведения населения, использование которых позволяет проводить среднесрочный анализ экономических проблем.

Задачи

1. Исследование математического описания экономического поведения репрезентативного рационального домашнего хозяйства на несовершенном рынке потребительского кредита. Построение в форме синтеза решения задачи оптимального управления для модифицированной модели рамсеевского типа.
2. Моделирование взаимодействия на рынке потребительского кредита репрезентативного коммерческого банка и домашних хозяйств.
3. Разработка программного комплекса для идентификации различных социальных слоев населения по данным российской статистики на рынке потребительского кредита. Построение сценарных прогнозов.
4. Моделирование экономического поведения рационального агента как субъекта на рынке труда. Численное построение синтеза задачи оптимального управления. Апробация модели экономического поведения агентов на рынке труда по данным российской статистики.
5. Исследование математического описания группового поведения населения в ролях домашних хозяйств на рынке потребительского кредита, субъектов на рынке труда. Идентификация группового поведения домашних хозяйств на рынке потребительского кредита по данным российской статистики.
6. Исследование математического описания группового поведения населения в роли высокочастотных трейдеров на фондовом рынке. Идентификация группового поведения высокочастотных трейдеров для анализа кризиса на фондовом рынке Китая в 2015г.

Методы исследования

Методологической основой исследования диссертационной работы являются методы динамического программирования и оптимального управления, принцип максимума для задач оптимального управления с негладкой правой частью дифференциального уравнения на фазовые переменные, принцип максимума для задач с бесконечным временным горизонтом,

качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений, численные методы решения дифференциальных уравнений.

Теоретическая значимость

Построение моделей, описывающих поведение репрезентативных рациональных экономических агентов в виде задач оптимального управления, доказательство существования решения задач оптимального управления, построение синтеза. Построение модели формирования процентных ставок по потребительскому кредиту на основе анализа интересов и логики поведения коммерческих банков. Исследование моделей группового поведения экономических агентов на рынках на основе концепции игр среднего поля.

Практическая значимость

Создание инструментов для среднесрочного анализа поведения экономических агентов на рынках. Данные инструменты могут использоваться при анализе сценариев, принятии управленческих решений, влияющие на социально-экономические проблемы населения.

Апробация результатов исследования

Результаты диссертационного исследования были апробированы на 75 конференциях и научных семинарах. Основные доклады:

- Тема доклада: Математическое моделирование некоторых последствий пандемии COVID-19 для экономики России. Четвертый Российский экономический конгресс (РЭК-2020), Москва, Россия, 21-25 декабря 2020.
- Тема пленарного доклада: The household behavior modeling based on modified Ramsey and Mean Field Games approaches. Научная конференция: Quasilinear Equations, Inverse Problems and Their Applications (QIPA2021), Сириус, Сочи, Россия, 23-29 августа 2021.
- Тема доклада: Математическое моделирование экономического поведения домашних хозяйств в России. Семинар Банка России под руководством заместителя председателя Банка России К.В. Юдаевой и редакционной коллегии журнала «Деньги и кредит», Россия, 6 июля 2021.
- Тема доклада: Анализ экономического положения домашних хозяйств в России в условиях санкций. Городской экономический семинар (ВШЭ, ЕУСПБ, ПОМИ), Россия, 7 апреля 2022.

- Тема доклада: Анализ спроса на потребительский кредит в России в условиях санкций. Семинар Банка России под руководством заместителя председателя Банка России А.Б. Заботкина, Россия, 30 июня 2022.
- Тема доклада: Математическое моделирование экономического поведения домашних хозяйств в России в условиях пандемии COVID-19. Общественный семинар Института Проблем Управления им. В.А. Трапезникова РАН под руководством Ф.Т. Алескерова, В.В. Подиновского, Б.Г. Миркина, Россия, 10 марта 2021.
- Тема доклада: Анализ экономического положения домашних хозяйств в условиях санкций. Городской экономический семинар (совместный семинар ЕУСПб и НИУ ВШЭ), Россия, 7 апреля 2022.
- Тема доклада: Numerical study into stock market crises based on Mean Field Games approach. Научная конференция: XIV международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», Новосибирск, Академгородок, Россия, 24-27 декабря 2022.
- Тема доклада: Математическое моделирование спроса на потребительский кредит в условиях санкций. Научная конференция: Международная конференция «Современные проблемы обратных задач», Новосибирск, Академгородок, Россия, 19-23 декабря 2022.
- Тема пленарного доклада: Математическое моделирование экономического поведения: анализ рынка потребительского кредита в условиях санкций. КЭФ-2022, Красноярск, Россия, 20 октября 2022.
- Тема доклада: Анализ влияния санкций на экономическое положение домашних хозяйств в России. Международный экономический форум государств — участников СНГ, Центр Международной Торговли, Россия, 18 марта 2022.
- Тема доклада: Mathematical modeling of the household behavior in the labor market. Научная конференция: MOTOR-2023, Екатеринбург, Россия, 2-8 июля 2023.
- Тема доклада: Математическая модель динамики человеческого капитала. Научный семинар по математической экономике (рук. В.И. Данилов, В.М. Полтерович), ЦЭМИ РАН, Москва, Россия, 19 марта 2024.
- Научные семинары ФИЦ ИУ РАН, МГУ, МФТИ, ЦЭМИ РАН, ЕУСПб.

Полученные результаты использовались в работах, проводимых в рамках проектов РФФИ (грант 17-07-00507, 20-07-00285), РНФ (16-11-10246, 23-21-00281, 24-11-00329).

Публикации

По теме диссертационной работы опубликовано 32 печатные работы, в том числе 12 из списка Web of Science/Scopus, 1 работа из списка журналов, рекомендованных ВАК, 8 работ в сборниках трудов конференций, 11 в тезисах докладов, 3 свидетельства о регистрации в Реестре программ для ЭВМ.

Список работ, индексируемых в международных базах цитирования WoS/Scopus

1. Trusov N.V. Numerical solution of mean field games problems with turnpike effect // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol.41. No.4. P.559-573.
2. Shanenin A.A., Tarasenko M.V., Trusov N.V. Consumer loan demand modeling // Communications in Computer and Information Science. 2021. Vol.1476. P.417-428.
3. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т.61. №6. С.1034-1056.
4. Trusov N.V. Numerical study of the stock market crises based on mean field games approach // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2021. Vol.29. No.6. P.849-865.
5. Shanenin A.A., Trusov N.V. The household behavior modeling based on mean field games approach // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol.42. No.7. P.1738-1752.
6. Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование рынка потребительского кредита в России в условиях санкций // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т.507, №6. С.71-80.
7. Shanenin A., Trusov N. The group behaviour modelling of workers in the labor market// Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2023. Vol.38. No.4. P.219-229.
8. Н.В. Трусов, А.А. Шананин. Математическая модель динамики человеческого капитала// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т.63. №10. С.1747-1760.
9. Trusov N.V. Identification of the household behavior modeling based on modified ramsey model // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol.44. No.1. P.455-469.
10. Shanenin A.A., Trusov N.V. Mathematical modeling of the household behavior in the labor market // Lecture Notes in Computer Science. 2023. Vol.13930. P.409-424.

11. Трусов Н.В. Об одной обратной задаче для уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т.63. №3. С.408-423.
12. Kuts A. S., Trusov N. V. Analysis of the stock market crisis based on mean field games concept // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol.45. No.1. P. 272-286.

Работы из списка журналов, рекомендованных ВАК

1. Н.В. Трусов. Применение аппроксимации «среднего поля» в моделировании экономических процессов // Труды ИСА РАН. 2018. Т.68. №2. С.88-91.

Прочие публикации

1. Trusov N. Application of mean field games approximation to economic processes modeling // IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM2018). Moscow, October 22-27, 2018. Proceedings. In two volumes. / Editor-in-chief F. Ereshko. MAKS Press Moscow. 2018. V.1. P. 208-212.
2. Трусов Н.В. Применение аппроксимации среднего поля в моделировании экономических процессов // Сборник тезисов лучших выпускных квалификационных работ факультета ВМК МГУ 2018г. — Издательский отдел Факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс Москва. 2018. С.41-43.
3. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Моделирование спроса на потребительское кредитование // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов-2020 / Под ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. Т.2. Москва: ООО МАКС Пресс. 2020. С.125-128.
4. Обросова Н.К., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование некоторых последствий пандемии covid-19 для экономики России // IV Российский Экономический Конгресс. 2020. Т.3. С.59-62.
5. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование спроса на потребительское кредитование домашних хозяйств в России // Современные проблемы математики и физики, материалы научной конференции (г. Стерлитамак, 12-15 сентября 2021г). РИЦ БашГУ Уфа. 2021. Т.2. С.191-196.
6. Шананин А.А., Тарасенко М.В., Трусов Н.В. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств РФ в условиях пандемии covid-19 // ИБ ОмГТУиИМ СО РАН. 2021. Т.5. С.64-66.

7. Шананин А.А., Трусов Н.В. Анализ влияния санкций на экономическое положение домашних хозяйств в России // Прикладная математика и фундаментальная информатика. Материалы XII Международной молодежной научно-практической конференции с элементами научной школы. ОмГТУ Омск. 2022. С.32-33.
8. Трусов Н. В., Шананин А. А. Исследование модели динамики человеческого капитала // Материалы XIII Международной молодежной научно-практической конференции с элементами научной школы. Омск: Омский государственный технический университет. 2023. С.76-77.

Тезисы докладов

1. Трусов Н.В. Применение аппроксимации среднего поля в моделировании экономических процессов // тезисы конференции Тихоновские чтения. Москва: ООО МАКС Пресс. 2018. Т.1. С.16-16.
2. Трусов Н.В. Численное решение задачи среднего поля при наличии магистрального эффекта // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов. МаксПресс Москва. 2019. С.18-18.
3. Trusov N.V. Numerical solution of mean field games application to economic processes modeling // Сборник тезисов одиннадцатой международной молодежной научной школы-конференции Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. Новосибирск, Академгородок. 2019. С. 54-54.
4. Трусов Н.В., Тарасенко М.В., Шананин А.А. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Тихоновские чтения: научная конференция: тезисы докладов. Москва: ООО МАКС Пресс. 2020. С.12-12.
5. Трусов Н.В., Шананин А.А. Моделирование поведения динамики домашних хозяйств на основе концепции игр среднего поля // Тихоновские чтения: научная конференция: 25-30 октября 2021г: тезисы докладов. Москва: ООО МАКС Пресс. 2021. Т.46. С.51-51.
6. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование экономического поведения домашних хозяйств в России в условиях пандемии covid-19 // Программа и тезисы докладов Конференции международных математических центров мирового уровня. ФТ Сириус Математический центр Научно-технологического университета Сириус. 2021. С.149-150.
7. Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование социальной динамики домашних хозяйств // Ломоносовские чтения-2021: научная конференция, факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. Секция Вычислительной математики и кибернетики. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2021. С.148-149.

8. Трусов Н.В. Numerical study into stock market crises based on mean field games approach // Конференция международных математических центров мирового уровня. Образовательный Фонд Талант и успех Научно-технологический университет Сириус Математический центр ФТ Сириус. 2021. P.150-150.
9. Shanenin A., Trusov N. Consumer loan demand modeling of households in russia under sanctions // Bioinformatics of genome regulation and structure/systems biology (BGRS/SB-2022): The Thirteenth International Multiconference (04-08 July, 2022, Novosibirsk, Russia); Abstracts. — ICG SB RAS Novosibirsk. 2022. P. 920-920.
10. Трусов Н.В., Шананин А.А. Анализ спроса на потребительский кредит в условиях санкций // Тезисы докладов научной конференции Тихоновские чтения. Москва: ООО МАКС Пресс. 2022. С.14-14.
11. Трусов Н.В., Шананин А.А. Анализ влияния сложившейся экономической ситуации на экономическое положение домашних хозяйств в регионах России // Ломоносовские Чтения: Москва: ООО МАКС Пресс. 2022. С.90-90.

Свидетельства о регистрации программных комплексов

1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No.2022619524 «Анализ спроса на потребительский кредит в РФ». Правообладатель: Трусов Николай Всеволодович. Заявка No. 2022618580. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 23 мая 2022г.
2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No. 2023685691. «Программный комплекс для анализа экономического поведения домашних хозяйств в РФ». Автор: Трусов Николай Всеволодович. Правообладатель: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук»(ФИЦ ИУ РАН). Заявка No.2023685460. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 29 ноября 2023г.
3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No.2023685827. «Моделирование экономического поведения домашних хозяйств в условиях несовершенного рынка кредитов». Автор: Трусов Николай Всеволодович. Правообладатель: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук»(ФИЦ ИУ РАН). Заявка No.2023685469. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 30 ноября 2023г.

Структура диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, трех приложений. Полный объем диссертации составляет 195 страниц с 92 рисунком и 4 таблицами. Список литературы содержит 108 наименований.

Во введении описан объект исследования, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, отражены методы исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы. Приведены апробация и список основных публикаций по теме диссертационной работы.

Глава 1 посвящена описанию модели экономического поведения рационального домашнего хозяйства на несовершенном рынке потребительского кредита.

В параграфе 1.1 описывается моделирование экономического поведения репрезентативного рационального домашнего хозяйства. Оно основывается на модифицированной модели рамсеевского типа в форме задачи оптимального управления. Домашнее хозяйство максимизирует дисконтированное потребление на конечном временном горизонте и имеет возможность осуществлять займы по потребительскому кредиту, сберегать в форме депозитов или не взаимодействовать с коммерческими банками. Задача оптимального управления имеет ряд особенностей: негладкость правой части дифференциального уравнения фазовой переменной в силу несовершенства рынка потребительского кредита и депозитов, некомпактность управления, условие расплаты по ранее взятым потребительским кредитам к конечному моменту времени. Приводится доказательство существования решения задачи оптимального управления. Построен синтез оптимального управления практически в аналитическом виде на бесконечном временном горизонте. Классифицированы типы экономических агентов на основе решения задачи синтеза оптимального управления, соответствующие различным социальным слоям.

В параграфе 1.2 исследована новая модель формирования процентных ставок по потребительскому кредиту на основе анализа интересов и логики поведения коммерческих банков. Моделирование взаимодействия на рынке потребительского кредита коммерческих банков и домашних хозяйств основано на концепции равновесия по Штакельбергу. Предполагается, что коммерческие банки назначают ставку по потребительскому кредиту, исходя из своих интересов, оценивая ответное поведение домашних хозяйств.

В условиях нестабильной рыночной ситуации актуальны модели, которые позволяют анализировать динамику распределения агентов по фазовым переменным. Модели такого рода описывают текущее экономическое положение агентов. Такое исследование позволяет более качественно отслеживать экономическую динамику. В основе построения такого рода моделей лежит концепция игр среднего поля. Цели, управленческие решения, которые принимают агенты описываются уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана. Уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка описывает динамику плотности распределения агентов по фазовым координатам. **В параграфе 1.3** исследуется групповое поведение домашних хозяйств на несо-

вершенном рынке потребительских кредитов и депозитов.

В главе 2 изучается вопрос идентификации и верификации модели экономического поведения домашних хозяйств.

В параграфе 2.1 проводится идентификация репрезентативного домашнего хозяйства. Для калибровки модели экономического поведения домашних хозяйств были использованы два корпуса статистики: данные Обследования Бюджетов Домашних Хозяйств (ОБДХ) [23] Росстата и данные Российского Мониторинга Экономического Положения и Здоровья Населения (РМЭЗ НИУ ВШЭ) [30], собираемые Высшей Школой Экономики.

В параграфе 2.2 приводится описание специализированного программного комплекса для работы со статистическими данными ОБДХ. В качестве платформы, на которой разрабатывался программный комплекс, была взята платформа МАТЛАВ. Программный комплекс состоит из четырех приложений:

- Первое приложение анализирует статистические данные ОБДХ, формирует группы регионов, выделяет заемщиков из данных групп регионов, отображает их финансовые и социальные положения.
- Второе приложение классифицирует заемщиков по социальным слоям в выбранной группе регионов, строит параметры экономической конъюнктуры репрезентативных заемщиков, позволяет разделить заемщиков по типу населенного пункта, в котором они проживают: городскому или сельскому¹.
- Третье приложение позволяет проводить идентификацию поведенческих характеристик репрезентативного заемщика для данного социального слоя, а именно настраивать параметры коэффициента дисконтирования денежных потоков δ , отвращения к риску ρ , скорости обращения денег на рынке потребительских расходов $\frac{1}{\theta}$ на временном периоде так, чтобы воспроизводились ретроспективные данные потребления и задолженности репрезентативного заемщика. Если коэффициенты ρ и θ можно задать константами для данного социального слоя, то коэффициент дисконтирования δ зависит от параметров экономической конъюнктуры: $\delta = \delta(r_L, \gamma, j)$. Каждый слой населения описывается репрезентативным заемщиком, параметры которого идентифицируются отдельно.
- Четвертое приложение проводит верификацию модели и дает оценку качества воспроизводимых поведенческих параметров, сопоставляя расчетные показатели с историческими данными. Помимо этого, в приложении есть возможность генерации сценариев: задании параметров экономической конъюнктуры на временном периоде, следующим за периодом верификации и получении прогнозов потребления и задолженности репрезентативных заемщиков из различных социальных слоев.

¹Выяснилось, что около половины домашних хозяйств из бедной группы регионов проживает в населенном пункте городского типа, а оставшаяся половина в сельском. В дальнейшем данная группа была поделена на две.

В параграфе 2.3, основываясь на статистических данных ОБДХ, проведен детальный анализ экономического поведения заемщиков в разных группах регионов и рассмотрены различные сценарии.

В параграфе 2.4 исследуется вопрос согласованности статистических данных ОБДХ с моделью динамики плотности распределения платежеспособных заемщиков по доходам и финансовым состояниям на основе решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка. Множество всевозможных решений уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка задает подпространство, на которое проецируются статистические данные. Построенная проекция использовалась в качестве входных данных для определения поведенческих характеристик домашних хозяйств.

В главе 3 исследуются модели формирования доходов населения.

В параграфе 3.1 исследуется проблема динамики человеческого капитала на языке математической модели репрезентативного рационального работника на рынке труда. Работник максимизирует дисконтированное потребление и увеличивает свои профессиональные навыки для получения более высокой заработной платы. В случайный момент времени на рынке труда появляется вакансия, которая обеспечивает скачок в заработной плате работника. Компетенции работника описываются его человеческим капиталом. Изучается вопрос идентификации репрезентативного рационального работника по данным российской статистики. Получены качественные результаты об эффективности стимулирования увеличения человеческого капитала для различных социальных слоев.

В параграфе 3.2 исследуется групповое поведение работников на рынке труда, относящиеся к одному профессионально-квалификационному слою. Разработаны разностные схемы специального вида для численного решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка с процессом Леви, описывающее эволюцию плотности распределения работников по фазовым переменным, приведены численные результаты моделирования.

В параграфе 3.3 исследуется групповое поведение населения с подражательным поведением на фондовом рынке на основе концепции игр среднего поля. За основу взята модель, предложенная Л. Фатоне, Ф. Мариани, М.С. Реккиони и Ф. Цирилли [60]. С математической точки зрения такие модели представляют систему из связанных между собой уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, которое описывает выбор стратегии поведения агентов, и уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, которое описывает динамику состояния системы. Условия на функцию распределения агентов по состояниям в фазовом пространстве из уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка задаются в начальный момент временного интервала, а на функцию цены из уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана задаются в конечный момент временного интервала. Магистральный эффект, характерный для задач экономической динамики, затрудняет использование метода, основанного на решении задачи Коши для системы уравнений с частными производными и подборе начального условия для функции цены, чтобы удовлетворить условию на функцию цены в конечный момент времени. В [83] предложен

подход к численному решению данной задачи, основанный на сведениях к специальной задаче максимизации функционала при ограничении на фазовые переменные, совпадающие с уравнением Колмогорова–Фоккера–Планка. Функционал в этой задаче выбирается таким образом, чтобы множители Лагранжа к ограничениям удовлетворяли исходным уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана и условию на правом конце временного интервала. При определенных ограничениях имеет место редукция системы уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям типа Риккати (см. [60], [95]). Данная редукция используется как тестовый пример для анализа сходимости численного метода. С помощью модели поведения высокочастотных трейдеров в диссертационной работе исследуется произошедший в 2015г кризис на фондовом рынке Китая.

В заключении сформулированы основные результаты работы, выносимые на защиту.

Глава 1

Теория рационального экономического поведения домашнего хозяйства

Для новейшей истории России характерны высокие темпы роста задолженности по потребительскому кредиту. Осуществлять займы по потребительскому кредиту можно было с 90-х годов XX века, однако, их роль была незначительна. Ситуация на рынке потребительского кредита в России начала меняться с начала XXI века. На протяжении последних 20 лет задолженность по потребительскому кредиту населения к активам банковского сектора выросла с 3% до 8.5%, а к ВВП за последние 12 месяцев с 1.5% до 11.5% (см. Рис.1.1). К апрелю 2024г задолженность населения по потребительскому кредиту перед банковским сектором превысила 16 трлн руб. Рост совокупной долговой нагрузки неравномерно распределен среди различных слоев населения в различных регионах страны. Показатели долговой нагрузки в среднем имеют наибольшие значения в первых 2-х, а также в 5-м и 6-м децилях распределения населения по доходам [19], [108]. Среди заемщиков из первых двух децилей преимущественно возникают просроченные задолженности по обслуживанию потребительского кредита, а в 5-м и 6-м децилях установилось высокое соотношение платежей по кредитам к доходу заемщиков. В [13] был проведен пространственный анализ российских регионов через призму их кредитно-сберегательного поведения. Отмечается, что наибольшая склонность к осуществлению заимствований по потребительскому кредиту наблюдается в преимущественно бедных регионах страны.



Рис. 1.1: Рост потребительского кредита в России на протяжении последних двух десятилетий.

Помимо стимулирования экономической активности и поддержания платежеспособного спроса, потребительский кредит является самым выгодным вложением для коммерческих банков из-за высоких процентных ставок. Так, на протяжении последнего десятилетия, отношение процентных ставок по потребительскому кредиту к депозитам варьировалось в диапазоне от 2.5 до 3.5. С одной стороны, домашние хозяйства с высокими доходами предъявляют спрос на кредит. Рост их спроса на потребительский кредит отражает формирование «среднего слоя». Домашние хозяйства, относящиеся к «среднему слою», управляют динамикой своих расходов, используя потребительский кредит, и соизмеряют свой спрос с величиной процентной ставки на кредит. С другой стороны, потребительский кредит в России выполнял функцию социальной адаптации. Более половины по суммарному объему выданных кредитов приходится на низкодоходные домашние хозяйства, которые предъявляют спрос на кредит в сложных жизненных обстоятельствах в независимости от величины процентной ставки. Такая структура заемщиков повышает риски неисполнения обязательств заемщиком перед банком по погашению кредита. Еще в 2019г министр экономического развития М.С. Орешкин обратил внимание на риски формирования закредитованности населения. Такая ситуация может превратиться в финансовую пирамиду, а заемщики в среднесрочной перспективе не смогут обслуживать ранее взятые потребительские кредиты, что породит кризис банковской системы.

Пандемия COVID-19 оказала негативное влияние на экономическое положения домашних хозяйств и осложнила состояние рынка потребительского кредита. Наложенные на Россию

в 2022г санкции были направлены на вызов социальной напряженности и снижение уровня жизни населения за счет кризиса банковской системы и инфляции. Правительство принимает меры, чтобы смягчить последствия введенных санкций путем осуществления финансовой поддержки домашних хозяйств, компенсируя потери в реальных располагаемых доходах в результате роста цен на потребительские товары и услуги. Существуют два канала социальной поддержки населения: прямые трансферты из бюджета и потребительский кредит. Вопрос о том, как на потребительский кредит воздействуют те или иные меры необходимо решать с учетом косвенных последствий. Адекватным инструментом для анализа возможных управленческих решений органов власти являются математические модели.

1.1 Моделирование экономического поведения репрезентативного рационального домашнего хозяйства

Моделирование экономического поведения социального слоя домашних хозяйств восходит к модели Ф. Рамсея [100]. Будем использовать модель поведения репрезентативного домашнего хозяйства в форме задачи оптимального управления. Будем полагать, что доходы S_0 репрезентативного домашнего хозяйства растут с темпом $\gamma \in \mathbb{R}$, т.е. $S_0(t) = Se^{\gamma t}$, $S > 0$. Динамика ликвидных средств $M_0(t)$ домашнего хозяйства описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dM_0(t)}{dt} = S_0(t) - p(t)C(t) + H_L(t) - H_D(t), \quad (1.1.1)$$

где $C(t)$ — осуществляемые расходы домашним хозяйством, $p(t)$ — индекс потребительских цен, $p(t) = p_0 e^{jt}$, $p_0 > 0$, j — ожидаемый домашним хозяйством темп роста цен. Функции $H_L(t)$ и $H_D(t)$ характеризуют взаимодействие домашнего хозяйства с рынками потребительского кредитования и сбережений в форме депозитов соответственно. Если функция $H_L(t) > 0$, то домашнее хозяйство осуществляет займ по потребительскому кредиту у коммерческого банка. Если $H_L(t) < 0$, то домашнее хозяйство осуществляет платеж по кредитной задолженности. Аналогично, если $H_D(t) > 0$, то домашнее хозяйство увеличивает депозитарный счет. Если $H_D(t) < 0$, то происходит снятие ликвидных средств с депозитарного счета. Обозначим $L(t) \geq 0$ — счет кредитной задолженности, $D(t) \geq 0$ — сбережения в форме депозитов¹. Изменение кредитной задолженности описывается уравнением

$$\frac{dL(t)}{dt} = H_L(t) + r_L L(t), \quad (1.1.2)$$

¹Формально, если счет кредитной задолженности $L < 0$, то кредит можно использовать как депозитарный вклад под высокий процент. Аналогично, если не потребовать $D(t) \geq 0$, то при $D < 0$ депозит можно использовать как потребительский кредит с низкой процентной ставкой. такая ситуация является нереалистичной и не изучается в диссертационной работе.

где r_L — процентная ставка по потребительскому кредиту. Изменение сбережений в форме депозитов описывается уравнением

$$\frac{dD(t)}{dt} = H_D(t) + r_D D(t), \quad (1.1.3)$$

где r_D — процентная ставка по депозитам.

Отсутствие арбитража на рынке потребительского кредита и сбережений предполагает, что $r_L > r_D > 0$. Запас ликвидных средств $M_0(t)$, необходимый домашнему хозяйству для осуществления потребительских расходов $p(t)C(t)$, моделируется законом Фишера $M_0(t) = \theta p(t)C(t)$, где $\frac{1}{\theta} > 0$ — скорость обращения денег на рынке потребительских расходов. Такой подход был предложен в [61] и в дальнейшем использовался в [31], [11]. Для дальнейшего изложения удобно ввести величину, характеризующую финансовое состояние домашнего хозяйства $X(t) = M_0(t) + D(t) - L(t)$. Из рациональности поведения домашнего хозяйства следует, что оно не осуществляет займы по потребительскому кредиту и не сберегает в форме депозитов одновременно, поэтому $L(t) = (M_0(t) - X(t))_+$, $D(t) = (X(t) - M_0(t))_+$, где $(a)_+ = \max\{a, 0\}$, $\forall a \in \mathbb{R}$. В силу уравнений (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3), динамика финансового состояния домашнего хозяйства описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dX}{dt} = S - \frac{1}{\theta} M_0 - r_L (M_0 - X)_+ + r_D (X - M_0)_+,$$

с начальным условием

$$X(0) = x_0.$$

Домашнее хозяйство стремится максимизировать дисконтированное потребление с коэффициентом дисконтирования $\delta_0 > 0$ и постоянным отвращением к риску $\rho > 0$ на временном интервале $[0, T]$, управляя потребительскими расходами, т.е.

$$\int_0^T \frac{(C(t))^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-\delta_0 t} dt \rightarrow \max_{C \geq 0}.$$

В данной работе мы полагаем, что показатель отвращения к риску ρ положителен и не ограничен сверху. Мотивировкой данного предположения являются материалы исследований, опубликованные в работе [16], в которой были идентифицированы социальные слои населения России с постоянным отвращением к риску из диапазона (4, 6).

Замечание 1. *Предельный случай $\rho = 1$ основан на том, что предел $\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{C^{1-\rho} - 1}{1-\rho} = \ln C$.*

Этому пределу соответствует функционал $\int_0^T \ln C e^{-\delta t} dt \rightarrow \max_{C \geq 0}$.

Будем говорить, что финансовое состояние $X(t)$ является ликвидным, если существует управление $M_0(t)$, обеспечивающее выполнение условия $X(T) \geq 0$. Иными словами, к

конечному моменту времени домашнее хозяйство должно расплатиться со своими кредитами. Пусть $x(t) = X(t)e^{-\gamma t}$, $M(t) = M_0(t)e^{-\gamma t}$, $\delta = \delta_0 + (1 - \rho)j$. Также, предположим, что $r_L > r_D > (\gamma)_+$, $\delta > ((1 - \rho)r_L)_+$. Учитывая связь потребительских расходов с ликвидными средствами, задача оптимального управления на конечном временном горизонте формулируется в следующем виде

$$\int_0^T \frac{M^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-(\delta-(1-\rho)\gamma)t} dt \rightarrow \max_M, \quad (1.1.4)$$

$$\frac{dx}{dt} = S - \gamma x - \frac{1}{\theta} M - r_L (M - x)_+ + r_D (x - M)_+, \quad (1.1.5)$$

$$x(0) = x_0, x(T) \geq 0, \quad (1.1.6)$$

$$M(t) \geq 0. \quad (1.1.7)$$

Теорема 1. Пусть $S + (r_L - \gamma)x_0 > 0$, $T > \left(\frac{1}{r_L} \ln \left(\frac{S}{S + (r_L - \gamma)x_0} \right) \right)_+$. Тогда задача оптимального управления (1.1.4), (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7) имеет решение.

Доказательство. Пусть $x_0 < 0$. При выполнении условия $S + (r_L - \gamma)x_0 > 0$, а также $T > \left(\frac{1}{r_L} \ln \left(\frac{S}{S + (r_L - \gamma)x_0} \right) \right)_+$ управление $M(t) \equiv 0$ порождает в силу решения задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = S - \gamma x - r_L(-x)_+, \quad x(0) = x_0$$

траекторию $x(t)$, удовлетворяющую всем ограничениям задачи оптимального управления. Из ограничений (1.1.5), (1.1.7) задачи оптимального управления следует, что

$$\frac{dx}{dt} \leq S + (r_L - \gamma)x, \quad x(0) = x_0.$$

По неравенству Гронуолла имеем оценку

$$x(t) \leq -\frac{S}{r_L - \gamma} + \left(x_0 + \frac{S}{r_L - \gamma} \right) e^{(r_L - \gamma)t} \leq \left((x_0)_+ + \frac{S}{r_L - \gamma} \right) e^{(r_L - \gamma)T}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Откуда получаем оценку

$$x(T) - x_0 \leq ST + ((r_D - \gamma)T(x_0)_+ + ST) e^{(r_L - \gamma)T} - \frac{1}{\theta} \int_0^T M(t) dt.$$

Поскольку $x(T) \geq 0$, получаем, что

$$\frac{1}{\theta} \int_0^T M(t) dt \leq (x_0)_+ + ST + ((r_L - \gamma)T(x_0)_+ + ST) e^{(r_L - \gamma)T}.$$

Случай $x_0 \geq 0$ приводит к аналогичным оценкам с точностью до процентной ставки.

Таким образом, в силу выполнения условия $x(T) \geq 0$, допустимые управления равномерно ограничены в норме пространства L_1 . Существует максимизирующая последовательность $\{M_i(t) | i = 1, 2, \dots\}$ допустимых управлений

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_0^T \frac{(M_i(t))^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-(\delta-(1-\rho)\gamma)t} dt = A.$$

По теореме Комлоша (см. [79]) из ограниченной в норме пространства L_1 последовательности функций $\{M_i(t) | i = 1, 2, \dots\}$ можно выделить подпоследовательность $\{M_{i_n}(t) | n = 1, 2, \dots\}$, средние по Чезаро которой сходятся почти всюду на отрезке $[0, T]$ к функции $M_{\text{opt}}(t)$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) = M_{\text{opt}}(t) \quad \text{для почти всех } t \in [0, T].$$

Поскольку функция $\frac{M^{1-\rho}}{1-\rho}$ при $\rho > 0$ вогнута по M на $[0, +\infty)^1$, имеем, что

$$\frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t)\right)^{1-\rho}}{1-\rho} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(M_{i_k}(t))^{1-\rho}}{1-\rho}$$

и, значит, справедливо неравенство

$$\int_0^T \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t)\right)^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-(\delta-(1-\rho)\gamma)t} dt \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_0^T \frac{(M_{i_k}(t))^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-(\delta-(1-\rho)\gamma)t} dt.$$

Откуда получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t)\right)^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-(\delta-(1-\rho)\gamma)t} dt = A.$$

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\int_0^T \frac{(M_{\text{opt}}(t))^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-(\delta-(1-\rho)\gamma)t} dt = A.$$

Поскольку $M_{i_k}(t) \geq 0$, то, без ограничения общности, можно считать, что $M_{\text{opt}}(t) \geq 0$.

Определим фазовую траекторию $\{x_{\text{opt}}(t) | t \in [0, T]\}$, соответствующую управлению

¹При $\rho = 1$ см. Замечание 1.

$\{M_{\text{opt}}(t) | t \in [0, T]\} \geq 0$, как решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = S - \gamma x - \frac{1}{\theta} M_{\text{opt}}(t) + r_D (x - M_{\text{opt}}(t))_+ - r_L (M_{\text{opt}}(t) - x)_+, \quad x(0) = x_0.$$

Обозначим через $x_k(t)$, $t \in [0, T]$ решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = S - \gamma x - \frac{1}{\theta} M_{i_k}(t) + r_D (x - M_{i_k}(t))_+ - r_L (M_{i_k}(t) - x)_+, \quad x(0) = x_0.$$

По построению имеем $x_k(T) \geq 0$. Положим $\tilde{x}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t)$. Очевидно, что $\tilde{x}_n(T) \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_n(t)}{dt} &= S - \gamma \tilde{x}_n(t) - \frac{1}{\theta n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) + \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (r_D (x_k(t) - M_{i_k}(t))_+ - r_L (M_{i_k}(t) - x_k(t))_+), \quad \tilde{x}_n(0) = x_0. \end{aligned}$$

Поскольку $r_L > r_D$, функция $r_D(y)_+ - r_L(-y)_+$ вогнута по переменной y и, значит, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_n(t)}{dt} &\leq S - \gamma \tilde{x}_n(t) - \frac{1}{\theta n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) + \\ &\quad + \left(r_D \left(\tilde{x}_n(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) \right)_+ - r_L \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) - \tilde{x}_n(t) \right)_+ \right). \end{aligned}$$

Определим $\hat{x}_n(t)$, $t \in [0, T]$ как решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_n(t)}{dt} &= S - \gamma \hat{x}_n(t) - \frac{1}{\theta n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) + \\ &\quad + \left(r_D \left(\hat{x}_n(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) \right)_+ - r_L \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) - \hat{x}_n(t) \right)_+ \right), \quad \hat{x}_n(0) = x_0. \end{aligned}$$

Поскольку $r_L > r_D > \gamma$, функция

$$S - \gamma z - \frac{1}{\theta n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) + \left(r_D \left(z - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) \right)_+ - r_L \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) - z \right)_+ \right)$$

монотонно возрастает по переменной z . Откуда следует, что $\tilde{x}_n(t) \leq \hat{x}_n(t)$ и, значит, $\hat{x}_n(T) \geq \tilde{x}_n(T) \geq 0$. Таким образом, управление $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) \mid t \in [0, T] \right\}$ и соответствующая ему фазовая траектория $\tilde{x}_n(t)$ удовлетворяют всем ограничениям (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7) задачи оптимального управления.

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \left| M_{\text{opt}}(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) \right| dt = 0.$$

Откуда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое, что при $n \geq n_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\int_0^T \left| M_{\text{opt}}(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(t) \right| dt < \varepsilon.$$

Заметим, что функция $f(z, u) = S - \gamma z - \frac{1}{\theta} u + r_D(z - u)_+ - r_L(u - z)_+$ удовлетворяет условию Липшица, т.е. существует постоянная $C > 0$, такая, что для любых z, u, w, v справедливо неравенство

$$|f(z, u) - f(w, v)| \leq C(|z - w| + |u - v|).$$

Поскольку

$$\hat{x}_n(t) = x_0 + \int_0^t f\left(\hat{x}_n(\tau), \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(\tau)\right) d\tau,$$

$$x_{\text{opt}}(t) = x_0 + \int_0^t f(x_{\text{opt}}(\tau), M_{\text{opt}}(\tau)) d\tau,$$

при $t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\hat{x}_n(t) - x_{\text{opt}}(t)| &\leq \int_0^t \left| f\left(\hat{x}_n(\tau), \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(\tau)\right) - f(x_{\text{opt}}(\tau), M_{\text{opt}}(\tau)) \right| d\tau \leq \\ &\leq C \left(\int_0^t |\hat{x}_n(\tau) - x_{\text{opt}}(\tau)| d\tau + \int_0^t \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_{i_k}(\tau) - M_{\text{opt}}(\tau) \right| d\tau \right). \end{aligned}$$

Откуда получаем, что при $t \in [0, T]$, $n \geq n_\varepsilon$ справедливо неравенство (см. [17], теорема 2.1, с.17)

$$|\hat{x}_n(t) - x_{\text{opt}}(t)| \leq \varepsilon e^{Ct}.$$

Откуда следует, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{x}_n(T) = x_{\text{opt}}(T)$ и, значит, $x_{\text{opt}}(T) \geq 0$. Таким образом, управление $\{M_{\text{opt}}(t) | t \in [0, T]\} \geq 0$ и фазовая траектория $\{x_{\text{opt}}(t) | t \in [0, T]\} \geq 0$ являются решением задачи оптимального управления (1.1.4), (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7). Теорема 1 доказана. \square

Замечание 2. Чтобы обеспечить условие $x(T) \geq 0$, необходимо выполнение неравенства

$$x > -\frac{S}{r_L - \gamma}. \quad (1.1.8)$$

Отметим, что данное неравенство не зависит от времени. При $T \rightarrow +\infty$ данное условие является не только необходимым, но и достаточным. В случае, если неравенство (1.1.8) нарушается, то домашнее хозяйство не имеет возможности расплатиться с кредитами при сохранении текущей экономической конъюнктуры и образуется финансовая пирамида.

Негладкий анализ в теории оптимального управления исследовался в работах [15], [58], [26]. В силу негладкости правой части дифференциального уравнения (1.1.5) применяется принцип максимума Понтрягина в форме Ф. Клакра [15]. С его помощью выделяются три режима экономического поведения домашнего хозяйства: заимствования, не взаимодействия с банковской системой и сбережения в форме депозитов в зависимости от финансового состояния домашнего хозяйства и параметров экономической конъюнктуры. Результаты сформулированы в Теореме 2.

Теорема 2. Если $\{x(t), M(t) | t \in [0, T]\}$ решение задачи оптимального управления (1.1.4), (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7), то существует абсолютно непрерывная функция $\{\varphi(t) | t \in [0, T]\}$, такая что

1. Если

$$x^\rho(t)\varphi(t) < \frac{\theta}{1 + \theta r_L},$$

то оптимальное управление

$$M(t) = \left[\frac{\theta}{(1 + \theta r_L)\varphi(t)} \right]^{\frac{1}{\rho}}, \quad (1.1.9)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = S + (r_L - \gamma)x - \frac{1 + \theta r_L}{\theta} \left(\frac{\theta}{(1 + \theta r_L)\varphi} \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad (1.1.10)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\delta + \rho\gamma - r_L)\varphi. \quad (1.1.11)$$

2. Если

$$\frac{\theta}{1 + \theta r_L} < x^\rho(t)\varphi(t) < \frac{\theta}{1 + \theta r_D},$$

то оптимальное управление

$$M(t) = x(t), \quad (1.1.12)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = S - \frac{1 + \theta\gamma}{\theta}x, \quad (1.1.13)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\delta + \rho\gamma - u(t))\varphi, \quad r_D \leq u(t) \leq r_L. \quad (1.1.14)$$

3. Если

$$x^\rho(t)\varphi(t) > \frac{\theta}{1 + \theta r_D},$$

то оптимальное управление

$$M(t) = \left[\frac{\theta}{(1 + \theta r_D) \varphi(t)} \right]^{\frac{1}{\rho}}, \quad (1.1.15)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = S + (r_D - \gamma)x - \frac{1 + \theta r_D}{\theta} \left(\frac{\theta}{(1 + \theta r_D) \varphi} \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad (1.1.16)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\delta + \rho\gamma - r_D) \varphi. \quad (1.1.17)$$

Кроме того, выполняется условие трансверсальности

$$x(T) = 0.$$

Доказательство. Оптимальное решение задачи оптимального управления должно удовлетворять необходимым условиям принципа максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка (см. [15], с.115), поскольку функция в правой части ограничения (1.1.5) является негладкой.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H(t, x, \psi) = \sup_{M \geq 0} \left\{ \frac{M^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-(\delta-(1-\rho)\gamma)t} + \psi \left(S - \gamma x - \frac{1}{\theta} M + r_D(x - M)_+ - r_L(M - x)_+ \right) \right\}.$$

Пусть сопряженная функция $\psi = e^{-(\delta-(1-\rho)\gamma)t} \varphi$. Тогда оптимальное управление определяется соотношением

$$0 \in M^{-\rho} - \frac{1}{\theta} + \partial_M [\varphi (r_D(x - M)_+ - r_L(M - x)_+)],$$

а сопряженная переменная удовлетворяет соотношениям

$$\frac{d\varphi}{dt} \in (\delta - (1 - \rho)\gamma) \varphi + \gamma \varphi - \partial_x [\varphi (r_D(x - M)_+ - r_L(M - x)_+)], \quad \varphi(T)x(T) = 0.$$

Для того, чтобы значение оптимального управления $M(t)$ было конечным, необходимо выполнение условия $\varphi(t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$. Следовательно, из условия трансверсальности следует условие $\varphi(T) = 0$. Вычисляя обобщенные градиенты ∂_M, ∂_x , получаем справедливость Теоремы 2. \square

Структуру оптимального управления удобно исследовать на плоскости (x, φ) . Режимы заимствования, автономный и сбережения разделены на плоскости (x, φ) двумя гиперболами: $\varphi_{r_L}(x) = \frac{\theta}{1+\theta r_L} x^{-\rho}$ и $\varphi_{r_D}(x) = \frac{\theta}{1+\theta r_D} x^{-\rho}$. Легко видеть, что $\varphi_{r_D}(x) > \varphi_{r_L}(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \varphi_{r_L}(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \varphi_{r_D}(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_{r_L}(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_{r_D}(x) = 0$. Область за-

имствования определяется множеством

$$\Omega_B : \left\{ (x, \varphi) : 0 \geq x > -\frac{S}{r_L - \gamma}, \varphi > 0 \right\} \cup \left\{ (x, \varphi) : x > 0, 0 < \varphi < \varphi_{r_L}(x) \right\}.$$

Область

$$\Omega_A : \left\{ (x, \varphi) : x > 0, \varphi_{r_L}(x) < \varphi < \varphi_{r_D}(x) \right\}$$

соответствует автономному поведению домашнего хозяйства. Область сбережений определяется множеством

$$\Omega_S : \left\{ (x, \varphi) : x > 0, \varphi > \varphi_{r_D}(x) \right\}.$$

Утверждение 1. На плоскости (x, φ) имеется траектория $\varphi_z(x)$, для которой выполнено условие $\frac{dx}{dt} = 0$. Она имеет вид

$$\varphi_z(x) = \begin{cases} \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L} \right)^{1-\rho} (S + (r_L - \gamma)x)^{-\rho}, & \text{если } x \leq \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}, 1 + \gamma\theta > 0, \\ \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_D} \right)^{1-\rho} (S + (r_D - \gamma)x)^{-\rho}, & \text{если } x > \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}, 1 + \gamma\theta > 0, \\ \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L} \right)^{1-\rho} (S + (r_L - \gamma)x)^{-\rho}, & \text{если } 1 + \gamma\theta < 0. \end{cases} \quad (1.1.18)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $1 + \gamma\theta > 0$. Приравняем правую часть дифференциального уравнения (1.1.10) к нулю и выразим сопряженную переменную φ . Получим, что в области заимствования, траектория, удовлетворяющая состоянию $\frac{dx}{dt} = 0$ определяется функцией

$$\left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L} \right)^{1-\rho} (S + (r_L - \gamma)x)^{-\rho}. \quad (1.1.19)$$

В автономном режиме условие $\frac{dx}{dt} = 0$ реализуется в точке $x = \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$ (см. (1.1.13)). В области сбережения условие $\frac{dx}{dt} = 0$ определяется функцией

$$\left(\frac{\theta}{1 + \theta r_D} \right)^{1-\rho} (S + (r_D - \gamma)x)^{-\rho}. \quad (1.1.20)$$

Легко убедиться, что точка $x = \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$ является точкой пересечения функции (1.1.19) с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$, а также функции (1.1.20) с гиперболой $\varphi_{r_D}(x)$. Таким образом, мы получаем выражение (1.1.18).

Рассмотрим случай $1 + \gamma\theta < 0$. Покажем, что функция (1.1.19) лежит ниже гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, т.е. $\varphi(x) < \varphi_{r_L}(x)$ для любого $x > 0$:

$$\left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L} \right)^{1-\rho} (S + (r_L - \gamma)x)^{-\rho} < \frac{\theta}{1 + \theta r_L} x^{-\rho}.$$

Разделим обе части на положительную величину $\frac{\theta}{1+\theta r_L}$ и возведем в отрицательную степень $-\frac{1}{\rho}$. Получим эквивалентное неравенство

$$\frac{\theta}{1+\theta r_L} (S + (r_L - \gamma)x) > x.$$

Перенесем x в левую часть. После преобразований получим

$$S\theta - (1 + \gamma\theta)x > 0.$$

Так как $1 + \gamma\theta < 0$, $x > 0$, то левая часть больше правой. Значит, $\varphi_z(x) < \varphi_{r_L}(x)$ при любом $x > 0$. Утверждение 1 доказано. \square

Отметим, что в случае $1 + \gamma\theta > 0$ траектория $\varphi_z(x)$ терпит разрыв первого рода и пересекает гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ и $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x = \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}$. Траектория $\varphi_z(x)$ обладает свойствами

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{S}{r_L - \gamma} + 0} \varphi_z(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_z(x) = 0.$$

В классической модели Рамсея рассматривается совершенный рынок потребительского кредита, когда процентные ставки по кредитам и депозитам совпадают ($r_L = r_D$). В этом случае не возникает дополнительного управления $u(t) \in [r_D, r_L]$ в правой части дифференциального уравнения (1.1.14), задача оптимального управления становится гладкой, для решения которой могут быть применены стандартные методы решения [7], [22]. Мы изучаем случай несовершенного рынка, когда ставка по потребительскому кредиту превышает ставку по депозитам. Согласно принципу максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка [15], из-за негладкости дифференциального уравнения (1.1.5), возникает дополнительное управление в дифференциальном уравнении на сопряженную переменную (1.1.14). Выбор дополнительного управления $u(t)$ в правой части дифференциального уравнения (1.1.14), который максимизирует функционал исходной задачи (1.1.4) сформулирован в Утверждении 2.

Утверждение 2. *Максимальное значение функционала (1.1.4) достигается при $u(t) \equiv r_D$ в дифференциальном уравнении (1.1.14) в области автономного режима.*

Доказательство. На плоскости (x, φ) движение траектории $\varphi(x)$ описывается дифференциальными уравнениями (1.1.10), (1.1.11), (1.1.13), (1.1.14), (1.1.16), (1.1.17). Зафиксируем начальное значение точки $x(0) = x_0$. Будем двигаться в обратном времени до пересечения оптимальной траектории $\varphi(x)$ с одной из гипербол $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ ¹.

Без ограничения общности, будем считать, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересечет гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ из режима заимствования (случай, когда оптимальная траектория $\varphi(x)$

¹Отметим, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ может не пересекать гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$. В этом случае траектория $\varphi(x)$ лежит в области Ω_B при любых допустимых значениях $x > -\frac{S}{r_L - \gamma}$, и выбор дополнительного управления $u(t) \in [r_D, r_L]$ в правой части дифференциального уравнения (1.1.14) не влияет на значение функционала (1.1.4)

пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ из области сбережения рассматривается аналогично). Обозначим точку пересечения оптимальной траектории $\varphi(x)$ с нижней гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ точкой A . Дальнейшее движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ из точки A происходит в автономной области и зависит от выбора функции $u(t)$ в дифференциальном уравнении (1.1.14). Отметим, что движение траектории вдоль оси Ox не зависит от сопряженной функции $\varphi(t)$, таким образом, не зависит от выбора функции $u(t)$ в автономном режиме (1.1.13). Рассмотрим значения функций $\varphi(t)$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (1.1.14), при двух управлениях $u(t)$. Обозначим их через $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Положим $u_1(t) \equiv r_D$, $u_2(t) = r_D + \hat{u}(t)$, где $\hat{u}(t) \in [0, r_L - r_D]$. Пусть $\varphi_1(t)$ соответствует значению $u_1(t)$, а $\varphi_2(t)$ соответствует значению $u_2(t)$. Согласно принципу максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка, обе траектории $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ образуют экстремали. Выпишем решение дифференциального уравнения (1.1.14) для функции $\varphi_2(t)$ в обратном времени:

$$\varphi_2(t) = \varphi_0 \exp \left(\int_{t_0}^t [\delta + \rho\gamma - r_D - \hat{u}(\tau)] d\tau \right),$$

где t_0 соответствует моменту времени, когда оптимальная траектория $\varphi(x)$ находится в точке A . Заметим, что

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \cdot \exp \left(- \int_{t_0}^t \hat{u}(\tau) d\tau \right).$$

Множитель $\exp \left(- \int_{t_0}^t \hat{u}(\tau) d\tau \right) \geq 1$, т.к. $t < t_0$, $\hat{u}(\tau) \geq 0$. Таким образом, $\varphi_2(t) \geq \varphi_1(t)$. Причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $u_1(t) \equiv u_2(t)$, т.е. $\hat{u}(\tau) \equiv 0$. Рассмотрим $\hat{u}(\tau) \not\equiv 0$. Тогда существует момент времени \hat{t} такой, что для любого $t < \hat{t}$ функция $\varphi_2(t) > \varphi_1(t)$. Обозначим траекторию $\varphi_1(x)$, которая удовлетворяет дифференциальным уравнениям (1.1.13), (1.1.14) при $u(t) \equiv u_1(t)$, траекторию $\varphi_2(x)$, которая удовлетворяет дифференциальным уравнениям (1.1.13), (1.1.14) при $u(t) \equiv u_2(t)$. Пусть траектория $\varphi_1(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке C , а траектория $\varphi_2(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке B . Так как $\varphi_2(t) > \varphi_1(t)$, то точка C лежит правее точки B на оси Ox . Пусть точка B имеет координаты $(x_B, \varphi_{r_D}^B)$, а точка C имеет координаты $(x_C, \varphi_{r_D}^C)$. Зафиксируем $\hat{x} \in (x_B, x_C)$. Траектория $\varphi_1(x)$ при $x = \hat{x}$ находится в автономной области, в то время как траектория $\varphi_2(x)$ при $x = \hat{x}$ находится в области сбережения. Так как в автономной области $M = x$, а в области сбережения $M < x$, то значение функционала (1.1.4) больше при выборе оптимальной траектории $\varphi_1(x)$. В силу произвольного выбора функции $\varphi_2(t)$, удовлетворяющего допустимому множеству дополнительного управления $u(t)$ в автономной области, максимальное значение функционала (1.1.4) будет достигаться при $u(t) \equiv r_D$. На Рис.1.2 отображена область $ABCD$, содержащая всевозможные допустимые управления $u(t)$ в правой части дифференциального уравнения (1.1.14).

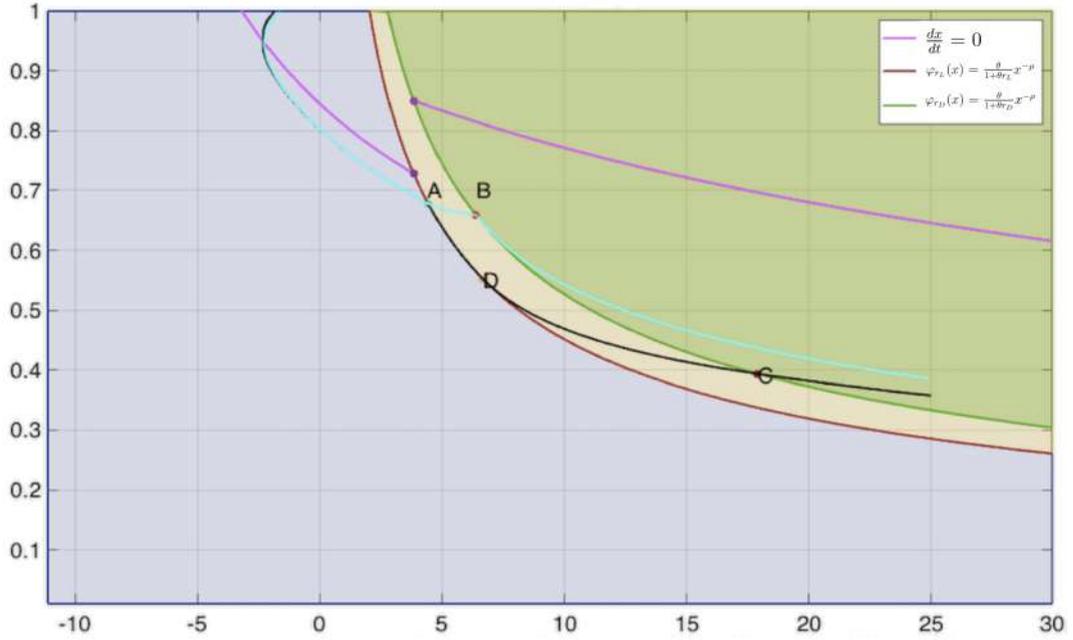


Рис. 1.2: Движение траекторий $\varphi(x)$ в зависимости от выбора функции $u(t)$. Черная траектория соответствует выбору функции $u(t) \equiv r_D$, бирюзовая траектория соответствует выбору функции $u(t) \equiv r_L$. Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ отображены красным и зеленым цветами соответственно. Кривая $\varphi_z(x)$ отображена розовым цветом.

Утверждение 2 доказано. □

Положим

$$x_{c1} = \begin{cases} \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}, & \text{если } \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D, \\ +\infty, & \text{если } r_D \leq \delta - \frac{\rho}{\theta}. \end{cases}$$

Утверждение 3. Если $r_L > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $\hat{x} \geq \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, а на полуинтервале $x \in [\hat{x}, x_{c1}]$ $\varphi(x)$ совпадает с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$. При этом дополнительное управление в правой части дифференциального уравнения (1.1.14) определяется выражением

$$u(x) = \rho \left(\frac{S}{x} - \frac{1 + \gamma\theta}{\theta} \right) + \delta + \rho\gamma. \quad (1.1.21)$$

Доказательство. Без ограничения общности, рассмотрим случай, когда траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ при движении в обратном времени из области заимствования, $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L$, $\varphi(x) < \varphi_z(x)$. Остальные случаи (траектория $\varphi(x)$ лежит выше траектории $\varphi_z(x)$ и пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ при движении в обратном времени из области заимствования, траектория $\varphi(x)$ лежит выше траектории $\varphi_z(x)$ и пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ при движении в прямом времени из области заимствования) рассматриваются аналогично. Из условий следует, что в областях заимствования и автономного поведения $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{d\varphi}{dt} > 0$. Движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ в области заимствования удовлетворяет дифференциальным

уравнениям (1.1.10), (1.1.11), а в области автономного поведения — дифференциальным уравнениям (1.1.13), (1.1.14). Изучим движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ в обратном времени. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ попадает на гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $A = \left(\hat{x}, \frac{\theta}{1+\theta r_L} \hat{x}^{-\rho}\right)$. Подставляя координаты точки A в правые части дифференциальных уравнений (1.1.10), (1.1.11), найдем вектор направления движения оптимальной траектории $\varphi(x)$ в области заимствования на границе $\varphi_{r_L}(x)$:

$$\vec{V}_B = \left\{ S - \frac{1+\gamma\theta}{\theta} \hat{x}, (\delta + \rho\gamma - r_L) \frac{\theta}{1+\theta r_L} \hat{x}^{-\rho} \right\}.$$

Вектор направления движения оптимальной траектории $\varphi(x)$ в автономной области на границе $\varphi_{r_L}(x)$:

$$\vec{V}_A = \left\{ S - \frac{1+\gamma\theta}{\theta} \hat{x}, (\delta + \rho\gamma - r_D) \frac{\theta}{1+\theta r_L} \hat{x}^{-\rho} \right\}.$$

Очевидно, что $\vec{V}_A > \vec{V}_B$. Покажем, что уравнение касательной к гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ лежит между векторами \vec{V}_A и \vec{V}_B . В случае $r_L < \delta + \rho\gamma$ вектор \vec{V}_B лежит в третьей четверти, таким образом, расположен ниже касательной к гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x = \hat{x}$. Пусть $\delta + \rho\gamma < r_L$. Уравнение касательной к гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ определяется выражением

$$\varphi_{\tan}(x) = \frac{\theta}{1+\theta r_L} \hat{x}^{-\rho} \cdot \left[-\rho \cdot \left(\frac{x}{\hat{x}} - 1 \right) + 1 \right].$$

Для начала покажем, что касательная $\varphi_{\tan}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ лежит выше вектора \vec{V}_B . Для этого достаточно показать, что разность тангенсов углов наклона вектора \vec{V}_B и касательной $\varphi_{\tan}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ меньше нуля. Обозначим эту разность через $f(\hat{x})$:

$$f(\hat{x}) = -\frac{\theta}{1+\theta r_L} \hat{x}^{-\rho-1} \left[\frac{\delta + \rho\gamma - r_L}{\frac{S}{\hat{x}} - \frac{1+\gamma\theta}{\theta}} + \rho \right].$$

Функция $f(\hat{x})$ обращается в ноль при $\hat{x}^* = \frac{S\rho}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. При $\hat{x} > \frac{S\rho}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$ функция $f(\hat{x}) < 0$. Таким образом, мы показали, что касательная $\varphi_{\tan}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ лежит выше вектора \vec{V}_B .

В случае $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D$, аналогично можно показать, что при $\frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}} \leq \hat{x} < \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$ касательная $\varphi_{\tan}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ лежит ниже вектора \vec{V}_A . С одной стороны, оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ из области заимствования и попадает в автономную область. С другой стороны, попадая в автономную область, оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ и попадает обратно в область заимствования. Таким образом, движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ будет проходить по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ на отрезке $x \in \left[\hat{x}, \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} \right]$. Вычислим дополнительное управление в правой части дифференциального уравнения (1.1.14) на гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$, удовлетворяющее движению оптимальной траекто-

рии. Гипербола $\varphi_{r_L}(x)$ задается уравнением

$$x^\rho \varphi = C, \quad (1.1.22)$$

где $C = \frac{\theta}{1+\theta r_L}$ — константа. Продифференцируем уравнение (1.1.22) в силу системы (1.1.13), (1.1.14). Получим

$$\rho x^{\rho-1} \left[S - \frac{1+\gamma\theta}{\theta} x \right] \varphi + x^\rho [\delta + \rho\gamma - u] \varphi = 0.$$

Учитывая, что $x > 0$, $\varphi > 0$, получаем управление на гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$, которое задается уравнением (1.1.21). Покажем, что для любого $x \in \left[\hat{x}, \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} \right]$ управление (1.1.21) не выходит за границы $[r_D, r_L]$. Легко видеть, что функция $u(x)$ монотонно убывает по переменной x . Подставляя левое граничное значение $\hat{x}_L = \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, получаем, что $u(\hat{x}_L) = r_L$. Подставляя правое граничное значение $\hat{x}_R = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, получаем, что $u(\hat{x}_R) = r_D$.

Рассмотрим случай $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta}$. Покажем, что вектор \vec{V}_A лежит выше касательной $\varphi_{\tan}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ для любого $\hat{x} \geq \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Обозначим через

$$g(\hat{x}) = \frac{\theta}{1 + \theta r_L} \hat{x}^{-\rho-1} \left[\frac{\delta + \rho\gamma - r_D}{\frac{S}{\hat{x}} - \frac{1+\gamma\theta}{\theta}} + \rho \right]$$

разность тангенсов углов наклона вектора \vec{V}_A и касательной $\varphi_{\tan}(x)$ в точке $x = \hat{x}$. Функцию $g(\hat{x})$ можно представить в виде произведения двух функций: $g(\hat{x}) = g_1(\hat{x}) \cdot g_2(\hat{x})$, где

$$g_1(\hat{x}) = \frac{\theta}{1 + \theta r_L} \hat{x}^{-\rho-1},$$

$$g_2(\hat{x}) = \frac{\delta + \rho\gamma - r_D}{\frac{S}{\hat{x}} - \frac{1+\gamma\theta}{\theta}} + \rho.$$

Отметим, что $g_1(\hat{x}) > 0$ для любого $\hat{x} > 0$, а производная $\frac{dg_2(\hat{x})}{d\hat{x}} > 0$:

$$\frac{dg_2(\hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{S\theta^2 (\delta + \rho\gamma - r_D)}{(S\theta - (1 + \gamma\theta)^2) \hat{x}^2} > 0.$$

Функция $g_2(\hat{x})$ монотонно возрастает, имеет единственный отрицательный корень $\hat{x}^* = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, значит, при $\hat{x} > 0$ функция $g(\hat{x}) > 0$. В рассматриваемом случае оптимальная траектория не сойдет с гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ при $x > \hat{x}$. Управление (1.1.21) остается допустимым: при $x \rightarrow +\infty$, $u(x) \rightarrow \delta - \frac{\rho}{\theta} > r_D$. Утверждение 3 доказано. \square

Из доказанного Утверждения можно сформулировать два Следствия, доказательства которых очевидны.

Следствие 1. *Особый режим движения оптимальной траектории $\varphi(x)$ по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ имеет место быть в случае, если $\varphi(x)$ входит в гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x \in$*

$\left[\frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}, \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} \right]$. Причем, если оптимальная траектория $\varphi(x)$ движется в попятном времени из области заимствования, то она касается гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Если оптимальная траектория $\varphi(x)$ движется в попятном времени из автономной области, то она касается гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x = \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$.

Следствие 2. Движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ возможно только на отрезке $x \in \left[\frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}, \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} \right]$. Причем, если $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ возможно только на множестве $x \in \left[\frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}, +\infty \right)$.

Утверждение 4. На гиперболе $\varphi_{r_D}(x)$ нет особого режима у оптимальной траектории $\varphi(x)$.

Доказательство. Пусть оптимальная траектория $\varphi(x)$ попадает на гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $A(\hat{x}, \hat{\varphi})$, причем $\hat{\varphi} = \frac{\theta}{1 + \theta r_D} \hat{x}^{-\rho}$. Подставляя эту точку в правую часть дифференциального уравнения (1.1.16), получаем, что в точке A скорость по фазовой координате x равна

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=\hat{x}, \varphi=\hat{\varphi}} = S - \frac{1 + \gamma\theta}{\theta} \hat{x},$$

что соответствует скорости по фазовой координате x в автономной области (1.1.13). Согласно Утверждению 2, в автономной области $u(t) \equiv r_D$ в правой части дифференциального уравнения (1.1.14). Таким образом, скорости по координате φ в автономной области и области сбережения совпадают. Мы получили, что при переходе из автономной области в область сбережения (и обратно) через гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ скорости координат x и φ траектории равны. Таким образом, траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке. Утверждение 4 доказано. \square

Обозначим через $y(\bar{x}, \beta)$ решение уравнения

$$\left[\frac{1 + \theta r_L}{1 + \theta r_D} \right]^{\frac{\beta}{\rho}} \cdot \frac{y(\bar{x}, \beta)}{\bar{x}} = \left[\left(y(\bar{x}, \beta) - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right) \left(\bar{x} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1 + \gamma\theta)\rho}}, \quad (1.1.23)$$

а через $M_r(\bar{x}, r)$ решение уравнения

$$x + \frac{S}{r - \gamma} = \frac{(1 + \theta r)\rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r)} M_r(\bar{x}, r) + \left[\frac{\bar{x}}{M_r(\bar{x}, r)} \right]^{\frac{\rho(r - \gamma)}{\delta + \rho\gamma - r}} \cdot \left[\frac{S}{r - \gamma} - \frac{r - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r} \bar{x} \right]. \quad (1.1.24)$$

Оптимальное управление M зависит от сопряженной переменной φ в режиме заимствования (1.1.9) и в режиме сбережения (1.1.11). На конечном временном промежутке $[0, T]$, решая дифференциальные уравнения (1.1.9), (1.1.10), (1.1.12), (1.1.13), (1.1.15), (1.1.16) в соответствии с начальным условием $x(0) = x_0$ и условием трансверсальности $x(T) = 0$, мы

получаем оптимальное управление $M(\varphi; T)$, где $\varphi = \varphi(t, x(t); T)$. Устремив $T \rightarrow +\infty$, можно получить предельную траекторию $\varphi(x)$. Подставляя ее в выражения для оптимального управления $M(\varphi)$, мы получим синтез оптимального управления $M(x)$. Синтез позволяет определить оптимальное управление в зависимости от фазовой координаты x и от параметров экономической конъюнктуры.

Переключение режимов (заимствования, автономного и сбережения) происходят в зависимости от соотношения величин r_L , r_D , $\delta - \frac{\rho}{\theta}$, $\delta + \rho\gamma$. Они определяют тип поведения домашнего хозяйства. Справедлива следующая Теорема, описывающая синтез оптимального управления при $T \rightarrow +\infty$.

Теорема 3. (Синтез в задаче оптимального управления).

1. Если $r_L < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то домашнее хозяйство находится в режиме заимствования.

Тип 1.1. Синтез оптимального управления определяется выражением

$$M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \frac{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)}{\rho(1 + \theta r_L)} \left(x + \frac{S}{r_L - \gamma} \right).$$

2. Если $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L$, то домашнее хозяйство находится либо в режиме заимствования, либо в автономном режиме.

Тип 2.1. Если $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L < \delta + \rho\gamma$, то синтез оптимального управления определяется выражением

$$M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \begin{cases} \frac{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)}{\rho(1 + \theta r_L)} \left(x + \frac{S}{r_L - \gamma} \right), & \text{если } x < x_{p1}, \\ x, & \text{если } x \geq x_{p1}, \end{cases}$$

где $x_{p1} = \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}$.

Тип 2.2. Если $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta} < \delta + \rho\gamma < r_L$ или $\max\{r_D, \delta + \rho\gamma\} < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L$, то синтез оптимального управления определяется выражением

$$M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \begin{cases} M_r(x_{p1}, r_L), & \text{если } x < x_{p1}, \\ x, & \text{если } x \geq x_{p1}, \end{cases}$$

где $x_{p1} = \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Более того, уравнение (1.1.24) имеет единственное решение $M_r(x_{p1}, r_L)$ на множестве $((x)_+, x_{p1})$.

3. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D$, то домашнее хозяйство находится в одном из трех режимов: заимствования, автономном или сбережения.

Тип 3.1. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D < r_L < \delta + \rho\gamma$, то синтез оптимального управления определяется выражением

$$M(x; S, r_L, r_D, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \begin{cases} \frac{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)}{\rho(1 + \theta r_L)} \left(x + \frac{S}{r_L - \gamma} \right), & \text{если } x < x_{p_1}, \\ x, & \text{если } x_{p_1} \leq x \leq x_{p_2}, \\ M_r(x_{p_2}, r_D), & \text{если } x > x_{p_2}, \end{cases}$$

где $x_{p_1} = \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}$, $x_{c_1} = \max \left\{ x_{p_1}, \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} \right\}$, $x_{p_2} = y(x_{c_1}, -1)$. Более того, уравнение (1.1.23) имеет единственное решение $y(x_{c_1}, -1)$ на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$, а уравнение (1.1.24) имеет единственное решение $M_r(x_{p_2}, r_D)$ на множестве (x_{p_2}, x) .

Тип 3.2. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D < \delta + \rho\gamma < r_L$, то синтез оптимального управления определяется выражением

$$M(x; S, r_L, r_D, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \begin{cases} M_r(x_{p_1}, r_L), & \text{если } x < x_{p_1}, \\ x, & \text{если } x_{p_1} \leq x \leq x_{p_2}, \\ M_r(x_{p_2}, r_D), & \text{если } x > x_{p_2}, \end{cases}$$

где $x_{p_1} = \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, $x_{c_1} = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, $x_{p_2} = y(x_{c_1}, -1)$. Более того, уравнение (1.1.23) имеет единственное решение $y(x_{c_1}, -1)$ на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$, уравнение (1.1.24) имеет единственное решение $M_r(x_{p_1}, r_L)$ на множестве $((x)_+, x_{p_1})$ и единственное решение $M_r(x_{p_2}, r_D)$ на множестве (x_{p_2}, x) .

Тип 3.3. Если $\max \left\{ \delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma \right\} < r_D$, то синтез оптимального управления определяется выражением

$$M(x; S, r_L, r_D, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \begin{cases} M_r(x_{p_1}, r_L), & \text{если } x < x_{p_1}, \\ x, & \text{если } x_{p_1} \leq x \leq x_{p_2}, \\ \frac{\theta(\delta - (1 - \rho)r_D)}{\rho(1 + \theta r_D)} \cdot \left(x + \frac{S}{r_D - \gamma} \right), & \text{если } x > x_{p_2}, \end{cases}$$

где $x_{p_2} = \frac{S}{r_D - \gamma} \cdot \frac{\delta - (1 - \rho)r_D}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, $x_{p_1} = \min \left\{ \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}, y(x_{p_2}, 1) \right\}$. Более того, уравнение (1.1.24) имеет единственное решение $M_r(x_{p_1}, r_L)$ на множестве $((x)_+, x_{p_1})$, а уравнение (1.1.23) имеет единственное решение $y(x_{p_2}, 1)$ на множестве $(0, x_{p_2})$.

Прежде чем приступить к доказательству Теоремы 3, сформулируем и докажем ряд вспомогательных Лемм.

Лемма 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, существует и единственен экстремум функции $f(x)$ на множестве (a, b) , то существует единственная точка $c \in (a, b)$: $f(c) = 0$.

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, точка экстремума является точкой максимума (случай, когда точка экстремума является точкой минимума, а также случай $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ доказываются аналогично). Пусть $d = \arg \max_{(a,b)} \{f(x)\}$. Тогда, на множестве $[a, d]$ функция $f(x)$ монотонно возрастает, а на множестве $(d, b]$ функция $f(x)$ монотонно убывает. Из монотонности следует, что $f(d) > f(b)$. Так как $f(b) > 0$, то на отрезке $[d, b]$ функция $f(x)$ не имеет корней. Функция $f(x)$ монотонна, на концах отрезка $[a, d]$ принимает значения разных знаков, поэтому существует единственная точка $c \in (a, b)$, которая является корнем функции $f(x)$. Лемма 1 доказана. \square

Лемма 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$, принимает значение $0 < f(a) \leq b - a$, а ее производная $\frac{df(x)}{dx} < -1$ на интервале (a, b) , то существует единственная точка $c \in [a, b]$: $f(c) = 0$.

Доказательство. Пусть $g(x) = -x + b$. Легко видеть, что функция $f(x) \leq g(x)$, причем равенство может достигаться только в точке $x = a$. В точке $x = b$ функция $g(b) = 0$, а так как $f(x) < g(x)$, $x \in (a, b]$, то $f(b) < 0$. Так как производная функции имеет определенный знак на интервале (a, b) , то функция $f(x)$ является монотонной. На концах отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, поэтому существует единственная точка $c \in (a, b)$, которая является корнем функции $f(x)$. Лемма 2 доказана. \square

Лемма 3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$, принимает значение $0 > f(b) \geq -b + a$, а ее производная $\frac{df(x)}{dx} < -1$ на интервале (a, b) , то существует единственная точка $c \in [a, b]$: $f(c) = 0$.

Доказательство. Пусть $g(x) = -x + a$. Легко видеть, что функция $f(x) \geq g(x)$, причем равенство может достигаться только в точке $x = b$. В точке $x = a$ функция $g(a) = 0$, а так как $f(x) > g(x)$, $x \in [a, b)$, то $f(a) > 0$. Так как производная функции имеет определенный знак на интервале (a, b) , то функция $f(x)$ является монотонной. На концах отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, поэтому существует единственная точка $c \in (a, b)$, которая является корнем функции $f(x)$. Лемма 3 доказана. \square

Лемма 4.

1. Если $\max \left\{ \delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma \right\} < r_D$, то уравнение (1.1.23) имеет единственное решение $y(x_{p_2}, 1)$ на множестве $(0, x_{p_2})$, где $x_{p_2} = \frac{S}{r_D - \gamma} \cdot \frac{\delta - (1 - \rho)r_D}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$.
2. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D < r_L < \delta + \rho\gamma$, то уравнение (1.1.23) имеет единственное решение $y(x_{c_1}, -1)$ на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$, где $x_{c_1} = \max \left\{ x_{p_1}, \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} \right\}$, $x_{p_1} = \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}$.

3. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D < \delta + \rho\gamma < r_L$, то уравнение (1.1.23) имеет единственное решение $y(x_{c_1}, -1)$ на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$, где $x_{c_1} = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$.

Доказательство. Докажем каждый из пунктов Леммы.

1. Пусть $\hat{y} = y(x_{p_2}, 1)$. Подставим $\beta = 1$, $\bar{x} = x_{p_2}$ в уравнение (1.1.23). Вычтем из левой части уравнения (1.1.23) правую и рассмотрим функцию

$$f(\hat{y}) = \left[\frac{1 + \theta r_L}{1 + \theta r_D} \right]^{\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\hat{y}}{x_{p_2}} - \left[\left(\hat{y} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right) \left(x_{p_2} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1 + \gamma\theta)\rho}}.$$

По условию, $x_{p_2} = \frac{S}{r_D - \gamma} \cdot \frac{\delta - (1 - \rho)r_D}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Покажем, что $x_{p_2} < \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$:

$$\frac{S}{r_D - \gamma} \cdot \frac{\delta - (1 - \rho)r_D}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} < \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}.$$

Так как в рассматриваемом случае $r_D > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то обе части неравенства положительны. Умножим обе части неравенства на величину $\frac{1}{S} \cdot (r_D - \gamma) \left(r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta} \right) (1 + \gamma\theta)$. После преобразований, получим

$$(r_D\theta + 1) [\rho\gamma - r_D + \delta] < 0. \quad (1.1.25)$$

Так как $r_D > \max \left\{ \delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma \right\}$, то выражение в квадратных скобках (1.1.25) отрицательно. Значит, неравенство (1.1.25) верно, и $x_{p_2} < \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$. Определим знаки функции $f(\hat{y})$ в точках $\hat{y} = 0$ и $\hat{y} = x_{p_2}$:

$$f(0) = - \left[\frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \left(\frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} - x_{p_2} \right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1 + \gamma\theta)\rho}} < 0,$$

$$f(x_{p_2}) = \left[\frac{1 + \theta r_L}{1 + \theta r_D} \right]^{\frac{1}{\rho}} - 1 > 0.$$

Последнее верно, так как $1 + \theta r_L > 1 + \theta r_D$.

Отметим, что функция $f(\hat{y})$ имеет единственный экстремум. Если этот экстремум находится вне множества $(0, x_{p_2})$, то функция $f(\hat{y})$ монотонна на отрезке $[0, x_{p_2}]$, $f(0) \cdot f(x_{p_2}) < 0$ значит, существует единственное значение $\hat{y}^* \in (0, x_{p_2}) : f(\hat{y}^*) = 0$. Это значение и будет являться корнем уравнения $y(x_{p_2}, 1)$. Если экстремум функции $f(\hat{y})$ находится внутри множества $(0, x_{p_2})$, то, согласно Лемме 1, функция $f(\hat{y})$ также имеет единственный корень на множестве $(0, x_{p_2})$.

2. Перейдем к доказательству второго пункта Леммы. Пусть $\check{y} = y(x_{c_1}, -1)$. Подставим $\beta = -1$, $\bar{x} = x_{c_1}$ в уравнение (1.1.23). Вычтем из левой части уравнения (1.1.23) правую

и рассмотрим функцию

$$g(\tilde{y}) = \left[\frac{1 + \theta r_D}{1 + \theta r_L} \right]^{\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\tilde{y}}{x_{c_1}} - \left[\left(\tilde{y} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right) \left(x_{c_1} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1 + \gamma\theta)\rho}}.$$

По условию, $x_{c_1} = \max \left\{ \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}, \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} \right\}$. Сравним значение x_{c_1} со значением $\frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$. Пусть $x_{c_1} = \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}$. Покажем, что в данном случае $x_{c_1} > \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$:

$$\frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})} > \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}.$$

Так как в рассматриваемом случае $r_L > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то обе части неравенства положительны. Умножим обе части неравенства на величину $\frac{1}{S} \cdot (r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})(1 + \gamma\theta)$. После преобразований, получим

$$(r_L\theta + 1)[\rho\gamma - r_L + \delta] > 0. \quad (1.1.26)$$

Так как $r_L > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то выражение в квадратных скобках (1.1.26) положительно. Значит, $x_{c_1} > \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$. Если $x_{c_1} = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, то $x_{c_1} \geq \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})} > \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$. Таким образом, у функции $g(\tilde{y})$ коэффициент при множителе $\tilde{y}^{\frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1 + \gamma\theta)\rho}}$ отрицателен, а при множителе \tilde{y} положителен. Сравним положительные степени переменной \tilde{y} у функции $g(\tilde{y})$. Покажем, что

$$1 > \frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1 + \gamma\theta)\rho}.$$

Перенесем левую часть в правую. После преобразований, получим

$$0 > \delta - \frac{\rho}{\theta} - r_D.$$

По условию $r_D > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, значит, неравенство $1 > \frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1 + \gamma\theta)\rho}$ верно. Отсюда следует, что $g(\tilde{y}) \rightarrow +\infty$ при $\tilde{y} \rightarrow +\infty$. В точке $\tilde{y} = x_{c_1}$ функция

$$g(x_{c_1}) = \left[\frac{1 + \theta r_D}{1 + \theta r_L} \right]^{\frac{1}{\rho}} - 1 < 0.$$

Отметим, что функция $g(\tilde{y})$ имеет единственный экстремум. Если этот экстремум находится вне множества $(x_{c_1}, +\infty)$, то функция $g(\tilde{y})$ монотонна на $[x_{c_1}, +\infty)$, $g(x_{c_1}) \cdot f(\tilde{y}) < 0$ при $\tilde{y} \rightarrow +\infty$, значит, существует единственное значение $\tilde{y}^* \in (x_{c_1}, +\infty) : g(\tilde{y}^*) = 0$. Это значение и будет являться корнем уравнения $y(x_{c_1}, -1)$. Если экстремум функции $g(\tilde{y})$ находится внутри множества $(x_{c_1}, +\infty)$, то, согласно Лемме 1, функция $g(\tilde{y})$ также имеет единственный корень на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$.

3. Перейдем к доказательству последнего пункта Леммы. Покажем, что $x_{c_1} > \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}$, где $x_{c_1} = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$:

$$\frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} > \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}.$$

Умножим обе части неравенства на положительную величину $\frac{1}{S} \cdot (r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta})(1 + \gamma\theta)$. После преобразований, получим

$$\delta + \rho\gamma > r_D.$$

По условию, $r_D < \delta + \rho\gamma$, значит, $x_{c_1} > \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}$. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство из п.2.

Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. Если $r_L > \max\{\delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma\}$, то уравнение (1.1.24) имеет единственное решение $M_r(x_{p_1}, r_L)$ на множестве $((x)_+, x_{p_1})$, где $0 < x_{p_1} \leq \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$.

Доказательство. Обозначим $M_{r_L} = M_r(x_{p_1}, r_L)$. Подставим $\bar{x} = x_{p_1}$, $r = r_L$ в уравнение (1.1.24). Вычтем из левой части уравнения (1.1.24) правую и рассмотрим функцию

$$f(M_{r_L}) = x + \frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{(1 + \theta r_L)\rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)} M_{r_L} + \left[\frac{M_{r_L}}{x_{p_1}} \right]^{\frac{\rho(r_L - \gamma)}{r_L - \delta - \rho\gamma}} \cdot \left[\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} \right].$$

Рассмотрим случай, когда $x \leq 0$. Тогда корень функции $f(M_{r_L})$ будем искать на множестве $[0, x_{p_1})$. В точке $M_{r_L} = 0$ функция

$$f(0) = x + \frac{S}{r_L - \gamma} > 0,$$

а в точке $M_{r_L} = x_{p_1}$ функция

$$\begin{aligned} f(x_{p_1}) &= x + \frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{(1 + \theta r_L)\rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)} x_{p_1} + \frac{r_L\theta - \delta\theta + \rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} = \\ &= x + \frac{(1 - \rho)r_L - \delta}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} = x - x_{p_1} < 0. \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

Вычислим производную функции $f(M_{r_L})$:

$$\begin{aligned} \frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} &= -\frac{(1 + \theta r_L)\rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)} + \frac{\rho(r_L - \gamma)}{r_L - \delta - \rho\gamma} \cdot \frac{1}{x_{p_1}} \cdot \left[\frac{M_{r_L}}{x_{p_1}} \right]^{\frac{\delta - (1 - \rho)r_L}{r_L - \delta - \rho\gamma}} \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} \right]. \end{aligned} \quad (1.1.28)$$

Если $\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} < 0$, то функция $f(M_{r_L})$ монотонна, $f(0) \cdot f(x_{p_1}) < 0$, значит, существует единственный корень на интервале $(0, x_{p_1})$. Если $\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} > 0$, то функ-

ция $f(M_{r_L})$ имеет единственный экстремум. Если этот экстремум находится вне множества $(0, x_{p_1})$, то функция $f(M_{r_L})$ монотонна на $[0, x_{p_1}]$, $f(0) \cdot f(x_{p_1}) < 0$, значит, существует единственный корень на интервале $(0, x_{p_1})$. Если экстремум функции $f(M_{r_L})$ находится внутри множества $(0, x_{p_1})$, то, согласно Лемме 1, функция $f(M_{r_L})$ также имеет единственный корень на множестве $(0, x_{p_1})$.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $x > 0$. В этом случае корень функции $f(M_{r_L})$ будем искать на множестве (x, x_{p_1}) .

Пусть $\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} < 0$. Получим оценку снизу на функцию $f(M_{r_L})$ при $M_{r_L} = x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{(1 + \theta r_L) \rho}{\theta (\delta - (1 - \rho)r_L)} x - \\ &- \left[\frac{x}{x_{p_1}} \right]^{\frac{\rho(r_L - \gamma)}{r_L - \delta - \rho\gamma}} \cdot \left[\frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} \right] > \left\{ \frac{x}{x_{p_1}} < 1, \text{ т.к. } x < x_{p_1} \right\} > \\ &\geq \frac{\theta\delta - \rho - \theta r_L}{\theta (\delta - (1 - \rho)r_L)} x + \frac{r_L\theta - \delta\theta + \rho}{\theta (\delta - (1 - \rho)r_L)} x_{p_1} = \frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} (x_{p_1} - x) > 0. \end{aligned}$$

В точке $M_{r_L} = x_{p_1}$ функция $f(M_{r_L})$ отрицательна (см. (1.1.27)). Аналогично, функция $f(M_{r_L})$ монотонна, $f(x) \cdot f(x_{p_1}) < 0$, значит, существует единственный корень на интервале (x, x_{p_1}) .

Пусть $\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} > 0$. Производная функции $f(M_{r_L})$ удовлетворяет выражению (1.1.28). Вычислим значение производной функции $f(M_{r_L})$ в точке $M_{r_L} = x_{p_1}$. После упрощений подобных слагаемых, получим

$$\left. \frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} \right|_{M_{r_L}=x_{p_1}} = \frac{\rho(1 + \gamma\theta) x_{p_1} - \rho S \theta}{\theta (r_L - \delta - \rho\gamma) x_{p_1}}.$$

Покажем, что $\left. \frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} \right|_{M_{r_L}=x_{p_1}} < -1$:

$$\frac{\rho(1 + \gamma\theta) x_{p_1} - \rho S \theta}{\theta (r_L - \delta - \rho\gamma) x_{p_1}} < -1.$$

Разделим обе части неравенства на θ , приведем подобные слагаемые и выразим x_{p_1} . Получим

$$x_{p_1} < \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}.$$

По условию, $x_{p_1} \leq \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, значит, $\left. \frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} \right|_{M_{r_L}=x_{p_1}} \leq -1$. Пусть $x < z < x_{p_1}$. Тогда

справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} \frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} \Big|_{M_{r_L}=z} &= -\frac{(1+\theta r_L)\rho}{\theta(\delta-(1-\rho)r_L)} + \frac{\rho(r_L-\gamma)}{r_L-\delta-\rho\gamma} \cdot \frac{1}{x_{p_1}} \cdot \left[\frac{z}{x_{p_1}} \right]^{\frac{\delta-(1-\rho)r_L}{r_L-\delta-\rho\gamma}} \\ &\cdot \left[\frac{r_L-\delta+\frac{\rho}{\theta}}{\delta-(1-\rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L-\gamma} \right] < -\frac{(1+\theta r_L)\rho}{\theta(\delta-(1-\rho)r_L)} + \frac{\rho(r_L-\gamma)}{r_L-\delta-\rho\gamma} \cdot \frac{1}{x_{p_1}} \\ &\cdot \left[\frac{r_L-\delta+\frac{\rho}{\theta}}{\delta-(1-\rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L-\gamma} \right] = \frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} \Big|_{M_{r_L}=x_{p_1}} \leq -1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что на отрезке $[x, x_{p_1}]$, функция $f(M_{r_L})$ в точке $M_{r_L} = x_{p_1}$: $f(x_{p_1}) = x - x_{p_1} < 0$, производная $\frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} < -1$ на интервале (x, x_{p_1}) , значит, выполняются условия Леммы 3, и существует единственный корень функции $f(M_{r_L})$ на интервале (x, x_{p_1}) . Лемма 5 доказана. \square

Лемма 6. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D < \delta + \rho\gamma$, $x > x_{p_2} \geq \frac{S\rho}{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}}$, то уравнение (1.1.24) имеет единственное решение $M_r(x_{p_2}, r_D)$ на множестве (x_{p_2}, x) .

Доказательство. Обозначим $M_{r_D} = M_r(x_{p_2}, r_D)$. Подставим $\bar{x} = x_{p_2}$, $r = r_D$ в уравнение (1.1.24). Вычтем из левой части уравнения (1.1.24) правую и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f(M_{r_D}) &= x + \frac{S}{r_D-\gamma} - \frac{(1+\theta r_D)\rho}{\theta(\delta-(1-\rho)r_D)} M_{r_D} + \\ &+ \left[\frac{x_{p_2}}{M_{r_D}} \right]^{\frac{\rho(r_D-\gamma)}{\delta+\rho\gamma-r_D}} \cdot \left[\frac{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}}{\delta-(1-\rho)r_D} x_{p_2} - \frac{S}{r_D-\gamma} \right]. \end{aligned}$$

Определим знак функции $f(M_{r_D})$ в точке $M_{r_D} = x_{p_2}$. Получим

$$f(x_{p_2}) = x - x_{p_2} > 0.$$

Рассмотрим случай, когда $\frac{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}}{\delta-(1-\rho)r_D} x_{p_2} - \frac{S}{r_D-\gamma} > 0$. Определим знак функции $f(M_{r_D})$ в точке $M_{r_D} = x$. Справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{S}{r_D-\gamma} - \frac{(1+\theta r_D)\rho}{\theta(\delta-(1-\rho)r_D)} x + \left[\frac{x_{p_2}}{x} \right]^{\frac{\rho(r_D-\gamma)}{\delta+\rho\gamma-r_D}} \cdot \left[\frac{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}}{\delta-(1-\rho)r_D} x_{p_2} - \frac{S}{r_D-\gamma} \right] \leq \\ &\leq \left\{ \frac{x_{p_2}}{x} < 1, \text{ т.к. } x_{p_2} < x \right\} \leq x - \frac{(1+\theta r_D)\rho}{\theta(\delta-(1-\rho)r_D)} x + \frac{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}}{\delta-(1-\rho)r_D} x_{p_2} = \\ &= \frac{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}}{\delta-(1-\rho)r_D} (x_{p_2} - x) < 0. \end{aligned}$$

Покажем, что экстремума у функции $f(M_{r_D})$ на множестве $(0, +\infty)$ нет. Выпишем произ-

водную:

$$\frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} = -\frac{(1+\theta r_D)\rho}{\theta(\delta-(1-\rho)r_D)} - \frac{\rho(r_D-\gamma)}{\delta+\rho\gamma-r_D} \cdot \frac{1}{M_{r_D}} \cdot \left[\frac{x_{p_2}}{M_{r_D}} \right]^{\frac{\rho(r_D-\gamma)}{\delta+\rho\gamma-r_D}} \cdot \left[\frac{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}}{\delta-(1-\rho)r_D} x_{p_2} - \frac{S}{r_D-\gamma} \right]. \quad (1.1.29)$$

Очевидно, что $\frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} < 0$ на всей области определения, т.е. функция $f(M_{r_D})$ убывающая, не имеющая экстремумов. Таким образом, функция $f(M_{r_D})$ монотонна на множестве (x_{p_2}, x) , имеет разные знаки на концах этого множества, значит, существует единственный корень функции $f(M_{r_D})$ внутри множества (x_{p_2}, x) .

Перейдем к рассмотрению случая, когда $\frac{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}}{\delta-(1-\rho)r_D} x_{p_2} - \frac{S}{r_D-\gamma} < 0$. Производная функции $f(M_{r_D})$ удовлетворяет выражению (1.1.29). Вычислим значение производной функции $f(M_{r_D})$ в точке $M_{r_D} = x_{p_2}$. После упрощений подобных слагаемых, получим

$$\left. \frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} \right|_{M_{r_D}=x_{p_2}} = \frac{\rho S \theta - \rho(1+\gamma\theta)x_{p_2}}{\theta(\delta+\rho\gamma-r_D)x_{p_2}}.$$

Покажем, что $\left. \frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} \right|_{M_{r_D}=x_{p_2}} < -1$:

$$\frac{\rho S \theta - \rho(1+\gamma\theta)x_{p_2}}{\theta(\delta+\rho\gamma-r_D)x_{p_2}} < -1.$$

Разделим обе части неравенства на θ , приведем подобные слагаемые и выразим x_{p_2} . Получим

$$\frac{S\rho}{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}} < x_{p_2}.$$

По условию, $\frac{S\rho}{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}} \leq x_{p_2}$, значит, $\left. \frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} \right|_{M_{r_D}=x_{p_2}} \leq -1$.

Пусть $z > x_{p_2}$. Тогда справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} \right|_{M_{r_D}=z} &= -\frac{(1+\theta r_D)\rho}{\theta(\delta-(1-\rho)r_D)} + \frac{\rho(r_D-\gamma)}{\delta+\rho\gamma-r_D} \cdot \frac{1}{z} \cdot \left[\frac{x_{p_2}}{z} \right]^{\frac{\rho(r_D-\gamma)}{\delta+\rho\gamma-r_D}} \\ &\cdot \left[\frac{S}{r_D-\gamma} - \frac{r_D-\delta+\frac{\rho}{\theta}}{\delta-(1-\rho)r_D} x_{p_2} \right] < \left\{ \frac{1}{z} < \frac{1}{x_{p_2}} \right\} < \left. \frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} \right|_{M_{r_D}=x_{p_2}} \leq -1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что на отрезке $[x_{p_2}, x]$ функция $f(M_{r_D})$ в точке $M_{r_D} = x_{p_2}$: $f(x_{p_2}) = x - x_{p_2} > 0$, производная $\frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} < -1$ на интервале (x_{p_2}, x) , значит, выполняются условия Леммы 2, и существует единственный корень функции $f(M_{r_D})$ на интервале (x_{p_2}, x) . Лемма 6 доказана. \square

Лемма 7. Функционал (1.1.4) в задаче оптимального управления (1.1.4), (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7) является вогнутым по аргументу x .

Доказательство. Обозначим

$$u(x, T) = \max_{M \geq 0} \int_t^T \frac{M^{1-\rho}(x(\tau))}{1-\rho} e^{-(\delta-(1-\rho)\gamma)\tau} d\tau \Big| x(t) = x. \quad (1.1.30)$$

Обозначим $x_1(t)$, $x_2(t)$ допустимые траектории, которым соответствуют оптимальные решения $M_{x_1}(t) \geq 0$, $M_{x_2}(t) \geq 0$ и, соответственно, значения функции $u(x_1, T)$, $u(x_2, T)$. Рассмотрим

$$\tilde{x} = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Тогда

$$M_{\tilde{x}}(t) = \lambda M_{x_1}(t) + (1 - \lambda)M_{x_2}(t) \geq 0.$$

Правая часть дифференциального уравнения (1.1.5) вогнута по M . Отсюда следует, что

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} \geq \lambda \frac{dx_1}{dt} + (1 - \lambda) \frac{dx_2}{dt}. \quad (1.1.31)$$

Поскольку в конечный момент времени $t = T$ фазовая переменная неотрицательна (1.1.6), то справедливы неравенства $x_1(T) \geq 0$, $x_2(T) \geq 0$. Интегрируя (1.1.31), получаем $\tilde{x}(T) \geq 0$, а значит $\tilde{x}(t)$ является допустимой траекторией. Справедливо неравенство

$$\frac{M_{\tilde{x}}^{1-\rho}}{1-\rho} \geq \lambda \frac{M_{x_1}^{1-\rho}}{1-\rho} + (1 - \lambda) \frac{M_{x_2}^{1-\rho}}{1-\rho}. \quad (1.1.32)$$

Поскольку подынтегральное выражение (1.1.30) неотрицательно, то, в силу (1.1.32), функция $u(x, T)$ является вогнутой по аргументу x . Переходя к пределу при $T \rightarrow +\infty$, получаем справедливость Леммы 7. \square

Для качественного анализа экономического поведения репрезентативного домашнего хозяйства на несовершенном рынке кредитов и депозитов было разработано специализированное Приложение¹. В качестве платформы, на которой разрабатывалось Приложение, была взята платформа МАТЛАВ и инструментарий МАТЛАВ App Designer (mlapp). МАТЛАВ является пакетом прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноименным языком. Язык МАТЛАВ является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, включающим основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр

¹Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No.2023685827. «Моделирование экономического поведения домашних хозяйств в условиях несовершенного рынка кредитов». Автор: Трусов Николай Всеволодович. Правообладатель: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН). Заявка No.2023685469. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 30 ноября 2023г.

функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования. В инструментарий mlarr входит большое число элементов управления для организации интерфейса программы. В зависимости от задаваемых параметров модели: экономической конъюнктуры r_L, r_D, γ и поведенческих характеристик репрезентативного домашнего хозяйства θ, ρ, δ , Приложение строит поле скоростей на плоскости (x, φ) . Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ и $\varphi_{r_D}(x)$ разделяют плоскость (x, φ) на три области: заимствования, не взаимодействия с банками и сбережения. Приложение позволяет интерактивно строить траектории $\varphi(x; x_0, T)$ по заданной начальной точке $x(0) = x_0$ для конечного временного горизонта T , подбирая начальное значение $\varphi(0) = \varphi_0$ так, чтобы удовлетворить условию трансверсальности $x(T) = 0$. Визуализация поля скоростей координат x, φ на плоскости (x, φ) и построения траекторий $\varphi(x; x_0, T)$ позволяет на качественном уровне изучать структуру оптимальной траектории $\varphi(x)$, которая является предельной для $\varphi(x; x_0, T)$ при $T \rightarrow +\infty$.

Опираясь на Утверждения и Леммы выше, приступим к доказательству Теоремы 3.

Доказательство. Рассмотрим каждый из типов поведения Теоремы.

Тип 1.1. Зафиксируем начальное значение $x(0) = x_0$. Нам необходимо найти такое значение сопряженной переменной в начальный момент времени $\varphi(0) = \varphi_0$, чтобы удовлетворить условию трансверсальности в конечный момент времени $x(T) = 0$. В режиме заимствования сопряженная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.1.11). Решением этого дифференциального уравнения является функция

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{[\delta + \rho\gamma - r_L]t}. \quad (1.1.33)$$

Подставим решение (1.1.33) в дифференциальное уравнение (1.1.10). Решив его, получим траекторию изменения фазовой координаты x в зависимости от начальных значений φ_0, x_0 :

$$\begin{aligned} x(t; \varphi_0, x_0) = & -\frac{S}{r_L - \gamma} + \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \varphi_0^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\rho}{\delta - (1-\rho)r_L} e^{\frac{r_L - \delta - \rho\gamma}{\rho}t} + \\ & + e^{(r_L - \gamma)t} \left[x_0 + \frac{S}{r_L - \gamma} - \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \varphi_0^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\rho}{\delta - (1-\rho)r_L} \right]. \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

Выразим φ_0 из уравнения (1.1.34), разделив уравнение (1.1.34) на величину $e^{(r_L - \gamma)T}$ и устремив $T \rightarrow +\infty$. Получим

$$\varphi_0 = \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L}\right)^{1-\rho} \left[\frac{(r_L - \gamma)\rho}{(x_0(r_L - \gamma) + S)(\delta - (1-\rho)r_L)} \right]^\rho.$$

Так как начальное значение x_0 произвольно из допустимого множества $\left(-\frac{S}{r_L - \gamma}, +\infty\right)$, мы

получаем оптимальную траекторию $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L} \right)^{1-\rho} \left[\frac{(r_L - \gamma) \rho}{(x(r_L - \gamma) + S)(\delta - (1 - \rho)r_L)} \right]^\rho. \quad (1.1.35)$$

Подставляя оптимальную траекторию $\varphi(x)$ в уравнение (1.1.9), мы получаем синтез оптимального управления в области заимствования

$$M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \frac{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)}{\rho(1 + \theta r_L)} \left(x + \frac{S}{r_L - \gamma} \right).$$

Покажем, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ лежит ниже гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, т.е. $\varphi(x) < \varphi_{r_L}(x)$ для любого $x > 0$:

$$\left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L} \right)^{1-\rho} \left[\frac{(r_L - \gamma) \rho}{(x(r_L - \gamma) + S)(\delta - (1 - \rho)r_L)} \right]^\rho < \frac{\theta}{1 + \theta r_L} x^{-\rho}. \quad (1.1.36)$$

Разделим обе части неравенства на $\frac{\theta}{1 + \theta r_L}$ и возведем их в степень $\frac{1}{\rho}$. После преобразований, получим

$$x(r_L - \gamma) [\rho + \theta(r_L - \delta)] < S\theta(\delta - (1 - \rho)r_L).$$

Разделив обе части неравенства на величину θ , получим

$$x(r_L - \gamma) \left[r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta} \right] < S(\delta - (1 - \rho)r_L).$$

По условию, $r_L < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, значит, неравенство верно, оптимальная траектория $\varphi(x)$ не пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$, т.е. реализуется только режим заимствования. Для наглядности отобразим вид оптимальной траектории на плоскости (x, φ) и синтез оптимального управления на Рис.1.3,1.4. Пусть $S = 1$, $r_L = 0.1$, $r_D = 0.05$, $\gamma = 0.01$, $\theta = 4$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.2701$, $x_0 = 50$, $T = 20$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ устроена следующим образом. Она лежит в области заимствования ниже кривой $\varphi_z(x)$, с течением времени фазовая координата x уменьшается. За любое конечное время T траектория $\varphi(x; T)$ разворачивается вокруг кривой $\varphi_z(x)$, чтобы удовлетворить условию трансверсальности $x(T) = 0$.

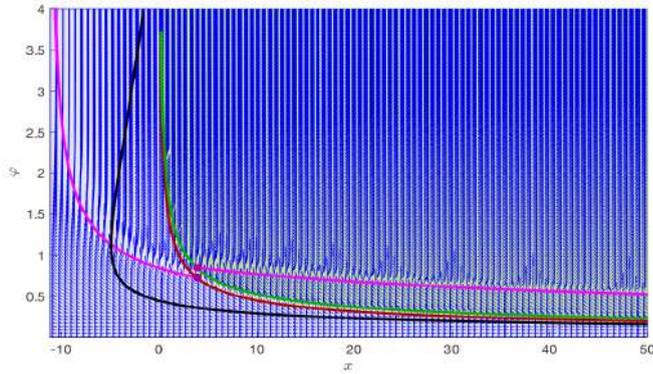


Рис. 1.3: Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ отображены красным и зеленым цветами. Кривая $\varphi_z(x)$ и траектория $\varphi(x; x_0, T)$ отображены розовым и черным цветами соответственно. Поле скоростей на плоскости (x, φ) показано синим цветом.

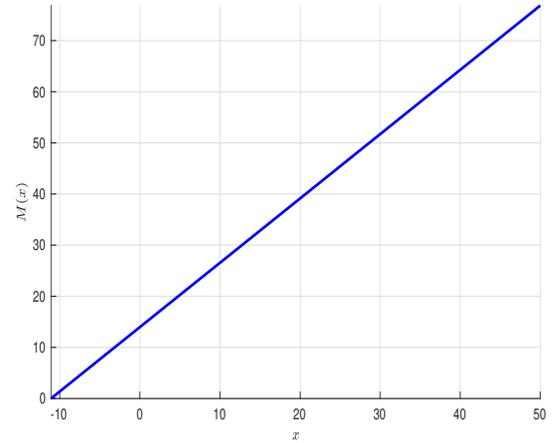


Рис. 1.4: Синтез оптимального управления.

Для полноты картины продемонстрируем как устроена оптимальная траектория $\varphi(x)$ в случаях, когда $1 + \gamma\theta < 0$. Неравенство $1 + \gamma\theta < 0$ эквивалентно неравенству $\delta + \rho\gamma < \delta - \frac{\rho}{\theta}$. Согласно Утверждению 1, в данном случае $\varphi_z(x) < \varphi_{r_L}(x)$. Рис.1.5 соответствует условию $r_L < \delta + \rho\gamma$, где $S = 1$, $r_L = 0.14$, $r_D = 0.1$, $\gamma = -0.1$, $\theta = 11.4$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.2$, $x_0 = 30$, $T = 200$. Принцип движения оптимальной траектории $\varphi(x)$ на плоскости (x, φ) аналогичен Рис.1.3. Рис.1.6 соответствует условию $\delta + \rho\gamma < r_L < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, где $S = 1$, $r_L = 0.153$, $r_D = 0.1$, $\gamma = -0.1$, $\theta = 11.4$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.2$, $x_0 = -3$, $T = 600$.

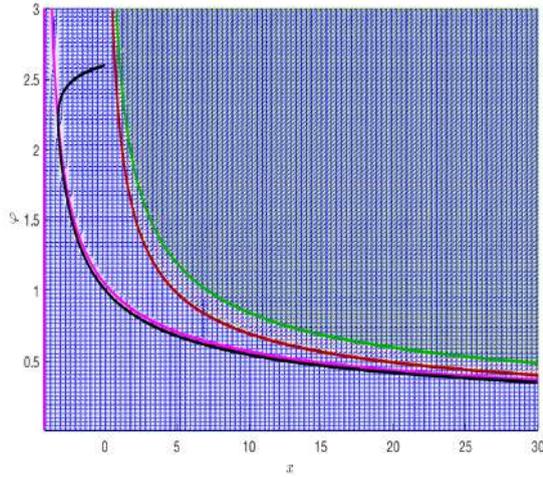


Рис. 1.5: Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ отображены красным и зеленым цветами. Кривая $\varphi_z(x)$ и траектория $\varphi(x; x_0, T)$ отображены розовым и черным цветами соответственно. Поле скоростей на плоскости (x, φ) показано синим цветом.

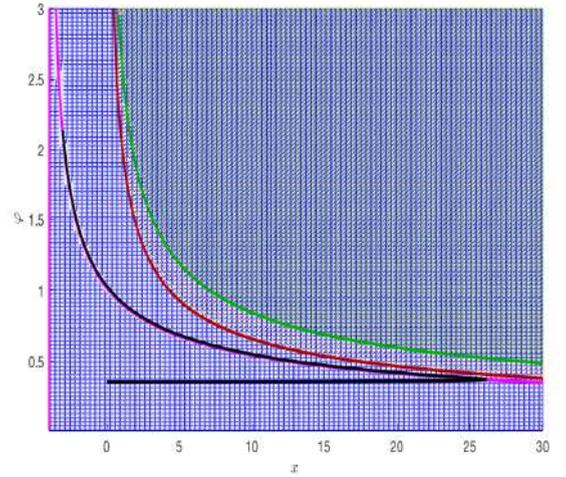


Рис. 1.6: Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ отображены красным и зеленым цветами. Кривая $\varphi_z(x)$ и траектория $\varphi(x; x_0, T)$ отображены розовым и черным цветами соответственно. Поле скоростей на плоскости (x, φ) показано синим цветом.

Оптимальная траектория $\varphi(x)$ лежит в области заимствования между гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ и кривой $\varphi_z(x)$. С течением времени фазовая координата x увеличивается. За любое конечное время T траектория $\varphi(x; T)$ разворачивается вокруг кривой $\varphi_z(x)$, чтобы удовлетворить условию трансверсальности $x(T) = 0$.

Тип 2.1. По условию, $r_L > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, значит, оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересечет гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ (см. (1.1.36)). Приравняв функции $\varphi(x)$ и $\varphi_{r_L}(x)$ друг к другу, получаем точку входа x_{p_1} оптимальной траектории $\varphi(x)$ из режима заимствования в автономный режим, где

$$x_{p_1} = \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}. \quad (1.1.37)$$

Так как $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то, по условию Утверждения 3, оптимальная траектория $\varphi(x)$ после попадания на гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x = x_{p_1}$ остается на ней для любого $x \geq x_{p_1}$. Мы получили синтез оптимального управления, соответствующий Типу 2.1. На Рис.1.7,1.8 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления при $S = 1$, $r_L = 0.1$, $r_D = 0.0201$, $\gamma = 0.01$, $\theta = 4$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.1567$, $x_0 = 50$, $T = 40$. Точка касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $x_{p_1} = 17.4$.

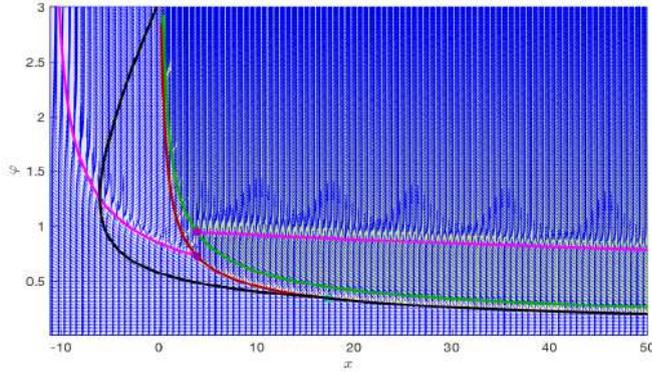


Рис. 1.7: Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ отображены красным и зеленым цветами. Кривая $\varphi_z(x)$ и траектория $\varphi(x; x_0, T)$ отображены розовым и черным цветами соответственно. Поле скоростей на плоскости (x, φ) показано синим цветом.

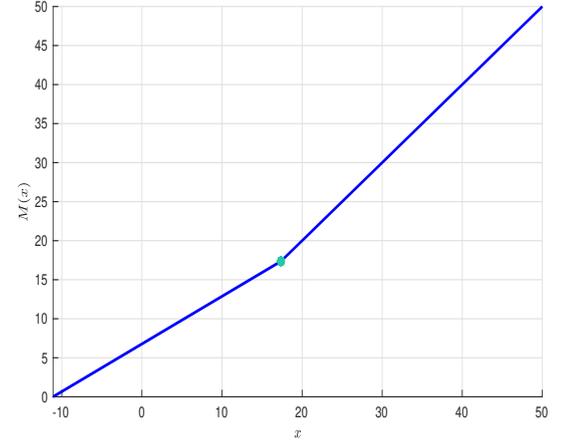


Рис. 1.8: Синтез оптимального управления.

Продолжим доказательство Теоремы, приступив к рассмотрению Типа 3.1.

Тип 3.1. Покажем, что при условиях Типа 3.1. достигается режим сбережения. В рассматриваемом случае $r_D > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, таким образом оптимальная траектория $\varphi(x)$ сходит с гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ в автономный режим в обратном времени в точке (x_{c_1}, φ_{c_1}) , где, согласно Утверждению 3, $x_{c_1} = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, $x_{c_1} \geq x_{p_1}$, x_{p_1} определяется выражением (1.1.37), $\varphi_{c_1} = \frac{\theta}{1 + \theta r_L} x_{c_1}^{-\rho}$. Найдем решения дифференциальных уравнений (1.1.13), (1.1.14) в обратном времени при начальных условиях $x(0) = x_{c_1}$, $\varphi(0) = \varphi_{c_1}$. В соответствии с Утверждением 2, положим $u(t) \equiv r_D$ в правой части дифференциального уравнения (1.1.14). Получим

$$x(t) = \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} + \left(x_{c_1} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right) e^{-\frac{1+\gamma\theta}{\theta}t}, \quad t \leq 0, \quad (1.1.38)$$

$$\varphi(t) = \varphi_{c_1} e^{[\delta + \rho\gamma - r_D]t}, \quad t \leq 0. \quad (1.1.39)$$

Условие пересечения оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_D}(x)$ означает выполнение равенства $\varphi(t) = \varphi_{r_D}(x(t))$. Подставим в него уравнения (1.1.38), (1.1.39). Учитывая, что $\varphi_{c_1} = \frac{\theta}{1 + \theta r_L} x_{c_1}^{-\rho}$, получим

$$\frac{\theta}{1 + \theta r_L} x_{c_1}^{-\rho} \cdot e^{[\delta + \rho\gamma - r_D]t} = \frac{\theta}{1 + \theta r_D} \cdot \left[\frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} + \left(x_{c_1} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right) e^{-\frac{1+\gamma\theta}{\theta}t} \right]^{-\rho} \quad (1.1.40)$$

Выразим e^t из уравнения (1.1.38):

$$e^t = \left[\left(x - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta} \right) \left(x_{c_1} - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta} \right)^{-1} \right]^{-\frac{\theta}{1+\gamma\theta}}. \quad (1.1.41)$$

Подставим выражение (1.1.41) в (1.1.40) и возведем обе части в степень $-\frac{1}{\rho}$. После преобразований, получим

$$\left[\frac{1+\theta r_L}{1+\theta r_D} \right]^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{x}{x_{c_1}} = \left[\left(x - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta} \right) \left(x_{c_1} - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta} \right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[\delta+\rho\gamma-r_D]}{(1+\gamma\theta)\rho}}. \quad (1.1.42)$$

Уравнение (1.1.42) соответствует $y(\bar{x}, \beta)$ при $\beta = -1$, $\bar{x} = x_{c_1}$. Согласно п.2 Леммы 4, уравнение (1.1.42) имеет единственное решение на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$. Обозначим решение уравнения (1.1.42) через x_{p_2} .

Найдем синтез оптимального управления в области сбережения при $x > x_{p_2}$. Согласно Утверждению 4, точка входа оптимальной траектории $\varphi(x)$ в область сбережения имеет координаты (x_{p_2}, φ_{p_2}) , где $\varphi_{p_2} = \frac{\theta}{1+\theta r_D} x_{p_2}^{-\rho}$. В области сбережения оптимальная траектория удовлетворяет дифференциальным уравнениям (1.1.16), (1.1.17). Представим решения дифференциальных уравнений (1.1.16), (1.1.17) в обратном времени из точки (x_{p_2}, φ_{p_2}) :

$$\varphi(t) = \varphi_{p_2} e^{[\delta+\rho\gamma-r_D]t}, \quad (1.1.43)$$

$$x(t) = -\frac{S}{r_D - \gamma} + \left(\frac{\theta}{1+\theta r_D} \right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \varphi_{p_2}^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\rho}{\delta - (1-\rho)r_D} e^{\frac{r_D - \delta - \rho\gamma}{\rho}t} + \\ + e^{(r_D - \gamma)t} \left[x_{p_2} + \frac{S}{r_D - \gamma} - \left(\frac{\theta}{1+\theta r_D} \right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \varphi_{p_2}^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\rho}{\delta - (1-\rho)r_D} \right]. \quad (1.1.44)$$

Выразим из уравнения (1.1.43) e^t и подставим его в уравнение (1.1.44). После преобразований, получим связь фазовой координаты x с сопряженной функцией φ :

$$x = -\frac{S}{r_D - \gamma} + \frac{(1+\theta r_D)\rho}{\theta(\delta - (1-\rho)r_D)} \cdot \left(\frac{\theta}{1+\theta r_D} \right)^{\frac{1}{\rho}} \cdot \varphi^{-\frac{1}{\rho}} + \varphi^{-\frac{r_D - \gamma}{r_D - \delta - \rho\gamma}} \cdot \left(\frac{\theta}{1+\theta r_D} \right)^{\frac{r_D - \gamma}{r_D - \delta - \rho\gamma}} \cdot x_{p_2}^{-\frac{\rho(r_D - \gamma)}{r_D - \delta - \rho\gamma}} \cdot \left[x_{p_2} + \frac{S}{r_D - \gamma} - \frac{(1+\theta r_D)\rho}{\theta(\delta - (1-\rho)r_D)} \cdot x_{p_2} \right]. \quad (1.1.45)$$

Оптимальное управление в области сбережения удовлетворяет (1.1.15). Выразим из него φ :

$$\varphi = \frac{\theta}{1+\theta r_D} \cdot M^{-\rho}.$$

Последнее подставим в (1.1.45). Получим неявное уравнение, определяющее синтез оптимального управления в области сбережения:

$$x + \frac{S}{r_D - \gamma} = \frac{(1 + \theta r_D) \rho}{\theta (\delta - (1 - \rho) r_D)} M + \left[\frac{x_{p2}}{M} \right]^{\frac{\rho(r_D - \gamma)}{\delta + \rho\gamma - r_D}} \cdot \left[\frac{S}{r_D - \gamma} + \frac{\theta (\delta - r_D) - \rho}{\theta (\delta - (1 - \rho) r_D)} x_{p2} \right]. \quad (1.1.46)$$

Согласно Лемме 6, уравнение (1.1.46) имеет единственное решение на множестве (x_{p2}, x) . Если уравнение (1.1.46) имеет решение на множестве $[0, x_{p2}]$, то синтез оптимального управления $M(x)$ не монотонен. Это неверно, так как из вогнутости функции цены (см. Лемму 7) следует монотонность сопряженной переменной $\varphi(x)$, и, значит, синтез оптимального управления $M(x)$ также монотонен. Мы получили синтез оптимального управления, соответствующий Типу 3.1.

На Рис.1.9,1.10 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления при $S = 1$, $r_L = 0.1$, $r_D = 0.05$, $\gamma = 0.01$, $\theta = 4.2$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.1$, $x_0 = 30$, $T = 200$. Точки касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ равны соответственно $x_{p1} = 4.7$, $x_{c1} = 7.2$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x_{p2} = 20.7$.

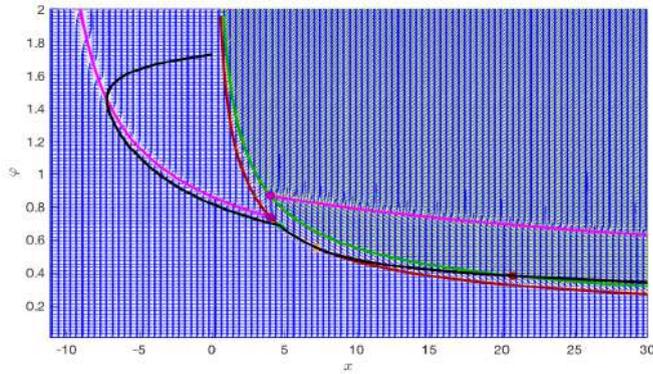


Рис. 1.9: Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ отображены красным и зеленым цветами. Кривая $\varphi_z(x)$ и траектория $\varphi(x; x_0, T)$ отображены розовым и черным цветами соответственно. Поле скоростей на плоскости (x, φ) показано синим цветом.

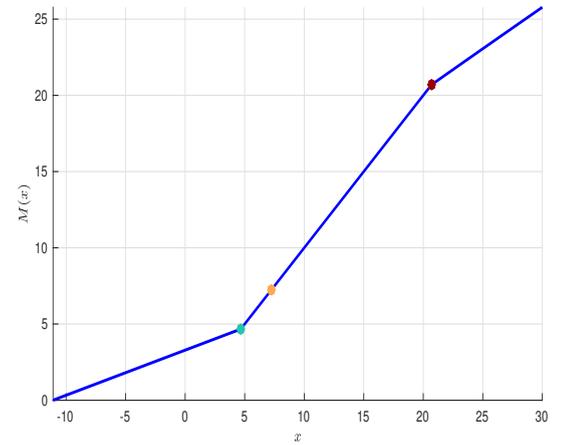


Рис. 1.10: Синтез оптимального управления.

На Рис.1.11,1.12 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления при $S = 1$, $r_L = 0.1098$, $r_D = 0.05$, $\gamma = 0.01$, $\theta = 1$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.2206$, $x_0 = 15$, $T = 80$. На гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ нет особого режима¹, оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает ее в точке $x_{p1} = 4.3$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x_{p2} = 5.2$.

¹В Типе 3.1. движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ имеет место быть в случае,

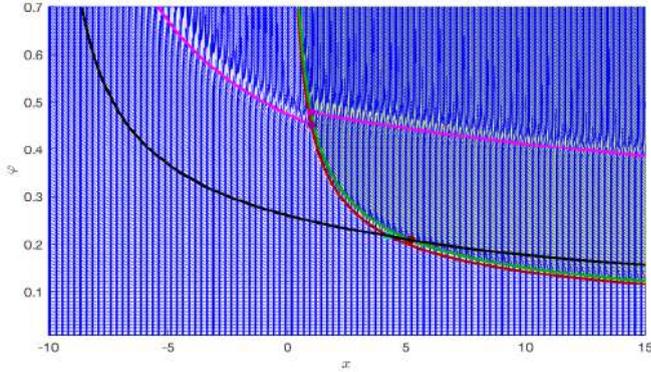


Рис. 1.11: Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ отображены красным и зеленым цветами. Кривая $\varphi_z(x)$ и траектория $\varphi(x; x_0, T)$ отображены розовым и черным цветами соответственно. Поле скоростей на плоскости (x, φ) показано синим цветом.

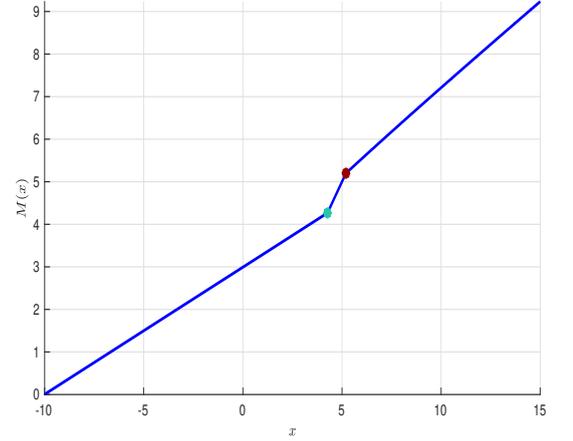


Рис. 1.12: Синтез оптимального управления.

Приступим к доказательству Типа 2.2.

Тип 2.2. Рассмотрим случай $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta} < \delta + \rho\gamma < r_L$. В этом случае кривая $\varphi_z(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $\hat{x} = \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}$. Согласно Утверждению 3 и Следствиям 1,2, оптимальная траектория $\varphi(x)$ касается гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x_{p_1} = \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Покажем, что $x_{p_1} < \hat{x}$. Если это так, то

$$\frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}} < \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}.$$

Обе части последнего неравенства умножим на положительную дробь $\frac{(1+\gamma\theta)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}{S}$. Перенесем все в левую часть. После преобразований, получим

$$\theta(\delta + \rho\gamma - r_L) < 0,$$

что верно в рассматриваемом случае. Таким образом, $x_{p_1} < \hat{x}$. Так как $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то, согласно Утверждению 3, для любого $x > x_{p_1}$, оптимальная траектория $\varphi(x)$ будет двигаться по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ и останется в автономном режиме. Найдем синтез оптимального управления в области заимствования. Рассуждения аналогичны доказательству Типа 3.1.: Из точки $(x_{p_1}, \varphi_{r_L}(x_{p_1}))$ выпустим траекторию в обратном времени, удовлетворяющую дифференциальным уравнениям (1.1.10), (1.1.11). Аналогично рассуждениям (1.1.43), (1.1.44), (1.1.45),

когда выполнено неравенство

$$(r_L - r_D)(\delta - (1 - \rho)r_L) > \left(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}\right)(r_L - \delta - \rho\gamma).$$

получим неявное уравнение, определяющее синтез оптимального управления в области заимствования:

$$x + \frac{S}{r_L - \gamma} = \frac{(1 + \theta r_L) \rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)} M + \left[\frac{x_{p1}}{M} \right]^{\frac{\rho(r_L - \gamma)}{\delta + \rho\gamma - r_L}} \cdot \left[\frac{S}{r_L - \gamma} + \frac{\theta(\delta - r_L) - \rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)} x_{p1} \right]. \quad (1.1.47)$$

Согласно Лемме 5, уравнение (1.1.47) имеет единственное решение на множестве $((x)_+, x_{p1})$. Аналогично рассуждениям доказательства Типа 3.1., любой другой корень уравнения (1.1.47), лежащий на луче $[x_{p1}, +\infty)$, будет нарушать условие $M(x) > x$ в области заимствования.

Оптимальная траектория состоит из двух частей. С одной стороны, она движется из области заимствования, касается гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x_{p1} < \hat{x}$, после чего начинает движение по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$. В точке \hat{x} на гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ меняется направление движения вдоль фазовой координаты x . За любое конечное время T траектория $\varphi(x; T)$ развернется вокруг кривой $\varphi_z(x)$ в точке $\bar{x} < \hat{x}$ и удовлетворит условию трансверсальности $x(T) = 0$. При $T \rightarrow +\infty$, оптимальная траектория $\varphi(x)$ спустится по гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ в точку $A(\hat{x}, \varphi_{r_L}(\hat{x}))$. Легко убедиться, что точка A является точкой покоя системы в рассматриваемом случае. Действительно, относительно точки A движение траектории вдоль фазовой координаты x меняет направление, так как в нее входит кривая $\varphi_z(x)$. Движение траектории вдоль координаты φ также меняет направление: при рассматриваемых соотношениях процентных ставок относительно величины $\delta + \rho\gamma$, в автономной области имеем $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, а в области заимствования $\frac{d\varphi}{dt} < 0$. С другой стороны, при $x > \hat{x}$ оптимальная траектория $\varphi(x)$ движется по гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ в направлении точки \hat{x} . За любое конечное время T траектория $\varphi(x; T)$ сойдет в область заимствования, чтобы удовлетворить условию трансверсальности $x(T) = 0$. При $T \rightarrow +\infty$, оптимальная траектория $\varphi(x)$ поднимется по гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ в неподвижную точку A .

Рассмотрим случай $\max\{r_D, \delta + \rho\gamma\} < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L$. Из неравенств следует, что $\delta + \rho\gamma < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, т.е. $1 + \gamma\theta < 0$. Согласно Утверждению 1, в данном случае $\varphi_z(x) < \varphi_{r_L}(x)$. Аналогично, оптимальная траектория $\varphi(x)$ касается гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x_{p1} = \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Так как $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то, согласно Утверждению 3, для любого $x > x_{p1}$, оптимальная траектория $\varphi(x)$ будет двигаться по гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ и останется в автономном режиме. Движение по гиперболу определено однозначно ($\varphi_z(x) < \varphi_{r_L}(x)$). За любое конечное время T траектория $\varphi(x; T)$ развернется вокруг кривой $\varphi_z(x)$ в точке $\bar{x} < \hat{x}$ и удовлетворит условию трансверсальности $x(T) = 0$.

На Рис.1.13,1.14 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления для случая $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta} < \delta + \rho\gamma < r_L$. Пусть $S = 1$, $r_L = 0.3$, $r_D = 0.05$, $\gamma = 0.01$, $\theta = 4$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.1959$, $x_0 = -3$ и $x_0 = 25$, $T = 70$. Точка касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ $x_{p1} = 2.2$.

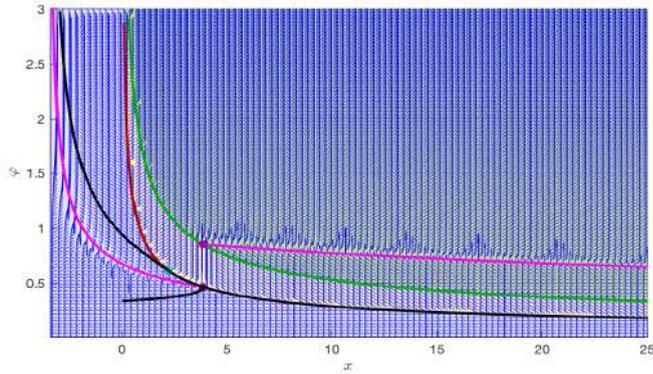


Рис. 1.13: Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ отображены красным и зеленым цветами. Кривая $\varphi_z(x)$ и траектория $\varphi(x; x_0, T)$ отображены розовым и черным цветами соответственно. Поле скоростей на плоскости (x, φ) показано синим цветом.

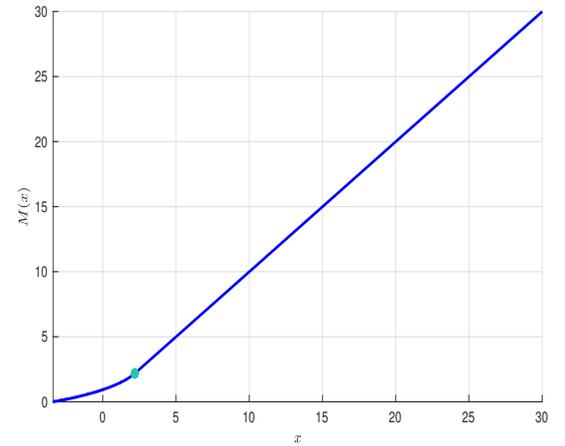


Рис. 1.14: Синтез оптимального управления.

На Рис.1.15,1.16 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления для случая $\max\{r_D, \delta + \rho\gamma\} < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L$. Пусть $S = 1$, $r_L = 0.2$, $r_D = 0.1$, $\gamma = -0.1$, $\theta = 11.4$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.2$, $x_0 = -3$, $T = 70$. Точка касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ $x_{p_1} = 11.4$.

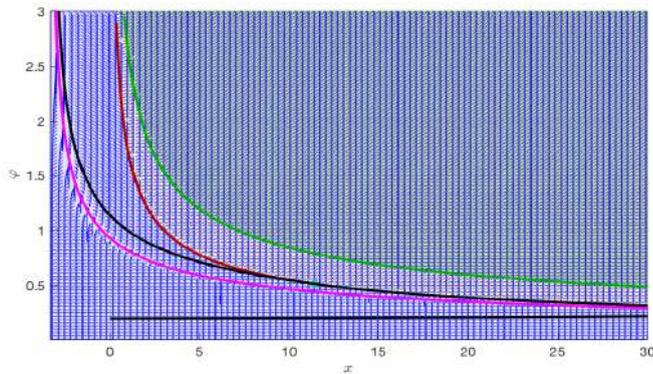


Рис. 1.15: Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ отображены красным и зеленым цветами. Кривая $\varphi_z(x)$ и траектория $\varphi(x; x_0, T)$ отображены розовым и черным цветами соответственно. Поле скоростей на плоскости (x, φ) показано синим цветом.

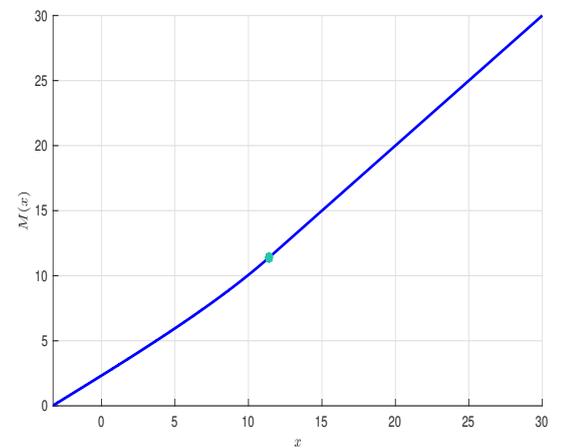


Рис. 1.16: Синтез оптимального управления.

Тип 3.2. Построение синтеза в Типе 3.2. отличается от построения синтеза в Типе 2.2. тем, что в рассматриваемом случае $r_D > \delta - \frac{\rho}{\theta}$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ сходит с гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ в автономный режим в обратном времени в точке (x_{c_1}, φ_{c_1}) , где, согласно Утверждению 3, $x_{c_1} = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Покажем, что $x_{c_1} > \hat{x}$, где $\hat{x} = \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$:

$$\frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} > \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}.$$

Обе части последнего неравенства умножим на положительную дробь $\frac{(1 + \gamma\theta)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}{S}$. Перенесем все в левую часть. После преобразований, получим

$$\theta(\delta + \rho\gamma - r_D) > 0,$$

что верно в рассматриваемом случае. Таким образом, $x_{c_1} > \hat{x}$. Покажем, что при условиях Типа 3.2. достигается режим сбережения. Аналогично доказательству Типа 3.1., получаем, что точка попадания оптимальной траектории на гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ определяется уравнением (1.1.42). Оно соответствует $y(\bar{x}, \beta)$ при $\beta = -1$, $\bar{x} = x_{c_1}$. Согласно п.3 Леммы 4, уравнение (1.1.42) имеет единственное решение на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$. Обозначим решение уравнения (1.1.42) через x_{p_2} . Нахождение синтеза оптимального управления в области сбережения повторяет рассуждения доказательства Типа 3.1. В области сбережения синтез определяется неявным уравнением (1.1.46). Согласно Лемме 6, уравнение (1.1.46) имеет единственное решение на множестве (x_{p_2}, x) . Если уравнение (1.1.46) имеет решение на множестве $[0, x_{p_2}]$, то синтез оптимального управления $M(x)$ не монотонен. Такого быть не может (см. доказательство Типа 3.1.), значит, значение синтеза оптимального управления в области сбережения определяется однозначно на множестве (x_{p_2}, x) . Мы получили синтез оптимального управления, соответствующий Типу 3.2.

На Рис.1.17,1.18 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления. Пусть $S = 1$, $r_L = 0.2$, $r_D = 0.05$, $\gamma = 0.01$, $\theta = 3$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.12$, $x_0 = -5$ и $x_0 = 50$, $T = 50$. Точки касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ равны соответственно $x_{p_1} = 2$, $x_{c_1} = 5.2$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x_{p_2} = 29.3$.

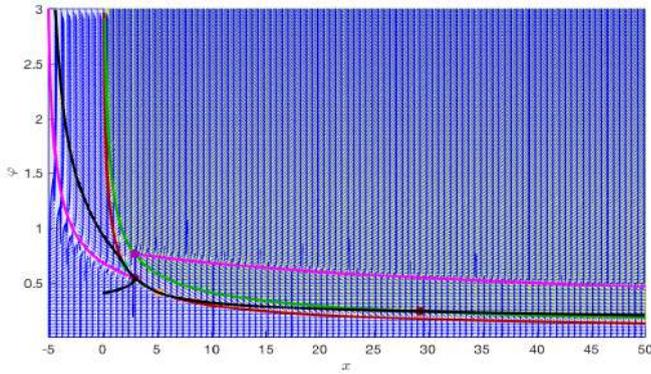


Рис. 1.17: Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ отображены красным и зеленым цветами. Кривая $\varphi_z(x)$ и траектория $\varphi(x; x_0, T)$ отображены розовым и черным цветами соответственно. Поле скоростей на плоскости (x, φ) показано синим цветом.

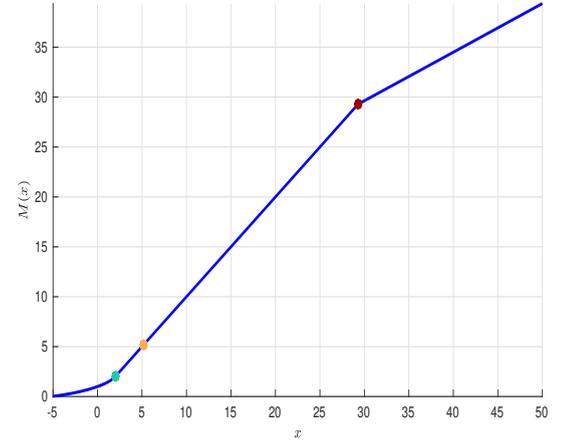


Рис. 1.18: Синтез оптимального управления.

Тип 3.3. Отличие Типа 3.3. от Типа 3.1. состоит в том, что в Типе 3.1. $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ во всех трех областях, а в Типе 3.3. $\frac{d\varphi}{dt} < 0$ во всех трех областях. В некотором смысле, можно сказать, что Тип 3.3. «зеркален» Типу 3.1. За любое конечное время T траектория $\varphi(x; T)$ развернется вокруг кривой $\varphi_z(x)$ и удовлетворит условию трансверсальности $x(T) = 0$. При $T \rightarrow +\infty$ оптимальная траектория $\varphi(x)$ будет лежать выше траектории разворота $\varphi_z(x)$. Рассуждая аналогично доказательству Типа 1.1., повторяя шаги (1.1.33), (1.1.34), (1.1.35) с точностью до процентной ставки, получаем, что в области сбережения оптимальная траектория $\varphi(x)$ задается формулой

$$\varphi(x) = \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_D} \right)^{1-\rho} \left[\frac{(r_D - \gamma) \rho}{(x(r_D - \gamma) + S)(\delta - (1 - \rho)r_D)} \right]^\rho. \quad (1.1.48)$$

Подставляя оптимальную траекторию $\varphi(x)$ в уравнение (1.1.15), мы получаем синтез оптимального управления в области сбережения

$$M(x; S, r_D, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \frac{\theta(\delta - (1 - \rho)r_D)}{\rho(1 + \theta r_D)} \left(x + \frac{S}{r_D - \gamma} \right).$$

Согласно Утверждению 4, на гиперболе $\varphi_{r_D}(x)$ нет особого режима оптимальной траектории, траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке x_{p2} . Приравнивая функцию (1.1.48) к $\varphi_{r_D}(x)$, получаем точку пересечения оптимальной траектории гиперболы $\varphi_{r_D}(x)$. Получаем

$$x_{p2} = \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_D)}{(r_D - \gamma)(r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta})}. \quad (1.1.49)$$

В автономной области движение оптимальной траектории подчиняется дифференциальным уравнениям (1.1.13), (1.1.14). Найдем точку касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$, двигаясь в обратном времени из точки $A\left(x_{p_2}, \frac{\theta}{1+\theta r_D} x_{p_2}^{-\rho}\right)$ на гиперболе $\varphi_{r_D}(x)$. Условие пересечения оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ означает выполнение равенства $\varphi(t) = \varphi_{r_L}(x(t))$, где

$$x(t) = \frac{S\theta}{1+\gamma\theta} + \left(x_{p_2} - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}\right) e^{-\frac{1+\gamma\theta}{\theta}t}, \quad t \leq 0, \quad (1.1.50)$$

$$\varphi(t) = \varphi_{p_2} e^{[\delta+\rho\gamma-r_D]t}, \quad t \leq 0.$$

Учитывая, что $\varphi_{p_2} = \frac{\theta}{1+\theta r_D} x_{p_2}^{-\rho}$, получим

$$\frac{\theta}{1+\theta r_D} x_{p_2}^{-\rho} \cdot e^{[\delta+\rho\gamma-r_D]t} = \frac{\theta}{1+\theta r_L} \cdot \left[\frac{S\theta}{1+\gamma\theta} + \left(x_{p_2} - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}\right) e^{-\frac{1+\gamma\theta}{\theta}t} \right]^{-\rho} \quad (1.1.51)$$

Выразим e^t из уравнения (1.1.50):

$$e^t = \left[\left(x - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}\right) \left(x_{p_2} - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}\right)^{-1} \right]^{-\frac{\theta}{1+\gamma\theta}}. \quad (1.1.52)$$

Подставим выражение (1.1.52) в (1.1.51) и возведем обе части в степень $-\frac{1}{\rho}$. После преобразований, получим

$$\left[\frac{1+\theta r_L}{1+\theta r_D} \right]^{\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{x}{x_{p_2}} = \left[\left(x - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}\right) \left(x_{p_2} - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}\right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[\delta+\rho\gamma-r_D]}{(1+\gamma\theta)\rho}}. \quad (1.1.53)$$

Уравнение (1.1.53) соответствует $y(\bar{x}, \beta)$ при $\beta = 1$, $\bar{x} = x_{p_2}$. Согласно п.1 Леммы 4, уравнение (1.1.53) имеет единственное решение на множестве $(0, x_{p_2})$. Обозначим решение уравнения (1.1.53) через x_{c_1} .

Согласно Следствию 2, движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ возможно на отрезке $x \in \left[\frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}, \left[\frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}\right]\right]$. Если $x_{c_1} < \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, то оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ без движения по ней. Покажем, что $x_{c_1} < \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Очевидно, что $x_{c_1} < x_{p_2}$. Покажем, что $x_{p_2} < \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$:

$$\frac{S(\delta - (1-\rho)r_D)}{(r_D - \gamma)(r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta})} < \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}.$$

Обе части неравенства умножим на положительную дробь $\frac{(r_D - \gamma)(r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta})}{S}$. Перенесем все сла-

гаемые в левую часть. После преобразований получим

$$\delta + \rho\gamma < r_D.$$

Последнее неравенство верно в рассматриваемом случае. Так как $x_{c_1} < x_{p_2}$, $x_{p_2} < \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, то $x_{c_1} < \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Обозначим точку начала движения оптимальной траектории $\varphi(x)$ в обратном времени в области заимствования через $x_{p_1} = \min \left\{ \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}, x_{c_1} \right\}$. По условию, $r_D > \max \left\{ \delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma \right\}$. Так как $r_L > r_D$, то в рассматриваемом случае справедливо неравенство $r_L > \max \left\{ \delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma \right\}$. Последнее выполняется в Типе 3.2., поэтому построение синтеза оптимального управления в области заимствования аналогично Типу 3.2.

Рассмотрим случай, когда справедлива следующая цепочка неравенств: $\delta - \frac{\rho}{\theta} < \delta + \rho\gamma < r_D$. На Рис.1.19,1.20 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления. Пусть $S = 1$, $r_L = 0.3$, $r_D = 0.2$, $\gamma = 0.0021$, $\theta = 12.6$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.1918$, $x_0 = -3$, $T = 100$. Точки касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ равны соответственно $x_{p_1} = 3.4$, $x_{c_1} = 4.3$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x_{p_2} = 9.7$.

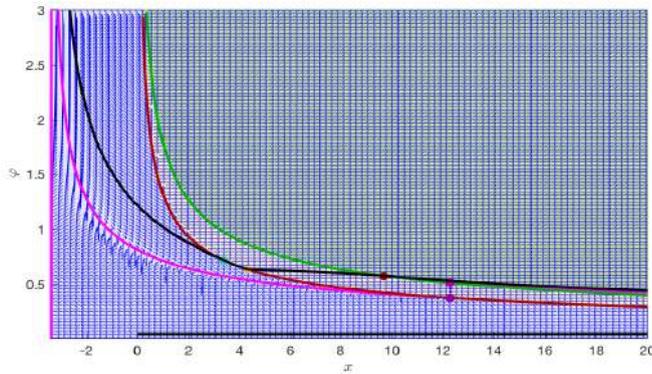


Рис. 1.19: Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ отображены красным и зеленым цветами. Кривая $\varphi_z(x)$ и траектория $\varphi(x; x_0, T)$ отображены розовым и черным цветами соответственно. Поле скоростей на плоскости (x, φ) показано синим цветом.

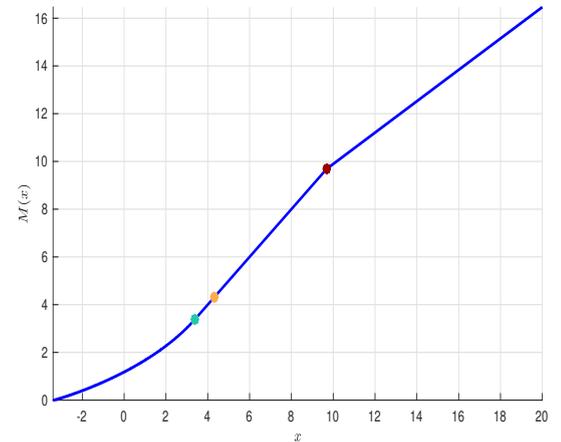


Рис. 1.20: Синтез оптимального управления.

На Рис.1.21,1.22 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления при $S = 1$, $r_L = 0.2954$, $r_D = 0.2273$, $\gamma = 0.01$, $\theta = 8$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.2$, $x_0 = -3$, $T = 100$. На гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ нет особого режима, оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает ее в точке $x_{p_1} = 2.7$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x_{p_2} = 4.4$.

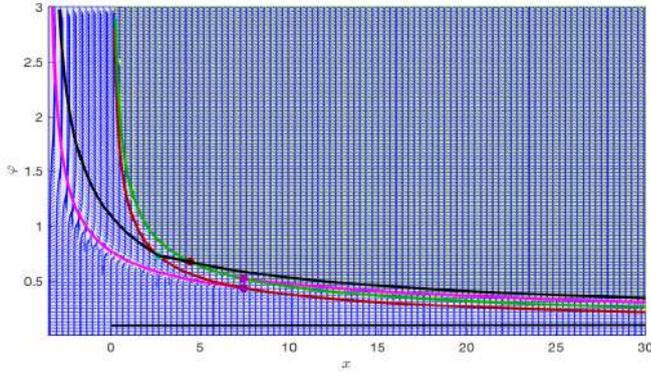


Рис. 1.21: Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ отображены красным и зеленым цветами. Кривая $\varphi_z(x)$ и траектория $\varphi(x; x_0, T)$ отображены розовым и черным цветами соответственно. Поле скоростей на плоскости (x, φ) показано синим цветом.

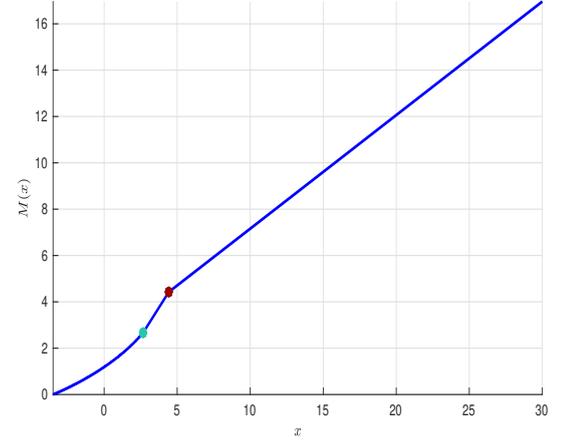


Рис. 1.22: Синтез оптимального управления.

Случай, когда справедлива цепочка неравенств $\delta + \rho\gamma < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D$ отличается от предыдущего тем, что кривая $\varphi_z(x)$ лежит ниже гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$. Покажем, что оптимальная траектория также будет находиться в трех областях. Для этого достаточно показать, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ при $x > x_{p_2}$ будет находиться в области сбережения. Предположим, что это не так. Пусть оптимальная траектория находится только в области заимствования. Тогда она определяется функцией (1.1.35) и справедливо неравенство $\varphi(x) < \varphi_{r_L}(x)$. Как и в доказательстве Типа 1.1., это приводит к неравенству

$$x(r_L - \gamma) \left[r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta} \right] < S(\delta - (1 - \rho)r_L). \quad (1.1.54)$$

По условию, $r_L > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, обе части неравенства (1.1.54) положительны. Для любого $x > \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)[r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}]}$ неравенство (1.1.54) будет нарушаться, значит, предположение о том, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ находится только в области заимствования неверное. Предположим, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ находится в двух областях: заимствования и автономной. Движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ в автономной области определяется дифференциальными уравнениями (1.1.10), (1.1.11), их решения определяются формулами (1.1.38), (1.1.39). Зафиксируем начальную точку $x(0) = x_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$ в автономной области. Выразим зависимость $t(x)$ и подставим в траекторию $\varphi(t)$. Получим, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ в автономной области описывается функцией

$$\varphi(x) = \varphi_0 \left[\left(x - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right) \left(x_0 - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[r_D - \delta - \rho\gamma]}{1 + \gamma\theta}}. \quad (1.1.55)$$

При наших предположениях, функция (1.1.55) лежит ниже $\varphi_{r_D}(x)$, т.е.

$$\varphi_0 \left[\left(x - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right) \left(x_0 - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[r_D - \delta - \rho\gamma]}{1 + \gamma\theta}} < \frac{\theta}{1 + \theta r_D} x^{-\rho}. \quad (1.1.56)$$

Отметим, что степень множителя x в левой части неравенства (1.1.56) положительна: $\frac{\theta[r_D - \delta - \rho\gamma]}{1 + \gamma\theta} > 0$, а в правой части неравенств отрицательна: $-\rho < 0$. Значит, существует значение \hat{x} такое, что при любом $x > \hat{x}$ неравенство (1.1.56) будет нарушаться. Значит, предположение о том, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ не находится в области сбережения неверное. В области сбережения оптимальная траектория $\varphi(x)$ определяется функцией (1.1.48). Покажем, что в области сбережения $\varphi(x) > \varphi_{r_D}(x)$. Аналогично (1.1.54), это приводит к неравенству

$$x(r_D - \gamma) \left[r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta} \right] > S(\delta - (1 - \rho)r_D). \quad (1.1.57)$$

Неравенство (1.1.57) верно для любых $x > x_{p_2}$, где x_{p_2} определяется формулой (1.1.49).

На Рис.1.23,1.24 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления для случая $\delta + \rho\gamma < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D$. Пусть $S = 1$, $r_L = 0.3$, $r_D = 0.23$, $\gamma = -0.1$, $\theta = 12$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.255$, $x_0 = -2$, $T = 70$. Точки касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ равны соответственно $x_{p_1} = 5.8$, $x_{c_1} = 8.9$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x_{p_2} = 25.5$.

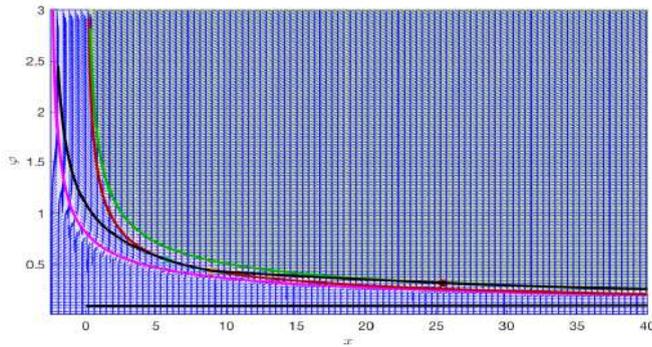


Рис. 1.23: Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$ отображены красным и зеленым цветами. Кривая $\varphi_z(x)$ и траектория $\varphi(x; x_0, T)$ отображены розовым и черным цветами соответственно. Поле скоростей на плоскости (x, φ) показано синим цветом.

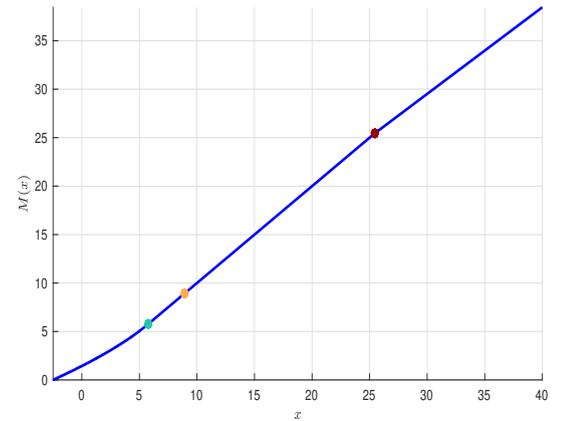


Рис. 1.24: Синтез оптимального управления.

Мы рассмотрели все Типы Теоремы, для каждого из которых нашли оптимальную траекторию на плоскости (x, φ) , построили синтез оптимального управления $M(x; S, r_L, r_D, \theta, \rho, \gamma, \delta)$. Теорема 3 доказана. \square

Параметры модели экономического поведения репрезентативного рационального домашнего хозяйства определяют социальный слой, экономическое поведение которого может быть описано с помощью изложенной модели. Параметры модели можно разделить на две группы: поведенческие характеристики домашнего хозяйства и показатели экономической конъюнктуры. К поведенческим характеристикам относятся скорость обращения денег $\frac{1}{\theta}$, отвращение к риску ρ , коэффициент дисконтирования δ . К показателям экономической конъюнктуры относятся процентные ставки по потребительским кредитам r_L и депозитам r_D , ожидаемые темп роста доходов γ и инфляция j . Вопрос идентификации поведенческих характеристик домашних хозяйств подробно изложен в Главе 2. Моделирование процентных ставок по потребительским кредитам основывается на логике поведения коммерческих банков и изложено в следующем разделе.

1.2 Моделирование поведения коммерческих банков

Рост спроса на потребительский кредит, с одной стороны, отражает формирование в РФ «среднего слоя» в последние двадцать лет. Домашние хозяйства, относящиеся к «среднему слою», управляют динамикой своих расходов, используя потребительский кредит, и соизмеряют свой спрос с величиной процентной ставки на кредит. С другой стороны, потребительский кредит в России выполнял функцию социальной адаптации и более половины по суммарному объему выданных кредитов составляют заимствования малообеспеченных домашних хозяйств, которые предъявляют спрос на кредит в сложных жизненных обстоятельствах в независимости от величины процентной ставки. Такая структура заемщиков повышает вероятность неисполнения обязательств по погашению кредита и порождает риски для банковской системы, которые вызывали озабоченность у руководства министерства экономического развития еще летом 2019г. Пандемия COVID-19 оказала влияние на экономическое положение домашних хозяйств и осложнила состояние рынка потребительского кредита. Модели спроса на потребительский кредит домашних хозяйств из различных социальных слоев разрабатывались в [34], [35], [104], [105] и использовались для анализа состояния рынка потребительского кредита России в 2019-2021гг. В этом анализе предполагалось, что коммерческие банки, имея большие запасы ликвидности будут вести себя инерционно и их поведение можно моделировать эконометрическими моделями.

Наложенные в 2022г на Россию санкции были направлены на снижение уровня жизни домашних хозяйств в результате кризиса банковской системы и инфляции. Санкции ставят целью обострить социальную напряженность, снизить эффективность управления на федеральном уровне и вызвать дезинтеграцию власти. Ответные меры правительства предполагают компенсацию потерь домашних хозяйств в реальных располагаемых доходах. Имеются два канала поддержки и социальной адаптации домашних хозяйств: прямые трансферты из бюджета и потребительский кредит. Возникает вопрос: как изменится в сложившихся

обстоятельствах рынок потребительского кредита и сможет ли он выполнять функцию социальной адаптации в сочетании с прямыми трансфертами из бюджета? В новых условиях изменились подходы коммерческих банков к выдаче потребительских кредитов. Поэтому для анализа возможных стратегий управляющих органов РФ и ответа на поставленный вопрос нужно использовать математические модели, в которых поведение на рынке потребительского кредита коммерческих банков, домашних хозяйств из различных социальных слоев описываются на основе исследования их интересов и логики поведения в изменяющихся условиях. Моделирование взаимодействия на рынке потребительского кредита коммерческих банков и домашних хозяйств основано на концепции равновесия по Штакельбергу. Предполагается, что коммерческие банки назначают ставку по потребительскому кредиту, исходя из своих интересов, оценивая ответное поведение домашних хозяйств.

Покажем, как из модели экономического поведения репрезентативного рационального домашнего хозяйства можно вычислить спрос на потребительский кредит. Пусть $\hat{H}_L(t) = H_L(t)e^{-\gamma t}$. Тогда, с учетом замен $x(t) = X(t)e^{-\gamma t}$, $M(t) = M_0(t)e^{-\gamma t}$, $\delta = \delta_0 + (1 - \rho)j$, из уравнения баланса ликвидных средств заемщика (1.1.1) с учетом динамики финансового состояния домашнего хозяйства получаем, что спрос на потребительский кредит описывается уравнением

$$\hat{H}_L = \frac{dM(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} - S + \gamma M(x) + \frac{M(x)}{\theta},$$

или, что тоже самое,

$$\hat{H}_L = \frac{dM(x)}{dx} \left(S - \gamma x - \frac{M(x)}{\theta} - r_L(M(x) - x)_+ \right) - S + \gamma M(x) + \frac{M(x)}{\theta},$$

где $M(x) = M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta)$ синтез оптимального управления.

Опираясь на синтез задачи оптимального управления рамсеевского типа (1.1.4), (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7), в зависимости от соотношения величин r_L , $\delta - \frac{\rho}{\theta}$, $\delta + \rho\gamma$ выделяются 4 типа поведения заемщиков, соответствующие различным социальным слоям.

Тип поведения заемщиков 1. Если $r_L < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то синтез оптимального управления

$$M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \frac{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)}{\rho(1 + \theta r_L)} \left(x + \frac{S}{r_L - \gamma} \right),$$

откуда

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)}{\rho(1 + \theta r_L)}.$$

Спрос на потребительский кредит определяется как

$$\hat{H}_L = \frac{(\delta - (1 - \rho)r_L)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}{\theta\rho^2(1 + \theta r_L)}x - \frac{\rho(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}) + (\delta - (1 - \rho)r_L - \frac{\rho}{\theta})(\delta - (1 - \rho)r_L)}{\theta\rho^2(1 + \theta r_L)(r_L - \gamma)}S.$$

Тип поведения заемщиков 2. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L < \delta + \rho\gamma$, а финансовое состояние домашнего хозяйства $x < \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}$, то синтез оптимального управления и спрос на потребительский кредит повторяют тип поведения заемщиков 1. В случае $x \geq \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}$ потребительский кредит не заимствуется.

Тип поведения заемщиков 3.

Пусть $\max\{r_D, \delta - \frac{\rho}{\theta}\} < \delta + \rho\gamma < r_L$ или $\max\{r_D, \delta + \rho\gamma\} < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L$, а финансовое состояние домашнего хозяйства $x < x_{p1}$, где $x_{p1} = \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Уравнение (1.1.24) имеет единственное решение $M_r(x_{p1}, r_L)$ на множестве $((x)_+, x_{p1})$. Синтез оптимального управления

$$M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta) = M_r(x_{p1}, r_L).$$

Функция $M_r(x_{p1}, r_L)$ — дифференцируемая функция по теореме о неявной функции. Тогда

$$\frac{dM_r(x_{p1}, r_L)}{dx} = \frac{\delta - (1 - \rho)r_L}{\rho} \cdot \left(\frac{1 + \theta r_L}{\theta} - \left[\frac{x_{p1}}{M_r(x_{p1}, r_L)} \right]^{\frac{\delta - (1 - \rho)r_L}{\delta + \rho\gamma - r_L}} \cdot \left[S(\delta - (1 - \rho)r_L) + \left(\delta - r_L - \frac{\rho}{\theta} \right) \cdot (r_L - \gamma)x_{p1} \right]^{-1} \right).$$

Спрос на потребительский кредит определяется как

$$\begin{aligned} \hat{H}_L = & \frac{M_r(x_{p1}, r_L)}{\theta} - S + \gamma M_r(x_{p1}, r_L) + \\ & + \frac{\delta - (1 - \rho)r_L}{\rho} \cdot \left(\frac{1 + \theta r_L}{\theta} - \left[\frac{x_{p1}}{M_r(x_{p1}, r_L)} \right]^{\frac{\delta - (1 - \rho)r_L}{\delta + \rho\gamma - r_L}} \cdot \left[S(\delta - (1 - \rho)r_L) + \left(\delta - r_L - \frac{\rho}{\theta} \right) \cdot (r_L - \gamma)x_{p1} \right]^{-1} \right) \cdot \\ & \cdot \left(S - \gamma x - \frac{M_r(x_{p1}, r_L)}{\theta} - r_L(M_r(x_{p1}, r_L) - x) \right). \end{aligned}$$

В случае $x \geq x_{p1}$ потребительский кредит не заимствуется.

Тип поведения заемщиков 4. Пусть $\max\{\delta + \rho\gamma, \delta - \frac{\rho}{\theta}\} < r_D$, а финансовое состояние домашнего хозяйства $x < x_{p1}$, где $x_{p1} = \min\left\{\frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}, y(x_{p2}, 1)\right\}$, $x_{p2} = \frac{S}{r_D - \gamma} \cdot \frac{\delta - (1 - \rho)r_D}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Уравнение (1.1.23) имеет единственное решение $y(x_{p2}, 1)$ на множестве $(0, x_{p2})$. Уравнение (1.1.24) имеет единственное решение $M_r(x_{p1}, r_L)$ на множестве $((x)_+, x_{p1})$. Тогда синтез оптимального

управления и спрос на потребительский кредит повторяют тип поведения заемщиков 3. В случае $x \geq x_{p1}$ потребительский кредит не заимствуется.

Рынок потребительского кредита является несовершенным рынком, на котором домашние хозяйства предъявляют спрос на кредит, а коммерческие банки предоставляют кредит. Формирование процентной ставки на рынке потребительского кредита моделируется с помощью равновесия по Штакельбергу. Коммерческие банки, оценив зависимость спроса на кредит в зависимости от процентной ставки, устанавливают процент по потребительскому кредиту на уровне, который максимизирует их прибыль с учетом рисков невозврата кредита.

Основной формой потребительского кредита является кредит с аннуитетным платежом. Пусть как и раньше r_L — месячная ставка по вновь выдаваемому кредиту, \hat{T} — срок кредита, исчисляемый в месяцах. Задолженность по кредиту равна $\hat{H}_L(r_L)e^{r_L\hat{T}}$, где $\hat{H}_L(r_L)$ — текущий спрос на кредит, вычисляемый как суммарный спрос со стороны четырех типов заемщиков. Аннуитетный платеж A можно найти из уравнения

$$\hat{H}_L(r_L)e^{r_L\hat{T}} = A \int_0^{\hat{T}} e^{r_L(\hat{T}-t)} dt,$$

откуда

$$A = \frac{r_L}{1 - e^{-r_L\hat{T}}} \hat{H}_L(r_L).$$

С точки зрения коммерческих банков доходы заемщиков $S(t)$ не являются стабильными. Будем предполагать, что коммерческие банки моделируют доходы заемщика с помощью стохастического дифференциального уравнения геометрического броуновского движения

$$dS = S\gamma dt + \sigma S dW(t),$$

$$S(0) = S_0,$$

где γ — темп роста доходов, $W(t)$ — винеровский процесс, $\sigma > 0$ — параметр волатильности. Обозначим через τ момент времени, когда заемщик не сможет выполнять обязательства по аннуитетному платежу. Предположим, что заемщик объявляет дефолт по кредиту, если его доход не позволяет осуществлять аннуитетный платеж A и потребительские расходы на минимальном уровне μ , т.е.

$$\tau = \min \left(\inf_t \{S(t) < A + \mu\}, \hat{T} \right).$$

Поскольку доход заемщика является случайным процессом, величина $\tau \in (0, \hat{T})$ является случайным моментом останова. Коммерческие банки устанавливают процентную ставку по потребительскому кредиту, максимизируя математическое ожидание чистой приведенной

прибыли (NPV), т.е.

$$\begin{aligned} NPV(r_L) &= \mathbb{E}_\tau \left(A \int_0^\tau e^{-\lambda t} dt - \hat{H}_L(r_L) \right) = \\ &= \mathbb{E}_\tau \left(\left(\frac{r_L (1 - e^{-\lambda \tau})}{\lambda (1 - e^{-r_L \hat{T}})} - 1 \right) \hat{H}_L(r_L) \right) \rightarrow \max_{r_L}, \quad (1.2.1) \end{aligned}$$

где λ — коэффициент дисконтирования финансовых потоков банками, который равен стоимости фондирования расходов для коммерческих банков.

Обозначим $a = \frac{\sigma^2}{2}$. Пусть, также $(b)_- = \min \{b, 0\}$, $\forall b \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\tau e^{-\lambda \tau} &= e^{-\lambda \hat{T}} + \frac{1}{\pi} e^{-\lambda \hat{T}} \int_0^{\hat{T}} \frac{1}{\sqrt{\hat{T} - s}} \exp \left(- \frac{\left((\gamma - a^2) (\hat{T} - s) - \left[\ln \frac{A + \mu}{S_0} \right]_- \right)^2}{4a^2 (\hat{T} - s)} \right) \cdot \\ &\cdot \int_0^{\sqrt{s}} \exp \left(- \frac{(\gamma - a^2)^2}{4a^2} \xi^2 \right) \left[\left(2\lambda + \frac{(\gamma - a^2)^2}{2a^2} \right) \exp(\lambda (s - \xi^2)) - \frac{(\gamma - a^2)^2}{2a^2} \right] d\xi ds. \quad (1.2.2) \end{aligned}$$

Доказательство. Стохастическое дифференциальное уравнение

$$dS = S\gamma dt + \sigma S dW(t),$$

$$S(0) = S_0$$

имеет сильное решение (см. с. 364 в [18]):

$$S(t) = S_0 e^{(\gamma - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}.$$

Откуда следует, что

$$\tau = \min \left(\hat{T}, \inf_{t \geq 0} \left\{ \sigma W(t) < \ln \frac{A + \mu}{S_0} - \left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} \right).$$

Пусть $x = \ln \frac{S}{S_0}$. Введем следующие обозначения:

$$W_t^x = x + \sigma W(t),$$

$$\tau_x^\theta = \min \left(\theta, \inf_{t \geq 0} \left\{ W_t^x < \ln \frac{A + \mu}{S_0} - \left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} \right),$$

$$u(t, S) = \mathbb{E} e^{-\lambda \tau \frac{\hat{T}-t}{\ln \frac{S}{S_0}}}.$$

Тогда $\mathbb{E}_\tau e^{-\lambda \tau} = u(0, S_0)$. По формуле Фейнмана–Каца (см. [72]) имеем, что $u(t, S)$ является решением следующей краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, S) + S\gamma \frac{\partial u}{\partial S}(t, S) + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(t, S) = 0,$$

$$S \in [A + \mu), +\infty),$$

$$u(\hat{T}, S) = e^{-\lambda \hat{T}},$$

$$u(t, A + \mu) = e^{-\lambda t}.$$

Обозначим $k(\tau, y) = u\left(\hat{T} - \tau, S_0 \exp\left[y + \left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\hat{T} - \tau)\right]\right)$. Тогда

$$\frac{\partial k}{\partial \tau}(\tau, y) - a^2 \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}(\tau, y) = 0, \quad (1.2.3)$$

$$k(0, y) = e^{-\lambda \hat{T}}, \quad \text{при } y \geq \left[\ln \frac{A + \mu}{S_0}\right]_- - (\gamma - a^2) \hat{T}, \quad (1.2.4)$$

$$k\left(\tau, \left[\ln \frac{A + \mu}{S_0}\right]_- - (\gamma - a^2)(\hat{T} - \tau)\right) = e^{-\lambda(\hat{T} - \tau)}. \quad (1.2.5)$$

Задача (1.2.3), (1.2.4), (1.2.5) эквивалентна задаче Коши для уравнения теплопроводности с внешним источником

$$\frac{\partial k}{\partial \tau}(\tau, y) - a^2 \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}(\tau, y) = \psi(\tau) \delta\left(y - \left[\ln \frac{A + \mu}{S_0}\right]_- + (\gamma - a^2)(\hat{T} - \tau)\right),$$

$$k(0, y) = e^{-\lambda \hat{T}}, \quad y \in \mathbb{R},$$

где $\psi(\tau)$ является решением уравнения Абеля

$$\int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau - s}} \exp\left(\frac{(\gamma - a^2)^2 s}{4a^2}\right) \psi(s) ds = 2a\sqrt{\pi} \left(e^{-\lambda(\hat{T} - \tau)} - e^{-\lambda \hat{T}}\right) \cdot \exp\left(\frac{(\gamma - a^2)^2 \tau}{4a^2}\right),$$

откуда

$$\begin{aligned} \psi(s) = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda \hat{T}} \int_0^{\sqrt{s}} \exp\left(-\frac{(\gamma - a^2)^2 \xi^2}{4a^2}\right) \cdot \left[\left(2\lambda + \frac{(\gamma - a^2)^2}{2a^2}\right) \exp(\lambda(s - \xi^2)) - \frac{(\gamma - a^2)^2}{2a^2} \right] d\xi. \end{aligned}$$

Тогда, по формуле Пуассона, получаем

$$k(\tau, y) = e^{-\lambda\hat{\tau}} + \frac{1}{\pi} e^{-\lambda\hat{\tau}} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau-s}} \exp \left(-\frac{\left(y - \left[\ln \frac{A+\mu}{S_0} \right]_- + (\gamma - a^2) (\hat{T} - s) \right)^2}{4a^2(\tau-s)} \right) \cdot \int_0^{\sqrt{s}} \exp \left(-\frac{(\gamma - a^2)^2}{4a^2} \xi^2 \right) \left[\left(2\lambda + \frac{(\gamma - a^2)^2}{2a^2} \right) \exp(\lambda(s - \xi^2)) - \frac{(\gamma - a^2)^2}{2a^2} \right] d\xi ds. \quad (1.2.6)$$

С учетом введенной замены, получаем, что $u(0, S_0) = k(\hat{T}, 0)$. Подставляя $\tau = \hat{T}$, $y = 0$ в формулу (1.2.6), имеем

$$k(\hat{T}, 0) = e^{-\lambda\hat{T}} + \frac{1}{\pi} e^{-\lambda\hat{T}} \int_0^{\hat{T}} \frac{1}{\sqrt{\hat{T}-s}} \exp \left(-\frac{\left((\gamma - a^2) (\hat{T} - s) - \left[\ln \frac{A+\mu}{S_0} \right]_- \right)^2}{4a^2 (\hat{T} - s)} \right) \cdot \int_0^{\sqrt{s}} \exp \left(-\frac{(\gamma - a^2)^2}{4a^2} \xi^2 \right) \left[\left(2\lambda + \frac{(\gamma - a^2)^2}{2a^2} \right) \exp(\lambda(s - \xi^2)) - \frac{(\gamma - a^2)^2}{2a^2} \right] d\xi ds,$$

что доказывает справедливость формулы (1.2.2) и завершает доказательство Теоремы 4. \square

Мы используем средневзвешенную ставку по потребительскому кредиту в качестве параметра модели, поэтому считаем, что репрезентативное домашнее хозяйство осуществляет займ по потребительскому кредиту под процент \tilde{r}_L , где

$$\frac{d\tilde{r}_L}{dt} = (r_L - \tilde{r}_L) \cdot \frac{\hat{H}_L(r_L)}{M(x; r_L, \gamma, \theta, \alpha, \delta)},$$

а r_L является максимумом чистой приведенной прибыли (1.2.1).

1.3 Групповое поведение домашних хозяйств

В условиях нестабильной рыночной ситуации актуальны модели, которые позволяют анализировать групповое поведение большого количества домашних хозяйств. Исследование поведения большого количества домашних хозяйств в рамках социального слоя позволяет более качественно отслеживать экономическую динамику. В основе построения такого рода моделей лежит концепция игр среднего поля. Цели, управленческие решения, которые принимают домашние хозяйства описываются уравнением Гамильтона–Якоби–Беллмана. Уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка описывает динамику плотности распределения домашних хо-

зайств по двум характеристикам: финансовому состоянию и доходам.

Мы полагаем, что доходы домашнего хозяйства S являются стохастическим процессом и описываются стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS = S(\gamma dt + \sigma_0 dW(t)), \quad S(0) = s_0, \quad (1.3.1)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, как и раньше, характеризует темп роста доходов, $dW(t)$ — стохастический дифференциал винеровского процесса $W(t)$, $\sigma_0 \geq 0$, $s_0 > 0$. Динамика финансового состояния домашнего хозяйства (см. параграф 1.1) описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = S - \gamma x - \frac{1}{\theta} M - r_L (M - x)_+ + r_D (x - M)_+, \quad x(0) = x_0. \quad (1.3.2)$$

Таким образом, экономическое поведение домашнего хозяйства описывается динамической системой (1.3.1), (1.3.2). Применяя формулу дифференцирования Ито [96], получаем, что доходы домашнего хозяйства описываются случайным процессом

$$S(t) = s_0 e^{\left(\gamma - \frac{\sigma_0^2}{2}\right)t + \sigma_0 W(t)},$$

а финансовое состояние описывается случайным процессом (при условии, что домохозяйство направляет доходы на погашение задолженности по потребительскому кредиту)

$$x(t) = x_0 e^{r_L t} + s_0 e^{r_L t} \int_0^t e^{\left(\gamma - r_L - \frac{\sigma_0^2}{2}\right)\tau + \sigma_0 W(\tau)} d\tau.$$

Как и раньше, мы полагаем, что финансовое состояние x_0 домашнего хозяйства остается ликвидным к моменту времени $t = T$, если $\mathbb{E}(x(T)) \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x(T)) &= x_0 e^{r_L T} + s_0 e^{r_L T} \int_0^T e^{\left(\gamma - r_L - \frac{\sigma_0^2}{2}\right)\tau + \sigma_0 W(\tau)} d\tau = \\ &= x_0 e^{r_L T} + s_0 e^{r_L T} \int_0^T e^{(\gamma - r_L)\tau} d\tau = x_0 e^{r_L T} + s_0 e^{r_L T} \frac{1}{r_L - \gamma} (1 - e^{(\gamma - r_L)T}). \end{aligned}$$

Как и раньше, положим $r_L > \gamma$, $\delta > ((1 - \rho)r_L)_+$. Будем говорить, что финансовое состояние домашнего хозяйства ликвидно, если $\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(x(T)) \geq 0$, т.е. $x_0 \geq -\frac{s_0}{r_L - \gamma}$. Мы получаем задачу оптимального управления

$$\mathbb{E} \left(\int_0^{+\infty} \frac{M^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-\delta t} dt \right) \rightarrow \max_{M \geq 0}, \quad (1.3.3)$$

$$\frac{dx}{dt} = S - \frac{1}{\theta}M + r_D(x - M)_+ - r_L(M - x)_+, \quad (1.3.4)$$

$$\text{если } x(t) < -\frac{S(t)}{r_L - \gamma}, \text{ то } M(t) = 0, \quad (1.3.5)$$

$$dS = S(\gamma dt + \sigma_0 dW(t)), \quad (1.3.6)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.3.7)$$

$$S(0) = s_0. \quad (1.3.8)$$

В параграфе 1.1 мы показали существование решения задачи оптимального управления (1.3.3), (1.3.4), (1.3.5), (1.3.6), (1.3.7), (1.3.8) для случая $\sigma_0 = 0$.

1.3.1 Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

Пусть $u(x_0, s_0, 0)$ – оптимальное значение функционала в задаче оптимального управления (1.3.3), (1.3.4), (1.3.5), (1.3.6), (1.3.7), (1.3.8). Выведем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для функции цены $u(x, S, t)$.

1. Если $x > -\frac{S}{r_L - \gamma}$, то

$$\begin{aligned} u(x, S, t) &= \\ &= \max_{M \geq 0} \left\{ \frac{M^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-\delta t} dt + \mathbb{E} \left(u \left(x + Sdt - \frac{1}{\theta}Mdt + r_D(x - M)_+ dt - r_L(M - x)_+ dt, \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. S(1 + \gamma dt + \sigma_0 dW(t)), t + dt \right) \right\} + \bar{o}(dt) = u(x, S, t) + \max_{M \geq 0} \left\{ \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial t} dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial x} \left(Sdt - \frac{1}{\theta}Mdt + r_D(x - M)_+ dt - r_L(M - x)_+ dt \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial S} S\gamma dt + \frac{\sigma_0^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u(x, S, t)}{\partial S^2} dt + \frac{M^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-\delta t} dt \right\} + \bar{o}(dt). \end{aligned}$$

2. Если $x \leq -\frac{S}{r_L - \gamma}$, то

$$\begin{aligned} u(x, S, t) &= \mathbb{E} (u(x + Sdt + r_D(x)_+ dt - r_L(-x)_+ dt, S(1 + \gamma dt + \sigma_0 dW(t)), t + dt)) + \\ &\quad + \bar{o}(dt) = u(x, S, t) + \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial t} dt + \\ &\quad + \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial x} (Sdt + r_D(x)_+ dt - r_L(-x)_+ dt) + \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial S} S\gamma dt + \frac{\sigma_0^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u(x, S, t)}{\partial S^2} dt + \bar{o}(dt). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

1. Если $x > -\frac{S}{r_L - \gamma}$, то

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial t} + \gamma S \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial S} + \frac{\sigma_0^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u(x, S, t)}{\partial S^2} + \\ & + \max_{M \geq 0} \left\{ \frac{M^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-\delta t} + \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial x} \left(S - \frac{1}{\theta} M + r_D (x - M)_+ - r_L (M - x)_+ \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

2. Если $x \leq -\frac{S}{r_L - \gamma}$, то

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial t} + \gamma S \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial S} + \frac{\sigma_0^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u(x, S, t)}{\partial S^2} + \\ & + \frac{\partial u(x, S, t)}{\partial x} (S + r_D (x)_+ - r_L (-x)_+) = 0. \end{aligned}$$

Будем искать автомодельное решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана в виде $u(x, S, t) = S^{1-\rho} e^{-\delta t} v\left(\frac{x}{S}\right)$. Обозначим через $y = \frac{x}{S}$, $N = \frac{M}{S}$. Таким образом, мы получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\delta u, \quad \frac{\partial u}{\partial S} = (1-\rho) \frac{u}{S} - \frac{xu}{S^2 v} \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} = \rho(\rho-1) \frac{u}{S^2} + 2\rho \frac{yu}{S^2 v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{y^2 u}{S^2 v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{Sv} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

1. Если $y > -\frac{1}{r_L - \gamma}$, то уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана принимает вид

$$\begin{aligned} & - \left(\delta + (1-\rho)\gamma - \frac{\sigma_0^2}{2} \rho(\rho-1) \right) v(y) - (\gamma - \sigma_0^2 \rho) y \frac{dv(y)}{dy} + \frac{\sigma_0^2}{2} y^2 \frac{d^2 v(y)}{dy^2} + \\ & + \max \left\{ \frac{N^{1-\rho}}{1-\rho} + \frac{dv(y)}{dy} \left(1 - \frac{1}{\theta} N + r_D (y - N)_+ - r_L (N - y)_+ \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

2. Если $y \leq -\frac{1}{r_L - \gamma}$, то

$$- \left(\delta + (1-\rho)\gamma - \frac{\sigma_0^2}{2} \rho(1-\rho) \right) v(y) + (1 + r_L y - \gamma y + \sigma_0^2 \rho y) \frac{dv(y)}{dy} + \frac{\sigma_0^2}{2} y^2 \frac{d^2 v(y)}{dy^2} = 0.$$

Пусть $\delta_0 = \delta + (1-\rho)\gamma - \frac{\sigma_0^2}{2} \rho(\rho-1)$, $\gamma_0 = \gamma - \sigma_0^2 \rho$. Тогда

1. Если $y > -\frac{1}{r_L - \gamma}$, то уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\begin{aligned} & - \delta_0 v(y) - \gamma_0 y \frac{dv(y)}{dy} + \frac{\sigma_0^2}{2} y^2 \frac{d^2 v(y)}{dy^2} + \\ & + \max \left\{ \frac{N^{1-\rho}}{1-\rho} + \frac{dv(y)}{dy} \left(1 - \frac{1}{\theta} N + r_D (y - N)_+ - r_L (N - y)_+ \right) \right\} = 0. \quad (1.3.9) \end{aligned}$$

2. Если $y \leq -\frac{1}{r_L - \gamma}$, то

$$-\delta_0 v(y) + (1 + r_L y - \gamma y + \sigma_0^2 \rho y) \frac{dv(y)}{dy} + \frac{\sigma_0^2}{2} y^2 \frac{d^2 v(y)}{dy^2} = 0. \quad (1.3.10)$$

Замечание 3. Автомодельное уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (1.3.9), (1.3.10) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, удовлетворяющее условиям $\lim_{y \rightarrow -\frac{1}{r_L - \gamma} + 0} v(y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow -\frac{1}{r_L - \gamma} + 0} \frac{dv(y)}{dy} = +\infty$.

Решение автомодельного уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (1.3.9), (1.3.10) позволяет построить синтез оптимального управления $N(y)$. Если $\frac{1+r_L\theta}{\theta} \frac{dv(y)}{dy} \geq y^{-\rho} \geq \frac{1+r_D\theta}{\alpha\theta} \frac{dv(y)}{dy}$, то домашние хозяйства не взаимодействуют с коммерческими банками, $N(y) = y$. Если $\frac{1+r_L\theta}{\theta} \frac{dv(y)}{dy} < y^{-\rho}$, то домашние хозяйства осуществляют заимствования по потребительскому кредиту, $N(y) = \left(\frac{1+r_L\theta}{\theta} \frac{dv(y)}{dy}\right)^{\frac{1}{-\rho}}$. Если $\frac{1+r_D\theta}{\theta} \frac{dv(y)}{dy} > y^{-\rho}$, то домашние хозяйства сберегают в форме депозитов, $N(y) = \left(\frac{1+r_D\theta}{\theta} \frac{dv(y)}{dy}\right)^{\frac{1}{-\rho}}$. Уравнение $\frac{1+r_L\theta}{\theta} \frac{dv(y)}{dy} = y^{-\rho}$ имеет единственное решение y_L и уравнение $\frac{1+r_D\theta}{\theta} \frac{dv(y)}{dy} = y^{-\rho}$ имеет единственное решение y_D в случае $\sigma_0 = 0$. Более того, $y_D \geq y_L$. Синтез оптимального управления

$$N(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq -\frac{1}{r_L - \gamma}, \\ \left(\frac{1+r_L\theta}{\theta} \frac{dv(y)}{dy}\right)^{\frac{1}{-\rho}}, & \text{если } y_L > y > -\frac{1}{r_L - \gamma}, \\ y, & \text{если } y_L \leq y \leq y_D, \\ \left(\frac{1+r_D\theta}{\theta} \frac{dv(y)}{dy}\right)^{\frac{1}{-\rho}}, & \text{если } y_D < y. \end{cases}$$

1.3.2 Уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка

Будем полагать, что коэффициент диффузии доходов домашних хозяйств σ_0 является ожидаемым, в то время как реальный коэффициент диффузии доходов σ может отличаться от σ_0 . Таким образом, домашние хозяйства принимают решения полагаясь на описание их доходов уравнением (1.3.1), в то время как реальная динамика изменения доходов описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS = S(\gamma(x, S, t)dt + \sigma(x, S, t)dW(t)), \quad S(0) = s_0.$$

Пусть $m(x, S, t)$ описывает плотность распределения домашних хозяйств по финансовым состояниям x и доходам S в момент времени t . Выведем уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка, которое описывает эволюцию плотности распределения $m(x, S, t)$. Пусть $g(x, S)$ — произвольная гладкая функция с компактным носителем на $(-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$. Ее среднее

значение в момент времени t вычисляется по формуле

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, S, t) g(x, S) dx dS.$$

В момент времени $t + dt$ мы получаем балансовое уравнение

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, S, t + dt) g(x, S) dx dS &= \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, S, t) \mathbb{E}(g(x + dx, S + dS)) dx dS + \bar{o}(dt). \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Левую часть уравнения (1.3.11) можно записать в виде

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, S, t + dt) g(x, S) dx dS = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(m(x, S, t) + \frac{\partial m(x, S, t)}{\partial t} dt \right) g(x, S) dx dS + \bar{o}(dt).$$

Применяя формулу Ито [96], получаем, что выражение $\mathbb{E}(g(x + dx, S + dS))$ в правой части балансового уравнения (1.3.11) соответствует

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(x + dx, S + dS)) &= \mathbb{E}g \left\{ x + \left(S - \gamma(x, S, t)x - \frac{1}{\theta}M(x, S) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r_D(x, S, t)(x - M(x, S))_+ - r_L(x, S, t)(M(x, S) - x)_+ \right) dt, S(1 + \gamma(x, S, t)dt + \sigma dW) \right\} = \\ &= g(x, S) + \frac{\partial g(x, S)}{\partial x} \left(S - \gamma(x, S, t)x - \frac{1}{\theta}M(x, S) + \right. \\ &\quad \left. + r_D(x, S, t)(x - M(x, S))_+ - r_L(x, S, t)(M(x, S) - x)_+ \right) dt + \\ &\quad + \gamma(x, S, t)S \frac{\partial g(x, S)}{\partial S} dt + \frac{\sigma^2(x, S, t)}{2} \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 g(x, S)}{\partial S^2} dt + \bar{o}(dt). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, S, t) \mathbb{E} \left(g \left(x + dx, S + \frac{dS}{dt} dt \right) \right) dx dS &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, S, t) \left\{ g(x, S) + \frac{\partial g(x, S)}{\partial x} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left(S - \gamma(x, S, t)x - \frac{1}{\theta}M(x, S) + r_D(x, S, t)(x - M(x, S))_+ - r_L(x, S, t)(M(x, S) - x)_+ \right) dt + \\ &\quad \left. + \gamma(x, S, t)S \frac{\partial g(x, S)}{\partial S} dt + \frac{\sigma^2(x, S, t)}{2} \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 g(x, S)}{\partial S^2} dt \right\} dx dS + \bar{o}(dt). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям последнее выражение, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, S, t) \mathbb{E} \left(g \left(x + dx, S + \frac{dS}{dt} dt \right) \right) dx dS = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m(x, S, t) g(x, S) dx dS + \\
& + \left\{ \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma^2(x, S, t) S^2 m(x, S, t))}{\partial S^2} - \frac{\partial (\gamma(x, S, t) S m(x, S, t))}{\partial S} \right) g(x, S) dx dS \right\} dt + \\
& + \left\{ \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(m(x, S, t) \left(S - \gamma(x, S, t) x - \frac{1}{\theta} M(x, S) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + r_D(x, S, t) (x - M(x, S))_+ - r_L(x, S, t) (M(x, S) - x)_+ \right) \right) \cdot g(x, S) dx dS \right\} dt + \bar{o}(dt).
\end{aligned}$$

Откуда,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial m(x, S, t)}{\partial t} g(x, S) dx dS = \\
& = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma^2(x, S, t) S^2 m(x, S, t))}{\partial S^2} - \frac{\partial (\gamma(x, S, t) S m(x, S, t))}{\partial S} \right) g(x, S) dx dS + \\
& + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(m(x, S, t) \left(S - \gamma(x, S, t) x - \frac{1}{\theta} M(x, S) + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + r_D(x, S, t) (x - M(x, S))_+ - r_L(x, S, t) (M(x, S) - x)_+ \right) \right) \cdot g(x, S) dx dS.
\end{aligned}$$

Так как функция $g(x, S)$ произвольная, то в соответствии с леммой Дю Буа-Реймона [59], мы получаем уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial m(x, S, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (\sigma^2(x, S, t) S^2 m(x, S, t)) + \\
& + \frac{\partial}{\partial S} (S m(x, S, t) \gamma(x, S, t)) + \frac{\partial}{\partial x} (m(x, S, t) f(x, S, t)) = 0, \quad (1.3.12)
\end{aligned}$$

с начальным условием

$$m(x, S, 0) = m_0(x, S), \quad (1.3.13)$$

где

$$f(x, S, t) = S - \gamma(x, S, t) x - \frac{1}{\theta} M(x, S) - r_L(x, S, t) (M(x, S) - x)_+ + r_D(x, S, t) (x - M(x, S))_+.$$

Замечание 4. Отметим, что $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} m(x, S, t) dS dx = C, \forall t \in [0, T]$ в уравнении (1.3.12), $C > 0$.

Чтобы приступить к решению уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (1.3.12), (1.3.13), необходимо для начала получить решение в виде синтеза $M = M(x, S)$ из уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана при $T \rightarrow +\infty$ (1.3.9), (1.3.10) и затем подставить его в уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка (1.3.12), (1.3.13). Данный алгоритм вычислительно сложен. Чтобы избежать численные трудности, мы полагаем, что ожидаемый коэффициент диффузии доходов домашних хозяйств $\sigma_0 = 0$. Тогда синтез оптимального управления описывается Теоремой 3 из параграфа 1.1.

1.3.3 Численное решение уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка

Для численного решения дифференциального уравнения (1.3.12) с начальным условием (1.3.13) разработаны специальные разностные схемы, в основе которых лежит противопоточная схема Годунова первого порядка. Ограничим множество финансовых состояний x и множество доходов S . Пусть $x \in [-L_1, L_2]$, $S \in [S_1, S_2]$, где $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, $S_2 > S_1 \geq 0$. Разобьем диапазон финансовых состояний на $M + 1$ узлов, диапазон доходов на $H + 1$ узлов, временной отрезок на $N + 1$ узлов. Будем полагать, что все разбиения равномерны. Определим длины отрезков: $\Delta x = \frac{L_1 + L_2}{M}$, $\Delta S = \frac{S_2 - S_1}{H}$, $\Delta t = \frac{T}{N}$. Для адвективной части уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (1.3.12) мы используем противопоточную схему Годунова первого порядка. Разностные схемы такого вида были успешно применены в [83].

Будем придерживаться следующих обозначений. Пусть $m_{j,k}^i$ характеризует значение функции $m(x, S, t)$ в точке $(j\Delta x, k\Delta S, i\Delta t)$, $j = \overline{1, M-1}$, $k = \overline{1, H-1}$, $i = \overline{0, N}$. Разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (1.3.12) представляется в виде

$$\begin{aligned} m_{j,k}^{i+1} = & m_{j,k}^i + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} \left(m_{j,k+1}^i S_{k+1}^2 (\sigma_{j,k+1}^i)^2 - 2m_{j,k}^i S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 + m_{j,k-1}^i S_{k-1}^2 (\sigma_{j,k-1}^i)^2 \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta S} \left(m_{j,k+\frac{1}{2}}^i S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i - m_{j,k-\frac{1}{2}}^i S_{k-\frac{1}{2}} \gamma_{j,k-\frac{1}{2}}^i \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(m_{j+\frac{1}{2},k}^i f_{j+\frac{1}{2},k}^i - m_{j-\frac{1}{2},k}^i f_{j-\frac{1}{2},k}^i \right), \quad j = \overline{2, M-2}, k = \overline{2, H-2}, i = \overline{0, N-1}, \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

где

$$\begin{aligned} m_{j,k+\frac{1}{2}}^i &= \begin{cases} m_{j,k+1}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i < 0, \\ m_{j,k}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \geq 0, \end{cases} \\ m_{j+\frac{1}{2},k}^i &= \begin{cases} m_{j+1,k}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} f_{j+\frac{1}{2},k}^i < 0, \\ m_{j,k}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} f_{j+\frac{1}{2},k}^i \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Мы накладываем гомогенные условия Неймана на границе области: $f_{\frac{1}{2},k}^i = f_{M-1+\frac{1}{2},k}^i = \gamma_{j,\frac{1}{2}}^i = \gamma_{j,H-1+\frac{1}{2}}^i = 0$, и граничные условия $m_{j,1}^i = m_{j,H-1}^i = m_{1,k}^i = m_{M-1,k}^i = 0$, где $j = \overline{1, M-1}$, $k = \overline{1, H-1}$, $i = \overline{0, N-1}$.

Схематично, разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка представляется в следующем виде (см. Рис.1.25).

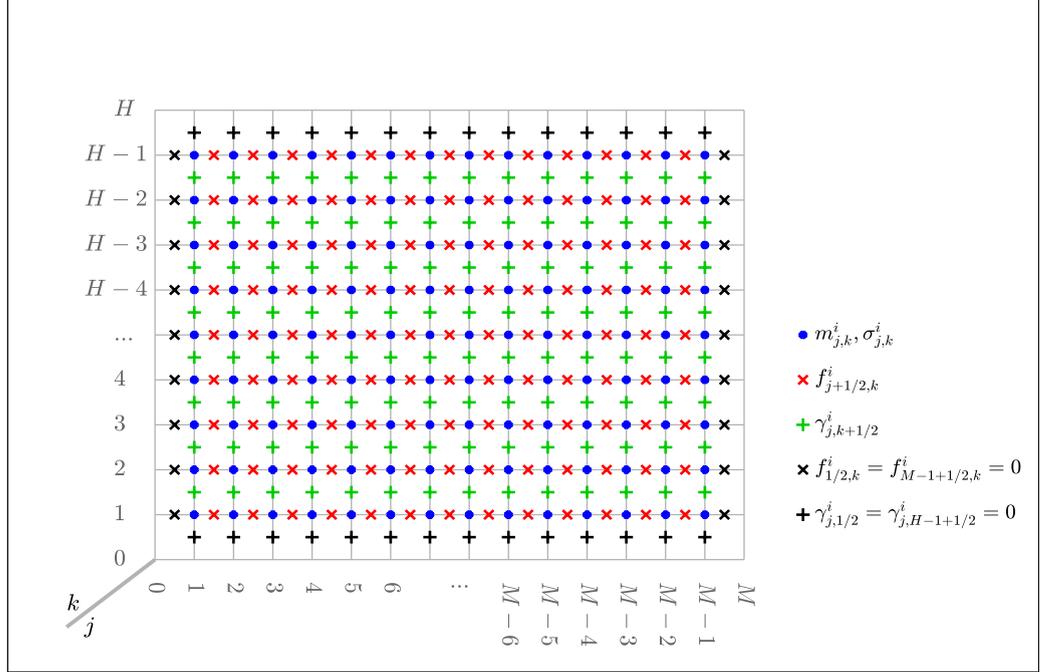


Рис. 1.25: Разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка.

Естественным требованием является неотрицательность плотности распределения. Выполнение этого требования можно обеспечить за счет условий из следующей Леммы.

Лемма 8. Пусть $m^i \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (H-1)}$ является матрицей с неотрицательными компонентами. Пусть $\tilde{\sigma} = \max_{i \in I, j \in J, k \in K} \sigma_{j,k}^i$, где $I \in \{0, \dots, N-1\}$, $J \in \{1, \dots, M-1\}$, $K \in \{1, \dots, H-1\}$.

Если выполнены ограничения (1.3.15), (1.3.16) на $f_{j+\frac{1}{2},k}^i$, $j = \overline{1, M-2}$, $k \in K$, $i \in I$, и $\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i$, $j \in J$, $k = \overline{1, H-2}$, $i \in I$, тогда матрица $m^{i+1} \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (H-1)}$ состоит из неотрицательных элементов,

$$\frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{2\Delta t} \right) \leq f_{j+\frac{1}{2},k}^i \leq \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} S_k^2 \right), \quad (1.3.15)$$

$$\frac{\Delta S}{2S_{k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} \hat{S}_{k+1}^2 - \frac{1}{2\Delta t} \right) \leq \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \leq \frac{\Delta S}{2S_{k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} \hat{S}_{k+1}^2 \right), \quad (1.3.16)$$

где $\hat{S}_{k+1} = \min \{S_{k+1}, S_2\}$.

Доказательство. Зафиксируем i, j, k . Нам необходимо показать, что компоненты $m_{j-1,k}^i, m_{j,k+1}^i, m_{j,k}^i, m_{j,k-1}^i, m_{j+1,k}^i$ являются неотрицательными величинами. Для этого необходимо рассмотреть всевозможные комбинации знаков величин $f_{j+\frac{1}{2},k}^i, f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i, \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i, \gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i$. Легко видеть, что величины $f_{j+\frac{1}{2},k}^i, f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i$ соответствуют компонентам $m_{j-1,k}^i, m_{j,k}^i, m_{j+1,k}^i$ в зависимости от своих знаков, тогда как величины $\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i, \gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i$ соответствуют компонентам $m_{j,k-1}^i, m_{j,k}^i, m_{j,k+1}^i$.

При компонентах $m_{j-1,k}^i, m_{j,k+1}^i, m_{j,k-1}^i, m_{j+1,k}^i$ знаки величин $f_{j+\frac{1}{2},k}^i, f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i, \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i, \gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i$, входящие со своими множителями в уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка (1.3.14) положительны (например, если $f_{j+\frac{1}{2},k}^i < 0$, тогда эта величина соответствует узлу $m_{j+1,k}^i$ и входит со множителем $-\frac{\Delta t}{\Delta x} < 0$, таким образом, знак в узле $m_{j+1,k}^i$ положителен).

Прежде чем переходить к рассмотрению значения $m_{j,k}^i$ в центральном узле (i, j, k) , рассмотрим подробнее лапласиан в уравнении (1.3.14). Обозначим

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_{k+1}^2 (\sigma_{j,k+1}^i)^2, \\ \varphi_2 &= 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2, \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_{k-1}^2 (\sigma_{j,k-1}^i)^2.\end{aligned}$$

Очевидно, что $\varphi_1 \geq 0, \varphi_3 \geq 0$. Величина $\varphi_2 \geq 0$ в соответствии с условиями Куранта о сходимости явной разностной схемы параболического уравнения (1.3.14) (см. [10]). Мы накладываем ограничения Куранта в виде $\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_2^2 < \frac{1}{2}$, где S_2 является правой границей диапазона S .

Теперь рассмотрим центральный узел (i, j, k) . Если мы докажем, что значение $m_{j,k}^i$ является неотрицательным для случая $f_{j+\frac{1}{2},k}^i > 0, f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i < 0, \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i > 0, \gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i < 0$, тогда для других возможных случаев сочетания знаков величин $f_{j+\frac{1}{2},k}^i, f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i, \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i, \gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i$ значение $m_{j,k}^i$ также будет неотрицательным. Рассмотрим компоненты $m_{j,k}^i$ для данного случая для узла (i, j, k) . Согласно ограничениям (1.3.15), (1.3.16) мы получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}& 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 - \frac{\Delta t}{\Delta S} S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i + \frac{\Delta t}{\Delta S} S_{k-1+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i - \frac{\Delta t}{\Delta x} f_{j+\frac{1}{2},k}^i + \frac{\Delta t}{\Delta x} f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \geq \\ & \geq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} \hat{S}_{k+1}^2 \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} \hat{S}_k^2 - \frac{1}{2\Delta t} \right) - \\ & \quad - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{1}{2\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} S_k^2 \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{2\Delta t} \right) = \\ & = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 - \frac{1}{4} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} \hat{S}_{k+1}^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} \hat{S}_k^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{4} \geq \\ & \geq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 - \frac{1}{4} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{4} \geq \\ & \geq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 \tilde{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}^2 \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 - 1 = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что значения коэффициентов соответствующие компонентам $m_{j-1,k}^i$, $m_{j,k+1}^i$, $m_{j,k}^i$, $m_{j,k-1}^i$, $m_{j+1,k}^i$ при ограничениях (1.3.15), (1.3.16) являются неотрицательными. Лемма 8 доказана. \square

Проведем численные результаты решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (1.3.12), (1.3.13). В качестве единицы измерения времени выбран 1 мес., денежные единицы измеряются в тыс.руб. Зафиксируем поведенческие характеристики домашних хозяйств $\rho = 0.2$, $\theta = 2$, $\delta = 0.0181$. Пусть $L_1 = 700$, $L_2 = 100$, $S_1 = 0$, $S_2 = 30$, $M = 1000$, $H = 300$, $N = 30000$, $T = 5$, $\sigma = 0.2$, $\gamma = 0$. Для построения начальной плотности распределения воспользуемся статистическими данными ОБДХ [23]. По данным статистики ОБДХ, выделим обеспеченных заемщиков из средней группы регионов России (см. Прил.А) по состоянию на март 2015г. Проведем тестовый расчет эволюции плотности распределения домашних хозяйств на временном периоде с марта 2015г по декабрь 2022г, рассматривая исторические данные процентных ставок по потребительским кредитам.

Пусть $C_{\min}(t)$, $t \in [0, T]$ — минимальное потребление на душу. Обозначим через

$$\Omega_A(t) = \left\{ (x, S) : x \leq -\frac{S - C_{\min}(t)}{r_L(t) - \gamma} \right\}, t \in [0, T]$$

область банкротства домашних хозяйств. Находясь в области $\Omega_A(t)$ домашние хозяйства не имеют возможности расплатиться с ранее взятыми кредитами при текущих параметрах экономической конъюнктуры. Обозначим через

$$\Omega_B(t) = \left\{ (x, S) : x > -\frac{S - C_{\min}(t)}{r_L(t) - \gamma}, M(x, S) > x \right\}, t \in [0, T]$$

область платежеспособных заемщиков, а через

$$\Omega_C(t) = \left\{ (x, S) : x > -\frac{S - C_{\min}(t)}{r_L(t) - \gamma}, M(x, S) \leq x \right\}, t \in [0, T]$$

область, находясь в которой домашние хозяйства не осуществляют займы по потребительскому кредиту.

Результаты численного моделирования отображены на Рис.1.26,1.27,1.28,1.29. Красным цветом отмечены домашние хозяйства, находящиеся в области $\Omega_A(t)$, синим цветом отмечены домашние хозяйства, находящиеся в области $\Omega_B(t)$, золотистым цветом отмечены домашние хозяйства, находящиеся в области $\Omega_C(t)$. В марте 2022г практически все домашние хозяйства становятся банкротами. Это происходит в результате резкого скачка процентной ставки по потребительскому кредиту. В дальнейшем процентная ставка по потребительскому кредиту для обеспеченный заемщиков начала снижаться, что позволило к концу 2022г снизить число банкротов.

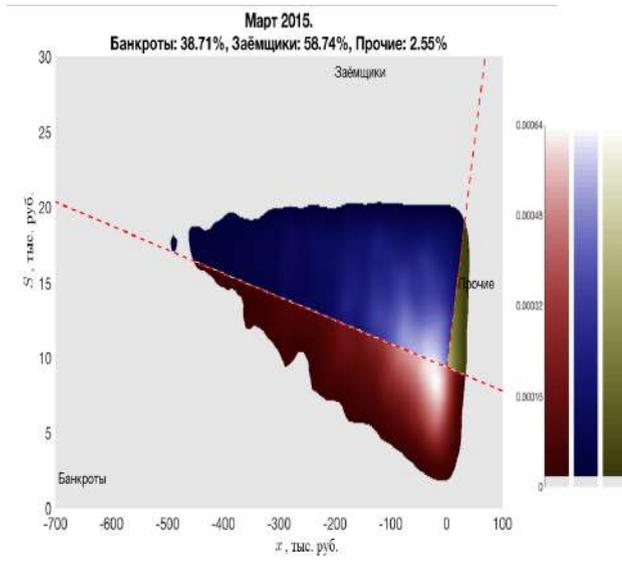


Рис. 1.26: Проекция плотности распределения домашних хозяйств на плоскость (x, S) . Данные на душу в тыс.руб.

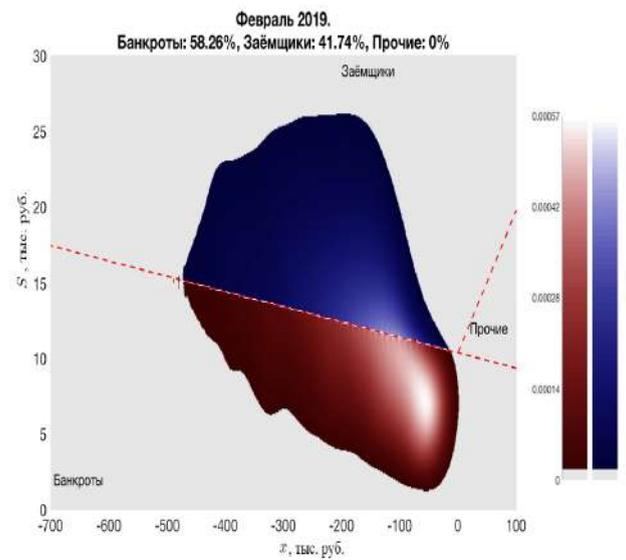


Рис. 1.27: Проекция плотности распределения домашних хозяйств на плоскость (x, S) . Данные на душу в тыс.руб.

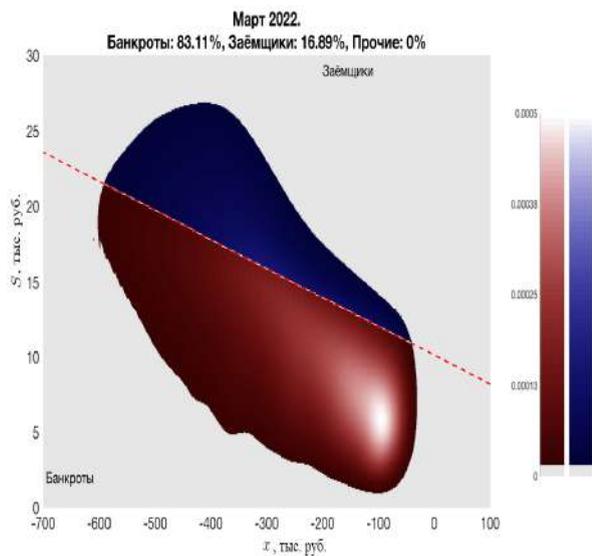


Рис. 1.28: Проекция плотности распределения домашних хозяйств на плоскость (x, S) . Данные на душу в тыс.руб.

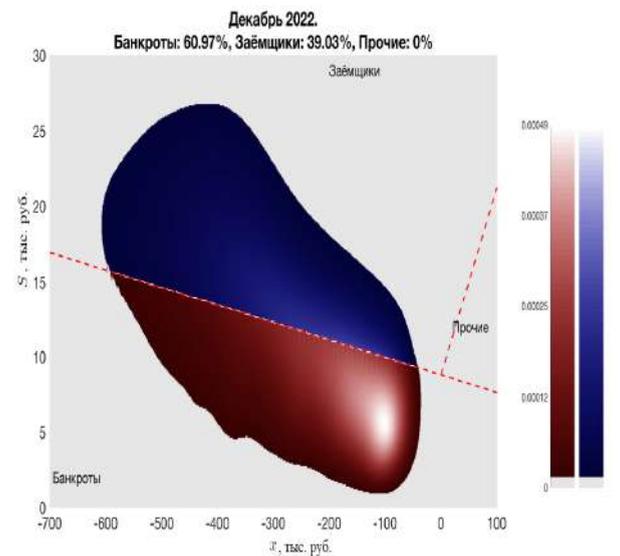


Рис. 1.29: Проекция плотности распределения домашних хозяйств на плоскость (x, S) . Данные на душу в тыс.руб.

Глава 2

Идентификация модели экономического поведения домашних хозяйств

Данная глава посвящена идентификации модели экономического поведения домашних хозяйств по данным российской статистики. Для калибровки модели экономического поведения домашних хозяйств были использованы два корпуса статистики: данные Обследования Бюджетов Домашних Хозяйств (ОБДХ) Росстата [23] и данные Российского Мониторинга Экономического Положения и Здоровья Населения (РМЭЗ НИУ ВШЭ), собираемые Высшей Школой Экономики [30]. Росстат предоставляет ежеквартальную статистику ОБДХ, проводя опрос среди около 50 000 домашних хозяйств, проживающих в 82 регионах России. На основе данных по уровню потребления на душу населения эти регионы были разделены на три группы: богатую, среднюю и бедную (см. Прил.А). Выяснилось, что примерно половина домашних хозяйств, относящихся к бедной группе регионов, проживает в городском типе населенного пункта, а вторая половина в селе. Поскольку стиль жизни в городе отличается от села, то когорта домашних хозяйств из бедной группы регионов была разделена еще на две.

Корпус статистики ОБДХ позволяет выделить заемщиков и прочих домашних хозяйств, не выплачивающих кредит. Статистика ОБДХ не позволяет отделить потребительский кредит от ипотечного кредита среди заемщиков. Чтобы преодолеть эти трудности, заемщики были отсортированы по доходам на душу. В случае если ежемесячные доходы заемщиков были менее k^1 прожиточных минимумов в данной группе регионов, то данное домашнее хозяйство классифицировалось как низкодоходное домашнее хозяйство, имеющее займ по потребительскому кредиту. В случае, если ежемесячные доходы заемщиков превышали стоимость q^1 квадратных метров в данной группе регионов, то данное домашнее хозяйство классифицировалось как домашнее хозяйство, выплачивающее ипотеку. Остальные заемщики классифицировались как высокодоходные домашние хозяйства, имеющие займ по потребительскому кредиту. Так, в бедной группе регионов к низкодоходным заемщикам были отнесены

¹Параметры k , q определены ниже из анализа данных программного комплекса, описанного в Разд. 2.2

те домашние хозяйства, у которых ежемесячные доход на душу был ниже 1.5 прожиточных минимумов, а к выплачивающим ипотеку были отнесены домашние хозяйства, у которых ежемесячные доход на душу был выше стоимости $0.7m^2$. В средней группе регионов к низкодоходным заемщикам были отнесены домашние хозяйства с ежемесячным доходом на душу ниже 1.8 прожиточных минимумов, а к выплачивающим ипотеку были отнесены домашние хозяйства с ежемесячным доходом на душу выше стоимости $0.8m^2$. Наконец, в богатой группе регионов к низкодоходным заемщикам были отнесены домашние хозяйства с ежемесячным доходом на душу ниже 2.5 прожиточных минимумов, а к выплачивающим ипотеку были отнесены домашние хозяйства с ежемесячным доходом на душу выше стоимости $0.6m^2$. Анализируя статистику ОБДХ, можно отметить, что подушевые доходы у высокодоходных заемщиков примерно в 2 раза больше, чем подушевые доходы у низкодоходных заемщиков во всех группах регионов (см. Прил.А). Отличие низкодоходных и высокодоходных заемщиков наблюдается и в составе семьи: в домашних хозяйствах, относящихся к низкодоходным заемщикам, проживает в среднем чуть более 3 человек, тогда как в домашних хозяйствах, относящихся к высокодоходным заемщикам, проживает в среднем чуть более 2 человек. Также, около трети домашнего хозяйства низкодоходных заемщиков составляют дети, в то время как доля детей у высокодоходных заемщиков существенно ниже. Основываясь на этих данных, можно предположить, что преимущественно к необеспеченным заемщикам относятся молодые семьи с детьми.

В отличие от статистических данных ОБДХ, данные РМЭЗ НИУ ВШЭ позволяют выделить заемщиков по потребительским кредитам, автономных домашних хозяйств, сберегающих домашних хозяйств и выплачивающих ипотеку. Недостаток статистических данных РМЭЗ НИУ ВШЭ заключается в объеме выборки: в ежегодном опросе участвуют около 5 000 домашних хозяйств из 39 регионов России (см. Прил.А). Несмотря на это, данные являются репрезентативными: как и в статистике ОБДХ, из статистики РМЭЗ НИУ ВШЭ можно отметить, что подушевые доходы у высокодоходных заемщиков примерно в 2 раза больше, чем подушевые доходы у низкодоходных заемщиков, а состав семьи низкодоходных и высокодоходных заемщиков коррелирует с данными ОБДХ (см. Прил.А).

2.1 Идентификация репрезентативного домашнего хозяйства

Как уже было сказано ранее, параметры модели экономического поведения домашних хозяйств можно разделить на два типа: параметры, относящиеся к поведенческим характеристикам, такие как скорость обращения денег $\frac{1}{\theta}$, отвращение к риску ρ и коэффициент дисконтирования δ , и параметры экономической конъюнктуры, к которым относятся процентные ставки по потребительским кредитам r_L и депозитам r_D , ожидаемые темп роста доходов γ и инфляция j .

Классификация заемщиков в различных группах регионов формирует социальный слой, экономическое поведение которого можно описать репрезентативным домашним хозяйством. Для социального слоя характерен определенный стиль жизни. Исходя из этого, коэффициент отвращения к риску ρ и коэффициент скорости обращения денег $\frac{1}{\theta}$ можно задать константами для данного социального слоя. Коэффициент дисконтирования δ зависит от параметров экономической конъюнктуры. Каждый слой населения характеризуется своими поведенческими параметрами и поэтому моделировался отдельно.

На основании временных рядов доходов, потребления, задолженности, сбережений и денежной массы в различных группах регионов была произведена первоначальная калибровка модели. Параметры θ и ρ были оценены на основе статистических данных РМЭЗ НИУ ВШЭ [30]. Для идентификации коэффициента дисконтирования решаются обратные задачи [14], [28], [29]: на основе исторических данных параметров экономической конъюнктуры, коэффициент δ в каждый момент времени выбирается таким образом, чтобы моделируемое потребление, описываемое синтезом $M(x; S, r_L, r_D, \theta, \rho, \gamma, \delta)$ в Главе 1, совпадало со статистическим потреблением репрезентативного домашнего хозяйства. Результатом идентификации коэффициента дисконтирования является набор значений $\{\delta^i\}_{t=1}^T$, где $T \in \mathbb{N}$ — количество временных узлов на периоде идентификации. По данным значений $\{\delta^i\}_{i=1}^n$ строится регрессионная функция, регрессорами которой являются параметры экономической конъюнктуры. В Прил.А отображены поведенческие параметры социальных слоев, идентифицированные по данным статистики РМЭЗ НИУ ВШЭ на периоде 2016-2020гг и статистики ОБДХ на периоде 2015-2020гг. Обратим внимание, что инфляция и процентные ставки увеличивают коэффициент дисконтирования домашних хозяйств, а рост доходов уменьшает коэффициент дисконтирования.

В автономном слое населения могут находиться домашние хозяйства, которые опасаются сберегать в форме депозитов, предпочитая увеличивать ликвидные средства, а также домашние хозяйства, которым отказано в выдаче потребительского кредита. Поэтому, мы полагаем, что скорость обращения денег у автономных домашних хозяйств также зависит от параметров экономической конъюнктуры. Так, по данным РМЭЗ НИУ ВШЭ, на периоде идентификации с 2016 по 2019гг рост коэффициента θ у автономных домашних хозяйств колебался на уровне от 1.5 до 2.5, а в период пандемии 2020г вырос с 2.5 до 4.5. Вопрос о качестве воспроизводимых поведенческих параметров необходимо проверять на периоде верификации данных, сопоставляя расчетные показатели с историческими данными. Верификация была проведена на периоде 2021г.

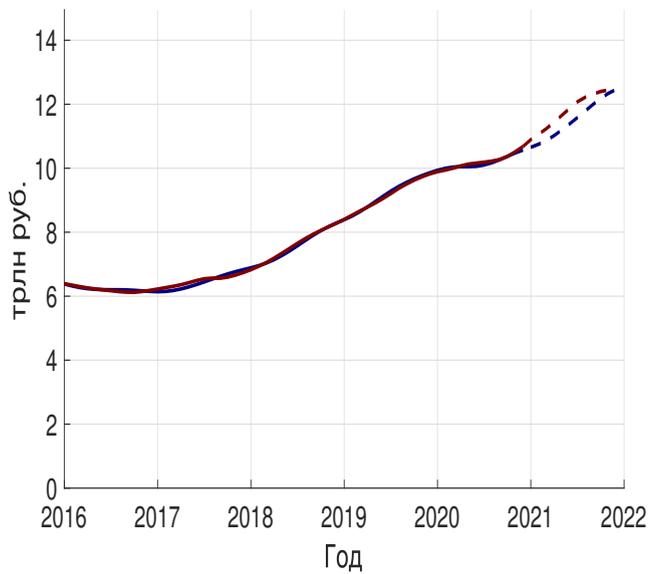


Рис. 2.1: Задолженность по потребительским кредитам. Синяя траектория отражает исторические данные, а красная траектория расчеты по модели. Период идентификации отрисован сплошными кривыми, период верификации отрисован пунктирными линиями.

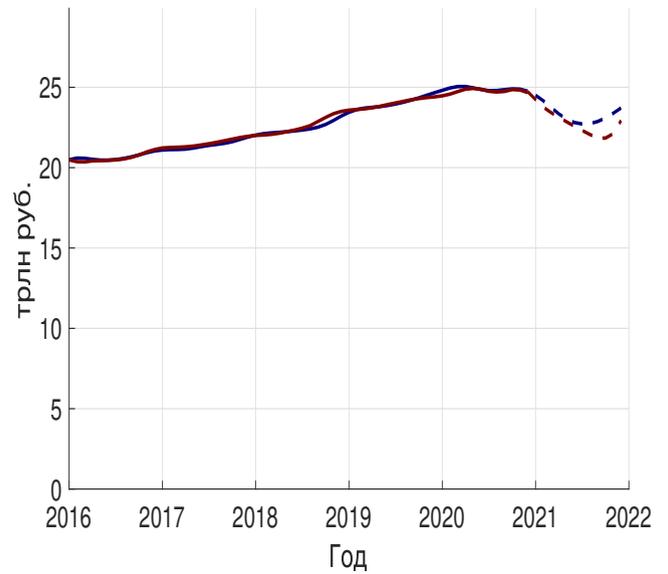


Рис. 2.2: Динамика депозитов. Синяя траектория отражает исторические данные, а красная траектория расчеты по модели. Период идентификации отрисован сплошными кривыми, период верификации отрисован пунктирными линиями.

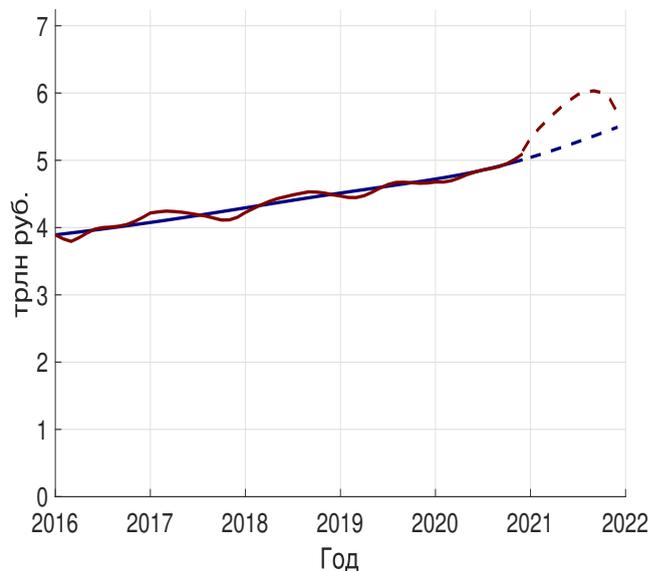


Рис. 2.3: Потребление населения. Синяя траектория отражает исторические данные, а красная траектория расчеты по модели. Период идентификации отрисован сплошными кривыми, период верификации отрисован пунктирными линиями.

На Рис.2.1,2.2,2.3 приведены суммарные расчетные данные задолженности по потребительским кредитам, депозитам¹ и потреблению по всем социальным слоям двух групп регионов (см. Прил.А), а также их сопоставление с историческими данными. Исторические данные,

¹Депозитами является сумма рублевых и валютных, а в качестве ставки под депозитам r_D берется средневзвешенная ставка рублевых и валютных.

а также входные параметры модели были предварительно сглажены фильтром Ходрика–Прескотта [67], в частности, в исторических данных потребления населения с помощью данного фильтра была удалена сезонность. Как видно из Рис.2.1,2.2,2.3, идентификация и верификация отражают исторические показатели. Небольшое отличие расчетного потребления населения на периоде верификации коррелирует с небольшим отличием расчетной динамики депозитов. Это может свидетельствовать о том, что в 2021г, согласно расчетам, часть населения, которая сберегает в форме депозитов, сняла часть средств с депозитарных счетов и увеличила потребление.

2.2 Программный комплекс моделирования экономического поведения домашних хозяйств

Для удобства работы со статистическими данными РМЭЗ НИУ ВШЭ и ОБДХ, выделению социальных слоев, идентификацией поведенческих характеристик заемщиков в модифицированной модели рамсеевского типа были разработаны и зарегистрированы специализированные программные комплексы, свидетельства о регистрации которых отображены в Прил.С. Принципы работы программных комплексов отличаются в обработке входных данных статистик и методах классификации групп регионов и социальных слоев.

В данном разделе опишем работу программного комплекса для идентификации экономического поведения репрезентативного домашнего хозяйства по данным статистики ОБДХ. В качестве платформы, на которой разрабатывался программный комплекс, была взята платформа MATLAB и язык программирования Си. MATLAB является пакетом прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноименным языком. Язык MATLAB является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, включающим основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования. Язык Си является низкоуровневым компилируемым статически типизированным языком программирования общего назначения. Стандартная библиотека языка Си невелика, компиляторы разрабатываются достаточно легко. Язык Си доступен на самых различных платформах, в том числе и на платформе MATLAB. Для реализации программного комплекса был использован инструментальный MATLAB App Designer (mlapp).

Программный комплекс состоит из четырех приложений. В качестве реализации пользовательского интерфейса в каждом приложении имеется набор вкладок, определяющий этап работы приложения. Опишем структуру программного комплекса.

Первое приложение анализирует статистические данные ОБДХ, формирует группы регионов, выделяет заемщиков из данных групп регионов, отображает их финансовые и социальные положения. Оно состоит из 9 вкладок. При открытии приложения пользователю

предлагается выбрать одну из трех групп регионов (богатую, среднюю, бедную, см. Прил.А) или сформировать свою группу регионов. После этого происходит пересчет, в результате которого остаются респонденты из выбранной группы регионов. Опрос ОБДХ включает в себя более 200 вопросов, на которые отвечают респонденты. Ответами респондентов могут быть как выбор одного из имеющихся вариантов ответов, так и числовой ответ. Среди этих вопросов был выбран 41 вопрос, представляющий наибольший интерес и формирующий представления об экономическом поведении респондентов. Эти вопросы расположены на вкладках 1-6 приложения и представляют из себя фильтры, оставляющие только тех респондентов, чьи ответы попадают в выбранный пользователем диапазон. На Рис.2.4,2.5,2.6 отражены этапы фильтрации респондентов.

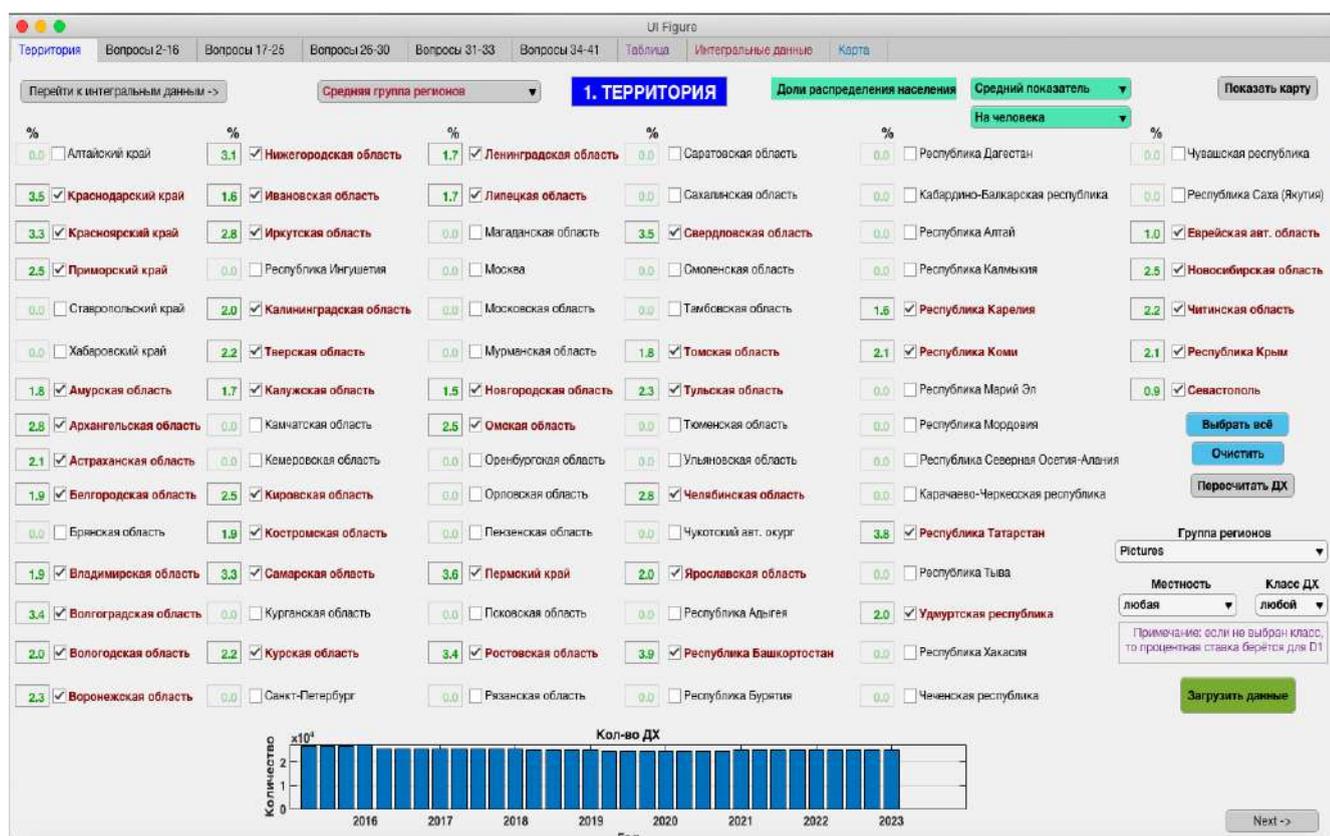


Рис. 2.4: Фильтрация респондентов по группе регионов.

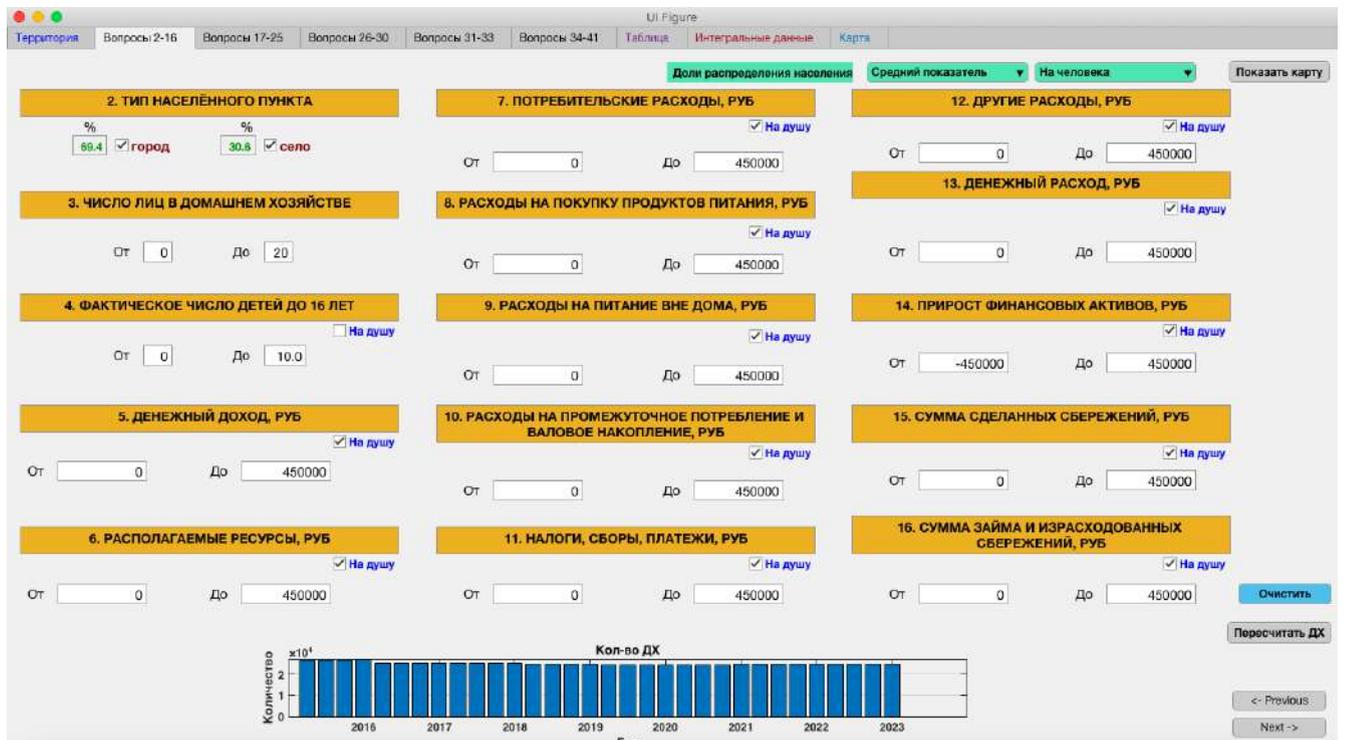


Рис. 2.5: Фильтрация респондентов по типу населенного пункта, числу лиц в домашнем хозяйстве, количеству детей, доходам и расходам на различные услуги.

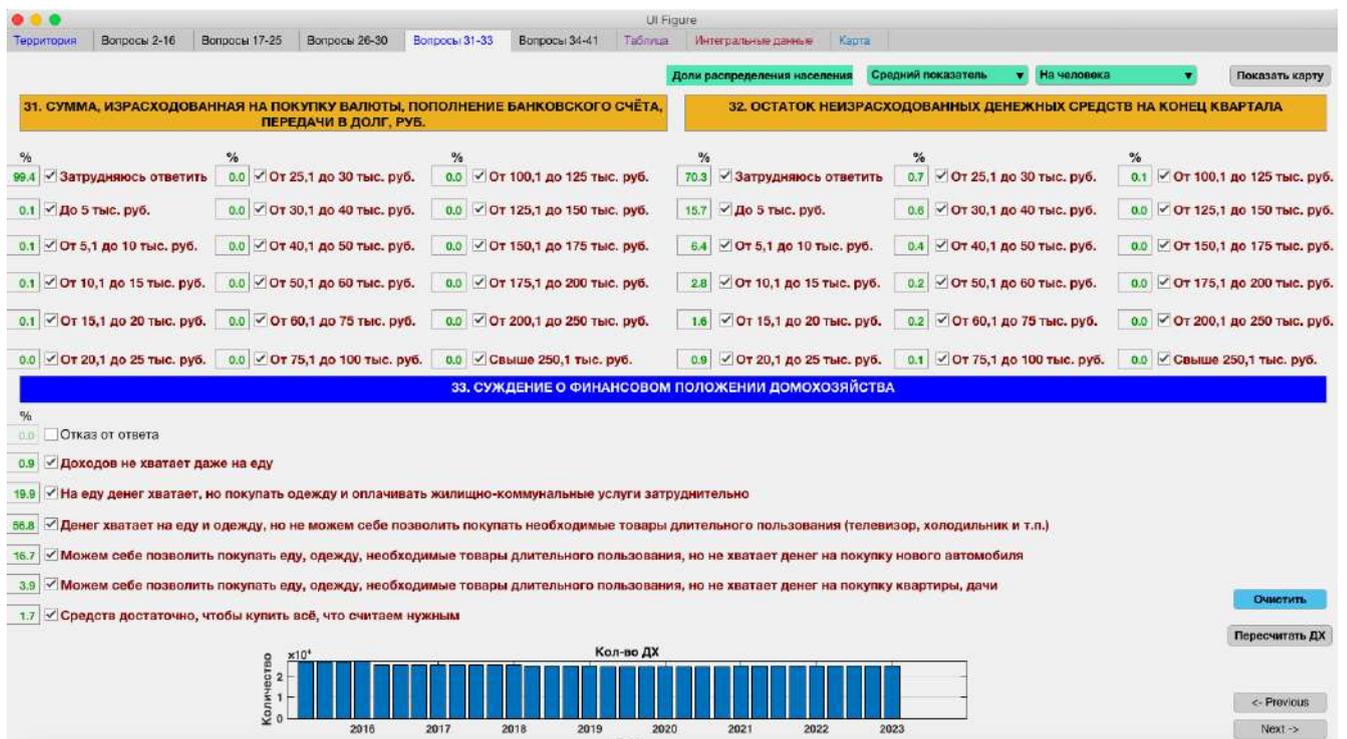


Рис. 2.6: Фильтрация респондентов по валютным и депозитарным операциям, остатку неизрасходованных средств, суждению о финансовом положении.

В ходе работы с базой данных ОБДХ выяснилось, что около половины домашних хозяйств из бедной группы регионов проживает в населенном пункте городского типа, а оставшаяся половина в сельском. В дальнейшем данная группа была поделена на две (см. Прил.А).

На 7-й вкладке приложения отображается сводная таблица по общему количеству респондентов в каждом квартале рассматриваемого периода времени. В таблице отображены данные о количестве членов семьи, доходах, прочих поступлениях, расходах, доли детей в составе домашнего хозяйства, доли работающих, платежам по кредитам и об оценочной задолженности.

На следующей вкладке приложения пользователю предлагается сгладить макроэкономические данные для выбранной группы регионов по следующим показателям: задолженность по потребительским кредитам, задолженность по ипотеке, расходы населения, доходы населения, минимальное потребление, инфляции (месячная, квартальная, годовая), стоимость квадратного метра жилья, численность населения. Сглаживание данных осуществляется либо с помощью фильтра скользящего среднего, либо с помощью фильтра Ходрика–Прескотта, используемого в целях устранения из рассматриваемых данных циклической компоненты и выделения трендовой составляющей [67]. На Рис.2.7 изображен пользовательский интерфейс для сглаживания макроэкономических данных.

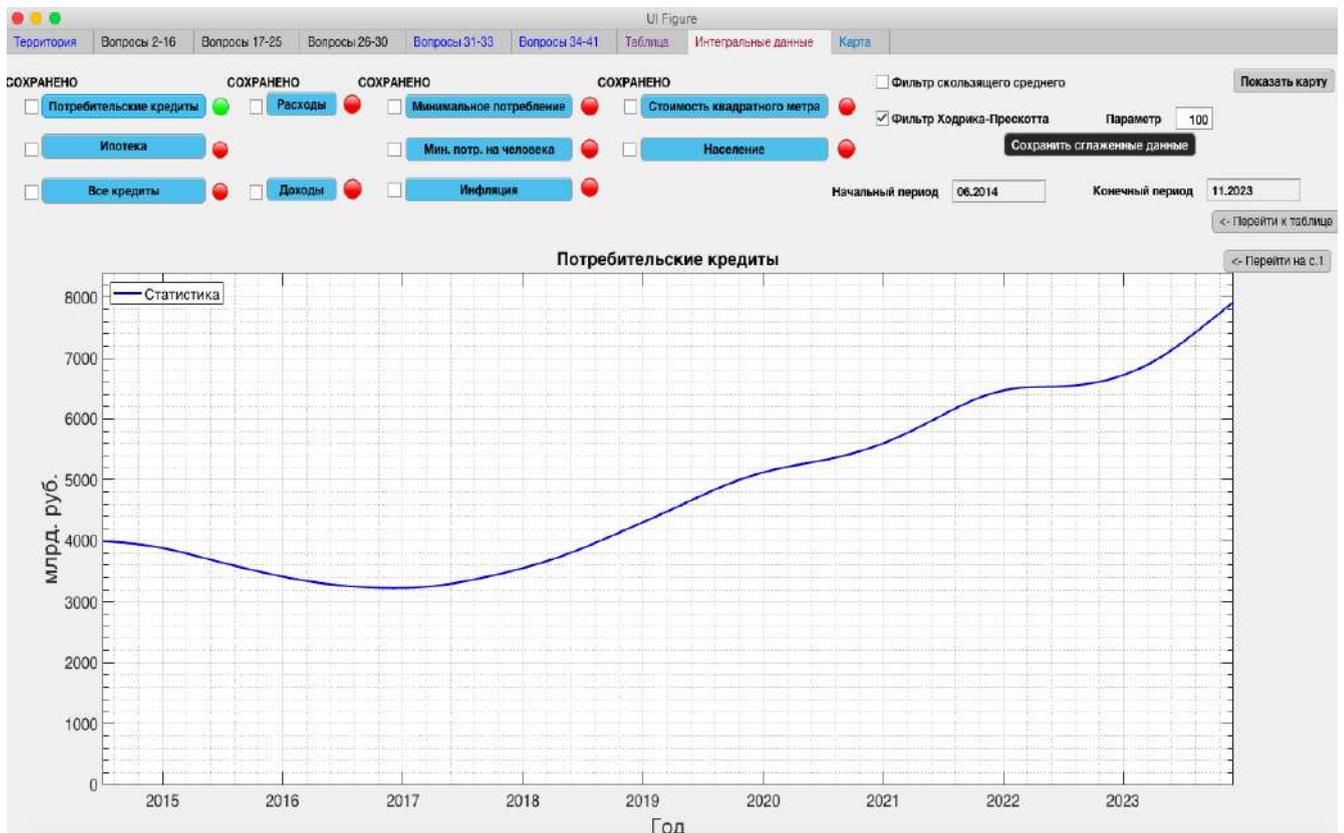


Рис. 2.7: Сглаживание макроэкономических данных.

Последняя вкладка приложения является информативной и отображает географическую карту Российской Федерации с указанием столиц выбранных регионов.

В конце работы Приложения происходит сохранение данных в специально разработанную файловую систему.

Второе приложение состоит из 6 вкладок. Оно позволяет выделять заемщиков из опрошенных респондентов, классифицировать их на низкодоходных и высокодоходных в выбранной группе регионов, строить макроэкономические параметры репрезентативных заемщиков. Классификация заемщиков происходит путем сортировки по душевым доходам и делится на три части: низкодоходные заемщики, высокодоходные заемщики и заемщики, выплачивающие ипотеку. Как обсуждалось в начале Главы 2, разделение низкодоходных от высокодоходных заемщиков происходит путем соотношения их ежемесячного дохода на душу к определенному количеству прожиточных минимумов. Разделение высокодоходных заемщиков от заемщиков, выплачивающих ипотеку происходит путем соотношения их ежемесячного дохода на душу к средней стоимости квадратного метра жилья в данной группе регионов. Пример классификации заемщиков изображен на Рис.2.8.

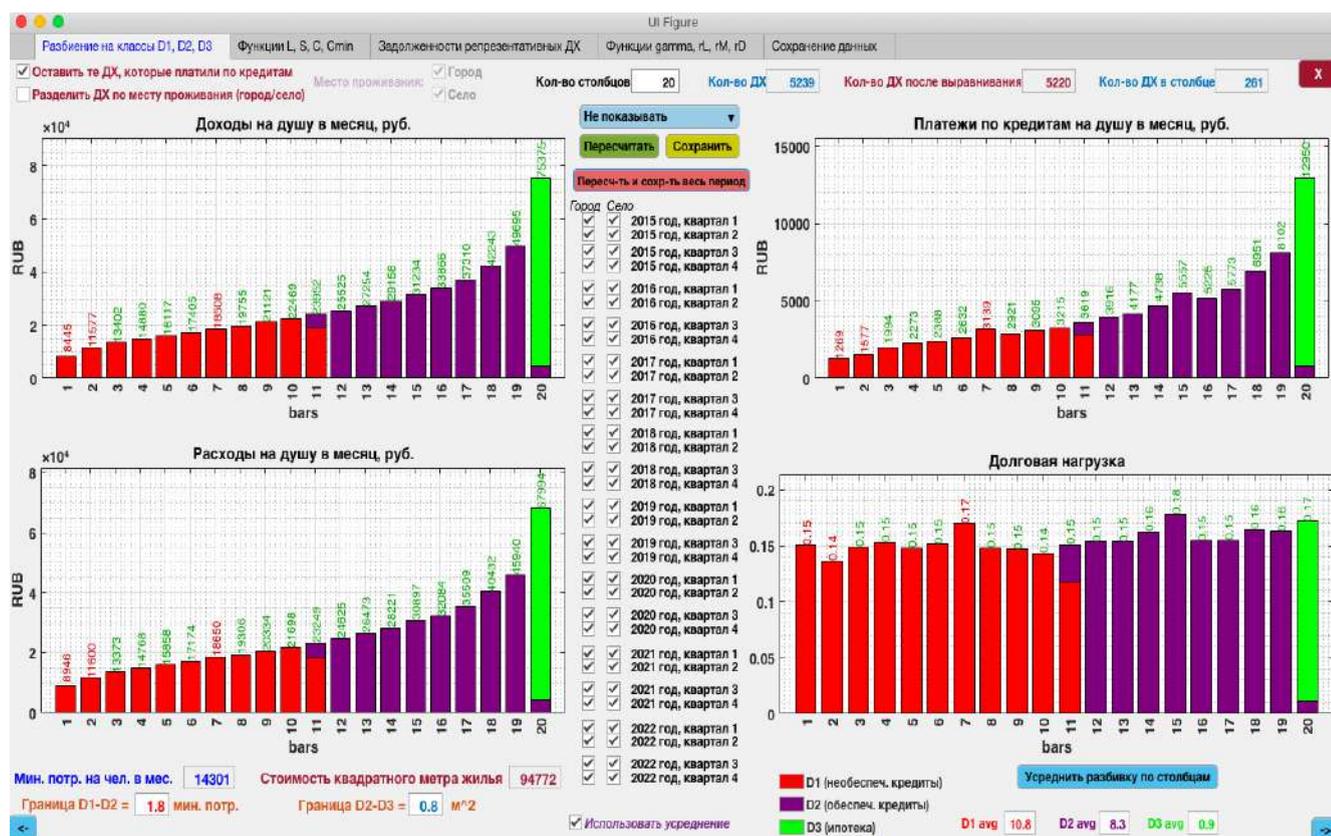


Рис. 2.8: Классификация заемщиков на низкодоходных, высокодоходных и выплачивающих ипотеку.

Остальные вкладки приложения формируют динамики доходов, расходов, задолженности репрезентативных низкодоходных и высокодоходных заемщиков и сохраняют результаты классификации в файловую систему.

Третье приложение состоит из 8 вкладок. Оно позволяет проводить идентификацию поведенческих характеристик репрезентативного заемщика для данного социального слоя, а именно настраивать параметры θ , ρ , δ на временном периоде так, чтобы воспроизводились ретроспективные данные потребления и задолженности репрезентативного заемщика.

Каждый слой населения описывается репрезентативным заемщиком, параметры которого идентифицируются отдельно. Для каждого репрезентативного домашнего хозяйства пользователю предлагается задать параметр θ и диапазон значений ρ и δ , после чего проводятся расчеты по нахождению таких пар (ρ, δ) в каждый момент времени, при подстановке которых в синтез $M(x; S, r_L, r_D, \theta, \rho, \gamma, \delta)$ отклонение от статистических данных по потреблению отличается не более чем на наперед заданную пользователем точность. Результат отображен на Рис.2.9.

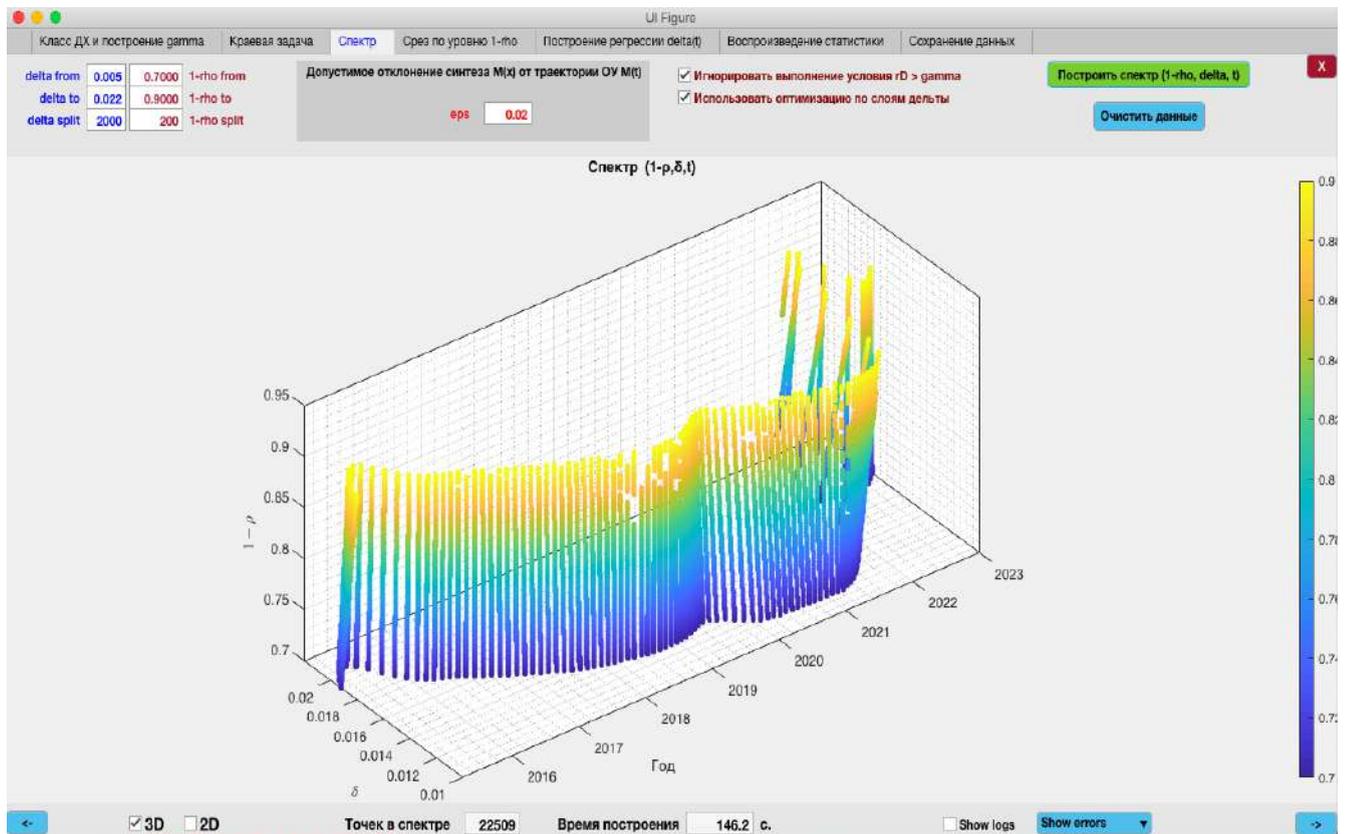


Рис. 2.9: Идентификация параметров ρ и δ .

Как обсуждалось ранее, параметры ρ и θ можно задать константами для данного социального слоя, а коэффициент дисконтирования δ зависит от параметров экономической конъюнктуры. На следующем этапе работы приложения пользователю предлагается зафиксировать параметр отворачивания к риску ρ , после чего происходит срез допустимых пар (ρ, δ) по выбранному уровню ρ . Полученный срез является многозначным значением параметра δ в каждый момент времени. Проводится его усреднение, в результате которого параметр δ принимает единственное значение в каждый момент времени.

Для того чтобы идентифицировать зависимость найденного коэффициента дисконтирования от параметров экономической конъюнктуры, строится регрессия в виде

$$\delta(t) = c + a\delta(t-1) + r_L^c r_L(t) + j_M^c j_M(t) + j_Q^c j_Q(t) + j_Y^c j_Y(t) + \gamma_M^c \gamma_M(t) + \gamma_Q^c \gamma_Q(t) + \gamma_Y^c \gamma_Y(t), \quad t = \overline{1, T}, \quad (2.2.1)$$

где $c, a, r_L^c, j_M^c, j_Q^c, j_Y^c, \gamma_M^c, \gamma_Q^c, \gamma_Y^c$ являются параметрами, $j_M(t), j_Q(t), j_Y(t)$ — месячная, квартальная и годовая инфляции в момент времени t , $\gamma_M(t), \gamma_Q(t), \gamma_Y(t)$ — месячный, квартальный и годовой темп роста доходов репрезентативного домашнего хозяйства в момент времени t .

Задача поиска параметров $c, a, r_L^c, j_M^c, j_Q^c, j_Y^c, \gamma_M^c, \gamma_Q^c, \gamma_Y^c$ является итерационной задачей поиска локального минимума с помощью градиентного спуска. Пользователю предлагается задать начальные значения параметров и скорость градиентного спуска по каждому параметру. Решение задачи реализована на языке программирования Си, так как требует больших вычислений, которые было бы неэффективно реализовывать на языке программирования МАТЛАВ. Результат построения регрессии изображен на Рис.2.10.

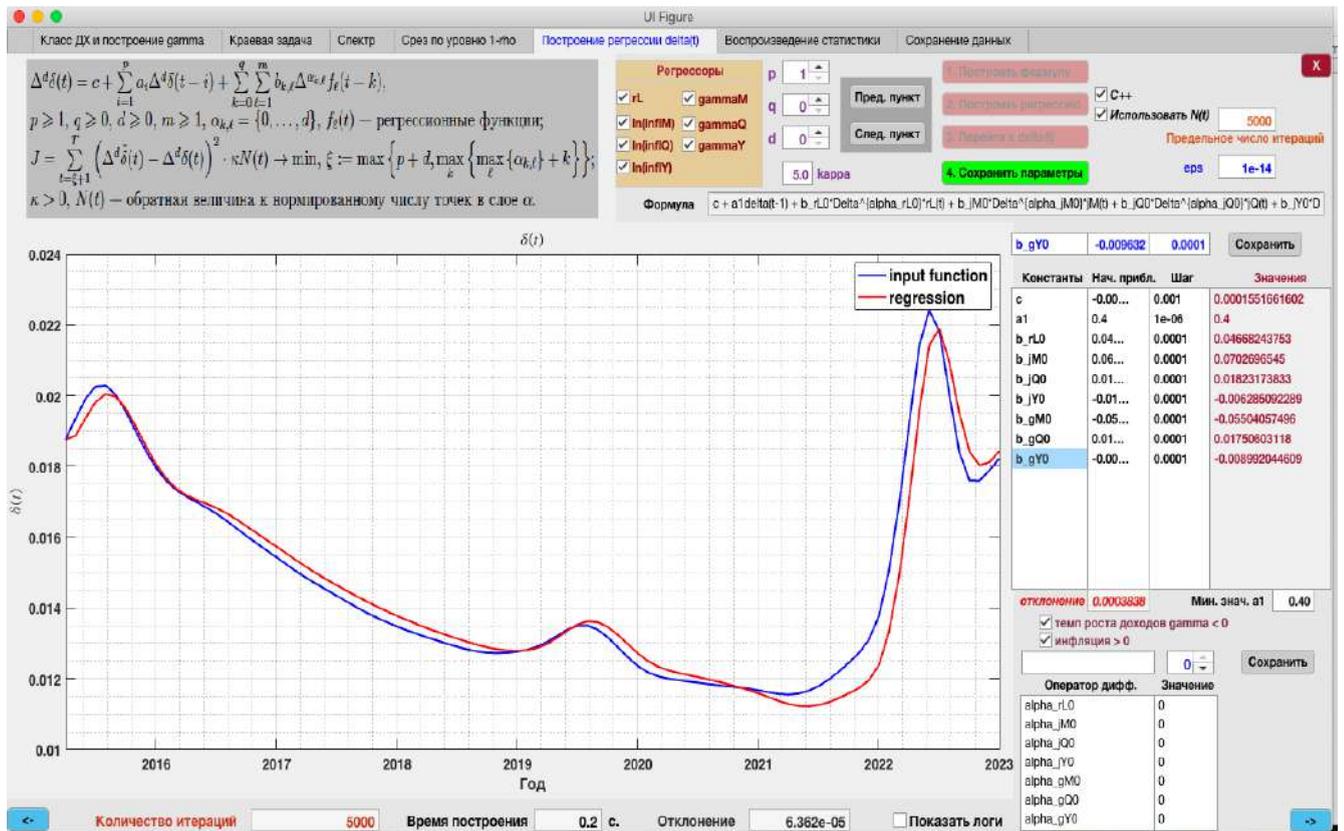


Рис. 2.10: Идентификация коэффициента дисконтирования по параметрам экономической конъюнктуры.

На следующем этапе работы программы проводится сопоставление моделируемых макроэкономических показателей задолженности и потребления репрезентативного домашнего

хозяйства со статистическими данными, полученными в результате работы с предыдущим приложением. В конце происходит сохранение результатов идентификации поведенческих характеристик репрезентативного домашнего хозяйства в файловую систему.

Четвертое приложение состоит из 7 вкладок. Оно дает ответ о качестве воспроизводимых поведенческих параметров на периоде верификации данных, сопоставляя расчетные показатели с историческими данными. Помимо этого, в приложении есть возможность генерации сценариев: задании параметров экономической конъюнктуры на временном периоде, следующим за периодом верификации и получении прогнозов потребления и задолженности репрезентативных заемщиков из различных социальных слоев. Для генерации сценариев пользователю предлагается интерактивно задать прогноз инфляции, доходов репрезентативного домашнего хозяйства. Программно предусмотрена возможность генерации процентной ставки по потребительскому кредиту, основываясь на модели поведения коммерческих банков (см. параграф 1.2). На Рис.2.11 изображен пользовательский интерфейс для задания сценарных показателей.

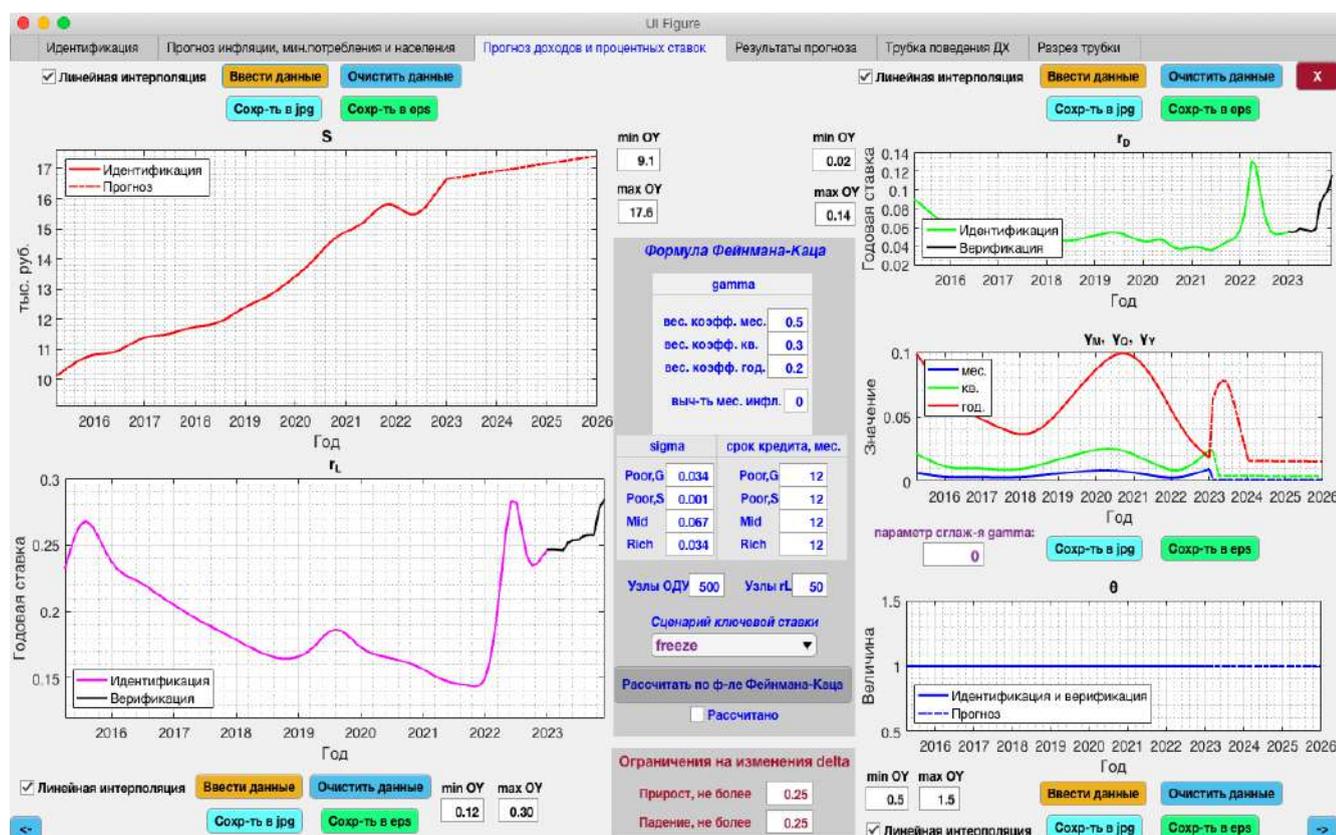


Рис. 2.11: Сценарные данные.

2.3 Построение сценариев экономического поведения домашних хозяйств

Согласно данным Росстата месячная инфляция в марте 2022г составила 7.8%, после которой месячная инфляция резко сократилась. К концу 2022г годовая инфляция составила порядка 15%.

В конце февраля 2022г ключевая ставка ЦБ была резко поднята до 20% годовых, количество отказов в выдаче потребительского кредита выросло до 75%. Несмотря на последующие снижения ключевой ставки ЦБ до 7.5% в октябре 2022г, процент, под который выдаются кредиты малоимущим домашним хозяйствам практически не меняется и остается запретительным, находясь на уровне 40% годовых. Для моделирования процентной ставки высокодоходных заемщиков используется модель формирования процентной ставки по потребительскому кредиту, изложенная в параграфе 1.2.

Для анализа экономического поведения заемщиков мы используем статистику ОБДХ. Хотя, в параграфе 2.1 мы проводили идентификацию репрезентативных домашних хозяйств по данным РМЭЗ НИУ ВШЭ, количество респондентов в корпусе статистики ОБДХ намного больше¹ (порядка 5 000 заемщиков). Мы идентифицировали поведенческие характеристики заемщиков в разных группах регионов с 2015 по 2020гг и верифицировали на 2021г. Результат идентификации поведенческих характеристик заемщиков в различных группах регионов представлен в Прил.А.

Для идентификации процентной ставки по потребительским кредитам для обеспеченных заемщиков мы положили срок кредита $\hat{T} = 36\text{мес.}$, параметры волатильности σ идентифицировали следующим образом (в качестве единицы измерения времени выбран 1 мес.):

- бедная группа регионов, город: $\sigma = 0.04$;
- бедная группа регионов, село: $\sigma = 0.05$;
- средняя группа регионов: $\sigma = 0.0505$;
- Б богатая группа регионов: $\sigma = 0.03$.

Стоимость фондирования расходов для коммерческих банков λ на один процент выше ключевой ставки ЦБ РФ². На октябрь 2023г ключевая ставка ЦБ РФ составляет 13%. Мы за-

¹Также, с помощью статистики ОБДХ можно построить траектории доходов и расходов в каждом рассматриваемом социальном слое. При идентификации социальных слоев по статистическим данным РМЭЗ НИУ ВШЭ мы использовали интегральные данные по всем регионам России.

²Стоимость мгновенного привлечения ликвидности банковским сектором определяется на межбанковском сегменте денежного рынка, а также ставками по операциям управления ликвидностью Банка России. Ставки по привлечению ликвидности через операции Банка России почти всегда выше, чем на межбанковском рынке. Тем не менее, в условиях нехватки ликвидности банки часто прибегают к привлечению ликвидности у Банка России. Основными инструментами дополнительного привлечения ликвидности у Банка России выступают инструменты постоянного действия. Процентные ставки по таким инструментам установлены на уровне, превышающим ключевую ставку на 1 процентный пункт [33], [27].

фиксировали это значение до конца 2024г. По результатам расчетов динамика ставки по потребительским кредитам для обеспеченных заемщиков растет до 30% к середине 2022г, удерживается на уровне в 20% в 2023г, медленно снижается до 14% в 2024г (см. Рис.2.12).

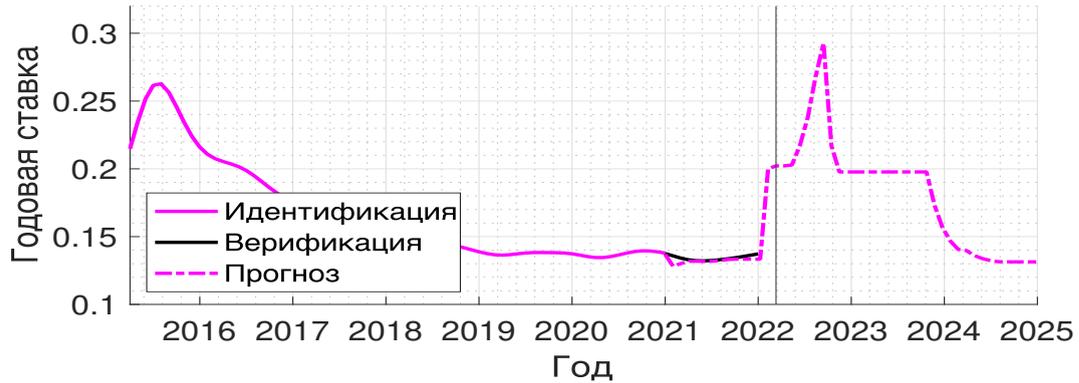


Рис. 2.12: Процентная ставка по потребительским кредитам для обеспеченных заемщиков. Сплошной розовой линией отмечены исторические данные ставки на периоде идентификации, сплошной черной линией представлены исторические данные ставки на периоде верификации, штрих-пунктиром отображен результат моделирования ставки по потребительскому кредиту. Серой линией отмечен март 2022г.

В связи с уходом крупных фирм из России весной 2022г, остановки заводов производства, немалая часть населения потеряла доходы. Основные потери доходов пришлось на малоимущие слои населения. Мы полагаем, что к концу 2024г номинальное падение доходов у малоимущих слоев населения составит 15% по отношению к началу 2022г, в то время как динамика доходов у высокодоходных слоев населения будет сохраняться прежней.

Сценарий 1. Анализ финансового положения заемщиков. По результатам расчетов, весной 2022г становятся банкротами как низкодоходные, так и высокодоходные заемщики во всех группах регионов (нарушается условие платежеспособности $x > -\frac{S}{r_L - \gamma}$). После весны 2022г платежеспособность заемщиков восстанавливается, но начиная с конца 2022г — начала 2023г низкодоходные заемщики вновь утрачивают свою платежеспособность, что приводит к ощутимому росту спроса на потребительский кредит среди малоимущих слоев населения. Как отмечалось ранее, с марта 2022г резко выросло количество отказов в выдаче потребительского кредита низкодоходным заемщикам. При подсчете суммарной задолженности по всем группам регионов мы учитываем эту тенденцию и считаем, что если малоимущее домашнее хозяйство находится в состоянии неплатежеспособности, то коммерческие банки не выдают ему потребительский кредит.

На Рис.2.13,2.14 представлены суммарные задолженности по всей стране с дифференциацией на необеспеченных и обеспеченных заемщиков. Области описывают три этапа использования модели: идентификации с марта 2015г по декабрь 2020г, верификации с января 2021г по декабрь 2021г и периода построения прогнозов с января 2022г по декабрь 2024г.

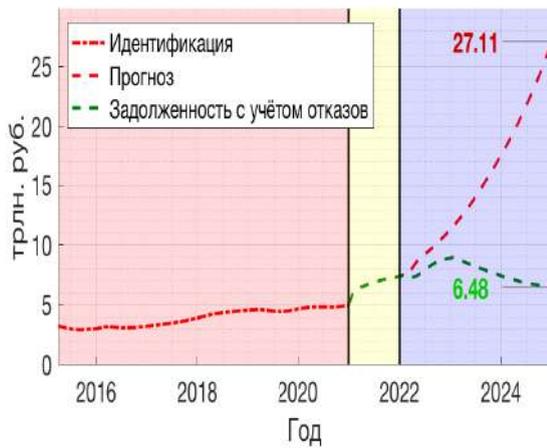


Рис. 2.13: Суммарная задолженность необеспеченных заемщиков.

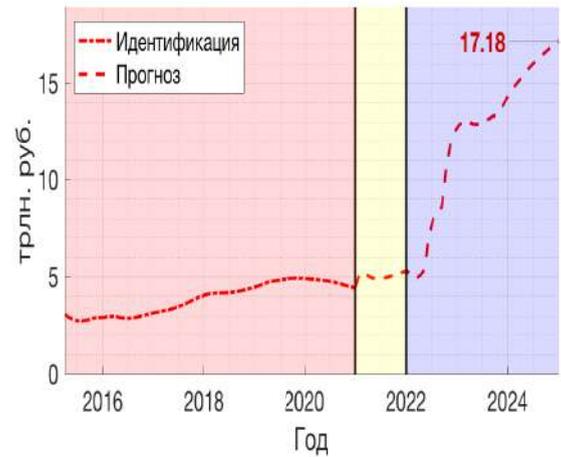


Рис. 2.14: Суммарная задолженность обеспеченных заемщиков.

Отметим, что если бы банки выдавали малоимущим домашним хозяйствам потребительские кредиты, то они бы поддерживали их уровень потребления на минимальном уровне, но это бы привело к ощутимому росту задолженности до 17.5 трлн руб. к концу 2023г и 27.11 трлн руб. к концу 2024г, а общая задолженность составила бы 31.5 трлн руб. к концу 2023г и 44.29 трлн руб. к концу 2024г соответственно. Отказы в выдаче потребительского кредита малоимущим слоям населения приводят к социальной напряженности. На начало 2022г суммарная задолженность по потребительскому кредиту составляла 12.6 трлн руб. В данном сценарии с учетом отказов в выдаче кредитов к концу 2024г итоговая задолженность вырастет до 23.66 трлн руб., при этом объем отказов за прогнозный период 2022-2024гг составит 23 трлн руб. В рассматриваемом сценарии потребительский кредит перестает выполнять роль социальной адаптации домашних хозяйств.

Сценарий 2. Субсидирование необеспеченных заемщиков. Главная проблема потребительского кредитования в России заключается в платежеспособности малоимущих заемщиков. Данный сценарий является ответом на вопрос: можно ли сохранить роль социальной адаптации у потребительского кредита за счет адресной финансовой поддержки низкодходных заемщиков? Предполагается рост доходов малоимущих заемщиков с начала 2023г до конца 2024г за счет осуществления их финансовой поддержки через государственные структуры. Чтобы посчитать какой минимальный объем денег нужно выделить низкодходным заемщикам, было построено множество платежеспособности к моменту времени t в пространстве доходов S , процентной ставки по потребительскому кредиту r_L и годовой инфляции

j_Y . На Рис.2.15 изображен снимок экрана программного комплекса, подробно описанного в предыдущем параграфе, на котором изображена область платежеспособности низкодоходных заемщиков. Перспективным методом оценок области платежеспособности заемщиков могут являться методы эллипсоидального исчисления [82].

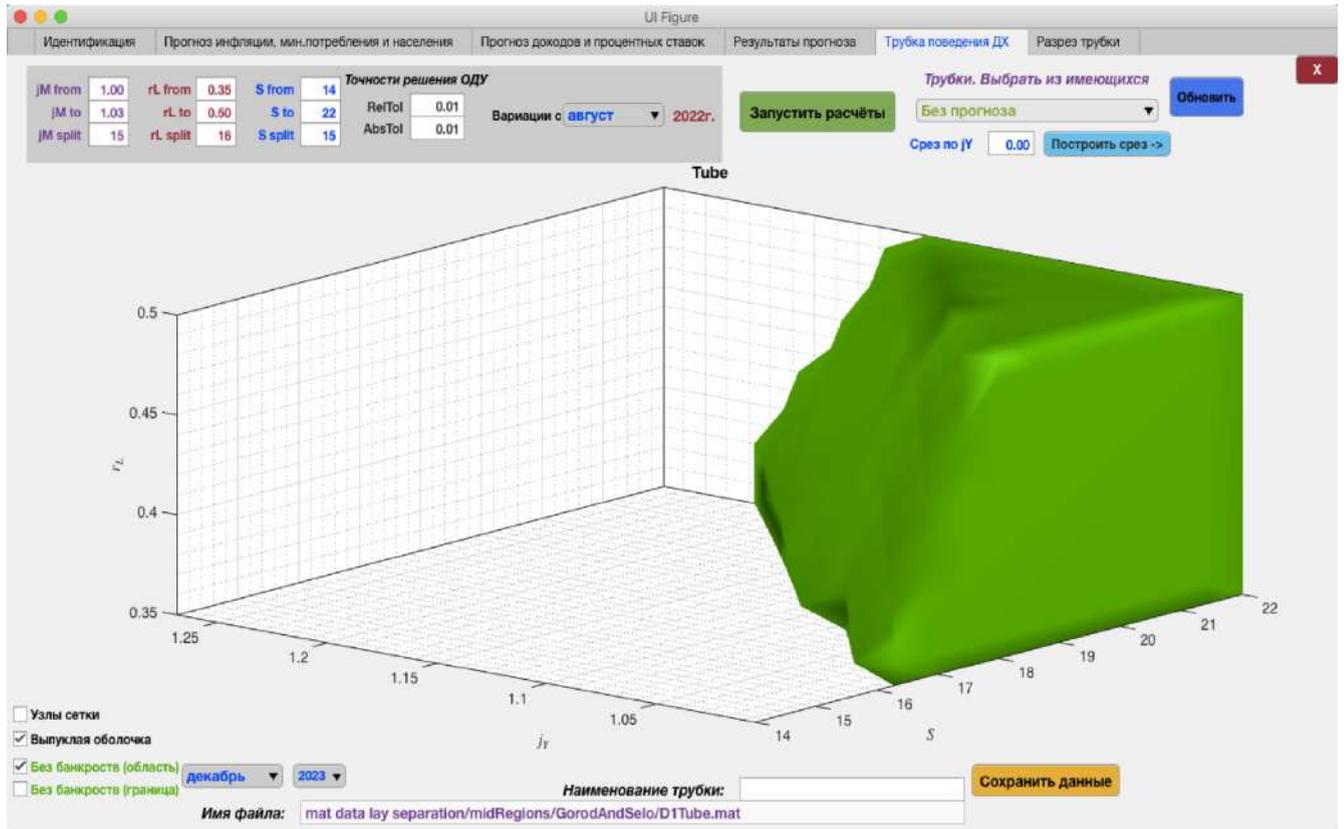


Рис. 2.15: Область платежеспособности низкодоходных заемщиков к декабрю 2023г.

Предполагая что процентная ставка по кредиту для низкодоходных заемщиков останется на уровне 40%, была построена проекция области платежеспособности на плоскость (S, j_Y) . Задавая годовую инфляцию, можно определить, какие доходы у низкодоходных заемщиков должны быть к текущему моменту времени, чтобы их платежеспособность сохранялась. В данном сценарии мы полагаем, что годовая инфляция к концу 2024г сохранится на уровне 15%. Исходя из вышесказанного, было посчитано, что за двухлетний период необходимо выделить 199 млрд руб. малоимущим заемщикам, проживающих в городском типе бедной группы регионов, 213 млрд руб. в сельском типе в бедной группе регионов, 1 355 млрд руб. в средней группе регионов и 682 млрд руб. в богатой группе регионов. Данные величины были рассчитаны исходя из условия сохранения платежеспособности необеспеченных заемщиков после весны 2022г во всех группах регионов. Итоговая задолженность необеспеченных заемщиков во всех группах регионов представлена на Рис.2.16.

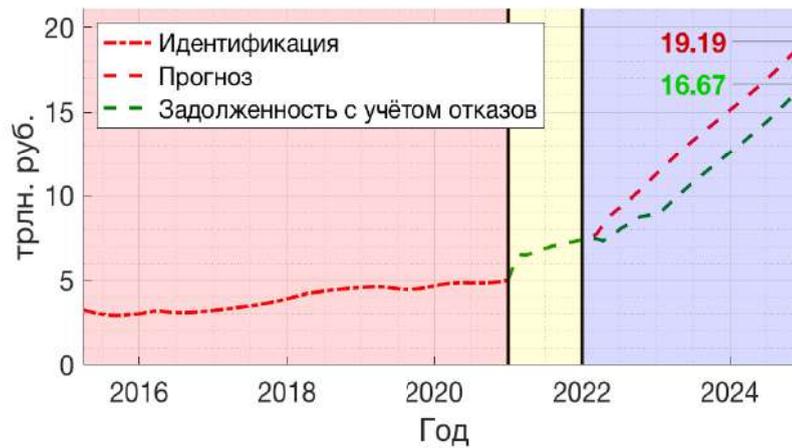


Рис. 2.16: Суммарная задолженность необеспеченных заемщиков.

При выделении субсидий необеспеченным заемщикам порядка 2.5 трлн руб. до конца 2024г их платежеспособность восстанавливается. Итоговый рост задолженности за три года с учетом задолженности высокодоходных заемщиков вырос бы на 21.25 трлн руб., однако, такой сценарий сохранил бы роль механизма социальной адаптации у потребительского кредита.

Анализ влияния ключевой ставки на задолженность по потребительскому кредиту в период пандемии COVID-19. С помощью исследуемой модели можно изучать влияние ключевой ставки на задолженность заемщиков.

Пандемия COVID-19 и карантинные меры, введенные в России в конце марта 2020г, привели к значительному снижению реальных доходов населения. Так, по данным Росстата сезонно сглаженные номинальные доходы населения во втором квартале 2020г упали на 6.6% по отношению к первому кварталу 2020г. Сокращение номинальных доходов было вызвано падением доходов от наемного труда, которые сократились на 4% по отношению к первому кварталу 2020г. Значительная часть снижения доходов произошла в результате сжатия доходов от предпринимательской деятельности, которые сократились на 42% по отношению к первому кварталу в сезонно сглаженном выражении. В таких условиях представлялся вероятным рост просроченной задолженности по кредитам из-за потери способности части населения обслуживать платежи по кредитам. Рост просроченной задолженности, в свою очередь, мог привести к повышению процентных ставок в том случае, если банки решили бы перенести риски кредитования в стоимость кредита. Для того чтобы учесть такую воз-

возможность, было проведено регрессионное моделирование процентных ставок по кредитам в зависимости от величины просроченной задолженности по потребительскому кредиту, а также ключевой ставки ЦБ. В то же время на величину просроченной задолженности непосредственно оказывает влияние стоимость кредитования, выражаемая через процентную ставку по кредитам, а также динамика необеспеченных, ненадежных кредитов, что было учтено с помощью построения дополнительной регрессии.

Пусть $\xi(t)$ — просроченная задолженность заемщиков в момент времени t . Построение регрессии для просроченной задолженности проводилось на временном периоде с 2010 по 2020гг, а построение регрессии процентной ставки по потребительскому кредиту проводилось на временном периоде с 2015 по 2020гг. В качестве регрессоров при построении просроченной задолженности берутся ставка по кредитам в процентном соотношении по состоянию на предыдущий квартал $r_{L,\%}(t-3)$ и расчетная динамика задолженности по потребительским кредитам $\bar{L}(t-3)$ низкодоходных заемщиков по состоянию на предыдущий квартал. В качестве регрессоров при построении процентной ставки по потребительскому кредиту берутся ключевая ставка ЦБ в процентном соотношении $KIR_{\%}(t)$, просроченная задолженность $\xi(t)$ и значение (инерционный коэффициент) процентной ставки по потребительскому кредиту в предыдущий месяц. Расчеты показывают, что для просроченной задолженности заемщиков характерна регрессия

$$\xi(t) = -1.78736 + 0.0936723r_{L,\%}(t-3) + 0.253206\bar{L}(t-3),$$

а процентная ставка по потребительскому кредиту описывается выражением

$$r_L(t) = 0.0128 + 0.007213KIR_{\%}(t) + 0.0118\xi(t) + 0.4259r_L(t-1).$$

Результаты ретроспективного моделирования изображены на Рис.2.17,2.18.

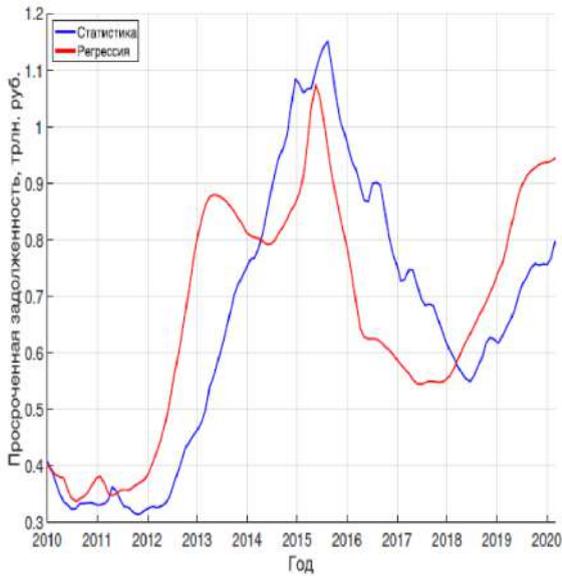


Рис. 2.17: Построение регрессии просроченной задолженности по потребительскому кредиту.

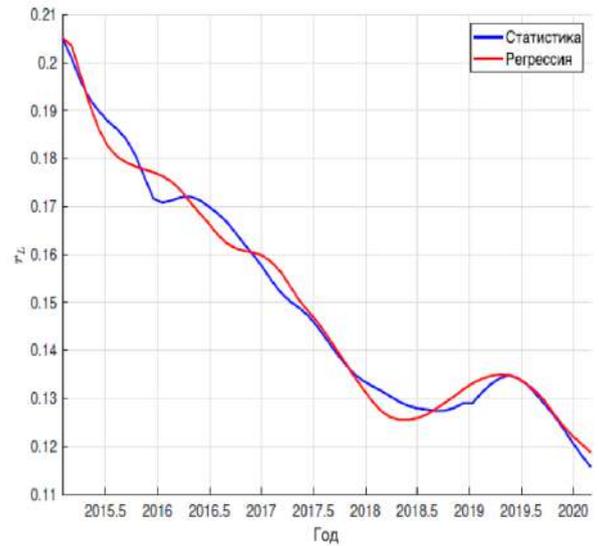


Рис. 2.18: Построение регрессии ставки по потребительскому кредиту.

В период пандемии COVID-19 неоднократно была оказана финансовая поддержка молодым семьям с детьми, а также была снижена ключевая ставка ЦБ до 4.25%. Формирование процентной ставки по потребительскому кредиту чувствительно к ключевой ставке ЦБ. Рассмотрим 4 возможных сценария управления ключевой ставкой: удержание ключевой ставки на уровне 4.5% с апреля 2021г, увеличение ключевой ставки до 5%, постепенное снижение до 3% и резкое снижение до 3% (см. Рис.2.19). Результаты моделирования ставки по потребительскому кредиту отображены на Рис.2.20.

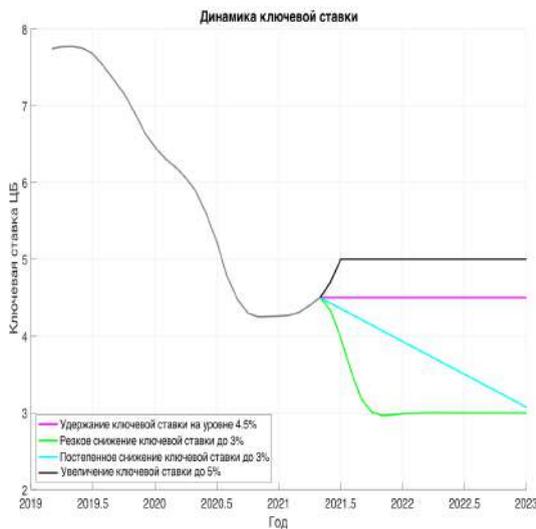


Рис. 2.19: Сценарии управления ключевой ставкой ЦБ в период пандемии COVID-19.

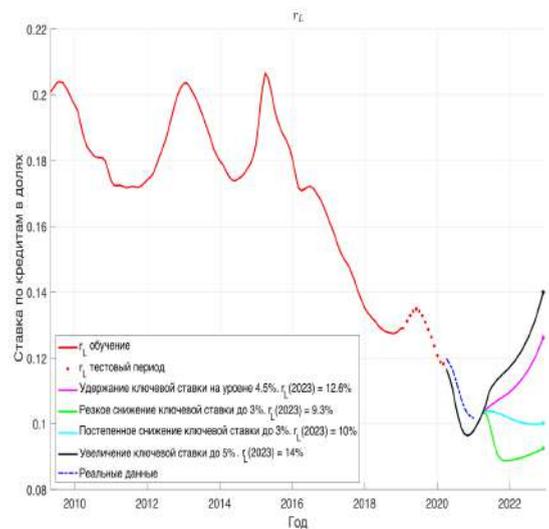


Рис. 2.20: Ставка по потребительскому кредиту в зависимости от ключевой ставки ЦБ.

Идентификация экономического поведения заемщиков проводилась по данным РМЭЗ НИУ ВШЭ [30]. Моделирование сценарного развития задолженности по потребительскому кредиту для двух групп регионов (см. Прил.А) представлены на Рис.2.21,2.22,2.23,2.24.

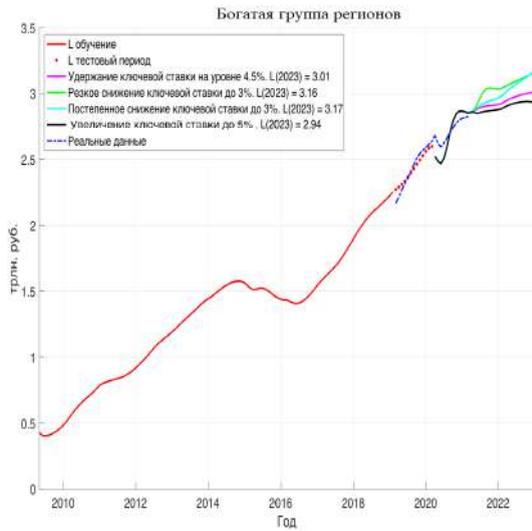


Рис. 2.21: Динамика потребительских задолженностей в богатой группе регионов. Суммарная задолженность.

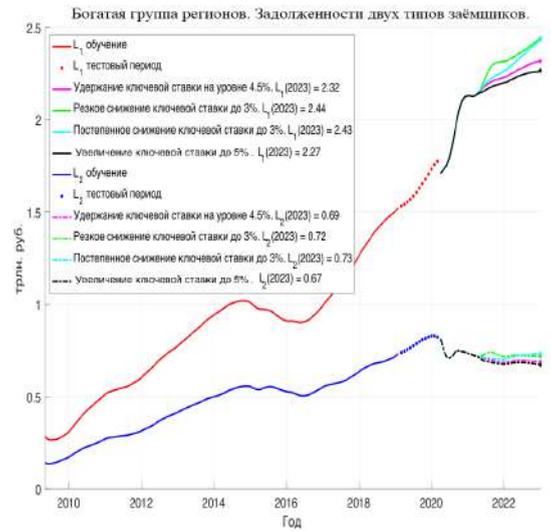


Рис. 2.22: Динамика потребительских задолженностей в богатой группе регионов. Дифференциация задолженностей по низкодоходным (L_1) и высокодоходным (L_2) заемщикам.

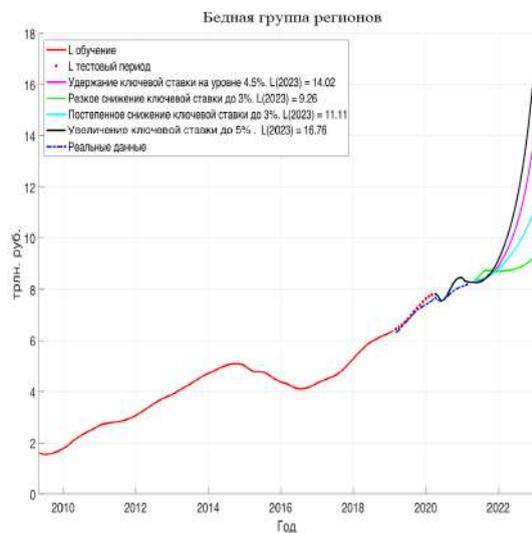


Рис. 2.23: Динамика потребительских задолженностей в бедной группе регионов. Суммарная задолженность.

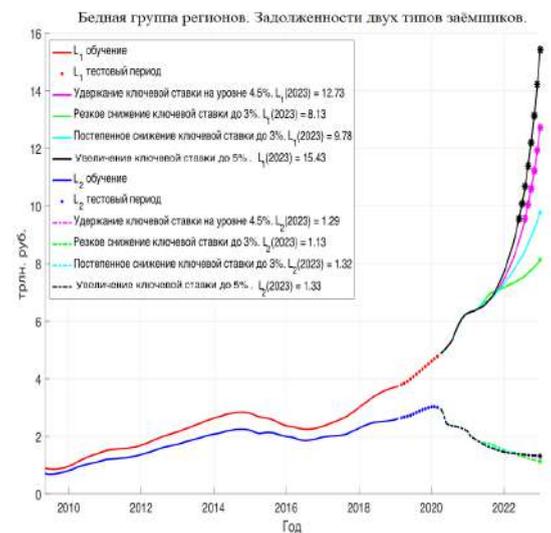


Рис. 2.24: Динамика потребительских задолженностей в бедной группе регионов. Дифференциация задолженностей по низкодоходным (L_1) и высокодоходным (L_2) заемщикам.

Крупными точками (Рис.2.24) отмечены временные периоды, когда нарушается условие платежеспособности заемщиков. Расчеты по модели показывают, что проблема роста задолженности обострена в бедной группе регионов среди низкодоходных заемщиков.

Снижение ключевой ставки ЦБ уменьшает долговую нагрузку на домашние хозяйства и долю неплатежеспособных заемщиков среди физических лиц. При этом эффективность снижения ключевой ставки существенно зависит от динамики снижения. Несмотря на явные преимущества сценария с резким снижением ключевой ставки, следует отметить, что резкое уменьшение ключевой ставки могло привести к неожиданным негативным последствиям, таким как резкое ослабление курса рубля или значительное увеличение темпов инфляции.

2.4 Идентификация группового поведения домашних хозяйств

В данном параграфе исследуется вопрос идентификации группового экономического поведения домашних хозяйств по статистическим данным ОБДХ [23]. Групповое поведение домашних хозяйств основывается на концепции игр среднего поля и приведено в параграфе 1.3.

Для начала изучим вопрос согласованности статистических данных ОБДХ с динамикой плотности распределения платежеспособных заемщиков по доходам и финансовым состояниям с решением уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка. Пусть $\tilde{m}(x, S, t)$ — наблюдаемая статистика плотности распределения домашних хозяйств¹ на временном отрезке $[0, T]$. В данном параграфе исследуется задача воспроизведения статистической плотности распределения $\tilde{m}(x, S, t)$ с помощью уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (1.3.12), (1.3.13) за счет управления ликвидными средствами $M(x, S, t)$, т.е.

$$J = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\tilde{m}(x, S, t) - m(x, S, t))^2 dS dx dt \rightarrow \min_{M(x, S, t) \geq \mu(x, S, t)}, \quad (2.4.1)$$

¹Чтобы построить наблюдаемую статистику плотности распределения заемщиков по данным ОБДХ, необходимо для каждого домашнего хозяйства определить фазовые переменные финансового состояния x и доходов S . Если доходы домашнего хозяйства отображены в статистике ОБДХ, то параметр финансового состояния необходимо вычислять по формуле $x = M - L$. Поскольку из статистических данных ОБДХ нельзя явно определить ликвидные средства домашних хозяйств M , но можно определить расходы C , то ликвидные средства определяются из закона Фишера $M = \theta C$. Изучая методику сбора статистики ОБДХ, можно вычислить платежи домашнего хозяйства по кредитам, что позволит оценить задолженность домашнего хозяйства L , используя средневзвешенную ставку по потребительскому кредиту.

$$\begin{aligned} \frac{\partial m(x, S, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (\sigma^2(x, S, t) S^2 m(x, S, t)) + \\ + \frac{\partial}{\partial S} (S m(x, S, t) \gamma(x, S, t)) + \frac{\partial}{\partial x} (m(x, S, t) f(x, S, t)) = 0, \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

$$m(x, S, 0) = \tilde{m}(x, S, 0), \quad (2.4.3)$$

где $\mu(x, S, t) = \theta(x, S, t) C_{\min}(t)$, $C_{\min}(t)$ — минимальное потребление в момент времени $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} f(x, S, t) = S - \gamma(x, S, t)x - \frac{1}{\theta(x, S, t)} M(x, S, t) - \\ - r_L(x, S, t) (M(x, S, t) - x)_+ + r_D(x, S, t) (x - M(x, S, t))_+. \end{aligned}$$

Замечание 5. Будем искать локальное слабое решение экстремальной задачи (2.4.1) при ограничении (2.4.2) с начальным условием (2.4.3) в классе $C^{1,2,1}$.

Замечание 6. Платежеспособные заемщики делятся на низкодоходных и высокодоходных и имеют разные параметры идентификации θ , r_L , γ , σ (см. Прил.А). Мы вводим «серую зону» между разделением двух типов заемщиков, в которой линейно устраняем разрыв между параметрами идентификации. Граница разделения между низкодоходными и высокодоходными заемщиками привязана к минимальному потреблению и меняется со временем. Таким образом, мы полагаем, что $\theta = \theta(x, S, t)$, $r_L = r_L(x, S, t)$, $\gamma = \gamma(x, S, t)$, $\sigma = \sigma(x, S, t)$.

Для решения экстремальной задачи (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) необходимо выписать сопряженное уравнение. Пусть $v(x, S, t)$ гладкая функция с компактным носителем. Построим лагранжиан экстремальной задачи (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3), где в качестве множителя Лагранжа выступает функция $v(x, S, t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m, v) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} [\tilde{m}(x, S, t) - m(x, S, t)]^2 dS dx dt + \\ + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} [m(x, S, T)v(x, S, T) - \tilde{m}(x, S, 0)v(x, S, 0)] dS dx - \\ - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} m(x, S, t) \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \gamma S \frac{\partial v}{\partial S} + f \frac{\partial v}{\partial x} \right] dS dx dt. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Замечание 7. Для получения лагранжиана (2.4.4) используется интегрирование по частям в уравнении Колмогорова–Фоккера–Планка.

Сопряженное уравнение для экстремальной задачи (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \gamma S \frac{\partial v}{\partial S} + f \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2.4.5)$$

с терминальным условием

$$v(x, S, T) = 0. \quad (2.4.6)$$

Опишем алгоритм решения экстремальной задачи (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3):

Шаг 1. Задаем начальное управление $M^0(x, S)$.

Шаг 2. Решаем уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка (2.4.2), (2.4.3) в прямом времени.

Шаг 3. Решаем сопряженное уравнение (2.4.5), (2.4.6) в попятном времени.

Шаг 4. Находим новое управление $M^\kappa(x, S)$, где $\kappa \in \mathbb{N}$ — номер итерации:

$$M^\kappa(x, S) := M^{\kappa-1}(x, S) + hm \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{1}{\theta} + r_L \cdot \mathbb{I}_{M^{\kappa-1} > x} + r_D \cdot \mathbb{I}_{M^{\kappa-1} < x} \right),$$

где $h > 0$ — шаг сходимости,

$$\mathbb{I}_{a > b} = \begin{cases} 1, & \text{если } a > b, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Шаг 5. Переходим к шагу 2 до тех пор, пока не будет выполнен критерий останова

$$\left| \sqrt{J^\kappa} - \sqrt{J^{\kappa-1}} \right| < \varepsilon.$$

Перейдем к численному решению экстремальной задачи (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3).

Как было показано в Разд. 1.3.2, дискретная запись уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка описывается уравнением (1.3.14). Заметим, что данное уравнение может быть записано через индикаторные функции:

$$\begin{aligned} m_{j,k}^{i+1} = & m_{j,k}^i + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} \left(m_{j,k+1}^i S_{k+1}^2 (\sigma_{j,k+1}^i)^2 - 2m_{j,k}^i S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 + m_{j,k-1}^i S_{k-1}^2 (\sigma_{j,k-1}^i)^2 \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta S} \left(m_{j,k+1}^i S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{I}_{\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i < 0} + m_{j,k}^i S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{I}_{\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \geq 0} - \right. \\ & \left. - m_{j,k}^i S_{k-1+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{I}_{\gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i < 0} - m_{j,k-1}^i S_{k-1+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{I}_{\gamma_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \geq 0} \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(m_{j+1,k}^i f_{j+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{I}_{f_{j+\frac{1}{2},k}^i < 0} + m_{j,k}^i f_{j+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{I}_{f_{j+\frac{1}{2},k}^i \geq 0} - \right. \\ & \left. - m_{j,k}^i f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{I}_{f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i < 0} - m_{j-1,k}^i f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{I}_{f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \geq 0} \right), \end{aligned}$$

где $j = \overline{2, M-2}$, $k = \overline{2, H-2}$, $i = \overline{0, N-1}$. Чтобы избавиться от громоздких выражений, для простоты введем следующие обозначения:

$$a_{j,k}^i = S_{k+1}^2 (\sigma_{j,k}^i)^2,$$

$$\bar{b}_{j,k+\frac{1}{2}}^i = S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{I}_{\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i < 0},$$

$$\begin{aligned}
b_{j,k+\frac{1}{2}}^i &= S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{I}_{\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \geq 0}, \\
\bar{c}_{j+\frac{1}{2},k}^i &= f_{j+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{I}_{f_{j+\frac{1}{2},k}^i < 0}, \\
c_{j+\frac{1}{2},k}^i &= f_{j+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{I}_{f_{j+\frac{1}{2},k}^i \geq 0}.
\end{aligned}$$

Тогда дискретная запись экстремальной задачи (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{m_{j,k}^{i+1} - m_{j,k}^i}{\Delta t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} (m_{j,k+1}^i a_{j,k+1}^i - 2m_{j,k}^i a_{j,k}^i + m_{j,k-1}^i a_{j,k-1}^i) + \\
+ \frac{1}{\Delta S} (m_{j,k+1}^i \bar{b}_{j,k+\frac{1}{2}}^i + m_{j,k}^i (b_{j,k+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i) - m_{j,k-1}^i b_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i) + \\
+ \frac{1}{\Delta x} (m_{j+1,k}^i \bar{c}_{j+\frac{1}{2},k}^i + m_{j,k}^i (c_{j+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i) - m_{j-1,k}^i c_{j-1+\frac{1}{2},k}^i) = 0, \quad (2.4.7)
\end{aligned}$$

$$m_{j,k}^0 = \tilde{m}_{j,k}^0, \quad (2.4.8)$$

$$J = \Delta t \Delta x \Delta S \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{H-1} (\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i)^2 \rightarrow \min_{\substack{M_{j+\frac{1}{2},k}^i \\ \geq \theta_{j+\frac{1}{2},k}^i \\ C_{\min}^i}}. \quad (2.4.9)$$

С учетом нулевых граничных условий, лагранжиан к дискретной экстремальной задаче (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(m, v) = \Delta t \Delta x \Delta S \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{H-1} (\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i)^2 + \Delta t \Delta x \Delta S \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=2}^{M-2} \sum_{k=2}^{H-2} v_{j,k}^i \left[\frac{m_{j,k}^{i+1} - m_{j,k}^i}{\Delta t} - \right. \\
- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} (m_{j,k+1}^i a_{j,k+1}^i - 2m_{j,k}^i a_{j,k}^i + m_{j,k-1}^i a_{j,k-1}^i) + \\
+ \frac{1}{\Delta S} (m_{j,k+1}^i \bar{b}_{j,k+\frac{1}{2}}^i + m_{j,k}^i (b_{j,k+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i) - m_{j,k-1}^i b_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i) + \\
\left. + \frac{1}{\Delta x} (m_{j+1,k}^i \bar{c}_{j+\frac{1}{2},k}^i + m_{j,k}^i (c_{j+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i) - m_{j-1,k}^i c_{j-1+\frac{1}{2},k}^i) \right]. \quad (2.4.10)
\end{aligned}$$

Выделим слагаемые с переменными $m_{j,k}^i$. С учетом граничных условий на плотность распределения m и терминального условия на сопряженную функцию $v_{j,k}^{N-1} = 0$, $j = \overline{2, M-2}$, $k = \overline{2, H-2}$, лагранжиан (2.4.10) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(m, v) = & \Delta t \Delta x \Delta S \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{H-1} (\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i)^2 + \Delta t \Delta x \Delta S \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=3}^{M-3} \sum_{k=3}^{H-3} m_{j,k}^i \cdot \right. \\
& \cdot \left[\frac{v_{j,k}^{i-1} - v_{j,k}^i}{\Delta t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} a_{j,k}^i (v_{j,k-1}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j,k+1}^i) + \right. \\
& + \frac{1}{\Delta S} \left(\bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i v_{j,k-1}^i + \left(b_{j,k+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) v_{j,k}^i - b_{j,k+\frac{1}{2}}^i v_{j,k+1}^i \right) + \\
& \left. \left. + \frac{1}{\Delta x} \left(\bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i v_{j-1,k}^i + \left(c_{j+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) v_{j,k}^i - c_{j+\frac{1}{2},k}^i v_{j+1,k}^i \right) \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{j=2}^{M-2} \sum_{k=2}^{H-2} \left[\frac{-m_{j,k}^0 v_{j,k}^0}{\Delta t} \right] - \right. \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=2}^{M-2} \left[m_{j,H-2}^i a_{j,H-2}^i v_{j,H-3}^i - 2m_{j,2}^i a_{j,2}^i v_{j,2}^i - 2m_{j,H-2}^i a_{j,H-2}^i v_{j,H-2}^i + m_{j,2}^i a_{j,2}^i v_{j,3}^i \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta S} \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=2}^{M-2} \left[m_{j,H-2}^i \bar{b}_{j,H-3+\frac{1}{2}}^i v_{j,H-3}^i + m_{j,2}^i \left(b_{j,2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,1+\frac{1}{2}}^i \right) v_{j,2}^i + \right. \\
& \left. + m_{j,H-2}^i \left(b_{j,H-2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,H-3+\frac{1}{2}}^i \right) v_{j,H-2}^i + m_{j,2}^i b_{j,2+\frac{1}{2}}^i v_{j,3}^i \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{k=2}^{H-2} \left[m_{M-2,k}^i \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},k}^i v_{M-3,k}^i + m_{2,k}^i \left(c_{2+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},k}^i \right) v_{2,k}^i + \right. \\
& \left. \left. + m_{M-2,k}^i \left(c_{M-2+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},k}^i \right) v_{M-2,k}^i + m_{2,k}^i c_{2+\frac{1}{2},k}^i v_{3,k}^i \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Откуда получаем уравнение на сопряженную переменную в попятном времени

$$\begin{aligned}
v_{j,k}^{i-1} = & v_{j,k}^i + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta S^2} a_{j,k}^i (v_{j,k-1}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j,k+1}^i) - \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta S} \left(\bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i v_{j,k-1}^i + \left(b_{j,k+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) v_{j,k}^i - b_{j,k+\frac{1}{2}}^i v_{j,k+1}^i \right) - \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i v_{j-1,k}^i + \left(c_{j+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) v_{j,k}^i - c_{j+\frac{1}{2},k}^i v_{j+1,k}^i \right) + \\
& + 2\Delta t (\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i), \quad i = \overline{1, N-1}, j = \overline{3, M-3}, k = \overline{3, H-3}, \quad (2.4.11)
\end{aligned}$$

терминальное условие

$$v_{j,k}^{N-1} = 0, \quad j = \overline{2, M-2}, k = \overline{2, H-2}, \quad (2.4.12)$$

а также граничные условия. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
h_3^{1,i} &= \frac{1}{\Delta x} \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},3}^i, \\
h_{H-3}^{1,i} &= \frac{1}{\Delta x} \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},H-3}^i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_3^{2,i} &= \frac{1}{\Delta x} \left(c_{M-2+\frac{1}{2},3}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},3}^i \right), \\
h_{H-3}^{2,i} &= \frac{1}{\Delta x} \left(c_{M-2+\frac{1}{2},H-3}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},H-3}^i \right), \\
\tilde{h}_3^{1,i} &= \frac{1}{\Delta x} \left(c_{2+\frac{1}{2},3}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},3}^i \right), \\
\tilde{h}_{H-3}^{1,i} &= \frac{1}{\Delta x} \left(c_{2+\frac{1}{2},H-3}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},H-3}^i \right), \\
h_3^{2,i} &= -\frac{1}{\Delta x} c_{2+\frac{1}{2},3}^i, \\
h_{H-3}^{2,i} &= -\frac{1}{\Delta x} c_{2+\frac{1}{2},H-3}^i, \\
g_{2,H-3}^i &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} a_{2,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \bar{b}_{2,H-3+\frac{1}{2}}^i, \\
g_{2,3}^i &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} a_{2,2}^i - \frac{1}{\Delta S} b_{2,2+\frac{1}{2}}^i, \\
g_{2,H-2}^i &= \frac{1}{\Delta S^2} a_{2,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left(b_{2,H-2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{2,H-3+\frac{1}{2}}^i \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(c_{2+\frac{1}{2},H-2}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},H-2}^i \right), \\
g_{2,2}^i &= \frac{1}{\Delta S^2} a_{2,2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left(b_{2,2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{2,1+\frac{1}{2}}^i \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(c_{2+\frac{1}{2},2}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},2}^i \right), \\
g_{3,H-2}^i &= -\frac{1}{\Delta x} c_{2+\frac{1}{2},H-2}^i, \\
g_{3,2}^i &= -\frac{1}{\Delta x} c_{2+\frac{1}{2},2}^i, \\
g_{M-2,H-3}^i &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} a_{M-2,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \bar{b}_{M-2,H-3+\frac{1}{2}}^i, \\
g_{M-2,3}^i &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} a_{M-2,2}^i - \frac{1}{\Delta S} b_{M-2,2+\frac{1}{2}}^i, \\
g_{M-2,H-2}^i &= \frac{1}{\Delta S^2} a_{M-2,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left(b_{M-2,H-2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{M-2,H-3+\frac{1}{2}}^i \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(c_{M-2+\frac{1}{2},H-2}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},H-2}^i \right), \\
g_{M-2,2}^i &= \frac{1}{\Delta S^2} a_{M-2,2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left(b_{M-2,2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{M-2,1+\frac{1}{2}}^i \right) + \frac{1}{\Delta x} \left(c_{M-2+\frac{1}{2},2}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},2}^i \right), \\
g_{M-3,H-2}^i &= \frac{1}{\Delta x} \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},H-2}^i, \\
g_{M-3,2}^i &= \frac{1}{\Delta x} \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},2}^i, \\
g_{j,H-3}^i &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} a_{j,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \bar{b}_{j,H-3+\frac{1}{2}}^i, \quad j = \overline{3, M-3}, \\
g_{j,3}^i &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} a_{j,2}^i - \frac{1}{\Delta S} b_{j,2+\frac{1}{2}}^i, \quad j = \overline{3, M-3}, \\
g_{j,H-2}^i &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} a_{j,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left(b_{j,H-2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,H-3+\frac{1}{2}}^i \right), \quad j = \overline{3, M-3},
\end{aligned}$$

$$g_{j,2}^i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta S^2} a_{j,2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left(b_{j,2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,1+\frac{1}{2}}^i \right), \quad j = \overline{3, M-3},$$

$$r_{j,k}^i = 2 \left(\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i \right).$$

Тогда граничные условия задаются следующим образом:

$$v_{M-3,H-2}^{i-1} = \frac{r_{M-3,H-2}^{i-1} - g_{M-3,H-3}^{i-1} v_{M-3,H-3}^i}{g_{M-3,H-2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.4.13)$$

$$v_{M-3,2}^{i-1} = \frac{r_{M-3,2}^{i-1} - g_{M-3,3}^{i-1} v_{M-3,3}^i}{g_{M-3,2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.4.14)$$

$$v_{M-2,H-3}^{i-1} = \frac{r_{M-2,H-3}^{i-1} - h_{H-3}^{1,i-1} v_{M-3,H-3}^i}{h_{H-3}^{2,i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.4.15)$$

$$v_{M-2,3}^{i-1} = \frac{r_{M-2,3}^{i-1} - h_3^{1,i-1} v_{M-3,3}^i}{h_3^{2,i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.4.16)$$

$$v_{M-2,H-2}^{i-1} = \frac{r_{M-2,H-2}^{i-1} - g_{M-2,H-3}^{i-1} v_{M-2,H-3}^i - g_{M-3,H-2}^{i-1} v_{M-3,H-2}^i}{g_{M-2,H-2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.4.17)$$

$$v_{M-2,2}^{i-1} = \frac{r_{M-2,2}^{i-1} - g_{M-2,3}^{i-1} v_{M-2,3}^i - g_{M-3,2}^{i-1} v_{M-3,2}^i}{g_{M-2,2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.4.18)$$

$$v_{2,H-3}^{i-1} = \frac{r_{2,H-3}^{i-1} - \tilde{h}_{H-3}^{2,i-1} v_{3,H-3}^i}{\tilde{h}_{H-3}^{1,i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.4.19)$$

$$v_{2,3}^{i-1} = \frac{r_{2,3}^{i-1} - \tilde{h}_3^{2,i-1} v_{3,3}^i}{\tilde{h}_3^{1,i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.4.20)$$

$$v_{3,H-2}^{i-1} = \frac{r_{3,H-2}^{i-1} - g_{3,H-3}^{i-1} v_{3,H-3}^i}{g_{3,H-2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.4.21)$$

$$v_{3,2}^{i-1} = \frac{r_{3,2}^{i-1} - g_{3,3}^{i-1} v_{3,3}^i}{g_{3,2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.4.22)$$

$$v_{2,H-2}^{i-1} = \frac{r_{2,H-2}^{i-1} - g_{2,H-3}^{i-1} v_{2,H-3}^i - g_{3,H-2}^{i-1} v_{3,H-2}^i}{g_{2,H-2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.4.23)$$

$$v_{2,2}^{i-1} = \frac{r_{2,2}^{i-1} - g_{2,3}^{i-1} v_{2,3}^i - g_{3,2}^{i-1} v_{3,2}^i}{g_{2,2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (2.4.24)$$

Таким образом, сопряженное уравнение задается динамическим уравнением (2.4.11), терминальным условием (2.4.12) и краевыми условиями (2.4.13), (2.4.14), (2.4.15), (2.4.16), (2.4.17), (2.4.18), (2.4.19), (2.4.20), (2.4.21), (2.4.22), (2.4.23), (2.4.24).

Замечание 8. Если знаменатель обращается в ноль в краевых условиях (2.4.13), (2.4.14), (2.4.15), (2.4.16), (2.4.17), (2.4.18), (2.4.19), (2.4.20), (2.4.21), (2.4.22), (2.4.23), (2.4.24), то

это соответствует нулевой плотности распределения в данной точке, и значение сопряженной переменной может быть любым. Для определенности будем считать, что сопряженная переменная в этой точке равна нулю.

Участники опроса ОБДХ меняются каждый год, но в течение каждого года ежеквартально опрашиваются одни и те же домашние хозяйства. Исходя из этого, алгоритм идентификации статистической плотности распределения проводился в каждом году независимо с 2015 по 2020гг. В качестве примера рассмотрим домашние хозяйства, проживающие в средней группе регионов (см. Прил.А) в 2020г. Статистическую плотность распределения построим на плоскости (x, S) , основываясь практически на 5 000 домашних хозяйств, которые оказались заемщиками из средней группы регионов. Обозначим через D_1 низкодоходных заемщиков, а через D_2 — высокодоходных. Будем использовать параметры скорости обращения денег заемщиков из идентификации репрезентативного рационального домашнего хозяйства (см. Прил.А). В качестве единицы измерения времени выбран 1 мес. В соответствии с Прил.А, $\theta_{D_1} = 1$, $\theta_{D_2} = 3$. Пусть коэффициенты диффузии доходов заемщиков равно соответственно $\sigma_{D_1} = 0.01$, $\sigma_{D_2} = 0.02$. Для удобства масштабирования денежные единицы будем понимать в тысячах рублей. Параметры сетки: $L_1 = 500$, $L_2 = 150$, $S_1 = 0$, $S_2 = 60$, $M = 400$, $H = 100$, $N = 100$, $T = 1$. Положим параметры оптимизационного алгоритма $h = 4$, $\varepsilon = 10^{-4}$. Оптимизацию будем проводить в области платежеспособных заемщиков, в случае, если домашнее хозяйство находится в области банкротства $(x \leq -\frac{S}{r_L - \gamma})$, мы считаем, что его потребление находится на минимуме. Функционал (2.4.13) экстремальной задачи также рассматривается на области платежеспособных заемщиков.

На Рис.2.25,2.26,2.27,2.28,2.29,2.30 представлены расчетные данные, полученные с помощью решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка в различные временные периоды 2020г. На Рис.2.25,2.27,2.29 показаны плотности распределения в трехмерном отображении, а на Рис.2.26,2.28,2.30 — в проекции на плоскость финансового состояния и доходов. Синим цветом изображены заемщики, красным — банкроты, которые не имеют возможности расплатиться с потребительским кредитом при текущей экономической ситуации. Золотистым изображены домашние хозяйства, которые не осуществляют займы по потребительскому кредиту. Зеленая полоса вдоль оси x — «серая зона», склеивающая по непрерывности параметры низкодоходных и высокодоходных заемщиков.

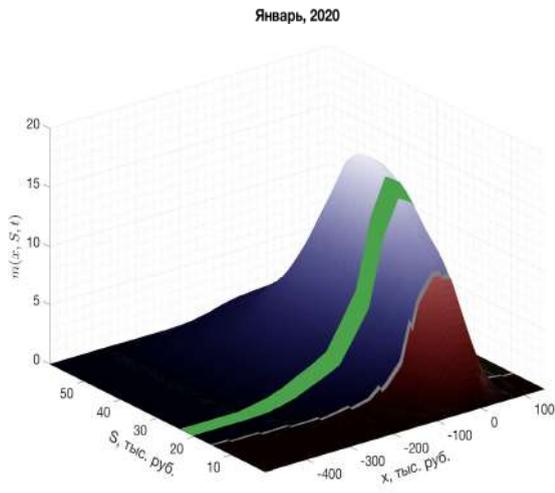


Рис. 2.25: Расчет плотности распределения домашних хозяйств из средней группы регионов в январе 2020г.

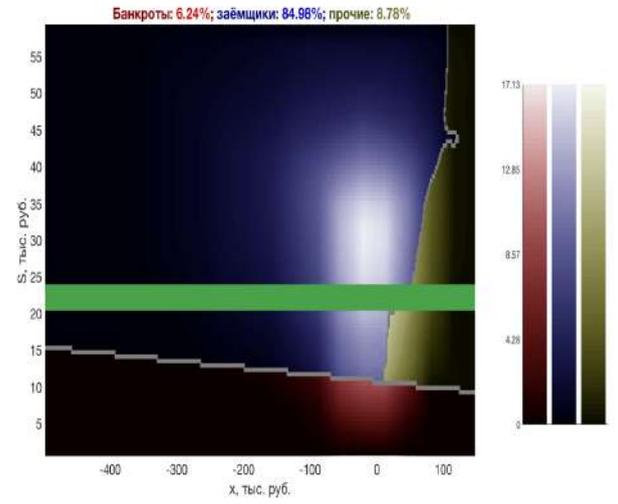


Рис. 2.26: Расчет плотности распределения домашних хозяйств из средней группы регионов в январе 2020г (вид сверху).

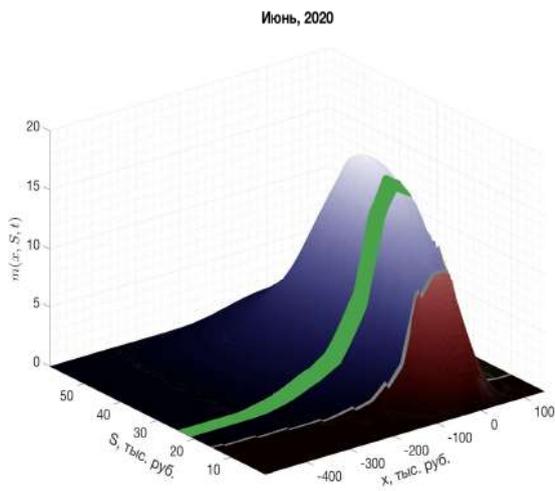


Рис. 2.27: Расчет плотности распределения домашних хозяйств из средней группы регионов в июне 2020г.

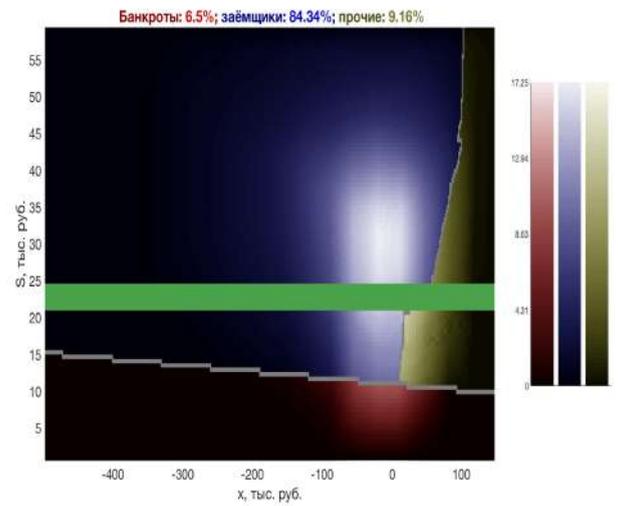


Рис. 2.28: Расчет плотности распределения домашних хозяйств из средней группы регионов в июне 2020г (вид сверху).

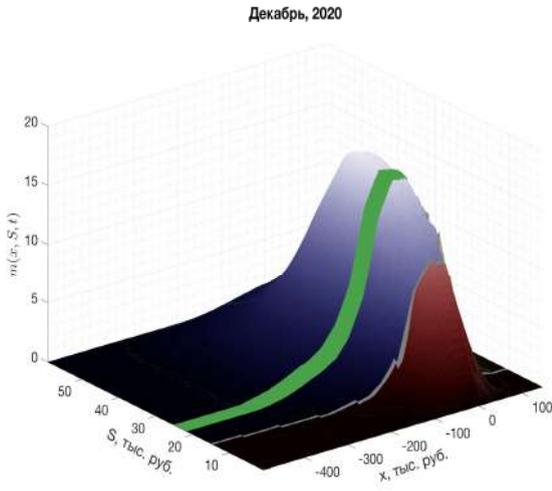


Рис. 2.29: Расчет плотности распределения домашних хозяйств из средней группы регионов в декабре 2020г.

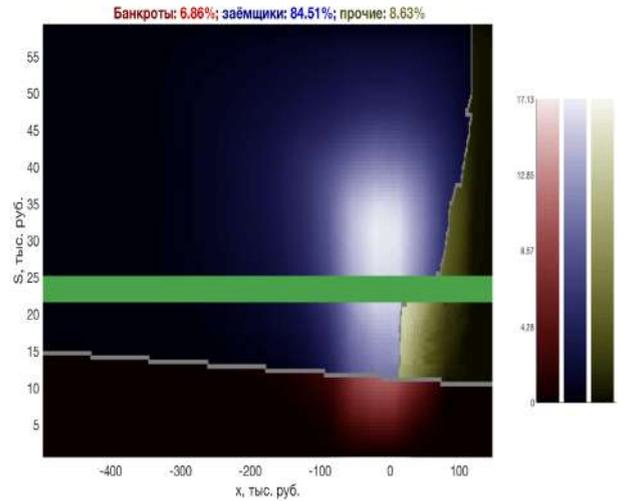


Рис. 2.30: Расчет плотности распределения домашних хозяйств из средней группы регионов в декабре 2020г (вид сверху).

Для данного примера среднее отклонение плотности распределения, полученной при решении уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, по сравнению со статистической плотностью распределения составляет 9.4%, т.е.

$$\frac{\int_0^T \iint_{\Omega} |\tilde{m}(x, S, t) - m(x, S, t)| dx dS dt}{\int_0^T \iint_{\Omega} \tilde{m}(x, S, t) dx dS dt} = 0.094,$$

где Ω — область платежеспособных заемщиков на плоскости (x, S) . Средние отклонения для остальных групп регионов на всех рассматриваемых периодах представлены в Табл.2.1.

Таблица 2.1:
$$\frac{\int_0^T \iint_{\Omega} |\tilde{m}(x, S, t) - m(x, S, t)| dx dS dt}{\int_0^T \iint_{\Omega} \tilde{m}(x, S, t) dx dS dt}.$$

Год	Бедная группа регионов, город	Бедная группа регионов, село	Средняя группа регионов	Богатая группа регионов
2015	8.5%	12.3%	10.3%	7.5%
2016	9.3%	11.3%	9.2%	12.5%
2017	9.6%	8.4%	11.4%	9%
2018	10.2%	7.4%	7.3%	9%
2019	8.9%	11.3%	8.3%	7.3%
2020	11.2%	8.6%	9.4%	13.3%

Отметим, что для данного примера были проведены 139 итераций алгоритма поиска ми-

нимизатора. Поскольку мы ищем локальный экстремум задачи, нет гарантии монотонности итерационного алгоритма. В случае нарушения монотонности, воспроизводится предыдущая итерация и делится шаг сходимости h пополам. Динамика итерационной сходимости представлена на Рис.2.31.

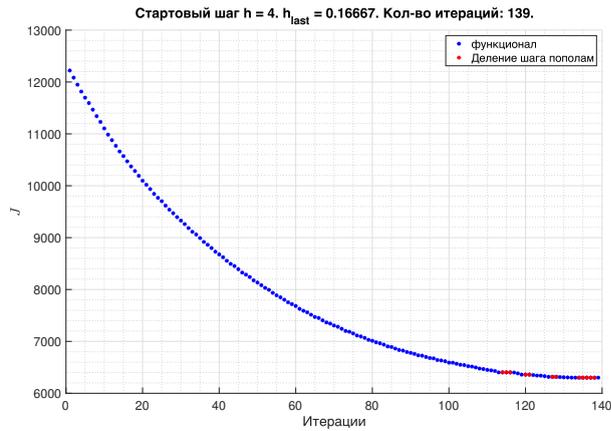


Рис. 2.31: Значение функционала экстремальной задачи в зависимости от номера итерации оптимизационного алгоритма.

Продемонстрируем потребление, полученное при решении экстремальной задачи и сравним его со статистическими данными в октябре 2020г (см. Рис.2.32). Как видно, найденное потребление сопоставляется со статистическими данными, погрешность составляет порядка 7% (см. Рис.2.33). Расчетное потребление отображено на Рис.2.34.

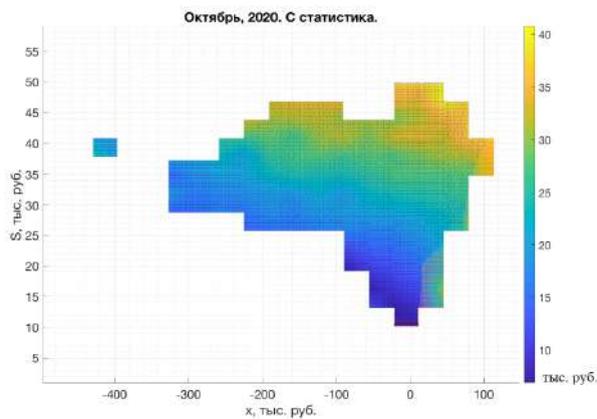


Рис. 2.32: Статистическое потребление по данным ОБДХ.

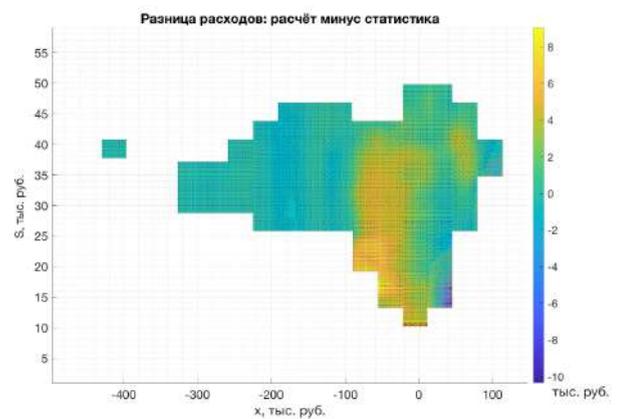


Рис. 2.33: Разница рассчитанного потребления и статистического.

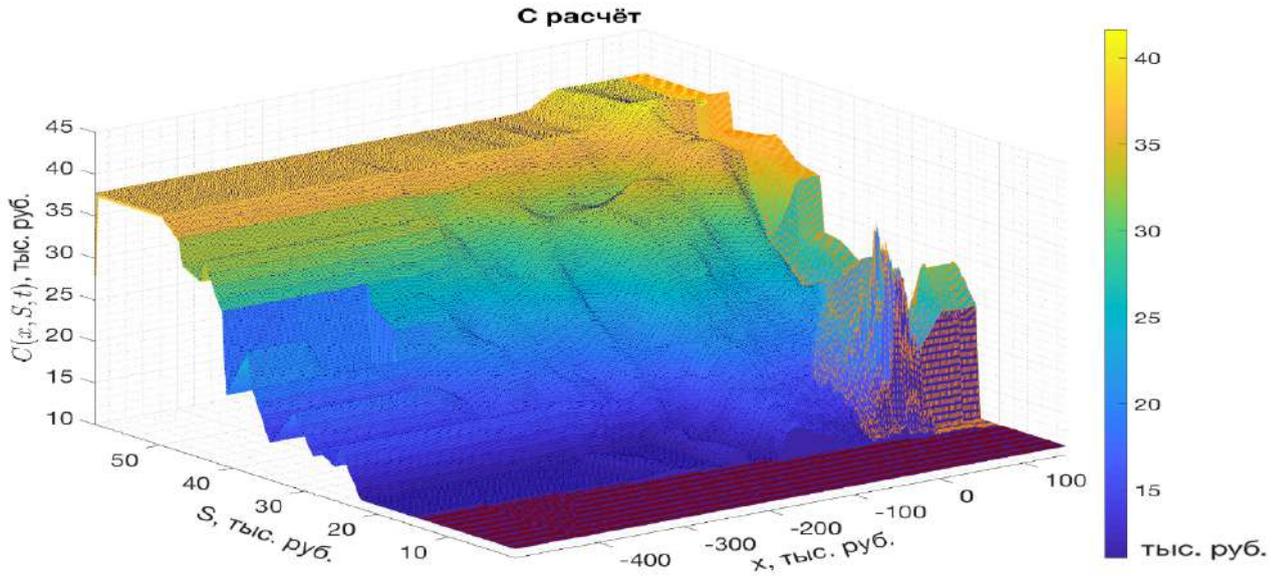


Рис. 2.34: Рассчитанное потребление.

Будем использовать построенную проекцию в качестве входных данных для определения поведенческих характеристик домашних хозяйств: отвращения к риску ρ и коэффициента дисконтирования δ , как это было сделано ранее для репрезентативного домашнего хозяйства. Обозначим через $\tilde{M}(x, S, t)$ результат численного решения экстремальной задачи (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3).

Мы идентифицируем параметры ρ и δ , описывающие поведенческие характеристики домашних хозяйств, чтобы воспроизвести решение экстремальной задачи $\tilde{M}(x, S, t)$ с помощью синтеза оптимального управления, описанного в Теореме 3 в параграфе 1.1. Как обсуждалось ранее, коэффициент отвращения к риску ρ и коэффициент скорости обращения денег $\frac{1}{\theta}$ можно задать константами для данного социального слоя¹, а коэффициент дисконтирования δ зависит от параметров экономической конъюнктуры. Естественно полагать, что отвращение к риску у низкодоходных заемщиков меньше, чем у высокодоходных, т.е. $\rho_{D_1} < \rho_{D_2}$. В тоже время, было учтено, что при построении статистических данных, $\theta_{D_1} < \theta_{D_2}$. Параметры ρ и θ также отличаются в зависимости от группы регионов и приведены в Прил.А. Так как мы рассматриваем низкодоходных и высокодоходных заемщиков в одном фазовом пространстве, то, как и ранее, склеиваем параметры по непрерывности через серую зону. Таким образом, получаем функции $\rho(x, S, t)$, $\theta(x, S, t)$, $\gamma(x, S, t)$, $r_L(x, S, t)$ ². После определения функций $\rho(x, S, t)$, $\theta(x, S, t)$, $\gamma(x, S, t)$, $r_L(x, S, t)$, используя синтез оптимального управления $M(x, S; r_L, \gamma, \theta, \rho, \delta)$,

¹Более того, для каждого социального слоя заемщиков из разных групп регионов коэффициент θ был идентифицирован на этапе построения статистической плотности распределения, чтобы определить фазовую переменную $x = M - L$.

²Ставки по потребительским кредитам для обеспеченных заемщиков отличаются от ставок по кредитам для необеспеченных заемщикам. Традиционно, процентная ставка обеспеченным заемщикам ниже, чем у необеспеченных.

мы можем найти такую $\delta(x, S, t)$, которая бы сопоставляла синтез $M(x, S; r_L, \gamma, \theta, \rho, \delta)$ с полученной проекцией $\tilde{M}(x, S, t)$ решения экстремальной задачи (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3) в каждой точке пространства $\Omega(t)$ для любого момента времени $t \in [0, T]$, где $\Omega(t)$ формирует область заемщиков на плоскости (x, S) и задается формулой

$$\Omega(t) = \left\{ (x, S) : x > -\frac{S - C_{\min}}{r_L - \gamma}, M(x, S) > x \right\}, \quad t \in [0, T].$$

В качестве примера представим функцию $\delta(x, S)$ для средних группы регионов (см. Прил.А) в марте 2015г. В соответствии с разностной схемой уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (1.3.14), коэффициент дисконтирования определяется в узлах $(j - 1 + \frac{1}{2}, k, i)$, $i, j, k \in \Omega^i$. Результат идентификации представлен на Рис.2.35.

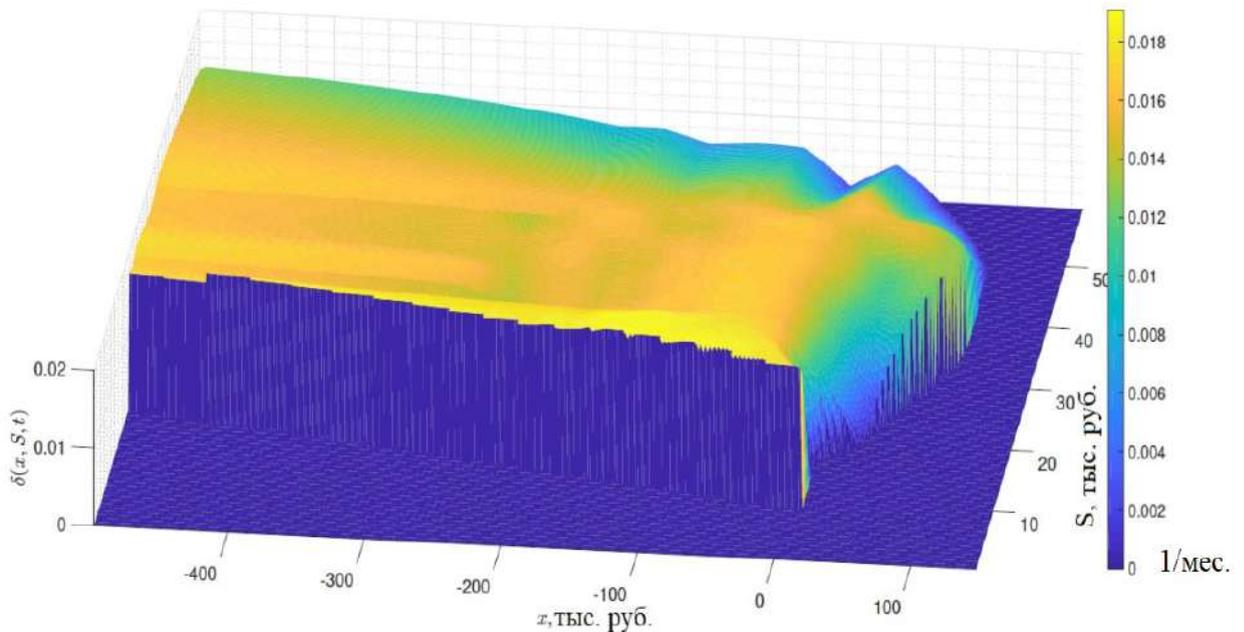


Рис. 2.35: Результат идентификации функции $\delta(x, S)$ для средней группы регионов в марте 2015г. Месячные данные.

Отметим, что функция $\delta(x, S, t)$ напрямую зависит от финансового состояния x и доходов S домашнего хозяйства. Из Рис.2.35 легко видеть, что для фиксированного x , чем больше доходов получает домашнее хозяйство, тем меньше коэффициент дисконтирования. В тоже время, для фиксированного S , чем меньше финансовое состояние домашнего хозяйства, тем больше коэффициент дисконтирования. Данное наблюдение подтверждает, что бедные слои населения существенно больше ценят денежные средства в настоящий момент, чем богатые слои населения. Как обсуждалось ранее, коэффициент дисконтирования зависит от параметров экономической конъюнктуры: процентных ставок по потребительским кредитам, темпов роста доходов, инфляции. Чтобы оценить влияние параметров экономической конъюнктуры на коэффициент дисконтирования, строится регрессия вида (2.2.1).

Пусть

$$\hat{\Omega} = \bigcap_{i=0}^N \Omega^i$$

определяет пересечение области заемщиков по времени. Это гарантирует, что рассматриваемая точка (x, S) , принадлежащая области $\hat{\Omega}$ будет относиться к области заимствования по потребительскому кредиту.

Было бы крайне неэффективно строить регрессии (2.2.1) для каждого узла сетки области $\hat{\Omega}$, поэтому мы выбираем только некоторые узлы сетки из области $\hat{\Omega}$. Узлы области $\hat{\Omega}$ для построения регрессии выбираются из соображений значения плотности распределения: чем больше плотность распределения, тем больше узлов выбирается из данной окрестности. В этих узлах строятся регрессии коэффициента дисконтирования (см. Рис.2.36,2.37,2.38,2.39). После проводим интерполяцию значений коэффициентов дисконтирования в выбранных точках на всю область $\hat{\Omega}$.

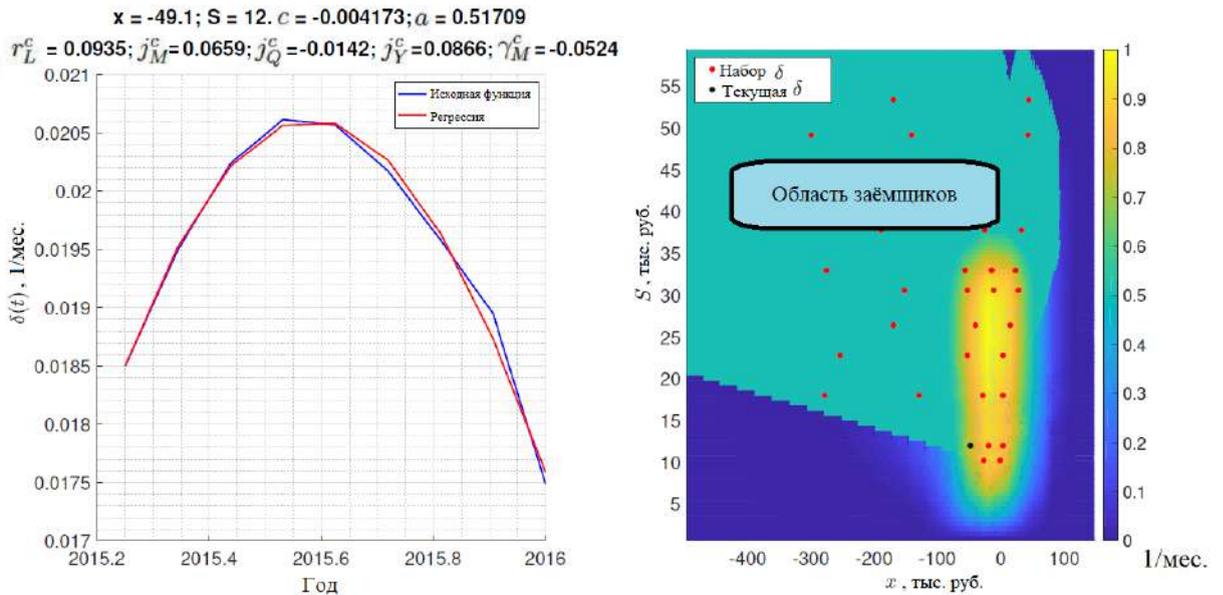


Рис. 2.36: Слева: функция $\delta(x, S)$ и ее регрессия. Справа: выбранная точка в области $\hat{\Omega}$.

На Рис.2.36 построена регрессия в точке $x = -49.1, S = 12$. Полученная регрессия определяется формулой

$$\begin{aligned} \delta(t) = & -0.004173 + 0.51709 \cdot \delta(t-1) + 0.0935 \cdot r_L(t) + 0.0659 \cdot j_M(t) - 0.0142 \cdot j_Q(t) + \\ & + 0.0866 \cdot j_Y(t) - 0.0524 \cdot \gamma_M(t). \end{aligned}$$

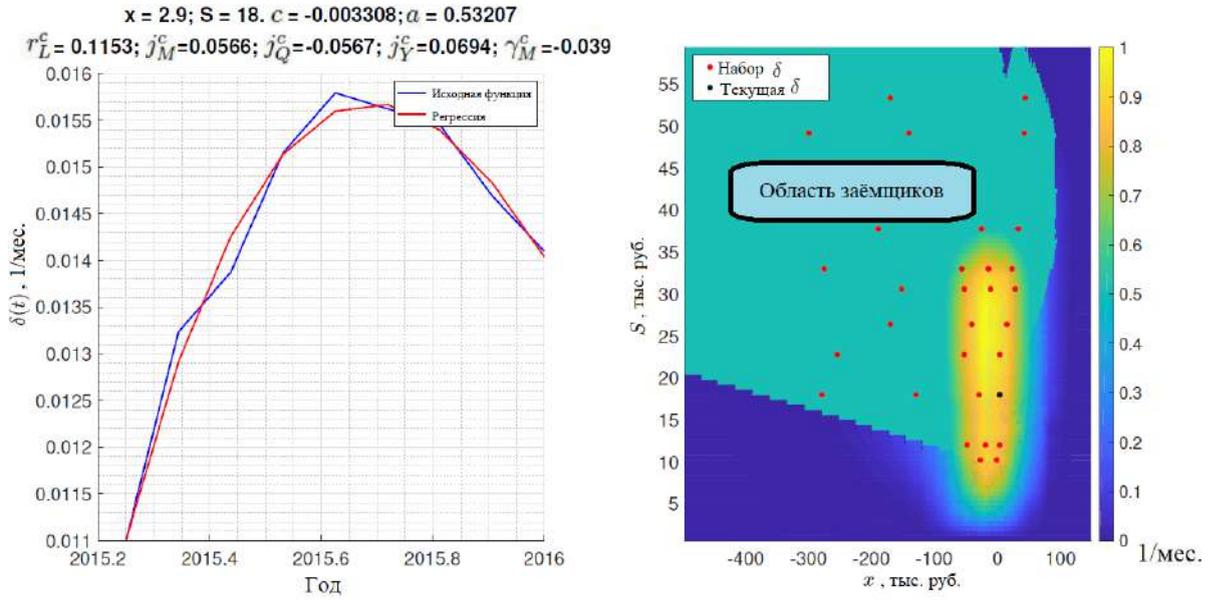


Рис. 2.37: Слева: функция $\delta(x, S)$ и ее регрессия. Справа: выбранная точка в области $\hat{\Omega}$.

На Рис.2.37 построена регрессия в точке $x = 2.9, S = 18$. Полученная регрессия задается формулой

$$\delta(t) = -0.003308 + 0.53207 \cdot \delta(t - 1) + 0.1153 \cdot r_L(t) + 0.0566 \cdot j_M(t) - 0.0567 \cdot j_Q(t) + 0.0694 \cdot j_Y(t) - 0.039 \cdot \gamma_M(t).$$

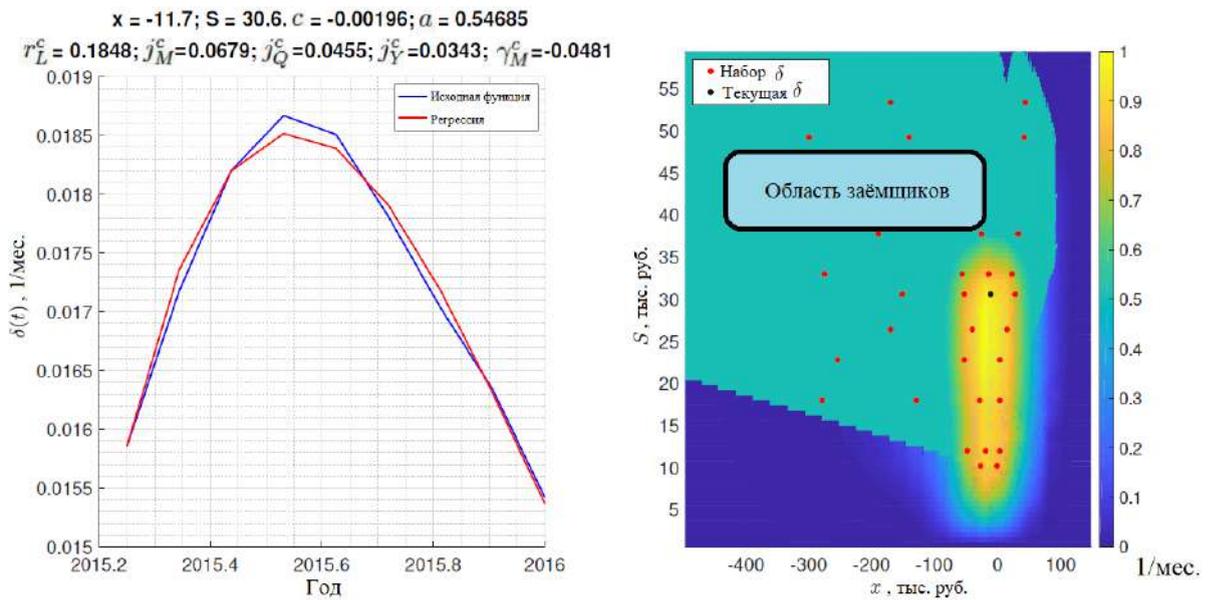


Рис. 2.38: Слева: функция $\delta(x, S)$ и ее регрессия. Справа: выбранная точка в области $\hat{\Omega}$.

На Рис.2.38 построена регрессия в точке $x = -11.7, S = 30.6$. Полученная регрессия

задается формулой

$$\delta(t) = -0.00196 + 0.54685 \cdot \delta(t-1) + 0.1848 \cdot r_L(t) + 0.0679 \cdot j_M(t) + 0.0455 \cdot j_Q(t) + 0.0343 \cdot j_Y(t) - 0.0481 \cdot \gamma_M(t).$$

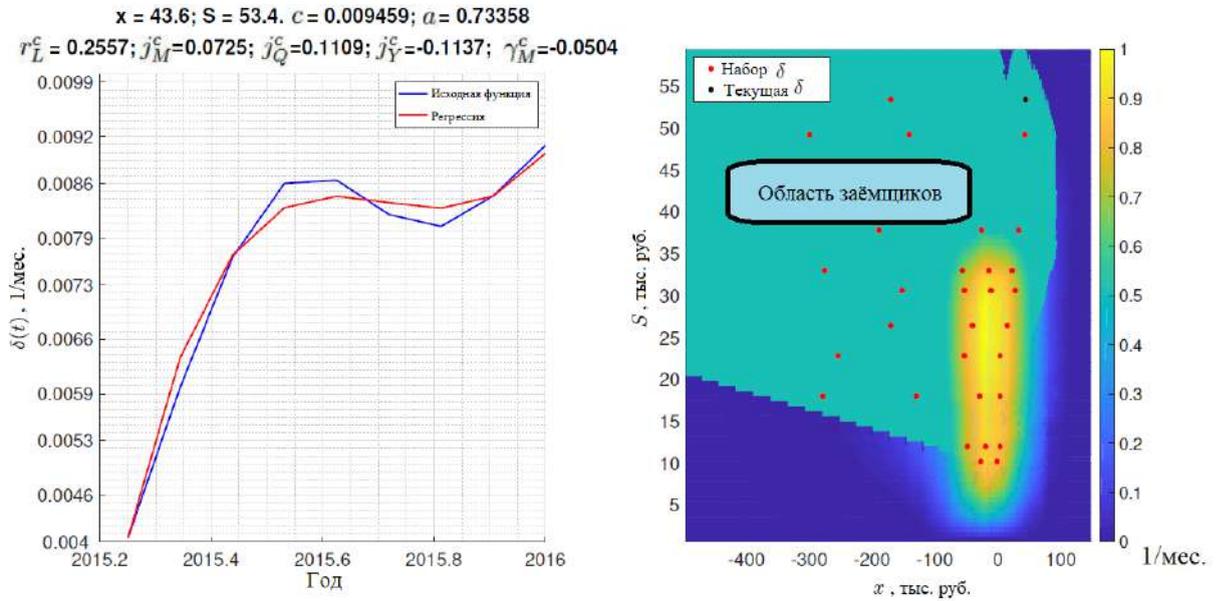


Рис. 2.39: Слева: функция $\delta(x, S)$ и ее регрессия. Справа: выбранная точка в области $\hat{\Omega}$.

На Рис.2.39 построена регрессия в точке $x = 43.6$, $S = 53.4$. Полученная регрессия задается формулой

$$\delta(t) = 0.009459 + 0.73358 \cdot \delta(t-1) + 0.2557 \cdot r_L(t) + 0.0725 \cdot j_M(t) + 0.1109 \cdot j_Q(t) - 0.1137 \cdot j_Y(t) - 0.0504 \cdot \gamma_M(t).$$

Как видно из Рис.2.36,2.37,2.38,2.39, коэффициенты регрессоров отличаются. Стоит отметить, что рост процентной ставки по потребительскому кредиту, рост инфляции влекут к увеличению дисконтирования, в то время как рост доходов домашнего хозяйства уменьшает дисконтирование. Также, стоит отметить, что домашние хозяйства с большими доходами более чувствительны к изменениям процентной ставки по потребительскому кредиту. Так, у домашних хозяйств, получающих 12 тыс.руб./чел., коэффициент $r_L^c = 0.0935$, у тех, кто получает 18 тыс.руб./чел., коэффициент $r_L^c = 0.1153$, кто получает 30.6 тыс.руб./чел., коэффициент $r_L^c = 0.1848$, а у тех, кто получает 53.4 тыс.руб./чел., коэффициент $r_L^c = 0.2557$. Это свидетельствует о том, что бедные домашние хозяйства менее чувствительны к изменению ставки по потребительскому кредиту, т.к. они, в большинстве случаев, осуществляют займы с целью поддержки минимального потребления или в сложных жизненных ситуациях.

Перейдем к исследованию вопроса, как построенная идентификация модели влияет на ре-

шение уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (2.4.2), (2.4.3), допустима ли данная идентификация? Будем использовать регрессионную функцию $\delta_{reg}(x, S; r_L, j_M, j_Q, j_Y, \gamma_M)$ для определения синтеза оптимального управления, описанного в Теореме 3 в параграфе 1.1. На Рис.2.40,2.41,2.42 отражены результаты решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (2.4.2), (2.4.3). Красная область характеризует банкротов (домашние хозяйства, которые не имеют возможности расплатиться с потребительскими кредитами при текущих параметрах экономической конъюнктуры), синяя область характеризует платежеспособных заемщиков, золотистая область характеризует домашние хозяйства, которые не берут потребительский кредит. Зеленая полоса отражает «серую зону», склеивающую по непрерывности параметры низкодоходных и высокодоходных заемщиков.

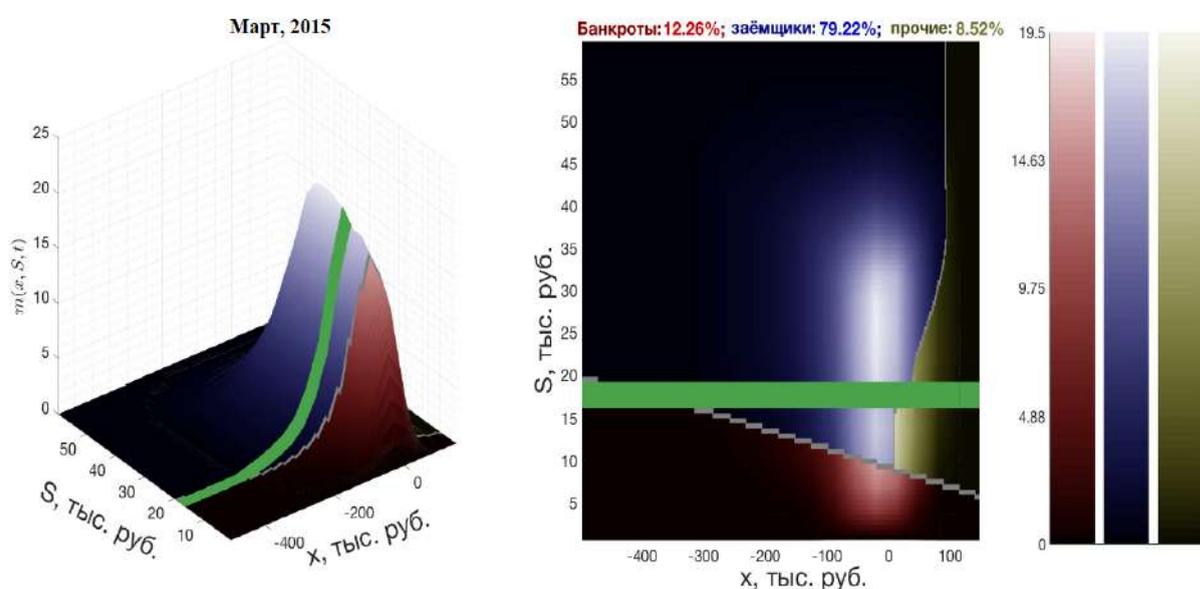


Рис. 2.40: Плотность распределения домашних хозяйств в марте 2015г в средней группе регионов. Слева: пространственное отображение, справа в проекции на плоскость (x, S) .

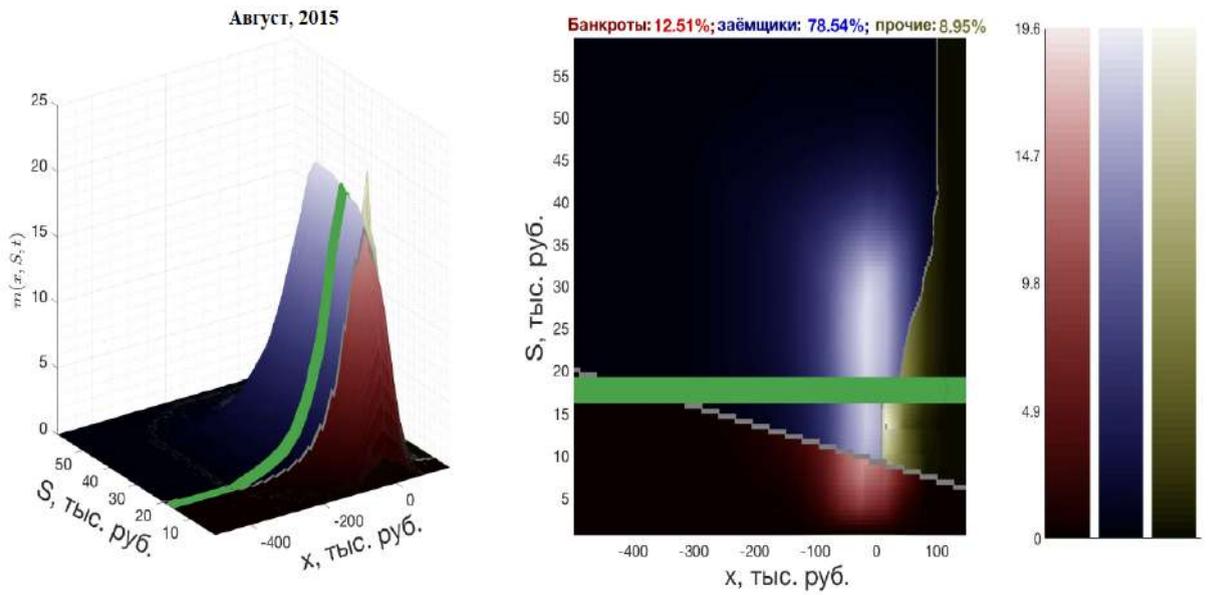


Рис. 2.41: Плотность распределения домашних хозяйств в августе 2015г в средней группе регионов. Слева: пространственное отображение, справа в проекции на плоскость (x, S) .

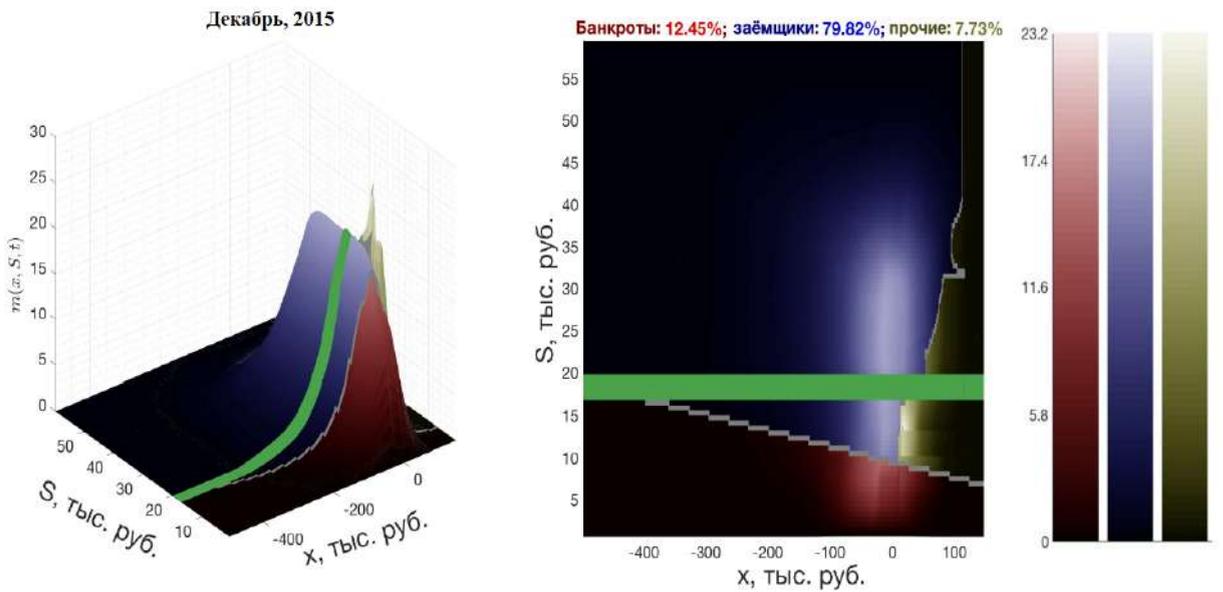


Рис. 2.42: Плотность распределения домашних хозяйств в декабре 2015г в средней группе регионов. Слева: пространственное отображение, справа в проекции на плоскость (x, S) .

Среднее отклонение решения $m(x, S, t)$ уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (2.4.2), (2.4.3) от статистических данных $\tilde{m}(x, S, t)$ (см. Рис.2.25,2.26,2.27,2.28,2.29,2.30) будем вычислять по формуле

$$\frac{\int_0^T \iint_{\Omega} |\tilde{m}(x, S, t) - m(x, S, t)| dx dS dt}{\int_0^T \iint_{\Omega} \tilde{m}(x, S, t) dx dS dt}.$$

В примере выше, среднее отклонение решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка от статистических данных составляет 0.125 или 12.5%. Если решать уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка, используя статистические потребления домашних хозяйств, то среднее отклонение составило бы 11.3%, а если в качестве потребления использовать построенную проекцию, то среднее отклонение составляет 10.3%. Таким образом, проведенная идентификация допустима и позволяет в дальнейшем строить различные сценарии группового экономического поведения домашних хозяйств. Результаты идентификации других временных периодов в различных группах регионов представлены в Табл.2.2.

Таблица 2.2: Сравнение результатов идентификации со статистическими данными и построенной проекцией. Данные среднего отклонение решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка.

Год	Бедная группа регионов. Город.	Бедная группа регионов. Село.	Средняя группа регионов	Богатая группа регионов
2015				
Статистика	10.2%	14.3%	11.3%	8.9%
Проекция	8.5%	12.3%	10.3%	7.5%
Идентификация	10.8%	17.9%	12.5%	10.8%
2016				
Статистика	11.6%	15.3%	9.5%	16.3%
Проекция	9.3%	11.3%	9.2%	12.5%
Идентификация	13.1%	17.1%	12%	16.7%
2017				
Статистика	12.8%	9.1%	13.2%	14.8%
Проекция	9.6%	8.4%	11.4%	9%
Идентификация	14.8%	14.6%	13.9%	15.3%
2018				
Статистика	13.1%	9.1%	8.9%	11.1%
Проекция	10.2%	8.4%	7.3%	9%
Идентификация	20.2%	16.9%	11%	12.1%
2019				
Статистика	13.9%	15.5%	10.2%	11.8%
Проекция	8.9%	11.3%	8.3%	7.3%
Идентификация	25.3%	22.8%	13.4%	11.9%
2020				
Статистика	15.6%	9.7%	12.1%	20.5%
Проекция	11.2%	8.6%	9.4%	13.3%
Идентификация	20.1%	16.4%	14.6%	20.7%

Глава 3

Моделирование доходов населения

В предыдущих главах на языке математических моделей исследовалось описание экономического поведения домашних хозяйств как потребителя на несовершенном рынке кредитов и депозитов. В данной главе речь пойдет о моделировании доходов населения.

3.1 Моделирование динамики человеческого капитала

Население является субъектом на рынке труда, обладающим компетенциями и получающим заработную плату за оказание услуг. Работник получает доходы, которые он может тратить на потребление и на развитие своих компетенций. Компетенции работника описываются его человеческим капиталом. В моделях экономического роста выделяют роль динамики человеческого капитала в повышении производительности труда и росте реальной заработной платы [90]. В данном параграфе мы опишем математическую модель поведения работника на рынке труда и изучим микроописание и экономические стимулы, которые влияют на рост человеческого капитала.

Будем моделировать поведение репрезентативного, рационального работника [91], который получает заработную плату S , тратит ее на осуществление потребительских расходов C и на развитие своего человеческого капитала X , т.е.

$$S = C + X.$$

Накопление человеческого капитала $P(t) \geq 0$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dP}{dt} = X + \mu P,$$

с начальным условием

$$P(0) = 0.$$

Здесь $\mu < 0$ — параметр, описывающий устаревание накопленных компетенций работника.

В случайный момент времени появляется вакансия, позволяющая работнику увеличить заработную плату в соответствии с накопленным человеческим капиталом до величины $\beta(P)$, где $\beta(P) \geq 0$, монотонно неубывающая функция. Будем предполагать, что вероятность появления вакансии не позднее времени t равна

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t H(P(\tau))d\tau\right), \quad (3.1.1)$$

где $H(P) \geq 0$, монотонно неубывающая функция. Работник оценивает текущее потребление с помощью функции полезности с постоянным отвращением к риску $u(C) = \frac{C^{1-\rho}}{1-\rho}$, где, как и раньше, $\rho > 0$ — коэффициент отвращения к риску. Будем считать, что работник распределяет свой доход между потреблением $C(t) \geq 0$ и вложением в развитие человеческого капитала $X(t) \geq 0$, при этом он максимизируя математическое ожидание дисконтированного с коэффициентом $\delta > 0$ потребления

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^T e^{-\delta t} \frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} dt + e^{-\delta T} \cdot \frac{\beta^{1-\rho}(P(T))}{(1-\rho)\delta} \right\} \rightarrow \max_{X \geq 0}. \quad (3.1.2)$$

Замечание 9. При $\rho = 1$ максимизирующий функционал задачи оптимального управления нужно рассматривать в виде $\mathbb{E} \left\{ \int_0^T e^{-\delta t} \ln C(t) dt + \frac{e^{-\delta T}}{\delta} \cdot \ln \beta(P(T)) \right\} \rightarrow \max_{X \geq 0}$.

Справедлива следующая Лемма.

Лемма 9. Справедливо следующее представление функционала (3.1.2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \int_0^T e^{-\delta t} \frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} dt + e^{-\delta T} \cdot \frac{\beta^{1-\rho}(P(T))}{(1-\rho)\delta} \right\} = \\ = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\int_0^t (\delta + H(P(\tau))) d\tau\right) \left(\frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} + H(P(t)) \cdot \frac{\beta^{1-\rho}(P(t))}{(1-\rho)\delta} \right) dt. \end{aligned}$$

Доказательство. По определению, математическое ожидание можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \int_0^T e^{-\delta t} \frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} dt + e^{-\delta T} \cdot \frac{\beta^{1-\rho}(P(T))}{(1-\rho)\delta} \right\} = \\ = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^\tau e^{-\delta t} \frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} dt + \frac{e^{-\delta \tau}}{(1-\rho)\delta} \beta^{1-\rho}(P(\tau)) \right\} dF(\tau). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое, в соответствии с (3.1.1) может быть записано как

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^\tau e^{-\delta t} \frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} dt + \frac{e^{-\delta\tau}}{(1-\rho)\delta} \beta^{1-\rho}(P(\tau)) \right\} dF(\tau) = \\ & = \int_0^{+\infty} \int_0^\tau e^{-\delta t} \frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} dt dF(\tau) + \int_0^{+\infty} \exp \left(- \int_0^\tau (\delta + H(P(s))) ds \right) \cdot H(P(\tau)) \cdot \frac{\beta^{1-\rho}(P(\tau))}{(1-\rho)\delta} d\tau. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям приводит к

$$\int_0^{+\infty} \int_0^\tau e^{-\delta t} \frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} dt dF(\tau) = \left\{ F(\tau) \cdot \int_0^\tau e^{-\delta t} \frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} dt \right\} \Big|_{\tau=0}^{\tau=+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} \cdot F(t) dt.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ F(\tau) \cdot \int_0^\tau e^{-\delta t} \frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} dt \right\} \Big|_{\tau=0}^{\tau=+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} \cdot F(t) dt + \\ & + \int_0^{+\infty} \exp \left(- \int_0^\tau (\delta + H(P(s))) ds \right) \cdot H(P(\tau)) \cdot \frac{\beta^{1-\rho}(\tau)}{(1-\rho)\delta} d\tau = \\ & = \int_0^{+\infty} \exp \left(- \int_0^t (\delta + H(P(\tau))) d\tau \right) \cdot \left(\frac{C^{1-\rho}(t)}{1-\rho} + H(P(t)) \cdot \frac{\beta^{1-\rho}(P(t))}{(1-\rho)\delta} \right) dt. \end{aligned}$$

Лемма 9 доказана. □

Пусть

$$\Lambda(t) = \int_0^t (\delta + H(P(\tau))) d\tau.$$

Пусть u обозначает долю от заработной платы, которую работник тратит на потребительские расходы. Перейдем к безразмерным величинам, представив следующие замены $\hat{P} = \frac{P}{S\hat{\theta}}$, $\tau = \frac{t}{\hat{\theta}}$, $\hat{\mu} = \mu\hat{\theta}$, $\hat{H}(\hat{P}) = \frac{1}{\hat{\theta}} H(S\hat{\theta}\hat{P})$, $\hat{\beta}(\hat{P}) = \frac{1}{\hat{\theta}} \beta(S\hat{\theta}\hat{P})$, где $S\hat{\theta}$ — годовой доход работника. Тогда, в соответствии с доказанной Леммой, мы получаем задачу оптимального управления (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7):

$$\int_0^{+\infty} e^{-\Lambda} \left(\frac{u^{1-\rho}}{1-\rho} + \hat{H}(\hat{P}) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}(\hat{P})}{1-\rho} \right) d\tau \rightarrow \max_{0 \leq u \leq 1}, \quad (3.1.3)$$

$$\frac{d\hat{P}}{d\tau} = (1-u) + \hat{\mu}\hat{P}, \quad (3.1.4)$$

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{H} \left(\hat{P} \right) \right), \quad (3.1.5)$$

$$\hat{P}(0) = 0, \quad (3.1.6)$$

$$\Lambda(0) = 0. \quad (3.1.7)$$

Замечание 10. Обратим внимание, что и в задаче оптимального управления (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7) характеризует долю от заработной платы, которую работник тратит на потребительские расходы, а величина $1 - u$ — доля заработной платы, расходуемая работником на вложения в человеческий капитал.

Теорема 5. 1. Пусть существует константа $\hat{C} > 0$:

$$\hat{H} \left(\hat{P} \right) \leq \hat{C}(\hat{P} + 1), \forall \hat{P} \geq 0,$$

Более того, пусть $\hat{H} \left(\hat{P} \right) \in C^1((0, +\infty))$, $\hat{\beta} \left(\hat{P} \right) \in C^1((0, +\infty))$. Тогда задача оптимального управления (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7) имеет решение.

2. Пусть $\hat{P}(\tau)$, $\Lambda(\tau)$, $u^*(\tau)$ — решение задачи оптимального управления (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7), $\hat{P}(\tau)$, $\Lambda(\tau)$ являются абсолютно непрерывными при $\tau \geq 0$, $u^*(\tau)$ является измеримой функцией при $\tau \geq 0$. Тогда существуют абсолютно непрерывные функции $\varphi_1(\tau) > 0$, $\varphi_2(\tau) < 0$, $\tau \geq 0$, такие, что

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) = & \int_{\tau}^{+\infty} \left\{ e^{-\hat{\mu}(\tau-s)} \left[-\delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{H} \left(\hat{P}(s) \right) \right) \varphi_1(s) + \right. \right. \\ & + \left. \left(\frac{d\hat{H} \left(\hat{P}(s) \right)}{d\hat{P}(s)} \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho} \left(\hat{P}(s) \right)}{1-\rho} + \frac{d\hat{H} \left(\hat{P}(s) \right)}{d\hat{P}(s)} \cdot \frac{d\hat{\beta} \left(\hat{P}(s) \right)}{d\hat{P}(s)} \cdot \hat{\beta}^{-\rho} \left(\hat{P}(s) \right) \right) \right] - \\ & - \delta\hat{\theta} \left[\int_0^s \frac{d\hat{H} \left(\hat{P}(\xi) \right)}{d\hat{P}(\xi)} e^{-\hat{\mu}(\tau-\xi)} d\xi - \int_0^{\tau} \frac{d\hat{H} \left(\hat{P}(\xi) \right)}{d\hat{P}(\xi)} e^{-\hat{\mu}(\tau-\xi)} d\xi \right] \cdot \\ & \cdot \left[\delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{H} \left(\hat{P}(s) \right) \right) \varphi_2(s) + \min \left\{ 1, \frac{(\varphi_1(\tau))^{-\frac{1-\rho}{\rho}}}{1-\rho} \right\} + \right. \\ & \left. + \hat{H} \left(\hat{P}(s) \right) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho} \left(\hat{P}(s) \right)}{1-\rho} \right] \Bigg\} ds, \quad (3.1.8) \end{aligned}$$

$$\varphi_2(\tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} \left[\delta \hat{\theta} \left(1 + \hat{H} \left(\hat{P}(s) \right) \right) \varphi_2(s) + \min \left\{ 1, \frac{(\varphi_1(\tau))^{-\frac{1-\rho}{\rho}}}{1-\rho} \right\} + \hat{H} \left(\hat{P}(s) \right) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho} \left(\hat{P}(s) \right)}{1-\rho} \right] ds, \quad (3.1.9)$$

$$u^*(\tau) = \min \left\{ 1, (\varphi_1(\tau))^{-\frac{1}{\rho}} \right\}. \quad (3.1.10)$$

Более того,

$$\hat{P}(\tau) = \int_0^{\tau} \left(1 - (\varphi_1(s))^{-\frac{1}{\rho}} \right)_+ e^{\hat{\mu}(\tau-s)} ds, \quad (3.1.11)$$

$$\Lambda(\tau) = \delta \hat{\theta} \int_0^{\tau} \left(1 + \hat{H} \left(\hat{P}(s) \right) \right) ds. \quad (3.1.12)$$

Доказательство.

1. Условия задачи оптимального управления (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7) удовлетворяют предположениям П1-П7 о существовании решения задачи оптимального управления на бесконечном временном горизонте в [12].
2. Доказательство второй части Теоремы основано на необходимых условиях оптимальности для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в [3], [4]. Для начала покажем, что оптимальное управление $u^*(\tau)$ удовлетворяет (3.1.10). Для этого выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина

$$\mathcal{H} \left(\tau, \hat{P}, \Lambda, \varphi_1, \varphi_2 \right) = \sup_{0 \leq u \leq 1} \left\{ e^{-\Lambda} \left(\frac{u^{1-\rho}}{1-\rho} + \hat{H} \left(\hat{P} \right) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho} \left(\hat{P} \right)}{1-\rho} \right) + \varphi_1 e^{-\Lambda} \cdot \left((1-u) + \hat{\mu} \hat{P} \right) + \varphi_2 e^{-\Lambda} \cdot \delta \hat{\theta} \left(1 + \hat{H} \left(\hat{P} \right) \right) \right\},$$

откуда легко можно получить (3.1.10). Сопряженная система задачи оптимального управления (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7) определяется матричным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\vec{\psi}(\tau)}{d\tau} = -A^T(\tau)\vec{\psi}(\tau) + \vec{b}(\tau), \quad (3.1.13)$$

где $\vec{\psi}(\tau) = (\psi_1(\tau), \psi_2(\tau))^T$, $\vec{b}(\tau) = (b_1(\tau), b_2(\tau))^T$,

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} \hat{\mu} & 0 \\ \delta \hat{\theta} \frac{d\hat{H}(\hat{P}(\tau))}{d\hat{P}(\tau)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{b}(\tau) = \begin{pmatrix} -e^{-\Lambda(\tau)} \cdot \left(\frac{d\hat{H}(\hat{P}(\tau))}{d\hat{P}(\tau)} \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}(\hat{P}(\tau))}{1-\rho} + \frac{d\hat{H}(\hat{P}(\tau))}{d\hat{P}(\tau)} \cdot \frac{d\hat{\beta}(\hat{P}(\tau))}{d\hat{P}(\tau)} \cdot \hat{\beta}^{-\rho}(\hat{P}(\tau)) \right) \\ e^{-\Lambda(\tau)} \cdot \left(\frac{(u^*(\tau))^{1-\rho}}{1-\rho} + \hat{H}(\hat{P}(\tau)) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}(\hat{P}(\tau))}{1-\rho} \right) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\vec{\varphi} = \vec{\psi}e^{\Lambda}$. Тогда сопряженную систему (3.1.13) можно записать в виде

$$\frac{d\vec{\varphi}(\tau)}{d\tau} = -A^T(\tau)\vec{\varphi}(\tau) + \delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{H}(\hat{P}(\tau)) \right) \vec{\varphi}(\tau) + \vec{b}(\tau)e^{\Lambda(\tau)}. \quad (3.1.14)$$

Решение дифференциального уравнения (3.1.14) может быть записано в виде [3]:

$$\vec{\varphi}(\tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} Z(\tau)Z^{-1}(s) \left[\delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{H}(\hat{P}(s)) \right) \vec{\varphi}(s) + \vec{b}(s)e^{\Lambda(s)} \right] ds, \quad (3.1.15)$$

где $Z(\tau)$ — матрица 2x2, является решением матричного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dZ(\tau)}{d\tau} = -A^T(\tau)Z(\tau) \quad (3.1.16)$$

с начальным условием

$$Z(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.17)$$

Решением матричного дифференциального уравнения (3.1.16), (3.1.17) является матрица

$$Z(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-\hat{\mu}\tau}, & -\delta\hat{\theta} \int_0^{\tau} \frac{d\hat{H}(\hat{P}(s))}{d\hat{P}(s)} e^{-\hat{\mu}(\tau-s)} ds \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица $Z^{-1}(s)$ имеет следующий вид

$$Z^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^{\hat{\mu}s}, & \delta\hat{\theta} \int_0^s \frac{d\hat{H}(\hat{P}(\xi))}{d\hat{P}(\xi)} e^{\hat{\mu}\xi} d\xi \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Обращаясь к формуле (3.1.15), мы получаем, что функции $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ удовлетворяют (3.1.8), (3.1.9) при оптимальном управлении (3.1.10). Решая линейное дифференциальное уравнение (3.1.4), при условии оптимальности (3.1.10), получаем выражение (3.1.11). Откуда, после записи (3.1.5) в интегральном виде, получаем (3.1.12).

Теорема 5 доказана. \square

Следствие 3. *Предположим, что существует момент времени $\hat{\tau} \geq 0$ такой, что $\hat{P}(\tau)$ является монотонно возрастающей для любого $\tau \geq \hat{\tau}$, $\hat{P} < -\frac{1}{\hat{\mu}}$. Тогда существуют пределы $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{P}(\tau) = \hat{P}^*$, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_1(\tau) = \varphi_1^*$, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_2(\tau) = \varphi_2^*$, где*

$$\varphi_1^* = \left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^* \right)^{-\rho}, \quad (3.1.18)$$

$$\varphi_2^* = -\frac{1}{\delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{H}(\hat{P}^*)\right)} \left[\left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*\right)^{1-\rho} + \hat{H}(\hat{P}^*) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}(\hat{P}^*)}{1-\rho} \right], \quad (3.1.19)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{d\hat{H}(\hat{P}^*)}{d\hat{P}^*} \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}(\hat{P}^*)}{1-\rho} - \hat{H}(\hat{P}^*) \cdot \hat{\beta}^{-\rho}(\hat{P}^*) \cdot \frac{d\hat{\beta}(\hat{P}^*)}{d\hat{P}^*} - \\ & -\hat{\mu} \left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*\right)^{-\rho} + \delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*\right)^{-\rho} \cdot \left(1 + \hat{H}(\hat{P}^*)\right) + \\ & + \frac{1}{1 + \hat{H}(\hat{P}^*)} \cdot \left[\left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*\right)^{1-\rho} + \hat{H}(\hat{P}^*) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}(\hat{P}^*)}{1-\rho} \right] \cdot \frac{d\hat{H}(\hat{P}^*)}{d\hat{P}^*} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Доказательство. Так как функция $\hat{P}(\tau)$ монотонно возрастает при $\tau \geq \hat{\tau}$ и является ограниченной, то существует предел $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{P}(\tau) = \hat{P}^*$. Откуда, $\frac{d\hat{P}}{d\tau} \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow +\infty$. Учитывая, что

$$\frac{d\hat{P}}{d\tau} = 1 - \min \left\{ 1, (\varphi_1(\tau))^{-\frac{1}{\rho}} \right\} + \hat{\mu}\hat{P},$$

а для того, чтобы удовлетворить условию $\frac{d\hat{P}}{d\tau} \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow +\infty$, функция $\varphi_1(\tau)$ должна иметь предел

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_1(\tau) = \left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*\right)^{-\rho}. \quad (3.1.21)$$

Теперь докажем, что $\varphi_2(\tau)$ имеет предел $\tau \rightarrow +\infty$, равный (3.1.19). Обозначим

$$h_1(s) = \delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{H}(\hat{P}(s))\right), \quad (3.1.22)$$

$$h_2(s) = \min \left\{ 1, (\varphi_1(\tau))^{-\frac{1}{\rho}} \right\} + \hat{H}(\hat{P}(s)) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}(\hat{P}(s))}{1-\rho}. \quad (3.1.23)$$

Выражение (3.1.9) для φ_2 может быть записано в следующем виде

$$\varphi_2(\tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} [h_1(s)\varphi_2(s) + h_2(s)] ds. \quad (3.1.24)$$

Продифференцируем (3.1.24), получим

$$\frac{d\varphi_2(\tau)}{d\tau} = h_1(\tau)\varphi_2(\tau) + h_2(\tau). \quad (3.1.25)$$

Откуда получаем решение дифференциального уравнения (3.1.25)

$$\varphi_2(\tau) = \left[C_0 + \int_0^{\tau} h_2(\eta) \exp \left(- \int_0^{\eta} h_1(\xi) d\xi \right) d\eta \right] \cdot \exp \left(\int_0^{\tau} h_1(\eta) d\eta \right),$$

где $C_0 \in \mathbb{R}$. Положим

$$C_0 = - \int_0^{+\infty} h_2(\eta) \exp \left(- \int_0^\eta h_1(\xi) d\xi \right) d\eta,$$

откуда получаем

$$\varphi_2(\tau) = - \int_\tau^{+\infty} h_2(\eta) \exp \left(\int_\eta^\tau h_1(\xi) d\xi \right) d\eta. \quad (3.1.26)$$

Показатель экспоненты в выражении (3.1.26) отрицателен, т.к. $\eta > \tau$, $h_1(\tau) > 0$, $\forall \tau \geq 0$. Поэтому, интеграл (3.1.26) сходится. Покажем, что $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_2(\tau) = \varphi_2^*$, удовлетворяющему (3.1.19). Из (3.1.22), (3.1.23) следует, что

$$h_1(\eta) = \hat{h}_1 + \varepsilon_1(\eta), \quad (3.1.27)$$

$$h_2(\eta) = \hat{h}_2 + \varepsilon_2(\eta), \quad (3.1.28)$$

где \hat{h}_1, \hat{h}_2 положительные константы, $\varepsilon_1(\eta) \rightarrow 0$, $\varepsilon_2(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow +\infty$. Таким образом, получаем

$$\varphi_2(\tau) = - \int_\tau^{+\infty} \hat{h}_2 \exp \left(\int_\eta^\tau (\hat{h}_1 + \varepsilon_1(\eta)) d\xi \right) d\eta - \int_\tau^{+\infty} \varepsilon_2(\eta) \exp \left(\int_\eta^\tau (\hat{h}_1 + \varepsilon_1(\eta)) d\xi \right) d\eta. \quad (3.1.29)$$

Легко видеть, что второе слагаемое в выражении (3.1.29) стремится к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$ в силу того, что $h_1(\xi) > 0$, $\eta > \tau$. Пусть

$$\tilde{\varphi}_1(\tau) = \int_\tau^{+\infty} \exp \left(\int_\eta^\tau (\hat{h}_1 + \varepsilon_1(\eta)) d\xi \right) d\eta. \quad (3.1.30)$$

Выражение (3.1.30) может быть записано в следующем виде:

$$\tilde{\varphi}_1(\tau) = \int_\tau^{+\infty} e^{\hat{h}_1(\tau-\eta)} \cdot \exp \left(\int_\eta^\tau \varepsilon_1(\eta) d\xi \right) d\eta. \quad (3.1.31)$$

Интегрируя по частям (3.1.31), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(\tau) &= -\frac{1}{\hat{h}_1} \cdot e^{\hat{h}_1(\tau-\eta)} \exp \left(\int_\eta^\tau \varepsilon_1(\xi) d\xi \right) \Big|_\tau^{+\infty} - \\ &\quad - \frac{1}{\hat{h}_1} \cdot \int_\tau^{+\infty} \varepsilon_1(\eta) \cdot \exp \left(\hat{h}_1(\tau-\eta) + \int_\eta^\tau \varepsilon_1(\xi) d\xi \right) d\eta. \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

Первое слагаемое в выражении (3.1.32) в точности равно $-\frac{1}{\hat{h}_1}$, а второе стремится к нулю

при $\tau \rightarrow +\infty$ в силу отрицательного показателя экспоненты и $\varepsilon_1(\eta) \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow +\infty$ Отсюда, в соответствии с (3.1.29), получаем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_2(\tau) = -\frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1}.$$

В силу (3.1.27), (3.1.28), (3.1.21), получаем, что предел φ_2^* удовлетворяет (3.1.19). Следствие 3 доказано. \square

3.1.1 Исследование фазового портрета в окрестности положения равновесия.

Для исследования оптимальной траектории, найдем положение равновесия системы дифференциальных уравнений (3.1.33), (3.1.34), (3.1.35), полученное при дифференцировании (3.1.8), (3.1.9), (3.1.11). Будем рассматривать управление $u < 1$, т.к. в противном случае человеческий капитал работника не увеличивается.

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} = & -\frac{d\hat{H}(\hat{P})}{d\hat{P}} \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}(\hat{P})}{1-\rho} - \hat{H}(\hat{P}) \cdot \hat{\beta}^{-\rho}(\hat{P}) \cdot \frac{d\hat{\beta}(\hat{P})}{d\hat{P}} - \hat{\mu}\varphi_1 - \\ & -\delta\hat{\theta}\varphi_2 \frac{d\hat{H}(\hat{P})}{d\hat{P}} + \delta\hat{\theta}\varphi_1 (1 + \hat{H}(\hat{P})), \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = \frac{\varphi_1^{-\frac{1-\rho}{\rho}}}{1-\rho} + \hat{H}(\hat{P}) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}(\hat{P})}{1-\rho} + \delta\hat{\theta}\varphi_2 (1 + \hat{H}(\hat{P})), \quad (3.1.34)$$

$$\frac{d\hat{P}}{d\tau} = 1 - \varphi_1^{-\frac{1}{\rho}} + \hat{\mu}\hat{P}. \quad (3.1.35)$$

Положение равновесия $(\hat{P}^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.1.33), (3.1.34), (3.1.35) определяется выражениями (3.1.18), (3.1.19), (3.1.20). Будем рассматривать такие случаи, когда есть положение равновесия у системы дифференциальных уравнений (3.1.33), (3.1.34), (3.1.35).

Траекторию оптимального управления можно построить в случае, когда линеаризованная система (3.1.33), (3.1.34), (3.1.35) в положении равновесия $(\hat{P}^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*)$ имеет два собственных значения с положительными действительными частями и одно действительное отрицательное. В таком случае, собственный вектор, соответствующий отрицательному собственному значению, является устойчивой сепаратрисой неподвижной точки. Решая систему дифференциальных уравнений (3.1.33), (3.1.34), (3.1.35) в попятном времени, стартуя из окрестности седловой точки, мы получаем синтез $u^*(\hat{P})$. Линеаризуем систему дифференциальных уравнений (3.1.33)-(3.1.35) в точке положения равновесия. Обозначим через $D_1(\varphi_1, \varphi_2, \hat{P})$, $D_2(\varphi_1, \varphi_2, \hat{P})$, $D_3(\varphi_1, \varphi_2, \hat{P})$ правые части обыкновенных дифференциальных

уравнений (3.1.33), (3.1.34), (3.1.35), т.е.

$$D_1(\varphi_1, \varphi_2, \hat{P}) = -\frac{d\hat{H}(\hat{P})}{d\hat{P}} \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}(\hat{P})}{1-\rho} - \hat{H}(\hat{P}) \cdot \hat{\beta}^{-\rho}(\hat{P}) \cdot \frac{d\hat{\beta}(\hat{P})}{d\hat{P}} - \hat{\mu}\varphi_1 - \\ - \delta\hat{\theta}\varphi_2 \frac{d\hat{H}(\hat{P})}{d\hat{P}} + \delta\hat{\theta}\varphi_1 (1 + \hat{H}(\hat{P})),$$

$$D_2(\varphi_1, \varphi_2, \hat{P}) = \frac{\varphi_1^{-\frac{1-\rho}{\rho}}}{1-\rho} + \hat{H}(\hat{P}) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}(\hat{P})}{1-\rho} + \delta\hat{\theta}\varphi_2 (1 + \hat{H}(\hat{P})),$$

$$D_3(\varphi_1, \varphi_2, \hat{P}) = 1 - \varphi_1^{-\frac{1}{\rho}} + \hat{\mu}\hat{P}.$$

Матрица Якоби линеаризованной системы будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial D_1}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial D_1}{\partial \hat{P}} \\ \frac{\partial D_2}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial D_2}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial D_2}{\partial \hat{P}} \\ \frac{\partial D_3}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial D_3}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial D_3}{\partial \hat{P}} \end{pmatrix} \Bigg|_{(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \hat{P}^*)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$a_{11} = -\hat{\mu} + \delta\hat{\theta} (1 + \hat{H}(\hat{P}^*)),$$

$$a_{12} = -\delta\hat{\theta} \frac{d\hat{H}(\hat{P})}{d\hat{P}} \Bigg|_{\hat{P}^*},$$

$$a_{13} = -\frac{d^2\hat{H}(\hat{P})}{d\hat{P}^2} \Bigg|_{\hat{P}^*} \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}(\hat{P}^*)}{1-\rho} - \frac{d\hat{H}(\hat{P})}{d\hat{P}} \Bigg|_{\hat{P}^*} \cdot \hat{\beta}^{-\rho}(\hat{P}^*) \cdot \frac{d\hat{\beta}(\hat{P})}{d\hat{P}} \Bigg|_{\hat{P}^*} - \\ - \frac{d\hat{H}(\hat{P})}{d\hat{P}} \Bigg|_{\hat{P}^*} \cdot \hat{\beta}^{-\rho}(\hat{P}^*) \cdot \frac{d\hat{\beta}(\hat{P})}{d\hat{P}} \Bigg|_{\hat{P}^*} - \hat{H}(\hat{P}^*) \cdot \\ \cdot \left(-\rho\hat{\beta}^{-\rho-1}(\hat{P}) \cdot \left(\frac{d\hat{\beta}(\hat{P})}{d\hat{P}} \Bigg|_{\hat{P}^*} \right)^2 + \hat{\beta}^{-\rho}(\hat{P}^*) \cdot \frac{d^2\hat{\beta}(\hat{P})}{d\hat{P}^2} \Bigg|_{\hat{P}^*} \right) + \\ + \frac{1}{1 + \hat{H}(\hat{P}^*)} \left[(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*)^{1-\rho} + \hat{H}(\hat{P}^*) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho}(\hat{P}^*)}{1-\rho} \right] \frac{d^2\hat{H}(\hat{P})}{d\hat{P}^2} \Bigg|_{\hat{P}^*} + \\ + \delta\hat{\theta} (1 + \hat{\mu}\hat{P}^*)^{-\rho} \frac{d\hat{H}(\hat{P})}{d\hat{P}} \Bigg|_{\hat{P}^*},$$

$$a_{21} = -\frac{1}{\rho} \cdot \left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*\right),$$

$$a_{22} = \delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{H} \left(\hat{P}^*\right)\right),$$

$$a_{23} = \frac{d\hat{H} \left(\hat{P}\right)}{d\hat{P}} \Big|_{\hat{P}^*} \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho} \left(\hat{P}^*\right)}{1-\rho} + \hat{H} \left(\hat{P}^*\right) \cdot \hat{\beta}^{-\rho} \left(\hat{P}^*\right) \cdot \frac{d\hat{\beta} \left(\hat{P}\right)}{d\hat{P}} \Big|_{\hat{P}^*} -$$

$$- \frac{1}{1 + \hat{H} \left(\hat{P}^*\right)} \left[\left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*\right)^{1-\rho} + \hat{H} \left(\hat{P}^*\right) \cdot \frac{\hat{\beta}^{1-\rho} \left(\hat{P}^*\right)}{1-\rho} \right] \cdot \frac{d\hat{H} \left(\hat{P}\right)}{d\hat{P}} \Big|_{\hat{P}^*},$$

$$a_{31} = \frac{1}{\rho} \cdot \left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*\right)^{1+\rho},$$

$$a_{32} = 0,$$

$$a_{33} = \hat{\mu}.$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет вид

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + \lambda(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{33} + a_{13}a_{31} - a_{22}a_{33}) +$$

$$+ a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

где λ — собственные значения матрицы A .

Предположим, что функции $\hat{\beta} \left(\hat{P}\right)$ и $\hat{H} \left(\hat{P}\right)$ линейны. Рассмотрим

$$\hat{\beta} \left(\hat{P}\right) = 1 + \hat{\zeta}_1\hat{P}, \quad (3.1.36)$$

$$\hat{H} \left(\hat{P}\right) = \hat{\xi}_1\hat{P}, \quad (3.1.37)$$

где $\hat{\zeta}_1 > 0$, $\hat{\xi}_1 > 0$.

Характеристическую функцию можно записать в следующем виде

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d, \quad (3.1.38)$$

где

$$b = a_{11} + a_{22} + \hat{\mu},$$

$$c = a_{13}a_{31} + a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} - a_{22}\hat{\mu} - a_{11}\hat{\mu},$$

$$d = \hat{\mu}a_{11}a_{22} - \hat{\mu}a_{12}a_{21} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

Отметим, что линеаризованная система является неустойчивой, т.к. коэффициент при мно-

жителе λ^3 отрицателен, а

$$b = a_{11} + a_{22} + \hat{\mu} = 2\delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*\right) > 0.$$

Предложение 1. *Если коэффициент d характеристического уравнения*

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$$

отрицателен, $b > 0$, то существует вещественный отрицательный корень характеристического уравнения, а два других корня имеют положительные вещественные части.

Доказательство. Поскольку система является неустойчивой, то все 3 корня характеристического уравнения $\chi_A(\lambda) = 0$ не могут быть отрицательными. Заметим, что $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \chi_A(\lambda) = +\infty$, а $\chi_A(0) = d < 0$. Значит, уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ имеет единственный вещественный отрицательный корень. Обозначим корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Пусть $\lambda_1 < 0$. Из формул Виета, имеем, что

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = d.$$

Отсюда получаем, что $Re(\lambda_2) > 0, Re(\lambda_3) > 0$. Предложение 1 доказано. \square

Замечание 11. *При условиях Предложения 1, собственный вектор, соответствующий отрицательному вещественному корню характеристического уравнения (3.1.38), является касательной к устойчивой сепаратрисе.*

Замечание 12. *Исследуем вопрос о количестве точек покоя системы (3.1.33), (3.1.34), (3.1.35). Обозначим через $f(\hat{P}^*)$ левую часть выражения (3.1.20) при условиях (3.1.36), (3.1.37), т.е.*

$$f(\hat{P}^*) = -\frac{\hat{\xi}_1}{S} \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*}{S} \right)^{\alpha-1} \left(\alpha\hat{\xi}_1\hat{P}^* + \hat{\xi}_1\hat{P}^* + 1 \right) + \alpha \left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^* \right)^{\alpha-1} \left(\delta\hat{\theta} \left(1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^* \right) - \hat{\mu} \right) + \frac{\hat{\xi}_1}{1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*} \left[\left(1 + \hat{\mu}\hat{P}^* \right)^\alpha + \hat{\xi}_1\hat{P}^* \left(\frac{1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*}{S} \right)^\alpha \right].$$

Отметим, что $f(0) > 0$ при $S > 1, \hat{\mu} < 0$. Также, $\lim_{\hat{P}^ \rightarrow -\frac{1}{\hat{\mu}}} f(\hat{P}^*) = +\infty$. Значит, на множестве $[0, -\frac{1}{\hat{\mu}})$ уравнение $f(\hat{P}^*) = 0$ либо не имеет корней, либо имеет четное число корней в случае общего положения. На Рис.3.1 продемонстрировано количество корней уравнения $f(\hat{P}^*) = 0$ на плоскости $(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_1)$. Как видно из Рис.3.1, при рассматриваемых параметрах уравнение $f(\hat{P}^*) = 0$ либо не имеет корней, либо имеет два корня, один из которых соответствует условиям трансверсальности.*

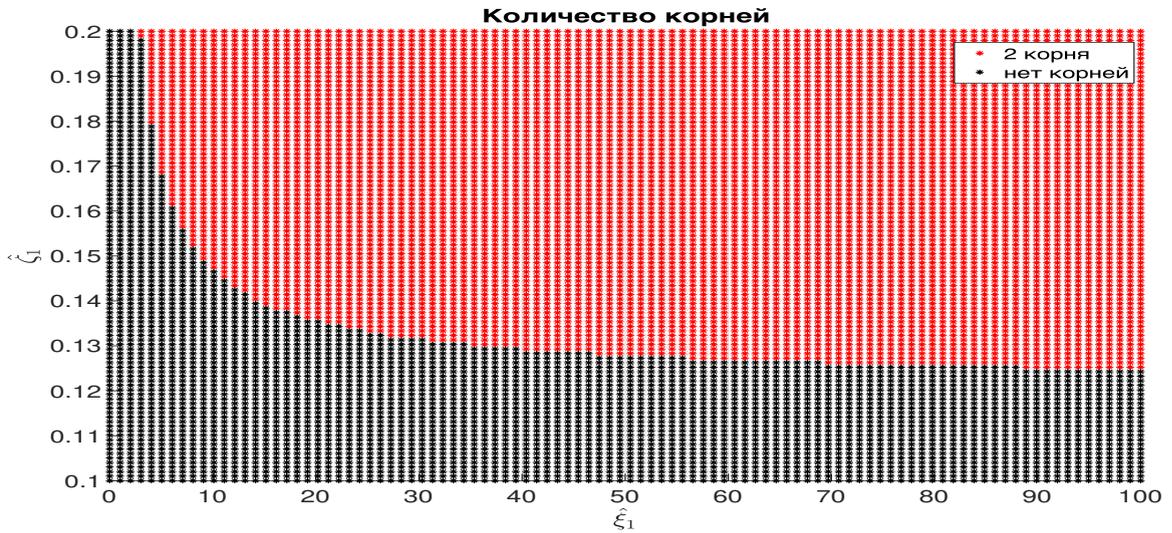


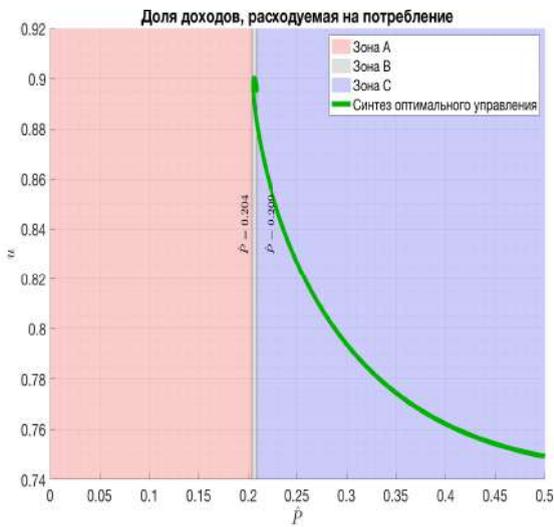
Рис. 3.1: Количество корней уравнения $f(\hat{P}^*) = 0$ при $\rho = 0.2$, $\hat{\mu} = -0.5$, $S = 30$, $\delta = 0.01$.

Чтобы ответить на вопросы, какая будет новая заработная плата работника при достижении определенной квалификации и сколько времени необходимо затратить работнику на развитие человеческого капитала, необходимо осуществить обратный переход к размерным величинам, где необходимо задать параметры коэффициента дисконтирования δ и текущей заработной платы S . В Главе 2 при идентификации репрезентативных домашних хозяйств в различных социальных слоях мы использовали данные российской статистики ОБДХ Росстата [23] и РМЭЗ НИУ ВШЭ [30]. Для идентификации репрезентативного рационального работника на рынке труда мы будем использовать данные ОБДХ. Ранее, в Главе 2 были выделены группы регионов, в каждой из которых были классифицированы обеспеченные и необеспеченные социальные слои населения. Для данных социальных слоев были идентифицированы поведенческие характеристики (см. Прил.А), откуда были установлены параметры отвращения к риску и коэффициент дисконтирования. Мы используем эти параметры для моделирования поведения работника на рынке труда для данных социальных слоев.

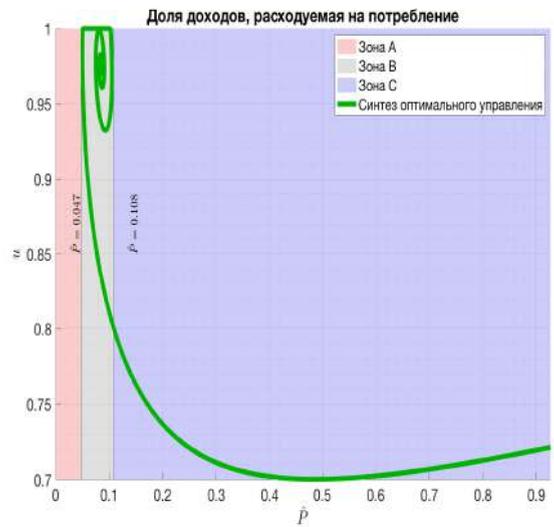
Будем рассматривать такие параметры модели, чтобы для одной из точек положения равновесия коэффициент d в характеристическом уравнении (3.1.38) был отрицателен. Это гарантирует наличие устойчивой сепаратрисы, касающейся собственного вектора, соответствующего отрицательному вещественному собственному значению линеаризованной системы. В Прил.В представлены наборы параметров идентификации поведения работников в каждой группе регионов в разных социальных слоях. Отметим, что используемые данные о доходах и коэффициентах дисконтирования актуальны на конец 2021г. Доходы представлены в тыс. руб. и формируются для трудоустроенной доли людей, проживающих в домашнем хозяйстве. Также, в Прил.В представлены результаты вложений работников в человеческий капитал: во сколько раз вырастет заработная плата работника (величина $1 + \hat{\zeta}_1 \hat{P}^*$) и характерное время повышения квалификации работника до появления новой вакансии (величина

$\frac{1}{\xi_1 \hat{P}^*}$), где \hat{P}^* — положение равновесия, к которому стремится устойчивая сепаратриса.

На Рис.3.2,3.3,3.4,3.5 представлен синтез оптимального управления, характеризующий затрачиваемую долю от доходов работника на вложения в человеческий капитал в зависимости от текущей квалификации в разных социальных слоях. Можно выделить три зоны оптимального управления. Назовем зоной *A* — зону отсутствия вложения в человеческий капитал, зоной *B* — зону неопределенности, когда возможны колебания в поведении работника по управлению человеческим капиталом, зоной *C* — зону развития человеческого капитала.

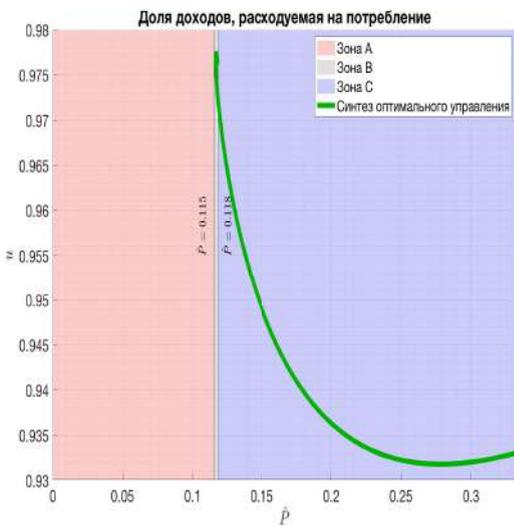


(а) Низкодоходные слои населения.

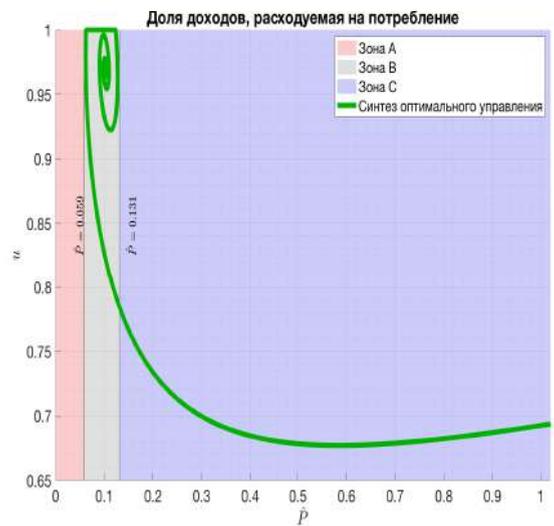


(б) Высокодоходные слои населения.

Рис. 3.2: Бедная группа регионов. Город.

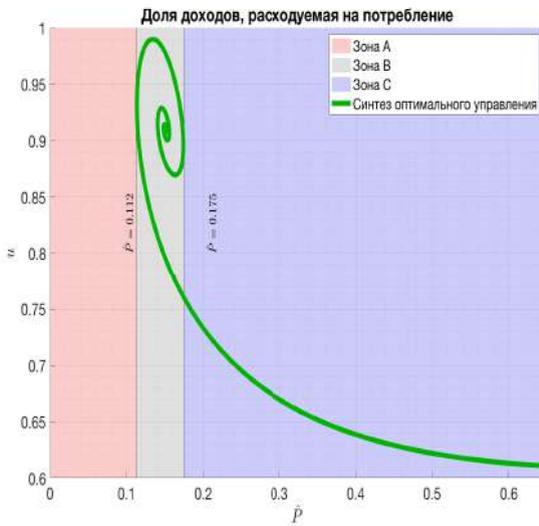


(а) Низкодоходные слои населения.

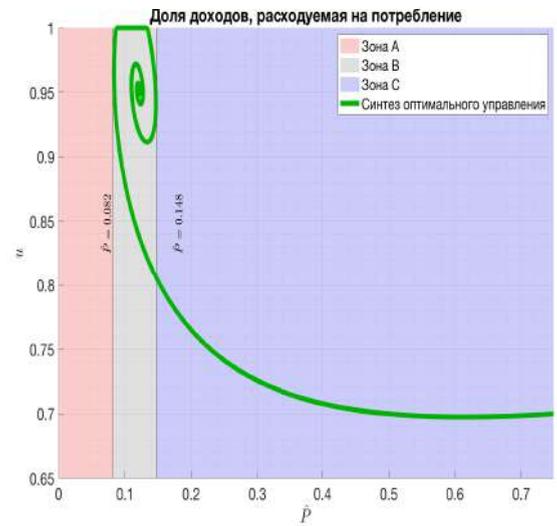


(б) Высокодоходные слои населения.

Рис. 3.3: Бедная группа регионов. Село.

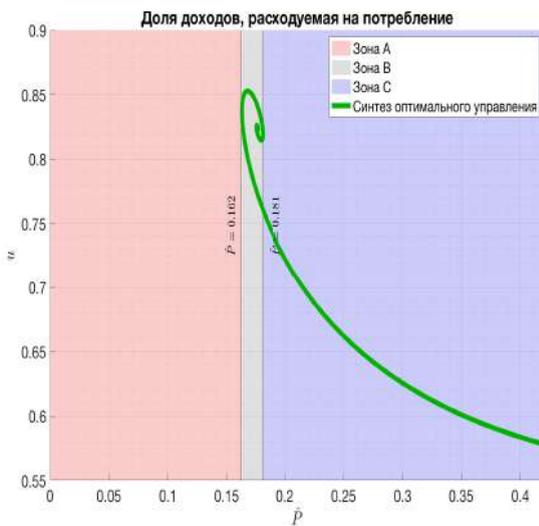


(а) Низкодоходные слои населения.

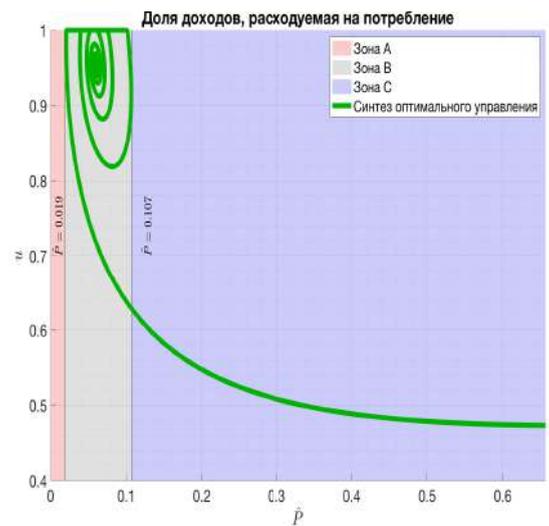


(б) Высокодоходные слои населения.

Рис. 3.4: Средняя группа регионов.



(а) Низкодоходные слои населения.



(б) Высокодоходные слои населения.

Рис. 3.5: Богатая группа регионов.

Из анализа структуры синтеза оптимального управления видно, что сами по себе домашние хозяйства не вкладывают в человеческий капитал, им необходим стимул для его развития. В качестве таких стимулов могут выступать программы дополнительного образования, бесплатные курсы по развитию компетенций или приобретение компетенций в процессе трудовой деятельности. Лишь имея определенный запас человеческого капитала, домашние хозяйства начинают его развивать. Стоит отметить, что низкодоходные слои населения нуждаются в большем стимуле к развитию человеческого капитала, чем высокодоходные слои населения.

3.2 Групповое поведение работников на рынке труда

Групповое поведение работников на рынке труда описывается уравнением Колмогорова–Фоккера–Планка, отражающее эволюцию плотности распределения работников по фазовым координатам. Пусть $m = m(P, S, t)$ — плотность распределения работников по накопленному человеческому капиталу P , заработной плате S в момент времени t . Чтобы описать групповое поведение работников в фазовых координатах P и S , перейдем обратно от безразмерных величин (см. параграф 3.2) к размерным. Зарплата работника описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS = \gamma S dt + (\beta(P) - S) dN_t(H(P, S)),$$

$$S(0) = S_0,$$

где N_t — процесс Леви, характеризующий скачок заработной платы с величины S до $\beta(P)$ с интенсивностью $H(P, S)$, $S_0 > 0$. Предположим, что реальный темп роста заработной платы работника γ отрицателен, т.е. реальная заработная плата уменьшается. Это мотивирует работника осуществлять вложения в собственный человеческий капитал, чтобы развивать свои компетенции и стремиться повысить заработную плату до величины $\beta(P)$. Как и раньше, мы полагаем, что человеческий капитал описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dP}{dt} = (1 - u(P))S + \mu P,$$

с начальным условием

$$P(0) = P_0.$$

Пусть $g(P, S)$ — произвольная гладкая функция с компактным носителем. Ее среднее значение в момент времени t вычисляется по формуле

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} m(P, S, t) g(P, S) dS dP.$$

В момент времени $t + dt$ мы получаем балансовое уравнение

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} m(P, S, t + dt) g(P, S) dS dP = \\ = \int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} m(P, S, t) \mathbb{E} \left(g \left(P + \frac{dP}{dt} dt, S + dS \right) \right) dS dP + \bar{o}(dt). \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Левую часть уравнения (3.2.1) можно записать в виде

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} m(P, S, t + dt) g(P, S) dS dP = \int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} \left(m(P, S, t) + \frac{\partial m(P, S, t)}{\partial t} dt \right) g(P, S) dS dP + \bar{o}(dt).$$

Выражение $\mathbb{E}(g(P + dP, S + dS))$ в правой части дифференциального уравнения (3.2.1) соответствует

$$\mathbb{E}(g(P + dP, S + dS)) = \mathbb{E}(g(P + ((1 - u(P))S + \mu P) dt, S + \gamma S dt + H(P, S) dN_t)).$$

Опираясь на [98], правая часть уравнения (3.2.1) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} m(P, S, t) \mathbb{E}(g(P + dP, S + dS)) dS dP = \\ & = \int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} m(P, S, t) \{ [g(P + ((1 - u(P))S + \mu P) dt, S + \gamma S dt) dt] (1 - H(P, S) dt) + \\ & \quad + H(P, S) dt \cdot g(P, \beta(P)) \} dS dP. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Разложим (3.2.2) в ряд Тейлора до первого порядка величины dt . В результате получим запись балансового уравнения (3.2.1) в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} \left(m(P, S, t) + \frac{\partial m(P, S, t)}{\partial t} dt \right) g(P, S) dS dP = \int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} m(P, S, t) \cdot \left\{ \gamma S \frac{\partial g(P, S)}{\partial S} dt + \right. \\ & \quad \left. + [(1 - u(P))S + \mu P] \frac{\partial g(P, S)}{\partial P} dt - g(P, S) H(P, S) dt + g(P, S) \right\} dS dP + \\ & \quad + \int_0^{+\infty} g(P, \beta(P)) \cdot \int_0^{\beta(P)} H(P, S) m(P, S, t) dP dS \cdot dt + \bar{o}(dt). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Подробнее остановимся на интегрировании по частям правой части уравнения (3.2.3). Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \gamma \int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} m(P, S, t) \cdot S \frac{\partial g(P, S)}{\partial S} dS dP = \\ & = \gamma \int_0^{+\infty} \beta(P) \cdot m(P, \beta(P), t) \cdot g(P, \beta(P)) dP - \gamma \int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} g(P, S) \frac{\partial (S m(P, S, t))}{\partial S} dS dP. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Рассмотрим интегрирование по частям множителя $\frac{\partial g(P, S)}{\partial P}$ в правой части уравнения (3.2.3).

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} m(P, S, t) \cdot [(1 - u(P))S + \mu P] \frac{\partial g(P, S)}{\partial P} dS dP = \\ & = - \int_0^{+\infty} m(\beta^{-1}(S), S, t) [(1 - u(\beta^{-1}(S)))S + \mu\beta^{-1}(S)] g(\beta^{-1}(S), S) dS - \\ & \quad - \int_0^{+\infty} \int_{\beta^{-1}(S)}^{+\infty} g(P, S) \frac{\partial (m(P, S, t) [(1 - u(P))S + \mu P])}{\partial P} dP dS. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Перейдем от переменной S к переменной P в первом интеграле правой части уравнения (3.2.5), где $S = \beta(P)$, $dS = \beta'(P)dP$. Поменяем порядок интегрирования во втором интеграле правой части уравнения (3.2.5) (функция $\beta(P)$ монотонна). Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} m(P, S, t) \cdot [(1 - u(P))S + \mu P] \frac{\partial g(P, S)}{\partial P} dS dP = \\ & = - \int_0^{+\infty} m(P, \beta(P), t) [(1 - u(P))\beta(P) + \mu P] g(P, \beta(P)) \cdot \beta'(P) dP - \\ & \quad - \int_0^{+\infty} \int_0^{\beta(P)} g(P, S) \frac{\partial (m(P, S, t) [(1 - u(P))S + \mu P])}{\partial P} dP dS. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Так как функция $g(P, S)$ произвольная, то в соответствии с леммой Дю Буа-Реймона [59], мы получаем уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка, подставляя (3.2.4), (3.2.6) в уравнение (3.2.3), разделив на dt :

$$\frac{\partial m(P, S, t)}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial (Sm(P, S, t))}{\partial S} - \frac{\partial (m(P, S, t) [(1 - u(P))S + \mu P])}{\partial P} - H(P, S)m(P, S, t) \quad (3.2.7)$$

с начальным условием

$$m(P, S, 0) = m_0(P, S) \quad (3.2.8)$$

и граничным условием

$$m(P, \beta(P), t) = - \frac{\int_0^{\beta(P)} H(P, S)m(P, S, t) dS}{-\gamma\beta(P) + \beta'(P) \cdot ((1 - u(P))\beta(P) + \mu P)}. \quad (3.2.9)$$

3.2.1 Численное решение уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка для процесса Леви

Исследуем численное решение уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (3.2.7) с начальным условием (3.2.8) и граничным условием (3.2.9). Ограничим фазовые пространства P и S величинами $P_R > 0$ и $S_R > 0$ соответственно. Пусть $P \in [0, P_R]$, $S \in [0, S_R]$. Разобьем диапазон человеческого капитала на $M + 1$ узлов, диапазон заработной платы на $H + 1$ узлов, временной отрезок на $N + 1$ узлов. Будем полагать, что все разбиения равномерны. Определим длины отрезков: $\Delta P = \frac{P_R}{M}$, $\Delta S = \frac{S_R}{H}$, $\Delta t = \frac{T}{N}$.

Введем следующие обозначения. Под $m_{j,k}^i$ будем понимать значение функции $m(P, S, t)$ в точке $(j\Delta P, k\Delta S, i\Delta t)$, $j = \overline{0, M}$, $k = \overline{0, \mathcal{J}(j)}$, $i = \overline{0, N}$, где $\mathcal{J}(j)$ соответствует ближайшему значению функции $\beta(P_j)$ в целочисленном узле разностной схемы. Для адвективной части уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (3.2.7) мы используем противопоточную схему Годунова первого порядка, как ранее. Обозначим

$$f(P, S) = (1 - u(P))S + \mu P,$$

$$\kappa(P) = -\gamma\beta(P) + \beta'(P)((1 - u(P))S + \mu P).$$

Разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (3.2.7) представляется в виде

$$m_{j,k}^{i+1} = m_{j,k}^i - \frac{\Delta t}{\Delta S} \left(S_{k+\frac{1}{2}} \gamma m_{j,k+\frac{1}{2}}^i - S_{k-\frac{1}{2}} \gamma m_{j,k-\frac{1}{2}}^i \right) - \frac{\Delta t}{\Delta P} \left(f_{j+\frac{1}{2},k} m_{j+\frac{1}{2},k}^i - f_{j-\frac{1}{2},k} m_{j-\frac{1}{2},k}^i \right) - \Delta t \cdot m_{j,k}^i H_{j,k}, \quad (3.2.10)$$

где

$$m_{j,k+\frac{1}{2}}^i = \begin{cases} m_{j,k+1}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} \gamma < 0, \\ m_{j,k}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} \gamma \geq 0, \end{cases}$$

$$m_{j+\frac{1}{2},k}^i = \begin{cases} m_{j+1,k}^i, & \text{если } f_{j+\frac{1}{2},k}^i < 0, \\ m_{j,k}^i, & \text{если } f_{j+\frac{1}{2},k}^i \geq 0. \end{cases}$$

Мы накладываем гомогенные условия Неймана на границе области в точках $P = 0$, $P = P_R$, $S = 0$, т.е. $\frac{\partial m}{\partial P} \Big|_{P=0, P=P_R} = 0$, $\frac{\partial m}{\partial P} \Big|_{S=0} = 0$. На границе $S = \beta(P)$ граничное условие записывается в виде

$$m_{j, \mathcal{J}(j)}^i = \frac{\Delta S}{\kappa_j} \sum_{k=0}^{\mathcal{J}(j)-1} H_{j,k} m_{j,k}^i, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}.$$

Схематично, разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка представляется в следующем виде (см. Рис.3.6).

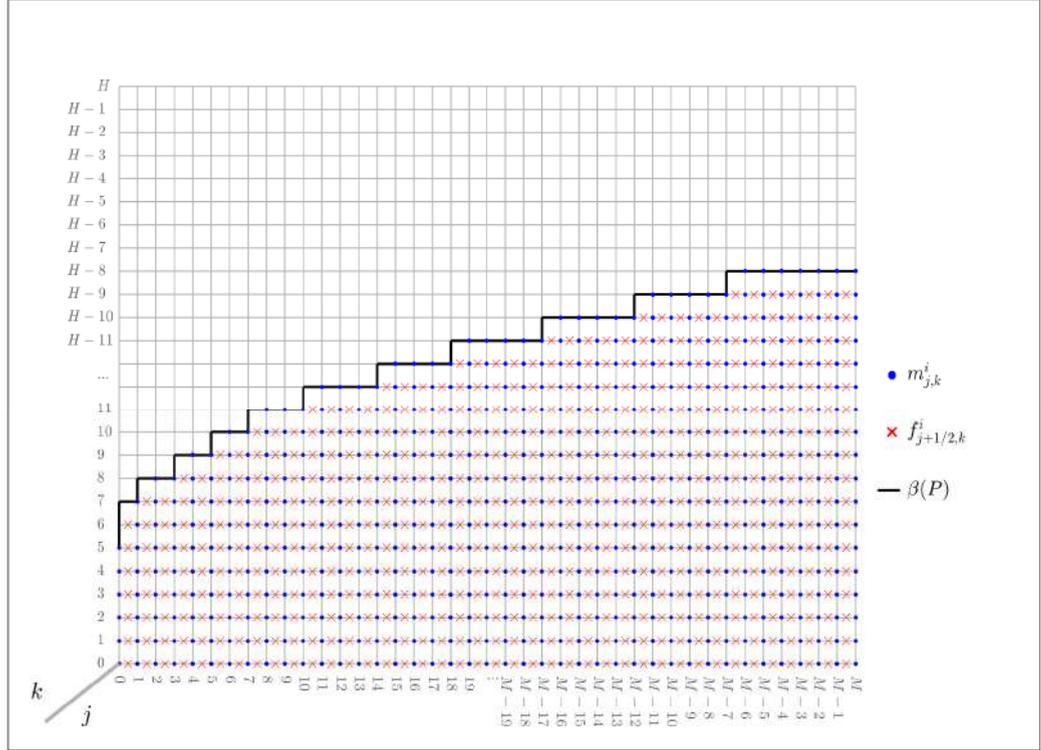


Рис. 3.6: Разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка.

Следующая Лемма накладывает ограничения на функции $f_{j+\frac{1}{2}}$, $H_{j,k}$, γ на дискретном уровне для сохранения неотрицательности плотности распределения.

Лемма 10. Пусть $m^i \in \mathbb{R}^{M \times H}$ является матрицей с неотрицательными компонентами. Если выполняются ограничения (3.2.11), (3.2.12), (3.2.13), тогда матрица $m^{i+1} \in \mathbb{R}^{M \times H}$ также является матрицей с неотрицательными компонентами.

$$-\frac{\Delta P}{4\Delta t} \leq f_{j+\frac{1}{2},k} \leq \frac{\Delta P}{4\Delta t}, \quad j = \overline{0, M-1}, k = \overline{0, \mathcal{J}(j)-1}, \quad (3.2.11)$$

$$0 \leq H_{j,k} \leq \frac{1}{5\Delta t}, \quad j = \overline{0, M}, k = \overline{0, \mathcal{J}(j)-1}, \quad (3.2.12)$$

$$-\frac{\Delta S}{4\Delta t S_R} \leq \gamma \leq \frac{\Delta S}{4\Delta t S_R}. \quad (3.2.13)$$

Доказательство. Зафиксируем i, j, k . Нам необходимо показать, что компоненты $m_{j-1,k}^i$, $m_{j,k+1}^i$, $m_{j,k}^i$, $m_{j,k-1}^i$, $m_{j+1,k}^i$ являются неотрицательными величинами. Для этого запишем раз-

ностную схему (3.2.10) через индикаторные функции:

$$\begin{aligned}
m_{j,k}^{i+1} = m_{j,k}^i &- \frac{\Delta t}{\Delta S} \left(S_{k+\frac{1}{2}} \gamma m_{j,k+1}^i \mathbb{I}_{\gamma < 0} + S_{k+\frac{1}{2}} \gamma m_{j,k}^i \mathbb{I}_{\gamma \geq 0} - S_{k-1+\frac{1}{2}} \gamma m_{j,k}^i \mathbb{I}_{\gamma < 0} - \right. \\
&- \left. S_{k-1+\frac{1}{2}} \gamma m_{j,k-1}^i \mathbb{I}_{\gamma \geq 0} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta P} \left(f_{j+\frac{1}{2},k} m_{j+1,k}^i \mathbb{I}_{f_{j+\frac{1}{2},k} < 0} + f_{j+\frac{1}{2},k} m_{j,k}^i \mathbb{I}_{f_{j+\frac{1}{2},k} \geq 0} - \right. \\
&- \left. f_{j-1+\frac{1}{2},k} m_{j,k}^i \mathbb{I}_{f_{j-1+\frac{1}{2},k} < 0} - f_{j-1+\frac{1}{2},k} m_{j-1,k}^i \mathbb{I}_{f_{j-1+\frac{1}{2},k} \geq 0} \right) - \Delta t \cdot m_{j,k}^i H_{j,k}. \quad (3.2.14)
\end{aligned}$$

Уравнение (3.2.14) может быть записано в следующем виде

$$\begin{aligned}
m_{j,k}^{i+1} = m_{j,k}^i &\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta S} S_{k+\frac{1}{2}} \gamma \mathbb{I}_{\gamma \geq 0} + \frac{\Delta t}{\Delta S} S_{k-1+\frac{1}{2}} \gamma \mathbb{I}_{\gamma < 0} - \frac{\Delta t}{\Delta P} f_{j+\frac{1}{2},k} \mathbb{I}_{f_{j+\frac{1}{2},k} \geq 0} + \right. \\
&+ \left. \frac{\Delta t}{\Delta P} f_{j-1+\frac{1}{2},k} \mathbb{I}_{f_{j-1+\frac{1}{2},k} < 0} - \Delta t H_{j,k} \right) + m_{j-1,k}^i \left(\frac{\Delta t}{\Delta P} f_{j-1+\frac{1}{2},k} \mathbb{I}_{f_{j-1+\frac{1}{2},k} \geq 0} \right) + \\
&+ m_{j+1,k}^i \left(-\frac{\Delta t}{\Delta P} f_{j+\frac{1}{2},k} \mathbb{I}_{f_{j+\frac{1}{2},k} < 0} \right) + m_{j,k-1}^i \left(\frac{\Delta t}{\Delta S} S_{k-1+\frac{1}{2}} \gamma \mathbb{I}_{\gamma \geq 0} \right) + \\
&+ m_{j,k+1}^i \left(-\frac{\Delta t}{\Delta S} S_{k+\frac{1}{2}} \gamma \mathbb{I}_{\gamma < 0} \right). \quad (3.2.15)
\end{aligned}$$

Легко видеть, что множители при компонентах $m_{j-1,k}^i$, $m_{j,k+1}^i$, $m_{j,k-1}^i$, $m_{j+1,k}^i$ в уравнении (3.2.15) являются неотрицательными величинами. Нужно показать, что множитель при компоненте $m_{j,k}^i$ также неотрицателен. Рассмотрим $\gamma < 0$ (случай $\gamma \geq 0$ рассматривается аналогично). В соответствии с ограничениями (3.2.11), (3.2.12), (3.2.13), справедлива следующая оценка

$$\begin{aligned}
1 + \frac{\Delta t}{\Delta S} S_{k-1+\frac{1}{2}} \gamma - \frac{\Delta t}{\Delta P} f_{j+\frac{1}{2},k} + \frac{\Delta t}{\Delta P} f_{j-1+\frac{1}{2},k} - \Delta t H_{j,k} &\geq \\
&\geq 1 - \frac{\Delta t \Delta S}{4 \Delta t S_R \Delta S} S_{k-1+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t \Delta P}{4 \Delta P \Delta t} - \frac{\Delta t \Delta P}{4 \Delta P \Delta t} - \frac{\Delta t}{5 \Delta t} \geq 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} > 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что множители при компонентах $m_{j-1,k}^i$, $m_{j,k+1}^i$, $m_{j,k-1}^i$, $m_{j,k}^i$, $m_{j+1,k}^i$ в уравнении (3.2.15) при ограничениях (3.2.11), (3.2.12), (3.2.13) являются неотрицательными величинами. Лемма 10 доказана. \square

Замечание 13. Чтобы обеспечить сходимость разностной схемы (3.2.10), должно выполняться условие Куранта (см.[10])

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{\Delta S}{|\gamma| S_R}, \frac{\Delta P}{\max_{j,k} |f_{j+\frac{1}{2},k}|} \right\}.$$

Перейдем к численным результатам решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, описывающего эволюцию плотности распределения работников по накопленному человеческому капиталу и заработной плате. Для этого необходимо задать параметр отращения к

риску ρ , коэффициент дисконтирования δ , параметр устаревания компетенций работника μ , интенсивность появления новой вакансии на рынке труда $H(P, S)$ и ожидаемую заработную плату $\beta(P)$ в соответствии с накопленным человеческим капиталом P .

В параграфе 3.1 для идентификации репрезентативных работников в различных социальных слоях использовалась статистика ОБДХ Росстата. В качестве примера рассмотрим социальный слой, относящийся к средней группе регионов, характеризующий необеспеченных заемщиков. В соответствии с Прил.В определим следующий набор параметров: $\rho = 0.2012$, $\delta = 0.011446$, $\theta = 12$, $S = 29.43$, $\hat{\mu} = -0.6$, $\hat{H}(\hat{P}) = 40\hat{P}$, $\hat{\beta}(\hat{P}) = 1 + 0.157\hat{P}$. В качестве единицы измерения времени выберем 1 мес., денежные единицы будем измерять в тыс.руб. Синтез оптимального управления изображен на Рис.3.4а. Для определенности в зоне B , когда возможны колебания в поведении работника по управлению человеческим капиталом, возьмем нижнюю границу. На плоскости (P, S) зона A определяется неравенством $S \geq \frac{P}{\theta\hat{P}_1}$, зона B определяется неравенством $\frac{P}{\theta\hat{P}^*} < S < \frac{P}{\theta\hat{P}_1}$, а зона C — неравенством $S \leq \frac{P}{\theta\hat{P}^*}$. Зададим параметры сетки $P_R = 150$, $S_R = 60$, $T = 1$, $M = 1000$, $H = 500$, $N = 500$, положим $\gamma = -0.02$. Пусть ожидаемая заработная плата работника задается функцией $\beta(P) = 40 + \sqrt{P}$. Пусть в начальный момент времени плотность распределения работников имеет вид, изображенную на Рис.3.7. Синяя область соответствует области отсутствия вложений в человеческий капитал, когда работники удовлетворены текущей заработной платой в соответствии с накопленным человеческим капиталом; зеленая область соответствует области развития человеческого капитала, когда работник стремится нарастить свои компетенции, чтобы получить более высокую заработную плату $S = \beta(P)$; красная область соответствует области отсутствия вложений в человеческий капитал, когда работники имеют достаточно высокие накопленные компетенции при низкой заработной плате и ожидают появления подходящей вакансии на рынке труда для получения заработной платы $S = \beta(P)$.

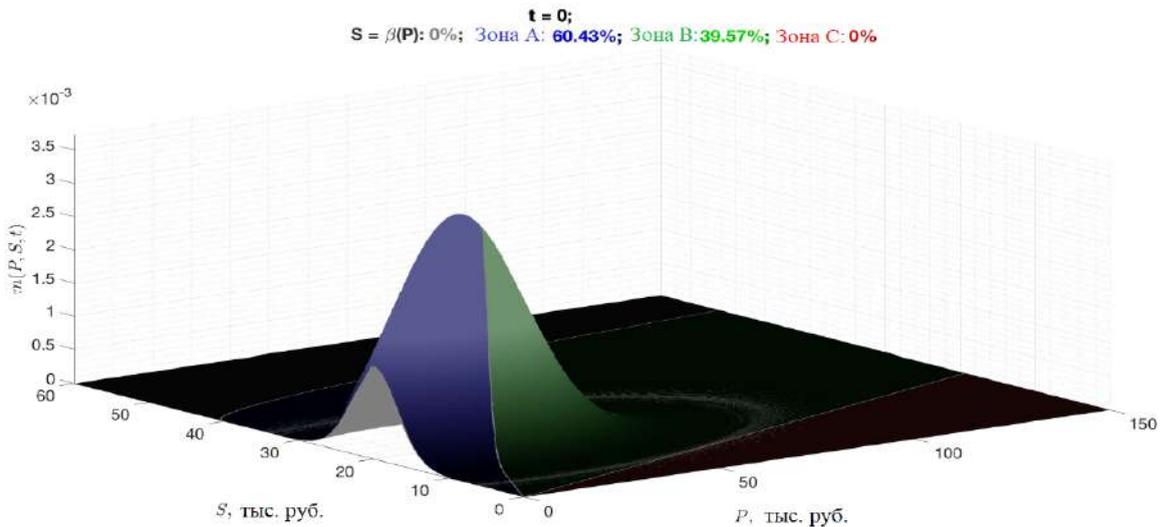


Рис. 3.7: Плотность распределения работников в момент времени $t = 0$.

В соответствии с разностной схемой уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, представим его численное решение при $t = 0.5$, $t = 1$ (см. Рис.3.8,3.9).

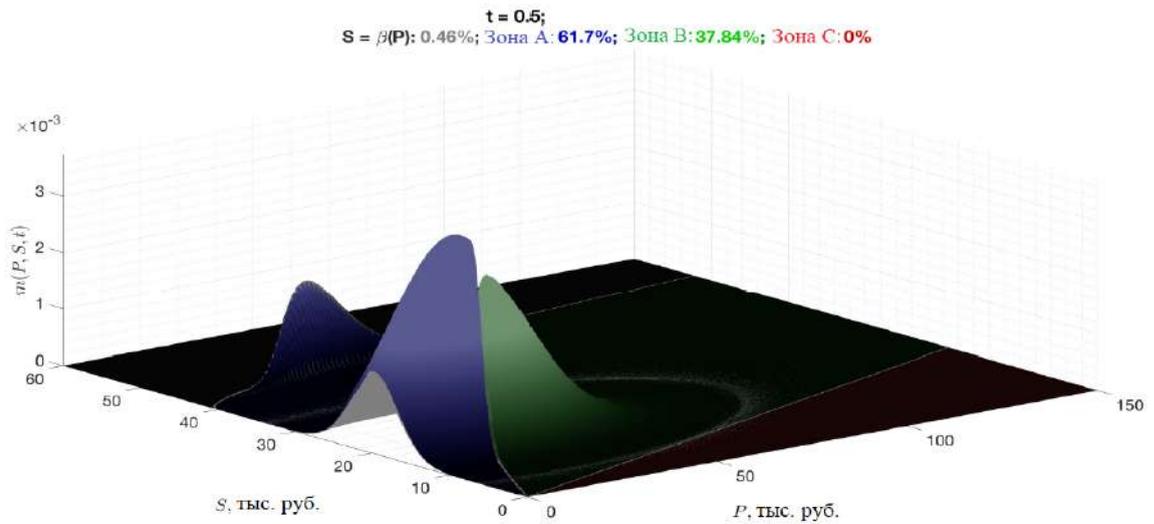


Рис. 3.8: Плотность распределения работников в момент времени $t = 0.5$.

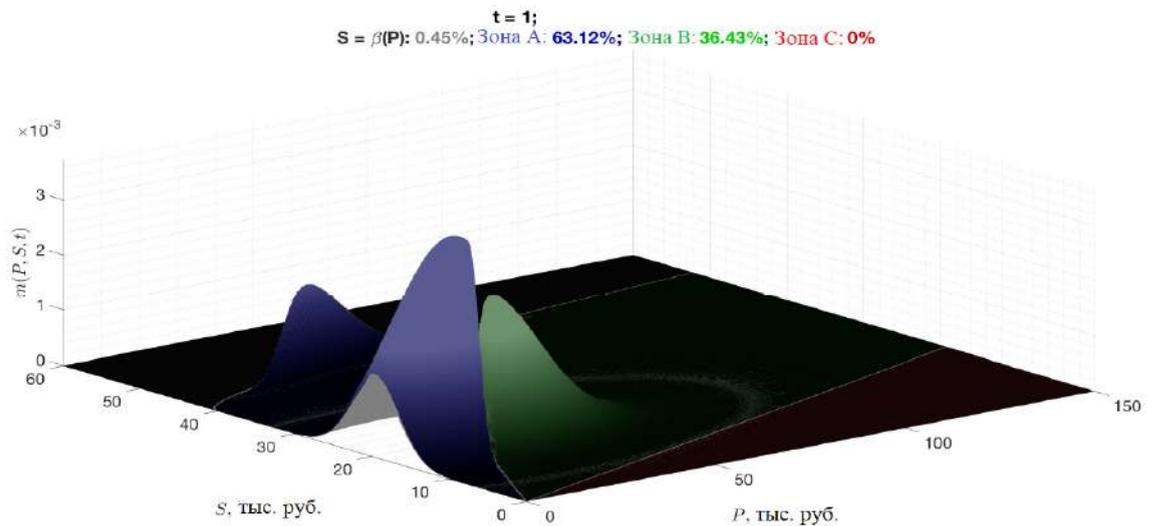


Рис. 3.9: Плотность распределения работников в момент времени $t = 1$.

Как видно из заголовков Рис.3.7,3.8,3.9, общее количество работников сохраняется. Количество работников, развивающие свои компетенции уменьшается в силу перехода на новый уровень заработной платы. Напомним, что мы полагаем падение реальных доходов ($\gamma < 0$), поэтому, с течением времени наблюдается следующий цикл поведения работника на рынке труда:



3.3 Групповое поведение высокочастотных трейдеров

Рассмотрим модель группового поведения агентов с подражательным поведением в роли высокочастотных трейдеров на фондовом рынке на основе концепции игр среднего поля. Высокочастотные трейдеры пытаются извлечь прибыль из колебаний курсовой стоимости акции.

Концепция игр среднего поля оказалась востребованной при моделировании группового поведения в мультиагентных системах, встречающихся в задачах экономики, финансов, экологии, управления транспортными потоками. Такие системы на микроуровне моделируются динамической игрой, в которой динамика состояния и целевая функция агентов описываются однотипно, а в результате взаимодействия устанавливается равновесие. В системах с большим количеством агентов концепция равновесия по Нэшу нуждается в модификации ввиду ограничений на сложность информации, используемой агентом при принятии решений. Концепция игры среднего поля является такой модификацией, согласно которой предполагается, что каждый агент, выбирая свою стратегию, не использует детальную информацию о состоянии других агентов, а учитывает макроописание системы в целом. С математической точки зрения такие модели представляют систему из связанных между собой уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, которое описывает выбор стратегии поведения агентов, и уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, которое описывает динамику состояния системы. Условия на функцию распределения агентов по состояниям в фазовом пространстве из уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка задаются в начальный момент временного интервала, а на функцию цены из уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана задаются в конечный момент временного интервала. Такая постановка задачи порождает новые проблемы, связанные с корректностью по Адамару и численными методами решения. Магистральный эффект, характерный для задач экономической динамики, затрудняет использование метода, основанного на решении задачи Коши для системы уравнений с частными производными и подборе начального условия для функции цены, чтобы удовлетворить условию на функцию цены в конечный момент времени. Поэтому возникает проблема согласования разностных схем для численного решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка в прямом времени, а уравне-

ния Гамильтона–Якоби–Беллмана — в обратном времени. В работе [83] предложен подход к численному анализу модели группового поведения на основе концепции игры среднего поля. Подход основан на построении задачи минимизации функционала от функции распределения агентов по состояниям в фазовом пространстве. Ограничения в этой вариационной задаче задаются уравнением Колмогорова–Фоккера–Планка и начальными условиями на функцию распределения. Функционал подбирается таким образом, чтобы сопряженные переменные (множители Лагранжа) в этой вариационной задаче удовлетворяли уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана в исходной постановке игры среднего поля, а условия трансверсальности совпадали с условиями на функцию цены в конечный момент времени.

За основу группового поведения высокочастотных трейдеров на фондовом рынке возьмем модель [60]. Принимая во внимание факт большого числа высокочастотных трейдеров, их поведение можно описать с помощью игр среднего поля: трейдер в каждый момент времени имеет информацию о среднем положении остальных трейдеров и принимает решение о дальнейшей стратегии независимо от действий остальных участников фондового рынка. При определенных ограничениях имеет место редукция системы уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям типа Риккати. Данная редукция будет использоваться как тестовый пример для анализа сходимости численного метода.

Концепция игр среднего поля. Пусть $T > 0$ — временной горизонт рассматриваемой задачи, $x(t)$ обозначает позицию агента в момент времени $t \in [0, T]$, $\alpha(t, x(t))$ — управление агента в момент времени $t \in [0, T]$. Мы полагаем, что запас акций высокочастотного трейдера $x(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx = \alpha(t, x(t))dt + \sigma dW(t),$$

$$x(0) = \tilde{x}_0,$$

где $x \in \mathbb{R}$, $\alpha : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция, описывающая действия высокочастотного трейдера на фондовом рынке (если $\alpha > 0$, то трейдер покупает акции, если $\alpha < 0$, то трейдер продает акции), $W(t)$ — стандартный Винеровский процесс, $t \in [0, T]$, $\sigma > 0$, \tilde{x}_0 является случайной величиной с заданным начальным распределением $m_0(x)$. В качестве функционала, следуя логике [60], выберем:

$$u(t, x) = \max_{\alpha} \mathbb{E} \left(\int_t^T (V(m(\tau, x(\tau))) - k(\tau)\alpha^2(\tau, x(\tau)) - \lambda(\tau)(x(\tau) - \tilde{a}(\tau))^2) d\tau - \theta(x(T) - a)^2 \right), \quad (3.3.1)$$

где $x(t) = x$.

Выбор такого вида функции полезности (3.3.1) основывается на торговой модели фондо-

вого рынка, описывающей поведение высокочастотных трейдеров в работе итальянских авторов: Л. Фатоне, Ф. Мариани, М.С. Реккиони и Ф. Цирилли [60] и является ее модификацией. Будем полагать, что функция $V(m)$ монотонно возрастает по m . Более точные предположения о классе функции $V(m)$ будут изложены далее. Функция цены состоит из четырех слагаемых. Первое слагаемое $\mathbb{E} \int_t^T V(m(\tau, x(\tau))) d\tau$ описывает подражательный эффект высокочастотных трейдеров. Подражательный эффект заключается в следующем: каждый трейдер реагирует по-своему и принимает собственные решения о дальнейшей торговой стратегии, но в каждый момент времени трейдер имеет информацию о среднем (которая формируется из торговых позиций остальных участниках рынка) и, анализируя эту ситуацию, принимает решение находиться в тех же торговых позициях, что и большинство участников торговой модели. Второе слагаемое $\mathbb{E} \int_t^T (-k(\tau)\alpha^2(\tau, x(\tau))) d\tau$, $k(\tau) > 0$, $\forall \tau \in [t, T]$ описывает нежелание высокочастотных трейдеров резко менять свои торговые позиции. Таким образом, высокочастотные трейдеры стараются избегать покупок или продаж больших пакетов акций. Третье слагаемое $\mathbb{E} \int_t^T (-\lambda(\tau)(x(\tau) - \tilde{a}(\tau))^2) d\tau$, $\lambda(\tau) > 0$, $\forall \tau \in [t, T]$ описывает магистральный эффект высокочастотных трейдеров, предпочитающих находиться в определенной позиции $\tilde{a}(\tau)$ в период торговых позиций. Последнее слагаемое характеризует желание высокочастотных трейдеров иметь определенный запас акций $a \in \mathbb{R}$, $\theta \geq 0$.

Выведем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для функции цены $u(t, x)$:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \max_{\alpha} \left\{ (V(m) - k\alpha^2 - \lambda(x - \tilde{a})^2) dt + \mathbb{E}(u(t + dt, x + dx)) \right\} + \bar{o}(dt) = \\ &= u(t, x) + \max_{\alpha} \left\{ \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} dt + \alpha \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} dt + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} dt + (V(m) - k\alpha^2 - \lambda(x - \tilde{a})^2) dt \right\} + \bar{o}(dt). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{4k} \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right)^2 - \lambda(x - \tilde{a})^2 = -V(m(t, x)),$$

с терминальным условием

$$u(T, x) = -\theta(x - a)^2.$$

Выведем уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка, которое описывает эволюцию плотности распределения $m(t, x)$. Пусть $g(x)$ — произвольная гладкая функция с компактным носителем. Ее среднее значение в момент времени t вычисляется по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m(t, x)g(x)dx.$$

В момент времени $t + dt$ мы получаем балансовое уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m(t + dt, x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t, x)\mathbb{E}(g(x + dx)) dx + \bar{o}(dt). \quad (3.3.2)$$

Левую часть уравнения (3.3.2) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m(t + dt, x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(m(t, x) + \frac{\partial m(t, x)}{\partial t} dt \right) g(x)dx + \bar{o}(dt).$$

Применяя формулу Ито [96], получаем, что выражение $\mathbb{E}(g(x + dx))$ в правой части балансового уравнения (3.3.2) соответствует

$$\mathbb{E}(g(x + dx)) = \mathbb{E}(g(x + \alpha dt + \sigma dW(t))) = g(x) + \frac{dg(x)}{dx} \alpha dt + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{d^2 g(x)}{dx^2} dt + \bar{o}(dt).$$

Откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m(t, x)\mathbb{E}(g(x + dx)) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t, x) \left\{ g(x) + \frac{dg(x)}{dx} \alpha dt + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{d^2 g(x)}{dx^2} dt \right\} dx + \bar{o}(dt).$$

Интегрируя по частям правую часть последнего выражение, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} m(t, x)\mathbb{E}(g(x + dx)) dx &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} m(t, x)g(x)dx + dt \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial(\alpha(t, x)m(t, x))}{\partial x} \right] g(x)dx \right\}. \end{aligned}$$

Так как функция $g(x)$ произвольная, то в соответствии с леммой Дю Буа-Реймона [59], мы получаем уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка

$$\frac{\partial m(t, x)}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m(t, x)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\alpha(t, x)m(t, x))}{\partial x} = 0,$$

с начальным условием

$$m(0, x) = m_0(x).$$

Оптимальная стратегия агентов описывается связанной системой уравнений в частных производных (3.3.3): уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, эволюционирующего в прямом времени и уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, эволюционирующего в попятном

времени. Связующим условием этих уравнений является $\alpha(t, x) = \frac{1}{2k(t)} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{4k(t)} \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right)^2 - \lambda(t) (x - \tilde{a}(t))^2 = -V(m(t, x)), \\ \frac{\partial m(t, x)}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2k(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} m(t, x) \right) = 0, \\ u(T, x) = -\theta(x - a)^2, \\ m(0, x) = m_0(x). \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Существование решения краевой задачи для связанной системы уравнений в частных производных до сих пор остается открытым вопросом (один из таких случаев описывается системой (3.3.3)). На данный момент доказано существование решения системы уравнений в частных производных (3.3.3) лишь в частных случаях [36]. В данной работе мы не задаемся целью доказать существование, единственность решения (3.3.3), нашей целью является обоснование перехода от краевой системы (3.3.3) к экстремальной задаче, дальнейшее представление численных методов решения данной экстремальной задачи и применение концепции игр среднего поля для обоснования кризиса фондового рынка.

Вместо того, чтобы решать краевую задачу, рассмотрим вариационную задачу (3.3.4), (3.3.5), опираясь на [83]:

$$J(m, \alpha) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (G(m) + (-k(t)\alpha^2 - \lambda(t)(x - \tilde{a}(t))^2) m) dx dt - \theta \int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 m(T, x) dx \rightarrow \max, \quad (3.3.4)$$

где $V = \frac{\partial G}{\partial m}$ (см. [45]), $m(t, x)$ удовлетворяет уравнению Колмогорова–Фоккера–Планка:

$$\begin{cases} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha m) = 0, \\ m(0, x) = m_0(x). \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Замечание 14. Под решением экстремальной задачи (3.3.4) с ограничением типа равенства (3.3.5) будем понимать пары $(\hat{m}, \hat{\alpha})$, где $\hat{m} = \hat{m}(t, x) \in C^{1,2}$, $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(t, x) \in C^{0,1}$: в окрестности $(\hat{m}, \hat{\alpha})$ выполняется неравенство $J(m, \alpha) \leq J(\hat{m}, \hat{\alpha})$ для допустимых m, α .

3.3.1 Численное решение экстремальной задачи

Для этого ограничим фазовое пространство $x \in \mathbb{R}$. Пусть множество $X = [-L_1, L_2]$ ограничивает фазовую переменную задачи; $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ — заданные константы. Разобьем фазовое пространство X на M равномерных отрезков, временное пространство $[0, T]$ на N равномерных отрезков (считаем, что M и N достаточно большие натуральные числа). Таким образом, шаг по фазовому пространству равен $\Delta x = \frac{L_1 + L_2}{M}$; шаг по временному пространству

равен $\Delta t = \frac{T}{N}$.

Будем придерживаться следующих обозначений. Под m_j^i будем понимать значение функции $m(t, x)$ в точке $(i\Delta t, j\Delta x)$, $i = \overline{0, N}$, $j = \overline{1, M-1}$. Под $\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i$ будем понимать значение функции $\alpha(t, x)$ в точке $(i\Delta t, (j + \frac{1}{2})\Delta x)$, $i = \overline{0, N-1}$, $j = \overline{0, M-1}$. Для дальнейших численных исследований, введем гомогенные условия Неймана, выраженные в виде $\alpha_{\frac{1}{2}}^i = 0$, $\alpha_{M-1+\frac{1}{2}}^i = 0$, $i = \overline{0, N-1}$. Также зададим граничные условия $\left. \frac{\partial m}{\partial x} \right|_{\{-L_1, L_2\}} = 0$.

Будем придерживаться следующих обозначений:

$$\langle u^i, v^i \rangle = \Delta x \sum_{j=1}^{M-1} u_j^i v_j^i, \quad \forall u^i, v^i \in \mathbb{R}^{M-1}, i = \overline{0, N};$$

$$q_j^i = \frac{\left(\alpha_{j-\frac{1}{2}}^i\right)^2 + \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i\right)^2}{2}, \quad \forall j = \overline{1, M-1}, i = \overline{0, N-1};$$

$$g(m^i) = \Delta x \sum_{j=1}^{M-1} G(m_j^i), \quad \forall i = \overline{0, N-1}.$$

Тогда, функционал (3.3.4) в дискретной записи имеет следующий вид

$$J_{\Delta t, \Delta x} = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} (\langle -k^i q^i - \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2, m^i \rangle + g(m^i)) - \theta \langle (x - a)^2, m^N \rangle,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_{M-1})$.

При разработке численного метода решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка необходимо сохранить неотрицательность плотности распределения m на дискретном уровне. Для этого мы используем противопоточную схему Годунова первого порядка для адвективной части уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, как показано в [83]. Кроме того, использование разностной схемы такого типа позволяет обойти дополнительный ввод множителей Лагранжа для сохранения неотрицательности $m \geq 0$. В начальный момент времени нам известны значения функции m_j^0 в точках $j = \overline{1, M-1}$. Разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка представляется следующим образом:

$$m_j^{i+1} = m_j^i + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (m_{j+1}^i - 2m_j^i + m_{j-1}^i) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(m_{j+\frac{1}{2}}^i \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i - m_{j-\frac{1}{2}}^i \alpha_{j-\frac{1}{2}}^i \right), \quad (3.3.6)$$

где $j = \overline{1, M-1}$, $i = \overline{0, N-1}$,

$$m_{j+\frac{1}{2}}^i = \begin{cases} m_{j+1}^i, & \text{если } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i < 0; \\ m_j^i, & \text{если } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка (3.3.6) можно записать в матричном виде:

$$m^{i+1} = (A + B(\alpha^i)) m^i, \quad \forall i = \overline{0, N-1}; \quad A, B \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (M-1)}, \quad (3.3.7)$$

где A, B являются трехдиагональными матрицами.

Следующая Лемма накладывает ограничения на управление α^i на дискретном уровне. Выполнение этих ограничений позволяет сохранять положительность функции плотности разбиения m^{i+1} на следующем временном слое.

Лемма 11. Пусть $m^i \in \mathbb{R}^{M-1}$ — вектор, состоящий из положительных компонент. Пусть выполнено условие $|\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i| \leq \frac{\Delta x}{2\Delta t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{\Delta x}$. Тогда вектор следующего временного слоя m^{i+1} имеет положительные компоненты, $\forall i = \overline{0, N-1}, \forall j = \overline{1, M-1}$.

Доказательство. Зафиксируем i, j . Рассмотрим случай, когда $\alpha_{j-1+\frac{1}{2}}^i < 0, \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i < 0$ (остальные три случая доказываются аналогично). В соответствии с (3.3.6),

j -я компонента вектора m^{i+1} является линейной комбинацией $(m_{j-1}^i, m_j^i, m_{j+1}^i)$ с коэффициентами $\left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{\Delta x}, 1 - \sigma^2 \frac{1}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \alpha_{j-\frac{1}{2}}^i, \frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i\right)$. Покажем, что все коэффициенты положительны. Очевидно, что первый элемент положителен $\left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{\Delta x} > 0\right)$. Рассмотрим второй коэффициент и ограничим его снизу:

$$\begin{aligned} 1 - \sigma^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \alpha_{j-\frac{1}{2}}^i &\geq 1 - \sigma^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \right) = \\ &= 1 - \sigma^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

В соответствии с условиями Куранта о сходимости явной разностной схемы параболического уравнения (см., например, [10]), справедливо неравенство $\frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$. Это влечет положительность второго коэффициента, стоящего при m_j^i . Рассмотрим коэффициент, стоящий при компоненте m_{j+1}^i . Справедлива следующая оценка:

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i \geq \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \right) = \frac{1}{2} > 0.$$

Таким образом, мы показали, что коэффициенты стоящие при $(m_{j-1}^i, m_j^i, m_{j+1}^i)$ положительны. Это завершает доказательство Леммы 11. \square

Множители Лагранжа удовлетворяют

$$\begin{cases} v^i = (A^T + B^T(\alpha^i)) v^{i+1} + \Delta t V(m^i) - \Delta t k^i q^i - \Delta t \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2, \\ v^N = -\theta(x - a)^2. \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Отметим, что данное уравнение решается в обратном времени.

3.3.2 Монотонные разностные схемы

Чтобы вычислить максимизирующую последовательность, мы будем использовать метод монотонных разностных схем. Такой подход был использован в [83], [76], [66]. Данный подход применяется для решения билинейных задач управления и основывается на специальных разложениях на множители функционала $J_{\Delta t, \Delta x}$.

Замечание 15. В монотонных схемах важным фактором является выпуклость функции $G(m)$ по m в функционале (3.3.4).

Рассмотрим два управления: α и α' . Пусть m является решением уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка при управлении α , а m' является решением уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка при управлении α' . Цель монотонных разностных схем — найти такое управление α' , при котором значение функционала $J_{\Delta t, \Delta x}(\alpha') > J_{\Delta t, \Delta x}(\alpha)$. Вычислим разность $J_{\Delta t, \Delta x}(\alpha') - J_{\Delta t, \Delta x}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} J_{\Delta t, \Delta x}(\alpha') - J_{\Delta t, \Delta x}(\alpha) &= \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \left(g(m'^i) + \langle m'^i, -k^i q^i - \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2 \rangle \right) - \\ &- \theta \langle (x - a)^2, m'^N \rangle - \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \left(g(m^i) + \langle m^i, -k^i q^i - \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2 \rangle \right) + \theta \langle (x - a)^2, m^N \rangle. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Выразим краевые условия через сопряженную переменную следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{N-1} (\langle m'^{i+1} - m^{i+1}, v^{i+1} \rangle - \langle m'^i - m^i, v^i \rangle) = \langle m'^N, -\theta(x - a)^2 \rangle - \langle m^N, -\theta(x - a)^2 \rangle.$$

Тогда, формулу (3.3.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} g(m'^i) + \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m'^i, -k^i q^i \rangle + \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m'^i, -\lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2 \rangle - \\ - \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} g(m^i) - \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i, -k^i q^i \rangle - \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i, -\lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2 \rangle + \\ \sum_{i=0}^{N-1} (\langle m'^{i+1} - m^{i+1}, v^{i+1} \rangle - \langle m'^i - m^i, v^i \rangle). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Заметим, что

$$\Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle -m'^i, k^i q^i - k^i q^i \rangle + \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m'^i - m^i, -k^i q^i \rangle = -\Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m'^i, k^i q^i \rangle + \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i, k^i q^i \rangle.$$

Перепишем m'^{i+1} и m^{i+1} уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка в матричном виде (3.3.7).

Тогда, формулу (3.3.10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} (g(m^{i+1}) - g(m^i)) + \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^{i+1} - m^i, -\lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2 \rangle + \\
& \quad + \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^{i+1} - m^i, -k^i q^i \rangle - \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i, k^i q^i - k^i q^i \rangle + \\
& \quad + \sum_{i=0}^{N-1} \langle (A + B(\alpha^{i+1})) m^{i+1} - (A + B(\alpha^i)) m^i, v^{i+1} \rangle - \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i - m^i, v^i \rangle. \quad (3.3.11)
\end{aligned}$$

В соответствии с формулой для сопряженного уравнения (3.3.8), формула (3.3.11) равна

$$\begin{aligned}
& \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} (g(m^{i+1}) - g(m^i)) + \\
& \quad + \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^{i+1} - m^i, -\Delta t \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2 - \Delta t k^i q^i + A^T v^{i+1} - A^T v^{i+1} - B^T(\alpha^i) v^{i+1} \rangle + \\
& \quad + \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i - m^i, -\Delta t V(m^i) + \Delta t k^i q^i + \Delta t \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2 \rangle - \\
& \quad - \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i, k^i q^i - k^i q^i \rangle + \sum_{i=0}^{N-1} \langle B(\alpha^{i+1}) m^{i+1} - B(\alpha^i) m^i, v^{i+1} \rangle. \quad (3.3.12)
\end{aligned}$$

График выпуклой функции лежит выше своей касательной, поэтому справедливо неравенство

$$\sum_{i=0}^{N-1} (g(m^{i+1}) - g(m^i)) \geq \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^{i+1} - m^i, V(m^i) \rangle.$$

Учитывая это неравенство и сократив подобные слагаемые в (3.3.12), получаем

$$\begin{aligned}
& \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} (g(m^i) - g(m^{i+1})) + \\
& + \sum_{i=0}^{N-1} \left\langle m^i - m^{i+1}, -\Delta t \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2 - \Delta t k^i q^i + A^T v^{i+1} - A^T v^i - B^T(\alpha^i) v^{i+1} \right\rangle + \\
& + \sum_{i=0}^{N-1} \left\langle m^i - m^{i+1}, -\Delta t V(m^i) + \Delta t k^i q^i + \Delta t \lambda^i (x - \tilde{a}^i)^2 \right\rangle - \\
& - \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i, k^i q^i - k^{i+1} q^{i+1} \rangle + \sum_{i=0}^{N-1} \langle B(\alpha^i) m^i - B(\alpha^{i+1}) m^{i+1}, v^{i+1} \rangle \geq \\
& \geq \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i - m^{i+1}, V(m^i) \rangle + \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i - m^{i+1}, -B^T(\alpha^i) v^{i+1} - \Delta t V(m^i) \rangle - \\
& - \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i, k^i (q^i - q^{i+1}) \rangle + \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i, B^T(\alpha^i) v^{i+1} \rangle - \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i, B^T(\alpha^i) v^i \rangle. \quad (3.3.13)
\end{aligned}$$

Приведем подобные слагаемые в правой части неравенства (3.3.13), получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{N-1} m^i (B^T(\alpha^i) - B^T(\alpha^{i+1})) v^{i+1} - \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i, k^i (q^i - q^{i+1}) \rangle = \\
& = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} \langle m^i, k^i (-q^i + q^{i+1}) \rangle + \sum_{i=0}^{N-1} \langle (B(\alpha^i) - B(\alpha^{i+1})) m^i, v^{i+1} \rangle = \Delta t \Delta x \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-2} \Upsilon_j^i(\alpha', \alpha),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Upsilon_j^i(\alpha', \alpha) = & k^i (m_j^i + m_{j+1}^i) \left(\frac{(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i)^2 - (\alpha_{j+\frac{1}{2}}^{i+1})^2}{2} \right) + \\
& + \left(m_{j+\frac{1}{2}}^i \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i - \tilde{m}_{j+\frac{1}{2}}^i \alpha_{j+\frac{1}{2}}^{i+1} \right) \left(\frac{v_{j+1}^{i+1} - v_j^{i+1}}{\Delta x} \right), \quad (3.3.14)
\end{aligned}$$

и

$$\tilde{m}_{j+\frac{1}{2}}^i = \begin{cases} m_{j+1}^i, & \text{если } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i < 0, \\ m_j^i, & \text{если } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i \geq 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы найти такое управление α' , увеличивающее значение функционала $J_{\Delta t, \Delta x}$, т. е. $J_{\Delta t, \Delta x}(\alpha') - J_{\Delta t, \Delta x}(\alpha) \geq 0$, приравняем (3.3.14) к неотрицательному выражению

$$\Upsilon_j^i(\alpha', \alpha) = \hat{\theta} k^i (m_j^i + m_{j+1}^i) \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i - \alpha_{j+\frac{1}{2}}^{i+1} \right)^2, \quad (3.3.15)$$

где $\hat{\theta} > 0$.

Замечание 16. Параметр $\hat{\theta}$ может зависеть от времени. Данный подход развивается в работах [92], [73], [99].

Пусть $\tilde{\theta} = 2\hat{\theta}$. Уравнение (3.3.15) может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i\right)^2 \left(1 + \tilde{\theta}\right) + \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i\right) \left(-\frac{1}{k^i} \frac{2\hat{m}_{j+\frac{1}{2}}^i}{m_j^i + m_{j+1}^i} \frac{v_{j+1}^{i+1} - v_j^{i+1}}{\Delta x} - 2\tilde{\theta}\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i \right) - \\ & - \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i\right)^2 + \frac{1}{k^i} \frac{2\tilde{m}_{j+\frac{1}{2}}^i}{m_j^i + m_{j+1}^i} \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i \frac{v_{j+1}^{i+1} - v_j^{i+1}}{\Delta x} + \tilde{\theta} \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i\right)^2 = 0, \end{aligned}$$

где

$$\hat{m}_{j+\frac{1}{2}}^i = \begin{cases} m_{j+1}^i, & \text{если } \tilde{m}_{j+\frac{1}{2}}^i = m_j^i, \\ m_j^i, & \text{если } \tilde{m}_{j+\frac{1}{2}}^i = m_{j+1}^i. \end{cases}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{j+\frac{1}{2}}^i &= \frac{2\hat{m}_{j+\frac{1}{2}}^i}{m_j^i + m_{j+1}^i}, \\ \tilde{\mathfrak{M}}_{j+\frac{1}{2}}^i &= \frac{2\tilde{m}_{j+\frac{1}{2}}^i}{m_j^i + m_{j+1}^i}, \\ a_{j+\frac{1}{2}}^i &= 1 + \tilde{\theta}, \\ b_{j+\frac{1}{2}}^i &= -\frac{1}{k^i} \mathfrak{M}_{j+\frac{1}{2}}^i \frac{v_{j+1}^{i+1} - v_j^{i+1}}{\Delta x} - 2\tilde{\theta} \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i\right)^2, \\ c_{j+\frac{1}{2}}^i &= \left(\tilde{\theta} - 1\right) \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i\right)^2 + \frac{1}{k^i} \tilde{\mathfrak{M}}_{j+\frac{1}{2}}^i \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i \frac{v_{j+1}^{i+1} - v_j^{i+1}}{\Delta x}, \end{aligned}$$

тогда квадратное уравнение (3.3.15) представляется в следующем виде:

$$a_{j+\frac{1}{2}}^i \left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i\right)^2 + b_{j+\frac{1}{2}}^i \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i + c_{j+\frac{1}{2}}^i = 0.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_{j+\frac{1}{2}}^i &= \frac{\tilde{\theta} - 1}{1 + \tilde{\theta}} \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i + \frac{1}{k^i} \frac{1}{1 + \tilde{\theta}} \tilde{\mathfrak{M}}_{j+\frac{1}{2}}^i \frac{v_{j+1}^{i+1} - v_j^{i+1}}{\Delta x}, \\ \mathfrak{B}_{j+\frac{1}{2}}^i &= \frac{-b_{j+\frac{1}{2}}^i - \text{sign}\left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i\right) \sqrt{\left(b_{j+\frac{1}{2}}^i\right)^2 - 4a_{j+\frac{1}{2}}^i c_{j+\frac{1}{2}}^i}}{2a_{j+\frac{1}{2}}^i}, \\ \tilde{\alpha}_{j+\frac{1}{2}}^i &= \begin{cases} \mathfrak{B}_{j+\frac{1}{2}}^i, & \text{если } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i \mathfrak{Z}_{j+\frac{1}{2}}^i < 0, \\ \mathfrak{Z}_{j+\frac{1}{2}}^i, & \text{если } \alpha_{j+\frac{1}{2}}^i \mathfrak{Z}_{j+\frac{1}{2}}^i \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Условие (3.3.16) гарантирует, что $\tilde{\alpha}_{j+\frac{1}{2}}^i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M-2}$.

Чтобы удовлетворять условиям Леммы 11, ограничим управление следующим образом:

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^i = \text{sign} \left(\tilde{\alpha}_{j+\frac{1}{2}}^i \right) \min \left\{ \frac{\Delta x}{2\Delta t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{\Delta x}, \left| \tilde{\alpha}_{j+\frac{1}{2}}^i \right| \right\}. \quad (3.3.17)$$

Алгоритм решения экстремальной задачи. Опишем алгоритм поиска максимизирующей последовательности, позволяющей решить экстремальную задачу (3.3.4), (3.3.5). В начальный момент времени нам известно распределение $m_0(x)$, в конечный момент $v(T, x)$. Под m будем понимать матрицу $\mathbb{R}_+^{(N+1) \times (M-1)}$, где \mathbb{R}_+ — множество положительных вещественных чисел. Под v будем понимать матрицу $\mathbb{R}^{(N+1) \times (M-1)}$. Под α будем понимать матрицу $\mathbb{R}^{N \times M}$.

Придадим значению $\hat{\theta}$ положительное значение. Пусть κ определяет номер итерации поиска оптимального управления (например, α^κ). Пусть α^0 является нулевой матрицей. Алгоритм решения экстремальной задачи описывается следующим образом:

1. Считаем m^κ в соответствии с $\alpha = \alpha^\kappa$ в прямом времени;
2. Считаем v^κ в соответствии с $\alpha = \alpha^\kappa$ в обратном времени;
3. Переопределяем $\alpha^{\kappa+1}$ в соответствии с (3.3.17).

Критерием останова итерационного алгоритма является выполнение следующего неравенства:

$$\sup_{\substack{1 \leq i \leq N-1, \\ 1 \leq j \leq M-2}} \left| 2k^i \frac{(m^\kappa)_j^i + (m^\kappa)_{j+1}^i}{2} (\alpha^\kappa)_{j+\frac{1}{2}}^i - (m^\kappa)_{j+\frac{1}{2}}^i \frac{(v^\kappa)_{j+1}^{i+1} - (v^\kappa)_j^{i+1}}{\Delta x} \right| \leq \varepsilon, \quad (3.3.18)$$

где $\varepsilon > 0$ — наперед заданная точность,

$$(m^\kappa)_{j+\frac{1}{2}}^i = \begin{cases} (m^\kappa)_{j+1}^i, & \text{если } (\alpha^\kappa)_{j+\frac{1}{2}}^i < 0 \\ (m^\kappa)_j^i, & \text{если } (\alpha^\kappa)_{j+\frac{1}{2}}^i \geq 0. \end{cases}$$

Замечание 17. Критерий останова (3.3.18) достигается при $\alpha = \frac{1}{2k(t)} \frac{\partial v}{\partial x}$. Подробное описание итерационного метода поиска оптимального управления и его особенности в [103].

Решение краевой задачи для уравнений в частных производных (3.3.3) путем сведения к экстремальной задаче (3.3.4), (3.3.5) можно проверить в частном случае, когда имеет место редукция к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати (см. [60]).

Утверждение 5. Пусть $\mu_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, $V(m) = \ln m$. Положим:

$$m_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_0^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\delta_0^2} (x - \mu_0)^2 \right], \quad x \in \mathbb{R},$$

$\tilde{x}_0 \sim N(\mu_0, \delta_0)$. Тогда существует решение системы

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{4k(t)} \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right)^2 - \lambda(t) (x - \tilde{a}(t))^2 = -\ln m(t, x), \\ \frac{\partial m(t, x)}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2k(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} m(t, x) \right) = 0, \\ u(T, x) = -\theta(x - a)^2, \\ m(0, x) = m_0(x) \end{cases} \quad (3.3.19)$$

со связующим условием $\alpha(t, x) = \frac{1}{2k(t)} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$, имеющее следующий вид:

$$u(t, x) = C_0(t) + C_1(t)x + C_2(t)x^2, \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \quad (3.3.20)$$

$$m(t, x) = \exp [D_0(t) + D_1(t)x + D_2(t)x^2], \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \quad (3.3.21)$$

$$\alpha(t, x) = \frac{1}{2k(t)} (C_1(t) + 2C_2(t)x), \quad x \in \mathbb{R}, t \in [0, T],$$

где функции $D_0(t)$, $D_1(t)$, $D_2(t)$, $C_0(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $t \in [0, T]$ являются решениями следующей краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати:

$$\begin{cases} \frac{dD_0}{dt} = -\frac{1}{2k(t)} C_1 D_1 - \frac{1}{k(t)} C_2 + \frac{\sigma^2}{2} D_1^2 + \sigma^2 D_2, \\ D_0(0) = -\frac{\mu_0^2}{2\delta_0^2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi\delta_0^2), \\ \frac{dD_1}{dt} = -\frac{1}{k(t)} C_1 D_2 - \frac{1}{k(t)} C_2 D_1 + 2\sigma^2 D_1 D_2, \\ D_1(0) = \frac{\mu_0}{\delta_0^2}, \\ \frac{dD_2}{dt} = -\frac{2}{k(t)} C_2 D_2 + 2\sigma^2 D_2^2, \\ D_2(0) = -\frac{1}{2\delta_0^2}, \\ \frac{dC_0}{dt} = -\frac{1}{4k(t)} C_1^2 - \sigma^2 C_2 - D_0 + \lambda(t) \tilde{a}^2(t), \\ C_0(T) = -a^2 \theta, \\ \frac{dC_1}{dt} = -\frac{1}{k(t)} C_1 C_2 - D_1 - 2\lambda(t) \tilde{a}(t), \\ C_1(T) = 2a\theta, \\ \frac{dC_2}{dt} = -\frac{1}{k(t)} C_2^2 - D_2 + \lambda(t), \\ C_2(T) = -\theta. \end{cases} \quad (3.3.22)$$

Доказательство. Для случая $k(t) \equiv \frac{1}{2}$, $\tilde{a}(t) \equiv 0$, доказательство данного утверждения можно найти в [60]. Здесь мы продемонстрируем, что система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет в точности вид (3.3.22). Вычислим частные производные (3.3.20), (3.3.21),

участвующие в системе (3.3.19):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dC_0}{dt} + \frac{dC_1}{dt}x + \frac{dC_2}{dt}x^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C_1 + 2C_2x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2C_2,$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2) \cdot \left(\frac{dD_0}{dt} + \frac{dD_1}{dt}x + \frac{dD_2}{dt}x^2 \right),$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2) \cdot (D_1 + 2D_2x) = m(D_1 + 2D_2x),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} &= D_1 \cdot \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2) \cdot (D_1 + 2D_2x) + 2D_2 \cdot \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2) + \\ &\quad + 2D_2x \cdot \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2) \cdot (D_1 + 2D_2x) = \\ &= \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2) \cdot (D_1^2 + 4D_1D_2x + 2D_2 + 4D_2^2x^2) = \\ &= \{m = \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2)\} = m(D_1^2 + 4D_1D_2x + 2D_2 + 4D_2^2x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} m \right) &= \frac{\partial}{\partial x} ((C_1 + 2C_2x) \cdot \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (C_1 \cdot \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2) + 2C_2x \cdot \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2)) = \\ &= C_1 \cdot \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2) \cdot (D_1 + 2D_2x) + 2C_2 \cdot \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2) + \\ &\quad + 2C_2x \cdot \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2) \cdot (D_1 + 2D_2x) = \{m = \exp(D_0 + D_1x + D_2x^2)\} = \\ &= m(C_1D_1 + 2C_1D_2x + 2C_2 + 2C_2D_1x + 4C_2D_2x^2). \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, получаем

$$\dot{C}_0 + \dot{C}_1x + \dot{C}_2x^2 + \frac{1}{4k(t)}(C_1 + 2C_2x)^2 + \sigma^2C_2 - \lambda(t)(x - \tilde{a}(t))^2 = -D_0 - D_1x - D_2x^2.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях фазовой переменной x :

$$\frac{dC_0}{dt} + \frac{1}{4k(t)}C_1^2 + \sigma^2C_2 - \lambda(t)\tilde{a}^2(t) + D_0 = 0, \quad (3.3.23)$$

$$\frac{dC_1}{dt} + \frac{1}{k(t)}C_1C_2 + 2\lambda(t)\tilde{a}(t) + D_1 = 0, \quad (3.3.24)$$

$$\frac{dC_2}{dt} + \frac{1}{k(t)}C_2^2 - \lambda(t) + D_2 = 0. \quad (3.3.25)$$

Подставляя в уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка, предварительно поделив его на $m(t, x)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dD_0}{dt} + \frac{dD_1}{dt}x + \frac{dD_2}{dt}x^2 + \frac{1}{2k(t)}C_1D_1 + \frac{1}{k(t)}C_1D_2x + \frac{1}{k(t)}C_2 + \frac{1}{k(t)}C_2D_1x + \\ + \frac{2}{k(t)}C_2D_2x^2 - \frac{\sigma^2}{2}D_1^2 - 2\sigma^2D_1D_2x - \sigma^2D_2 - 2\sigma^2D_2^2x^2 = 0. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях пространственной переменной:

$$\frac{dD_0}{dt} + \frac{1}{2k(t)}C_1D_1 + \frac{1}{k(t)}C_2 - \frac{\sigma^2}{2}D_1^2 - \sigma^2D_2 = 0, \quad (3.3.26)$$

$$\frac{dD_1}{dt} + \frac{1}{k(t)}C_1C_2 + \frac{1}{k(t)}C_1D_2 + \frac{1}{k(t)}C_2D_1 - 2\sigma^2D_1D_2 = 0, \quad (3.3.27)$$

$$\frac{dD_2}{dt} + \frac{2}{k(t)}C_2D_2 - 2\sigma^2D_2^2 = 0. \quad (3.3.28)$$

Легко видеть, что уравнения (3.3.23), (3.3.24), (3.3.25), (3.3.26), (3.3.27), (3.3.28) удовлетворяют дифференциальным уравнениям системы (3.3.22). Найдем краевые условия для них. Для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана имеем $u(T, x) = -\theta(x - a)^2$. Имеем:

$$u(T, x) = C_0(T) + C_1(T)x + C_2(T)x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующий степенях x , получаем условия на правом конце для функций C_0, C_1, C_2 , которые совпадают с условиями на правом конце системы (3.3.19). Аналогичными рассуждениями получаем условия на левом конце (условия на функции D_0, D_1, D_2), расписав начальное условие плотности распределения как

$$m_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_0^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\delta_0^2}(x - \mu_0)^2\right] = \exp\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_0^2}}\right) - \frac{\mu_0^2}{2\delta_0^2} + \frac{\mu_0}{\delta_0^2}x - \frac{1}{2\delta_0^2}x^2\right],$$

откуда легко находятся $D_0(0), D_1(0), D_2(0)$. Утверждение 5 доказано. \square

Покажем, что решение экстремальной задачи (3.3.4), (3.3.5) сходится к решению исходной системы уравнений в частных производных на примере случая редукции уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным типа Риккати. Рассмотрим следующий набор параметров. Пусть временной горизонт задачи $T = 1$. Пусть $\mu_0 = 1, \delta_0 = 2, V(m) = \ln m$. Пусть также $a = 2, \theta = 5, \tilde{a}(t) \equiv 3, \lambda(t) \equiv 5, k(t) \equiv 0.5, \sigma = 0.7, \hat{\theta} = 3$.

Ограничим фазовое пространство, зафиксировав $L_1 = 10$, $L_2 = 10$. Критерием останова итерационного алгоритма решения экстремальной задачи является выполнение условия (3.3.18), где $\varepsilon = 10^{-5}$. Разобьем фазовое и временное пространство на $M = 2000$ и $N = 40000$ узлов соответственно.

Замечание 18. Итерационный алгоритм решения экстремальной задачи (3.3.4), (3.3.5) основывается на выпуклости функции $G(t)$ по t . В случае редукции системы к обыкновенным дифференциальным уравнениям типа Риккати данный факт не нарушается: зафиксировав $V(t) = \ln t$, функция $G(t) = t(\ln t - 1)$, т.е. $G(t)$ является выпуклой по t при $t > 0$.

Замечание 19. Для численного решения краевой задачи (3.3.22) будем использовать пакет прикладных программ MATLAB. Воспользуемся встроенной в MATLAB функцией **bvp5c**, которая позволяет решать краевые системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом стрельбы [48]. Функция **bvp5c** является конечно-разностной схемой, которая реализует четырехэтапную формулу Лобатто IIIA (Lobatto IIIA formula) [74]. Это формула коллокации, где полином коллокации предоставляет решение в классе функций C^1 , имеющие точность пятого порядка. Формула реализована в виде неявной схемы Рунге–Кутты.

На Рис.3.10 изображены результаты эволюции плотности распределения $m(t, x)$ как решение экстремальной задачи (3.3.4), (3.3.5), как решение обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати (3.3.22), а также абсолютную разность между решениями двух подходов.

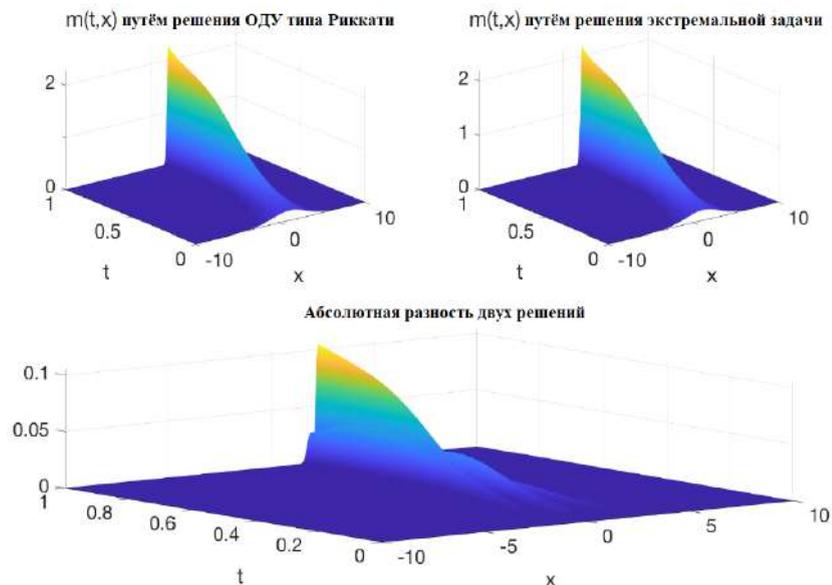


Рис. 3.10: Решение обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати (левый верхний график), решение экстремальной задачи (правый верхний график), абсолютная разность двух решений (нижний график).

Из Рис.3.10 видно, что численное решение экстремальной задачи (3.3.4), (3.3.5) сходится к численному решению краевой задачи (3.3.22). Сходимость достигается при $\Delta x \rightarrow 0$. Фиксированный шаг фазовой переменной Δx влечет необходимость брать шаг по времени Δt на порядок меньше, чем Δx , согласно Лемме 11. Это приводит к работе с матрицами больших размерностей, что значительно усложняет вычислительный процесс. Более того, достаточно трудно распараллелить программный код решения экстремальной задачи из-за наличия циклов, зависящих от предыдущей итерации. Так, чтобы рассчитать значение вектора m^{i+1} на $i + 1$ -м временном слое, необходимо знать значение m^i на i -м временном слое. Цикл, отвечающий за решение сопряженного уравнения v^i решается в обратном времени, поэтому на первом шаге цикла решения сопряженного уравнения, необходимо знать решение уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка в конечный момент времени. Вышеперечисленное влечет невозможность параллельного подсчета итераций двух циклов, а также невозможность подсчета циклов независимо друг от друга (реализация цикла, отвечающего за решение сопряженного уравнения v в обратном времени возможна только после полной прогонки цикла, отвечающего за решение уравнения m в прямом времени). Параллелизм может иметь место при математических операциях над матрицами α , m , v на каждом итерационном шаге (при больших размерностях возможно распараллеливание математических операций над матрицами больших размерностей на отдельные блоки матриц).

Стоит отметить важное преимущество численного решения экстремальной задачи (3.3.4), (3.3.5) перед численным решением краевой задачей обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати (3.3.22). Как отмечалось ранее, исходная система уравнений в частных производных плохо обусловлена из-за наличия магистрального эффекта [106]. Это приводит к численным трудностям при использовании метода стрельбы для решения краевой задачи (3.3.22). Функция **bvp5c** ищет решение краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений путем решения системы нелинейных алгебраических уравнений [48]. Из-за плохой обусловленности задачи возникают случаи вырождения Якобиана системы нелинейных алгебраических уравнений. Изменения начальных значений функций $C_0(0)$, $C_1(0)$, $C_2(0)$ на левом конце малоэффективны. В то время как численное решение экстремальной задачи не имеет данных трудностей: при любом выборе параметров задачи из допустимого множества алгоритм сойдется за конечное число итераций.

3.3.3 Численное исследование кризиса фондового рынка на основе игр среднего поля

Исследования фондовых рынков мотивировано кризисом в Китае, произошедшим в 2015г. Покажем, как с помощью модели группового поведения высокочастотных трейдеров можно описать их поведение в период кризиса. Анализ данного кризиса был подробно изучен в [75] и основывается на обобщенном непараметрическом методе. Н.И. Клемашевым, А.А. Шана-

ниным и Ш. Жангом была изучена торговая статистика 100 акций китайского финансового рынка за период с января 2009г по август 2015г. Обобщенный непараметрический метод позволил вычислить индекс иррациональности и проверить торговую статистику на соответствие гипотезе о рациональном потреблении репрезентативного потребителя. Основываясь на обобщенном непараметрическом методе, был исследован уровень иррациональности, свойственный китайскому рынку. Авторами было проведено исследование акций, которые стали причиной повышения уровня иррациональности за перечисленные периоды. Была выделена 1 акция шанхайского инвестиционного банка CITIC Securities (тикер 600030). Динамика котировок акции инвестиционного банка CITIC Securities определялась большой торговой активностью высокочастотных трейдеров, повлекшей резкие изменения на фондовом рынке. Данная акция является репрезентативной акцией группы компаний (инвестиционных банков), объясняющая повышенный уровень индекса иррациональности. Ниже представлена динамика цены акции CITIC Securities за период с декабря 2014г по май 2016г.

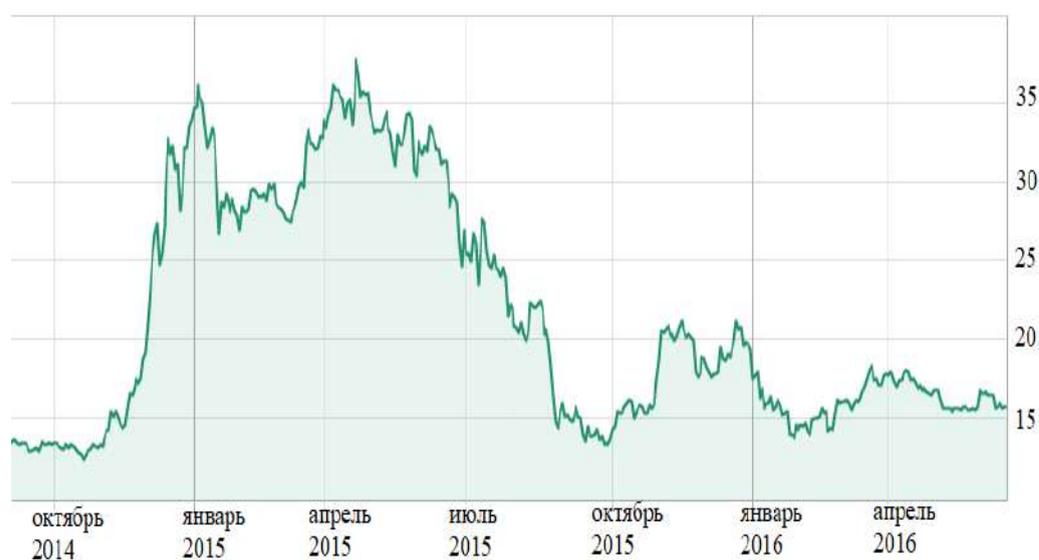


Рис. 3.11: Динамика курсовой стоимости акции CITIC Securities (600030). Данные взяты из Reuters.

Будем полагать, что участниками фондового рынка являются основные инвесторы, которые вкладывают свои сбережения в расчете на дальнейшую выплату дивидендов, и высокочастотные трейдеры. Высокочастотные трейдеры оперируют пакетами акций в каждый момент времени, пытаясь заработать на колебаниях цены акции. Высокочастотные трейдеры делятся на два типа: проницательные трейдеры и непрофессиональные. Проницательные трейдеры изучают и анализируют структуру рынка, финансовые отчеты. Они способны спрогнозировать дальнейшее поведение курсовой стоимости акции. Поведение непрофессиональных трейдеров несильно отличается друг от друга, они стараются придерживаться одинаковых стратегий, избегать резких изменений в своих стратегиях (не реализуют большие пакеты акций). Опишем возможные стратегии высокочастотных трейдеров, ставшие причиной динамики

ки курсовой стоимости акции CITIC Securities, изображенной на Рис.3.11. Проницательные трейдеры начали скупать акции, тем самым оказывая влияние на динамику курсовой стоимости акции. Непрофессиональные трейдеры решили спекулятивным образом заработать на ожидаемом подорожании и, проанализировав, что динамика курсовой стоимости акции начала расти, стала приобретать пакеты акций. Это привело к резкому подорожанию цены акции (Рис.3.11, декабрь 2014г). Проницательные трейдеры имеют представление о том, когда и на какую величину должно произойти реальное подорожание цены акции (без участия высокочастотных трейдеров). Они понимают, что текущая стоимость акции намного выше ожидаемой, и решают реализовать некий пакет акций. Непрофессиональные трейдеры наблюдают, что стоимость акции уменьшается, и решают продавать акции. Это приводит к резкому падению стоимости цены акции за короткий промежуток времени (Рис.3.11, январь 2015г.). Проницательные трейдеры наблюдают резкое падение и принимают решение приобрести пакет акции, что провоцирует непрофессиональных трейдеров скупать акции. Пик курсовой стоимости акции CITIC Securities приходится на май 2015г. После этого происходит падение курсовой стоимости, вызванное реализацией пакетов акций проницательными трейдерами и последующими реализациями пакетов акций непрофессиональными трейдерами соответственно. В результате получается «М»-образное поведение динамики курсовой стоимости акции. Проницательные трейдеры понимают, что к октябрю 2015г цена акции стала ниже ожидаемой, и решают снова приобрести пакет акций, меньший, чем они приобрели в декабре 2014г. Это приводит к повторению «М»-образного поведения цены акции. Многие спекулятивные участники рынка вложили существенную часть своих средств, некоторые взяли потребительские кредиты. Как результат, большая часть участников рынка не смогла заработать на колебаниях курсовой стоимости, потеряв существенную часть своих накоплений.

На основе концепции игр среднего поля опишем поведение высокочастотных трейдеров на фондовом рынке 2015г в Китае. Будем рассматривать n классов непрофессиональных трейдеров и полагать, что в каждом классе количество высокочастотных трейдеров достаточно большое, а их действия на фондовом рынке описываются системой (3.3.3). Отличия классов друг от друга заключаются в наборе параметров функции полезности. Так, классы непрофессиональных трейдеров могут отличаться предпочтениями находится в той или иной позиции во время трейдинга, иметь свои коэффициенты отвращения к рискам. Каждый класс непрофессиональных трейдеров описывается с помощью экстремальной задачи (3.3.4), (3.3.5) со своим набором параметров.

Мы полагаем, что цена акции $S(t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению [102]:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = S \left(\sum_{\ell=1}^n M_{\ell}(t) + f(t) + h\delta(t - \hat{\tau}) \right), \\ S(0) = \tilde{S}_0, \end{cases} \quad (3.3.29)$$

где $M_\ell(t) = \eta_\ell \int_{\mathbb{R}} \alpha_\ell(t, x_\ell) m_\ell(t, x_\ell) dx_\ell$, $\eta_\ell > 0$, $\ell = \overline{1, n}$ определяет влияние ℓ -го класса непрофессиональных трейдеров на курсовую стоимость акции; $f(t)$ характеризует влияние проницательных трейдеров в момент времени $t \in [0, T]$. Последнее слагаемое, $h\delta(t - \hat{\tau})$ известно проницательным трейдерам. Оно характеризует скачок курсовой стоимости акции в момент времени $t = \hat{\tau}$. Параметр \tilde{S}_0 определяет начальную цену акции и может быть взят из статистики (цены акции CITIC Securities в декабре 2014г).

Замечание 20. Реальное подорожание курсовой стоимости акции в момент времени $t = \hat{\tau}$, в соответствии с (3.3.29), составляет e^h единиц.

Непрофессиональные трейдеры, действуя спекулятивно, хотят купить акции по низкой цене, а продать по высокой. Таким образом, непрофессиональные трейдеры должны реагировать на изменение курсовой стоимости акции. Мы полагаем, что функционал ℓ -го класса непрофессиональных трейдеров можно описать следующим образом, $\ell = \overline{1, n}$:

$$J_\ell = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[G_\ell(m_\ell(t, x_\ell)) - \tilde{k}_\ell \exp\left(-\frac{1}{S(t)} \left| \frac{dS(t)}{dt} \right| \right) \alpha_\ell^2(t, x_\ell) m_\ell(t, x_\ell) - \right. \\ \left. - \tilde{\lambda}_\ell \exp\left(\frac{1}{S(t)} \left| \frac{dS(t)}{dt} \right| \right) \left(x_\ell - \xi_\ell \frac{1}{S(t)} \frac{dS(t)}{dt} - C_\ell \right)^2 m_\ell(t, x_\ell) \right] dx_\ell dt \rightarrow \max_{\alpha_\ell}. \quad (3.3.30)$$

Здесь $\tilde{k}_\ell > 0$, $\tilde{\lambda}_\ell > 0$, $\xi_\ell > 0$, $C_\ell \in \mathbb{R}$ — известные константы, $\ell = \overline{1, n}$. Сопоставляя (3.3.30) с (3.3.4), мы ставим в соответствие функции $k(t) = \tilde{k} \exp\left(-\frac{1}{S(t)} \left| \frac{dS(t)}{dt} \right| \right)$, $0 < \underline{k} \leq k(t) \leq \bar{k}$; $\lambda(t) = \tilde{\lambda} \exp\left(\frac{1}{S(t)} \left| \frac{dS(t)}{dt} \right| \right)$, $0 < \underline{\lambda} \leq \lambda(t) \leq \bar{\lambda}$; $\tilde{a}(t) = \xi \frac{1}{S(t)} \frac{dS(t)}{dt} + C$, $\underline{\tilde{a}} \leq \tilde{a}(t) \leq \bar{\tilde{a}}$. Здесь \underline{k} , \bar{k} , $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$, $\underline{\tilde{a}}$, $\bar{\tilde{a}}$ известные константы. Выбор функций $k(t)$, $\lambda(t)$, $\tilde{a}(t)$ такого вида заключается в следующем: когда курсовая стоимость акции меняется, непрофессиональные трейдеры реагируют на ее производную. Непрофессиональные трейдеры готовы больше рисковать при резком изменении курсовой стоимости акции (так, чем больше по модулю значение производной цены акции, тем меньше значение функции $k(t)$). В то же время, при изменении курсовой стоимости непрофессиональные трейдеры стремятся к магистрали $\tilde{a}(t)$ (значение функции $\lambda(t)$ увеличивается). Параметр C является стационарной позицией непрофессиональных трейдеров — он отражает прогноз непрофессиональных трейдеров относительно дальнейшей курсовой стоимости акции. Введенные ограничения на функции $k(t)$, $\lambda(t)$, $\tilde{a}(t)$ не позволяют непрофессиональным трейдерам оперировать большими транзакциями на фондовом рынке.

Решением (3.3.29) является

$$S(t) = \begin{cases} \tilde{S}_0 \exp \left[\int_0^t \sum_{\ell=1}^n M_\ell(\zeta) d\zeta + f(t) \right], & \text{если } t < \hat{\tau}, \\ \tilde{S}_0 \exp(h) \exp \left[\int_0^t \sum_{\ell=1}^n M_\ell(\zeta) d\zeta + f(t) \right], & \text{если } t \geq \hat{\tau}, \end{cases} \quad (3.3.31)$$

На дискретном уровне решение (3.3.31) можно записать в виде

$$S^\tau = \begin{cases} \tilde{S}_0 \exp \left[\sum_{\ell=1}^n \Delta t \sum_{i=0}^{\tau-1} \left(\eta_\ell^i \Delta x \sum_{j=1}^{M-1} \alpha_{j,\ell}^i m_{j,\ell}^i \right) + \Delta t \sum_{i=0}^{\tau-1} f^i \right], & \text{если } \tau < \hat{\tau}, \\ \tilde{S}_0 \exp(h) \exp \left[\sum_{\ell=1}^n \Delta t \sum_{i=0}^{\tau-1} \left(\eta_\ell^i \Delta x \sum_{j=1}^{M-1} \alpha_{j,\ell}^i m_{j,\ell}^i \right) + \Delta t \sum_{i=0}^{\tau-1} f^i \right], & \text{если } \tau \geq \hat{\tau}, \end{cases} \quad (3.3.32)$$

где τ пробегается по всем допустимым временным значениям, $\alpha_{j,\ell}^i = \frac{\alpha_{j-1+\frac{1}{2},\ell}^i + \alpha_{j+\frac{1}{2},\ell}^i}{2}$, параметр « ℓ » определяет влияние текущего класса непрофессиональных трейдеров.

Функции $k(t)$, $\lambda(t)$, $\tilde{a}(t)$ зависят от динамики курсовой стоимости акции $S(t)$, которая в свою очередь зависит от управления $\alpha(t, x)$ и плотности распределения $m(t, x)$. Чтобы учесть динамику курсовой стоимости, изменим итерационную последовательность, добавив шаг переоценки функции $S(t)$. Итак, для того, чтобы решить экстремальную задачу (3.3.4), (3.3.5) при $k(t) = \tilde{k} \exp \left(-\frac{1}{S(t)} \left| \frac{dS(t)}{dt} \right| \right)$, $\lambda(t) = \tilde{\lambda} \exp \left(\frac{1}{S(t)} \left| \frac{dS(t)}{dt} \right| \right)$, $\tilde{a}(t) = \xi \frac{1}{S(t)} \frac{dS(t)}{dt} + C$, следует придерживаться следующего алгоритма

1. Считаем m^κ в соответствии с $\alpha = \alpha^\kappa$ в прямом времени;
2. Считаем S^κ в соответствии с $\alpha = \alpha^\kappa$, $m = m^\kappa$;
3. Считаем v^κ в соответствии с $\alpha = \alpha^\kappa$ в обратном времени;
4. Переопределяем $\alpha^{\kappa+1}$ в соответствии с (3.3.17).

Критерий останова итерационного алгоритма оставим прежним (3.3.18).

Рассмотрим итерационный алгоритм подробнее. На первой итерации непрофессиональные трейдеры не оказывают влияния на динамику курсовой стоимости (3.3.32), т.к. их управление изначально фиксируется нулевым. Значит, влияние на динамику курсовой стоимости акции оказывают только проникающие трейдеры (их вклад описывается детерминированной функцией $f(t)$ в (3.3.32)). Основываясь на этом, мы определяем функции $k(t)$, $\lambda(t)$, $\tilde{a}(t)$, которые используются для расчета сопряженного уравнения v и новой итерации управления α . Последующие итерации не сильно меняют значения функций $k(t)$, $\lambda(t)$, $\tilde{a}(t)$, а лишь корректируют их значения. Однако, возможны ситуации когда наблюдается небольшие флуктуации функций $k(t)$, $\lambda(t)$, $\tilde{a}(t)$, $S(t)$ на локальном временном участке. Это сильно затрудняет сходимость итерационного метода. Чтобы избежать вычислительных трудностей, мы применяем фильтр скользящего среднего для функций $k(t)$, $\lambda(t)$, $\tilde{a}(t)$. Фильтр скользящего среднего перемещает окно фиксированной длины по всем значениям функции, высчитывая среднее на каждом рассматриваемом окне [97]. Таким образом, фильтр скользящего среднего сохраняет резкие изменения функции, но предотвращает локальные флуктуации. Мы применяем

данный фильтр после \hat{n} итераций алгоритма, где

$$\hat{n} = \arg \min_{\kappa} \left\{ \left| \int_0^T (\tilde{a}^{\kappa}(t) - \tilde{a}^{\kappa-1}(t)) dt \right| < \hat{\varepsilon} \right\},$$

$\hat{\varepsilon}$ — фиксированная точность.

Замечание 21. При динамическом определении функций $k(t)$, $\lambda(t)$, $\tilde{a}(t)$ может нарушаться монотонность функционала J . Однако, после применения фильтра скользящего среднего монотонность восстанавливается.

Введем функции $y(t)$, $P(t)$, отражающие запас акций и динамику бюджета проницательных трейдеров, $t \in [0, T]$. Данные функции подчиняются следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t), \\ \frac{dP}{dt} = -S(t)f(t), \\ y(0) = 0, \\ P(0) = 0. \end{cases} \quad (3.3.33)$$

Аналогично (3.3.33), введем характеристики непрофессиональных трейдеров. Пусть $z(t)^\ell$ — запас акций ℓ -го класса непрофессиональных трейдеров в момент времени $t \in [0, T]$; $K(t)^\ell$ — бюджет ℓ -го класса непрофессиональных трейдеров в момент времени $t \in [0, T]$, $\ell = \overline{1, n}$. Тогда $z(t)^\ell$, $K(t)^\ell$ определяются следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dz^\ell}{dt} = \int_{-L_1}^{L_2} \alpha^\ell(t, x) m^\ell(t, x) dx, \\ \frac{dK^\ell}{dt} = -S(t) \int_{-L_1}^{L_2} \alpha^\ell(t, x) m^\ell(t, x) dx, \\ z(0)^\ell = \tilde{z}_0^\ell, \\ K(0)^\ell = 0. \end{cases}$$

Под результатом ℓ -го класса непрофессиональных трейдеров будем понимать изменение стоимости финансового портфеля репрезентативного трейдера:

$$F_T^\ell = S(T)z(T)^\ell + K(T)^\ell - z(0)^\ell S(0), \quad \ell = \overline{1, n},$$

а под изменением стоимости финансового портфеля проницательных трейдеров будем понимать величину

$$P_T = S(T)y(T) + P(T) - y(0)S(0).$$

Замечание 22. Начальные условия $y(0)$, $P(0)$, $K(0)^\ell$, $\ell = \overline{1, n}$, можно задать произволь-

ными. Они влияют на линейный сдвиг решения дифференциальных уравнений, которым они соответствуют. Начальное условие $z(0)^\ell$, $\ell = \overline{1, n}$ соответствует математическому ожиданию начального распределения ℓ -го класса непрофессиональных трейдеров.

Результат численного моделирования. Рассмотрим два класса непрофессиональных трейдеров, имеющие противоположные стратегии. На фондовом рынке они классифицируются как «быки» и «медведи». Быки покупают акции в надежде на дальнейший рост курсовой стоимости и продают их, когда цена достигает пика. Таким образом, быкам выгодно, чтобы курсовая стоимость цены акции имела тенденцию роста, поэтому их иногда называют оптимистами. Стратегия медведей противоположна. Они прогнозируют дальнейшее падение курсовой стоимости акции и начинают продавать акции заранее. В таком случае медведи получают финансовые средства за продажу, но кредит остается незакрытым, т.к. отдавать его нужно акциями. Когда курсовая стоимость акции становится минимальной, медведи снова покупают их, но уже за свои деньги, и закрывают короткие позиции по акциям. Разницу в цене медведи оставляют себе. Обычно, срок погашения кредита составляет один торговый день, поэтому сделки медведей называют короткими позициями.

В нашем случае, быков характеризует стационарная позиция $C > \mu_0$. Основная проблема быков в том, что они не знают, когда пик курсовой стоимости акции наступит, поэтому, они могут не успеть реализовать свои активы при резком падении курсовой стоимости акции. Медведей характеризует стационарная позиция $C < \mu_0$.

Для моделирования стратегий непрофессиональных трейдеров двух типов, рассмотрим следующие параметры задачи. Пусть дискретная сетка задается на $L_1 = 10$, $L_2 = 10$, $N = 3 \cdot 10^3$, $M = 10^3$, задача рассматривается на временном горизонте $T = 0.3$. Пусть оба класса непрофессиональных трейдеров имеют нормальное начальное распределение по запасам акций с математическим ожиданием μ_0 и дисперсией δ_0 ; $V_1(m_1) = V_2(m_2) = \ln m$, а $\hat{\theta} = 3$.

Чтобы представить параметры непрофессиональных трейдеров, мы запишем их в векторном виде, где первый элемент характеризует параметры первого класса непрофессиональных трейдеров, а второй элемент — второго класса непрофессиональных трейдеров. Пусть $\mu_0 = (0.3, 1)^T$, $\delta_0 = (0.5, 0.7)^T$, $C = (2.5, 0.5)^T$, $\xi = (3.5, 0.3)^T$, $\tilde{k} = (1.2, 0.5)^T$, $\tilde{\lambda} = (5, 1)^T$, $\tilde{a} = (-5, -5)^T$, $\tilde{a} = (5, 5)^T$, $\underline{k} = (0.2, 0.2)^T$, $\bar{k} = (1, 1)^T$, $\underline{\lambda} = (1, 1)^T$, $\bar{\lambda} = (10, 10)^T$. Таким образом, первый класс непрофессиональных трейдеров (подражающий стратегии быков) более резко реагирует на изменения курсовой стоимости акции, чем второй класс непрофессиональных трейдеров (подражающий стратегии медведей). Пусть $\sigma = (1.2, 1)^T$, $\eta = (0.7, 0.3)^T$. Последний вектор η характеризует влияние групп непрофессиональных трейдеров на финансовый рынок. Количество непрофессиональных трейдеров, которые подражают стратегии быков, намного больше, чем количество непрофессиональных трейдеров, которые подражают стратегии медведей.

Пусть реальное подорожание цены акции (подорожание, не вызванное действиями вы-

сокочастотными трейдерами) происходит в момент времени $\hat{\tau} = 0.95$, что соответствует апрелю 2016г, на величину 1.0513 единиц ($h = 0.05$). Это небольшое подорожание, о котором население Китая было проинформировано в конце 2014г. Отметим, что подорожание цены акции происходит мгновенно (из-за наличия функции Дирака в дифференциальном уравнении цены акции (3.3.29)), и непрофессиональные трейдеры практически не успевают на него отреагировать, перестроить свои стратегии.

На Рис.3.12,3.13,3.14,3.15,3.16 отражены результаты работы итерационного алгоритма.

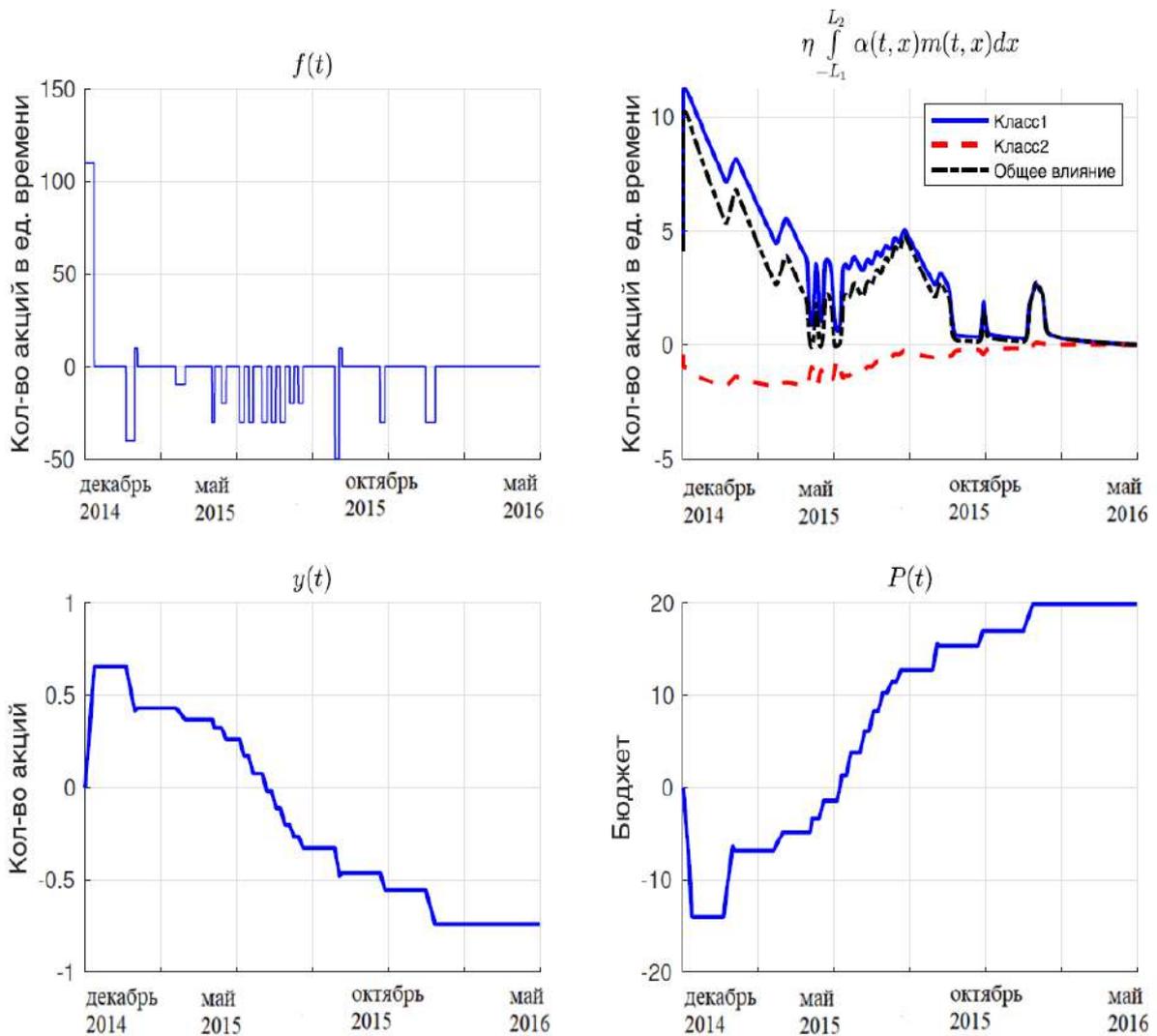


Рис. 3.12: Поведение проницательных трейдеров (левый верхний график); влияние непрофессиональных трейдеров на динамику курсовой стоимости и их суммарное воздействие (правый верхний график); запас акций проницательных трейдеров (левый нижний график); бюджет проницательных трейдеров (правый нижний график).

На Рис.3.12 отображены влияния двух классов непрофессиональных трейдеров и их суммарное воздействие на динамику курсовой стоимости фондового рынка.

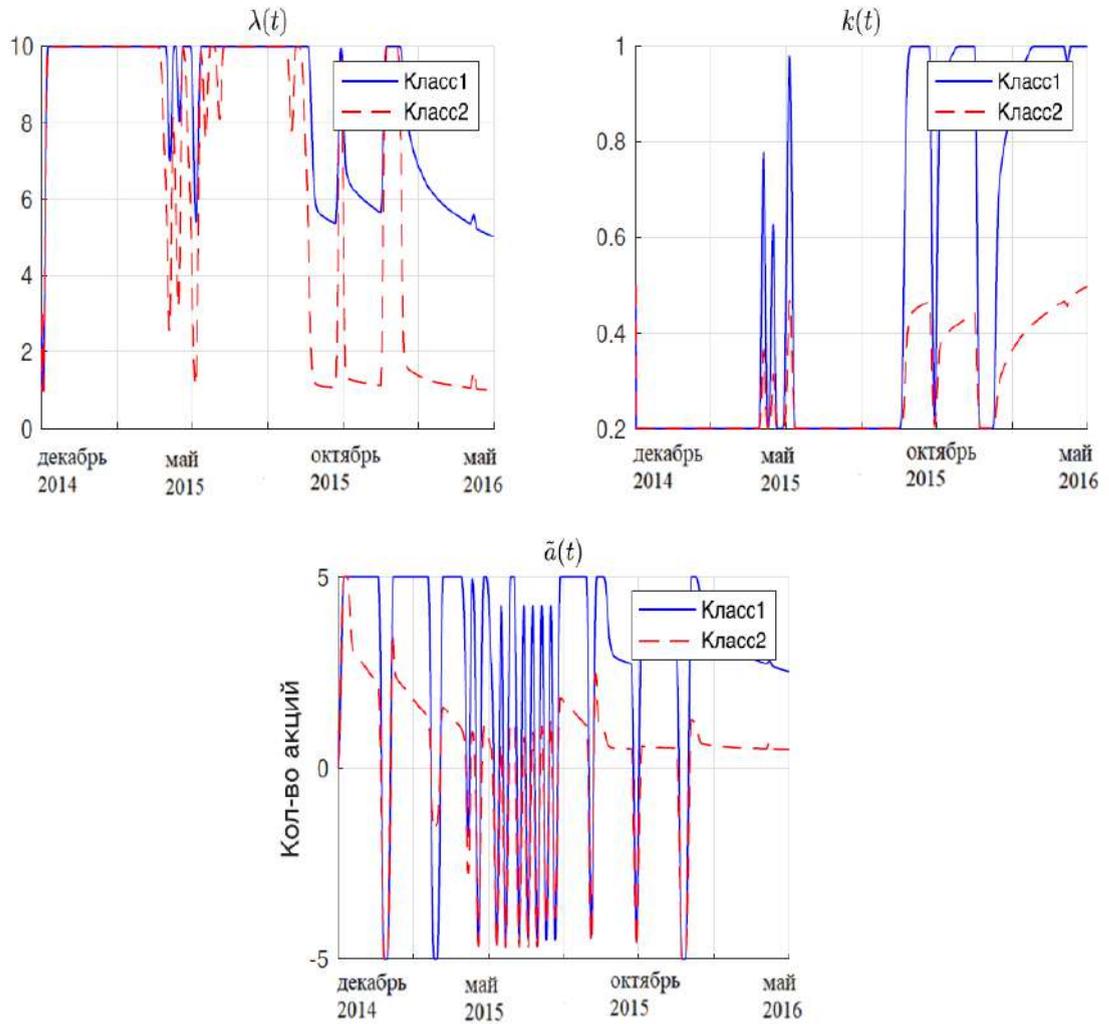


Рис. 3.13: Функции $\lambda(t)$, $k(t)$, $\tilde{a}(t)$ двух классов непрофессиональных трейдеров.

Из графиков на Рис.3.13 видно, что первый класс непрофессиональных трейдеров испытывает меньше отвращений к рискам, чем второй класс непрофессиональных трейдеров. Это следует из показаний функции $\lambda(t)$, принимающей значения, большие, чем $\lambda(t)$ второго класса непрофессиональных трейдеров; а также большего разброса магистрали $\tilde{a}(t)$ первого класса непрофессиональных трейдеров по отношению ко второму классу.

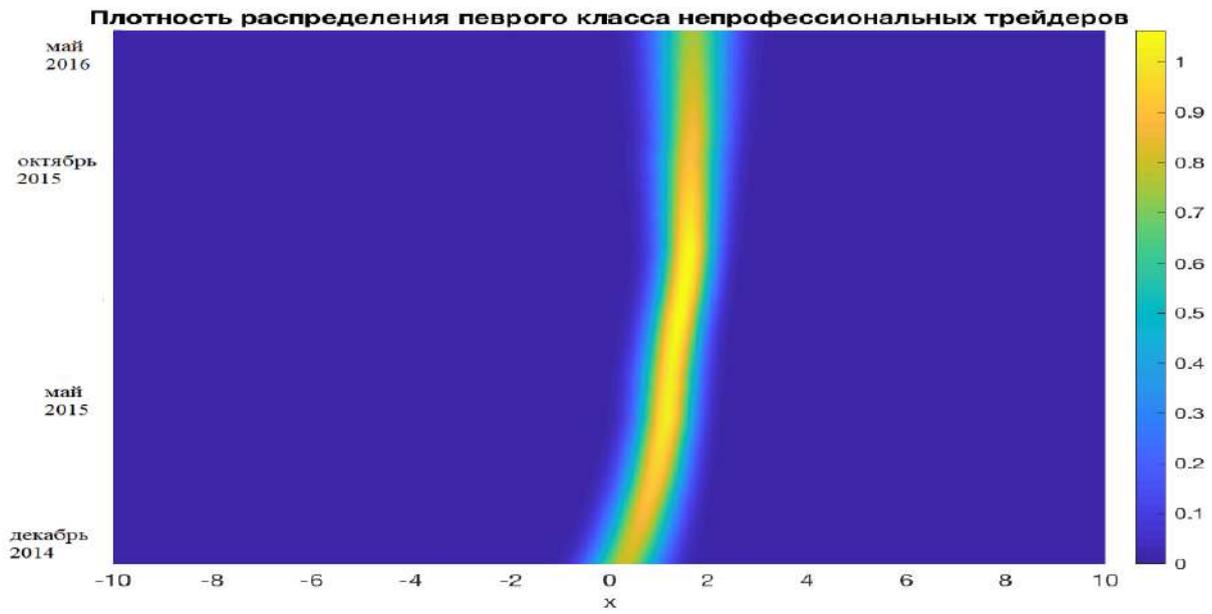


Рис. 3.14: Эволюция плотности распределения первого класса непрофессиональных трейдеров (вид сверху).

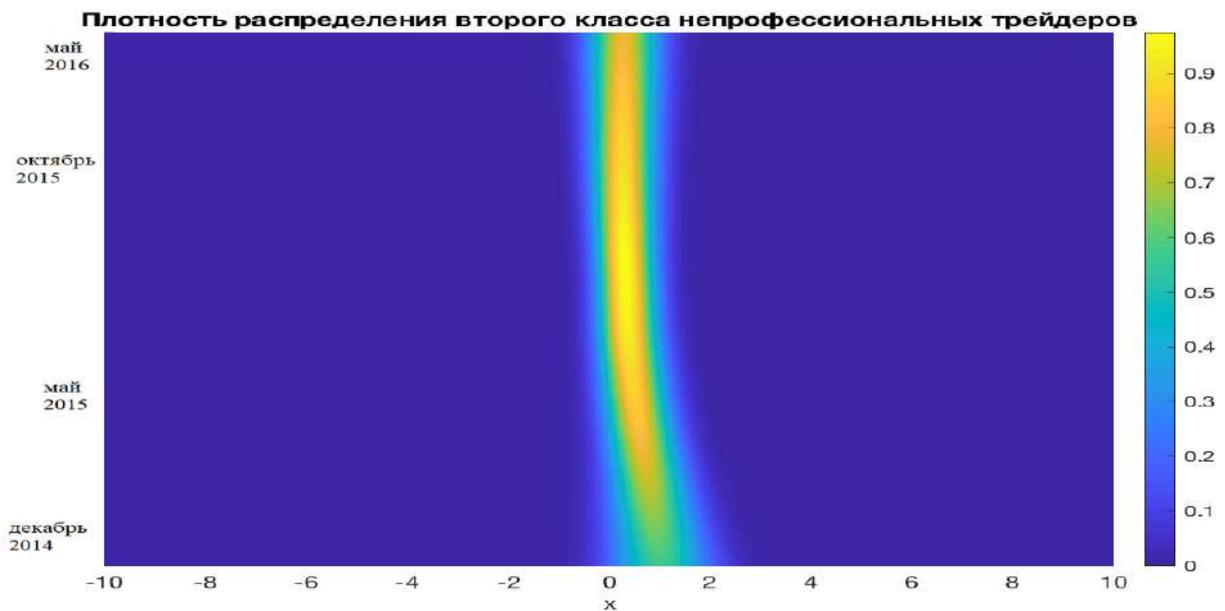


Рис. 3.15: Эволюция плотности распределения второго класса непрофессиональных трейдеров (вид сверху).

Чтобы проанализировать динамику двух классов непрофессиональных трейдеров, эволюцию плотности распределения непрофессиональных трейдеров по запасам акций, отображенную на Рис.3.14,3.15, можно сопоставить с функциями $\lambda(t)$, $k(t)$, $\tilde{a}(t)$, изображенными на Рис.3.13.

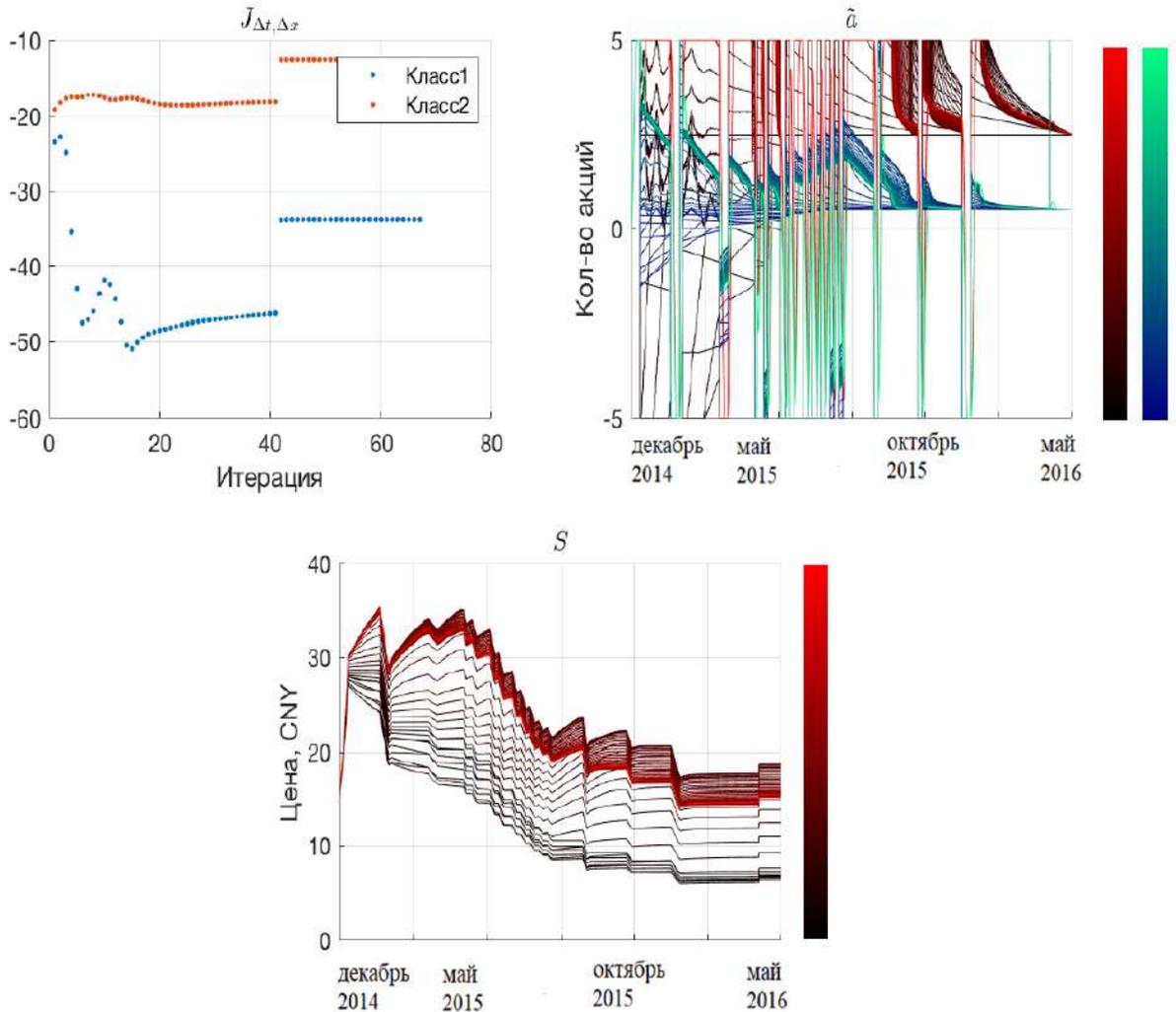


Рис. 3.16: Значения функционалов $J_{\Delta t, \Delta x}$ (левый верхний график); итеративная сходимость магистралей (правый верхний график); итеративная сходимость цены акции и реальные данные курсовой стоимости CITIC Securities (600030), синий цвет (нижний график).

На Рис.3.16 для отображения номера итерации сходимости функций $S(t)$, $\tilde{a}(t)$ первого класса непрофессиональных трейдеров, используется переход от черного к красному, а для отображения номера итерации сходимости функций $S(t)$, $\tilde{a}(t)$ второго класса непрофессиональных трейдеров — от синего к зеленому.

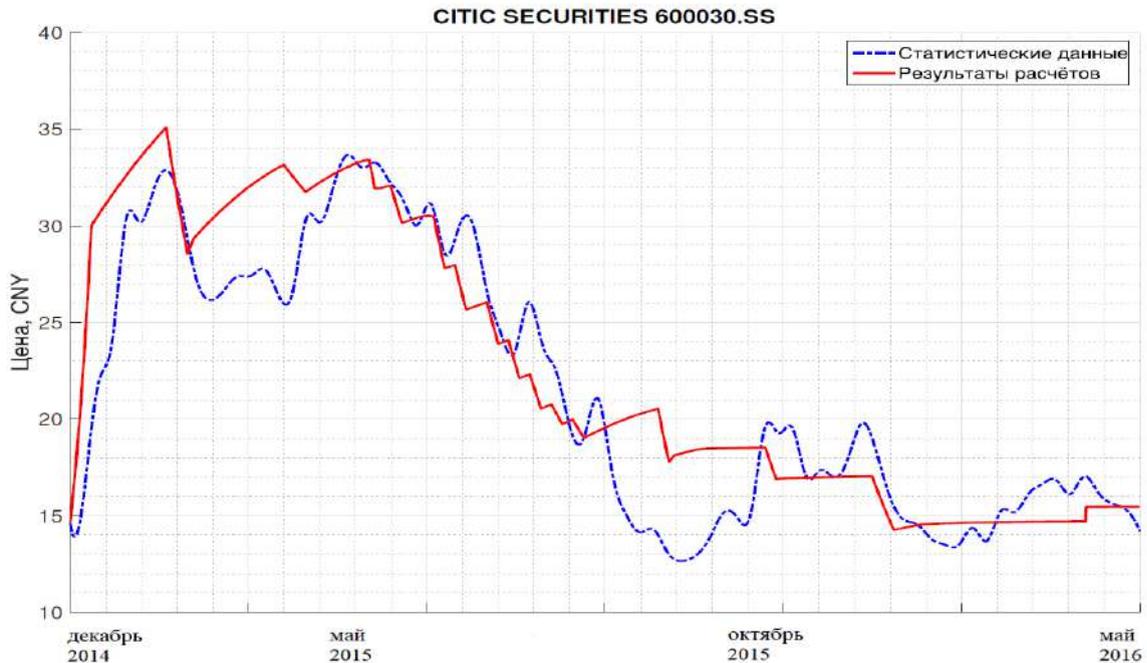


Рис. 3.17: Сравнение моделируемой динамики курсовой стоимости акции с реальными данными.

Сравнивая Рис.3.14,3.15 и Рис.3.17 между собой, можно объяснить поведение непрофессиональных трейдеров. Из-за резких изменений курсовой стоимости акции в начальный период времени, первый класс непрофессиональных трейдеров (трейдеры, подражающие поведению быков) не стал продавать пакеты акций из-за перспективы дальнейшего подорожания курсовой стоимости акции. После второго пика первой волны, они стали скупать акции, стараясь перейти к стационарной позиции $C = 2.5$. Благодаря этому, проницательные трейдеры начали продавать акции небольшими блоками. Стационарная позиция первого класса непрофессиональных трейдеров являлась потенциальной причиной начала второй волны (второго «М»-образного поведения курсовой стоимости, меньшей размерности). Проницательные трейдеры решили, что подражатели быков продолжают скупать акции, что в результате оказалось действительностью и позволило им извлечь еще больше прибыли из торговой активности за рассматриваемый период времени. Второй класс непрофессиональных трейдеров не оказывали большого влияния на фондовый рынок, они сыграли роль «регуляторов», благодаря которым удалось воспроизвести вторую волну динамики курсовой стоимости акции. В результате, изменения бюджета первого класса непрофессиональных трейдеров (большинство участников фондового рынка) составило $F_T^1 = -15.83$ единицы, а изменение бюджета второго класса непрофессиональных трейдеров составило $F_T^2 = 10.76$ единиц. Так как непрофессиональных трейдеров первого класса большинство, то в совокупности непрофессиональные трейдеры не смогли извлечь прибыли из колебаний курсовой стоимости акции. Так, общее изменение бюджета непрофессиональных трейдеров составило -7.85 единиц. Изменение бюджета проницательных трейдеров составило $P_T = 8.42$ единицы.

Заключение

В диссертационной работе исследованы экономико-математические модели, описывающие поведение рациональных агентов на рынках различной природы. Получены следующие основные результаты, выносимые на защиту:

1. Предложена математическая модель описания репрезентативного рационального экономического поведения домашнего хозяйства на несовершенном рынке потребительского кредита. Данная модель является модификацией модели рамсеевского типа. Задача оптимального управления имеет ряд особенностей, таких как негладкость правой части дифференциального уравнения фазовой переменной и некомпактность управления. Доказана теорема о существовании решения. Получены необходимые условия оптимальности принципа максимума Понтрягина в форме Кларка. Построен синтез задачи оптимального управления на бесконечном временном горизонте, допускающий особые режимы.
2. Исследована новая модель формирования процентных ставок по потребительскому кредиту на основе анализа интересов и логики поведения коммерческих банков, оценивающих риски дефолта заемщиков. По формуле Фейнмана–Каца учет рисков невозврата потребительского кредита сводится к решению краевой задачи для уравнения с частными производными. Установив связь с уравнением Абеля, решение краевой задачи сводится к задаче Коши для уравнения теплопроводности с внешним источником, получены оценки рисков в аналитической форме.
3. Разработаны специализированные программные комплексы для идентификации репрезентативных домашних хозяйств в различных социальных слоях России, основываясь на статистических данных. Программные комплексы применены для анализа состояния отечественного рынка потребительского кредита.
4. Исследована математическая модель поведения работника на рынке труда в виде задачи оптимального управления на бесконечном временном горизонте. Предложен алгоритм построения синтеза оптимального управления. Модель идентифицирована по данным российской статистики в различных социальных слоях населения.

5. Исследовано групповое поведение экономических агентов на основе концепции игр среднего поля. Проведена идентификация группового поведения различных социальных слоев на отечественном рынке потребительского кредита на основе статистических данных.
6. Исследована математическая модель группового поведения населения на рынке труда, в которой заработная плата работника описывается стохастическим дифференциальным уравнением с процессом Леви. Выведено уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка с интегральным краевым условием, которое описывает динамику распределения работников по доходам и уровням компетенций, построены разностные схемы для его численного решения.
7. Разработана модификация математической модели группового поведения агентов с подражательным эффектом на фондовом рынке. Идентификация модели позволила воспроизвести на качественном уровне среднесрочную динамику кризиса на Шанхайской фондовой бирже в 2015г.

Таким образом, разработан инструмент математического моделирования, который может быть использован при анализе сценариев, принятии управленческих решениях.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, академику РАН Александру Алексеевичу Шананину за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Литература

- [1] Автухович Э.В., Гуриев С.М., Оленев Н.Н, Петров А.А., Поспелов И.Г., Чуканов С.В., Шананин А.А. Математическая модель экономики переходного периода. - М.: ВЦ РАН. 1999. 143с.
- [2] Арсенин В.Я., Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач. 3 изд. Москва: Наука, 1986.
- [3] Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжимский А.В. Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи матем. наук. 2012. Т.67. №2. С.3-64.
- [4] Асеев С.М., Вельвов В.М. Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // Успехи матем. наук. 2019. Т.74. №6. С.3-54.
- [5] Базанова Е. Минэкономразвития готово поддержать закредитованное население. Ведомости, 2019; [Электронный ресурс]. [HTTPS://WWW.VEDOMOSTI.RU/ECONOMICS/ARTICLES/2019/07/2](https://www.vedomosti.ru/economics/articles/2019/07/2) (дата обращения: 05.03.2024)
- [6] Бессонова Е., Цветкова А. Финансы российских домохозяйств в 2022 году // Аналитическая записка Департамента исследований и прогнозирования Банка России. 2023. 28с.
- [7] Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов // М.: Физматлит. 1961. 391с.
- [8] Всероссийское обследование домохозяйств по потребительским финансам [Электронный ресурс]. 2013-2022. [HTTP://WWW.CBR.RU/EC_RESEARCH/VSEROSSIYSKOE-OBSLEDOVANIE-DOMOKHOZYAYSTV-PO-POTREBITEL-SKIM-FINANSAM/](http://www.cbr.ru/EC_RESEARCH/VSEROSSIYSKOE-OBSLEDOVANIE-DOMOKHOZYAYSTV-PO-POTREBITEL-SKIM-FINANSAM/) (дата обращения: 05.03.2024)
- [9] Гималтдинов И.Ф. Исследование спроса на потребительские кредиты и наличные деньги // Матем. моделирование. 2012. Т.24. №2. С.84-98.
- [10] Гулин А.В., Самарский А.А. Численные методы. Москва. 1989. 432с.

- [11] Гуриев С.М. Модель формирования сбережений и спроса на деньги: I // Математическое моделирование. 1994. Т.6. №7. С.25-40.
- [12] Дмитрук А.В., Кузькина Н.В. Теорема существования в задаче оптимального управления на бесконечном интервале времени // Матем. заметки. 2005. Т.78. №4. С.503-518.
- [13] Зубаревич Н.В., Сафронов С.Г. Люди и деньги: доходы, потребление и финансовое поведение населения российских регионов в 2000-2017гг. // Известия РАН. Серия географическая. 2019. Т.5. С.3-17.
- [14] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений // Новосибирск: Сибирское научное издательство. 2009. 457с.
- [15] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ // М.: Наука. 1988. 280с.
- [16] Коваль П.К., Полбин А.В. Оценка потребительского поведения домохозяйств в РФ // Вопросы экономики. 2022. Т.3. С.98-117.
- [17] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: изд. Иностранной литературы. 1958. 474с.
- [18] Коралов Л.Б., Синай Я.Г. Теория вероятностей и случайные процессы //М.: МЦНМО. 2013. 408с.
- [19] Крупенский Н.А., Кузина О.Е. Перекредитованность россиян: миф или реальность? // Вопросы экономики. 2018. Т.11. С.85-104.
- [20] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука Сиб. отд-ние. 1980.
- [21] Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Институт математики. 1999.
- [22] Ли Э., Маркус Л. Основы теории оптимального управления // М.: Наука. 1972. 574с.
- [23] Обследование бюджетов домашних хозяйств [Электронный ресурс] / Федеральная служба государственной статистики. 2015-2020.
[HTTPTS://OVDX.GKS.RU/](https://ovdx.gks.ru/) (дата обращения: 02.08.2022).
- [24] Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики // М.: Энергоатомиздат. 1996. 544с.
- [25] Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. От госплана к неэффективному рынку: математический анализ эволюции российских экономических структур // The Edwin Mellen Press, UK. 1999. 392с.

- [26] Плотников В.И., Сумин М.И. Необходимые условия в негладкой задаче оптимального управления // Математические заметки. 1982. Т.32. №2. С.187-197.
- [27] Процентные ставки по операциям денежно-кредитной политики // Сайт Банка России. URL: https://www.cbr.ru/hd_base/procstav/ir_mpo/ (дата обращения: 11.10.2023).
- [28] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. Москва: Наука. 1984.
- [29] Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. Москва: Научный Мир. 2005.
- [30] «Российский мониторинг экономического положения и здоровья населения НИУ ВШЭ (RLMS HSE)», проводимый Национальным исследовательским университетом „Высшая школа экономики“ и ООО «Демоскоп» при участии Центра народонаселения Университета Северной Каролины в Чарлз Хилле и Института социологии Федерального научно-исследовательского социологического центра РАН.
- [31] Рудева А.В., Шананин А.А. Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности // Дифференциальные уравнения. 2009. Т.45. №12. С.1799-1803.
- [32] Синяков А., Ушакова Ю. Опыт двух кредитных бумов в России и текущий рост ипотеки: почему важно вовремя остановиться // Аналитическая записка Департамента исследований и прогнозирования Банка России. 2019. 17с.
- [33] Структурный профицит/дефицит ликвидности банковского сектора // Сайт Банка России. URL: https://www.cbr.ru/hd_base/vliquidity/ (дата обращения: 11.10.2023).
- [34] Тарасенко М.В., Трусков Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т.61. №6. С.1034-1056.
- [35] Тарасенко М.В., Трусков Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств РФ в условиях пандемии covid-19 // ИБ ОмГТУ-иИМ СО РАН. 2021. Т.5. С.64-66.
- [36] Achdou Y., Camilli F., Capuzzo-Dolcetta I. Mean Field Games: Numerical Methods for the Planning Problem // SIAM J. on Control and Optimization. 2012. Vol.50. P.77-109.
- [37] Achdou Y., Dolcetta I.C. Mean field games: numerical methods, //SIAM J. Numer. Anal. 2010. Vol.48. P.1136-1162.
- [38] Averboukh Yu. Stackelberg solution of first-order mean field game with a major player // Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ. 2018. Vol.52. P.3-12.

- [39] Baranzini A., Goldemberg J. Speck S. A future for carbon taxes // J. Ecol. Econ. 2000. Vol.32 P.395-412.
- [40] Becker G.S. Human Capital: A theoretical and empirical analysis, with special reference to education, 2nd edition // New York: NBER. 1975. 23p.
- [41] Becker R. On the long-run steady state in a simple dynamic model of equilibrium with heterogeneous householders // Quarterly Journal of Economics. 1980. Vol.95. No.2. P.375-382.
- [42] Becker R. and Foias C. A characterization of Ramsey equilibrium // Journal of Economic theory. 1987. Vol.41. No.1. P.173-184.
- [43] Bellmann R. Dynamic Programming // New Jersey: Princeton University Press. 1957. 342p.
- [44] Ben-Porath Y. The production of human capital and the life cycle of earnings // Journal of Political Economy. 1976. Vol.75. No.4. P.352-365.
- [45] Bensoussan A., Frehse J., Yam P. Mean field games and mean field type control theory // Springer, Berlin. 2013. 138p.
- [46] Blinder A., Weiss Y. Human capital and labor supply: a synthesis // Journal of Political Economy. 1976. Vol.83. No.3. P.449-472.
- [47] Buckdahn R., Cardaliaguet P., Quincampoix M. Some Recent Aspects of Differential Game Theory // Dyn. Games Appl. 2011. Vol.1. P.74-114.
- [48] Bulirsch R., Stoer J. Introduction to Numerical Analysis // New York : Springer-Verlag. 1980. 672p.
- [49] Burger M, Caffarelli L, Markowich PA. Partial differential equation models in the socio-economic sciences // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 372: 20130406. 2014.
- [50] Caines P.E., Huang M.Y., Malhamé R.P. Large population stochastic dynamic games: closed loop Kean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle // Commun. Inf. Systems. 2006. Vol.6. P.221-252.
- [51] Caines P.E., Huang M.Y., Malhamé R.P. Large-population cost-coupled LQG problems with nonuniform agents: individual-mass behavior and decentralized ε -Nash equilibria // IEEE Trans. Automat. Control. 2007. Vol.52. No.9. P.1560-1571.
- [52] Caines P.E., Huang M.Y., Malhamé R.P. Individual and mass behavior in large population stochastic wireless power control problems: centralization and Nash equilibrium solutions // IEEE Conference on Decision and Control, USA, HI. 2003. P.98-103.

- [53] Cannarsa P., Capuani R. Existence and uniqueness for mean field games with state constraints. // Springer INdAM Series. 2018. Vol.28. P.49-71.
- [54] Cardaliaguet P., Lasry J.-M., Lions P.-L., Porretta, A. Long time average of mean field games. Networks and heterogeneous media. (2012). Vol.7. No.2. P.279-301.
- [55] Cass D. Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation // The Review of Economic Studies. 1965. Vol.91. No.32. P.233-240.
- [56] Chang S., Wang X. Modeling and computation of mean field equilibria in producers game with emission permits trading // Commun. Nonlinear Sci. Number Simul. 2016. Vol.37. P.238-248.
- [57] Chang S., Wang X. Modeling and computation in the valuation of carbon derivatives with stochastic convenience yields // PLoS ONE 10. 2015. e0125679.
- [58] Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Nonsmooth Analysis and Control Theory // N.Y., Springer-Verlag. 1998. 276p.
- [59] Du Bois-Reymond P. Erläuterungen zu der Anfangsgründen der Variationsrechnung // Math. Ann. 1879. Vol.15. P.283-314.
- [60] Fatone L., Mariani F., Recchioni M.C., Zirilli F. A Trading Execution Model Based on Mean Field Games and Optimal Control // Applied Mathematics. 2014. Vol.5. P.3091-116.
- [61] Fisher I. The Purchasing Power of Money, its Determination and Relation to Credit, Interest and Crises. New York: Macmillan. 1922.
- [62] Friedman A. Differential games // NY: Wiley. 1971. 368p.
- [63] Grossman M. On the concept of health capital and the demand for health // Journal of Political Economy. 1972. Vol.80. No.2. P.223-255.
- [64] Guéant O. An existence and uniqueness result for mean field games with congestion effect on graphs // Applied Mathematics and Optimization. 2015. Vol.72. P.291-303.
- [65] Hadamard J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique // Princeton University Bulletin. (1902). P.49-52.
- [66] Hirsch C. Numerical Computation of Internal and External Flows: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows // John Wiley and Sons. 1990.
- [67] Hodrick R.J., Prescott E.C. Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation // Journal of Money, Credit and Banking. 1997. Vol.29. No.1 P.1-16.
- [68] Huang D.W., Tseng W.C. Mean-field theory for car accidents // Phys. Rev. E 64. 2001. 057106.

- [69] Huang M. Large-population LQG games involving a major player: the Nash certainty equivalence principle // *SIAM J. Control Optim.* 2009. Vol.48. No.5. P.3318-3353.
- [70] Huang M. Mean Field Stochastic Games with Discrete States and Mixed Players // Chapter in *Game Theory for Networks. GameNets 2012. Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering.* Berlin: Springer. 2012. Vol.105. P.138-152.
- [71] Huang M., Nguyen S.L. Linear-quadratic-gaussian mixed games with continuum parametrized minor players // *SIAM J. Control Optim.* 2012. Vol.50. No.5. P.2907-2937.
- [72] Karatzas I., Shreve S. *Brownian motion and stochastic calculus* // Springer-Verlag. 1991.
- [73] Kazakov V., Orlov V., Tannor D. Control of photochemical branching: Novel procedures for finding optimal pulses and global upper bounds in Time Dependent Quantum Molecular Dynamics // Broeckhove J. and Lathouwers L., eds., *Plenum*. 1992. P.347-360.
- [74] Kierzenka J., Shampine L.F. A BVP Solver that Controls Residual and Error // *J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math.* 2008. Vol.3. P.27-41.
- [75] Klemashev N.I., Shanenin A.A., Zhang S. Inverse problems in Pareto's demand theory and their applications to analysis of stock market crises // *Journal of Inverse and Ill posed Problems.* 2017. V.26. P.95-108.
- [76] Kloeden P.E., Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* // Springer-Verlag. 1992.
- [77] Kolokoltsov V.N., Troeva M.S., Yang W. Mean field games based on the stable-like processes // *Mat. Teor. Igr Pril.* 2013. Vol.5. No.4. P.33-65.
- [78] Kolokoltsov V.N., Malafeyev O. Mean field game model of corruption // *Dynamic Games and Applications.* 2017. Vol.7. P.34-47.
- [79] Komlos J. A generalization of a problem of Steinhaus // *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.* 1967. Vol.18. P.217-229.
- [80] Koopmans T.C. On the concept of optimal economic growth // *Ex Aedibus Academicis in Civitate Vaticana.* 1965. Vol.28. No.28. P.225-300.
- [81] Kornienko V., Shaydurov V., Zhang S. Approximations of two-dimensional Mean Field Games with nonsymmetric controls // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2019. Vol.367. P.1124-1161.

- [82] Kurzhanski A.B., Pravin V. Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation // 20th International Workshop on Beam Dynamics and Optimization, BDO. 2014.
- [83] Lachapelle A., Salomon J., Turinici G. Computation of Mean Field equilibria in economics // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2010. Vol.20. No.4. P.567-588.
- [84] Lachapelle A., Lasry J.-M., Lehalle C.-A., Lions P.-L. Efficiency of the price formation process in presence of high frequency participants: a mean field game analysis // Mathematics and Financial Economics. 2016. Vol.10. P.223-262.
- [85] Lachapelle A., Wolfram M.T. On a mean field game approach modeling congestion and a version in pedestrian crowds. Transportation Research Part B: Methodological. 2011. Vol.45. P.1572-1589.
- [86] Lapin A., Zhang S., Lapin S. Numerical solution of a parabolic optimal control problem arising in economics and management // Applied Mathematics and Computation. 2019. Vol.361. P.715-729.
- [87] Lasry J.-M., Lions P.-L. Jeux á champ moyen. I. Le cas stationnaire. [French] // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2006. Vol.343. No.9. P.619-625.
- [88] Lasry J.-M., Lions P.-L. Jeux á champ moyen. II Horizon fini et controle optimal. [French] // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. 2006. Vol.343. No.10. P.679-684.
- [89] Lasry J.-M., Lions P.-L. Mean field games // Jpn. J. Math. 2007. Vol.2. No.1. P. 229-260.
- [90] Lucas R. On the Mechanics of Economic Development // Journal of Monetary Economics. 1988. Vol.22. P.3-42.
- [91] Lucas, Jr. Econometric Policy Evaluation: A Critique. Глава в «The Phillips Curve and Labor Markets». Amsterdam: North-Holland. 1976. P.19-46.
- [92] Maday Y., Turinici G. New formulations of monotonically convergent quantum control algorithms // J. Chem. Phys. 2003. Vol.118. P.8191-8196.
- [93] Manapov I., Rozanova O. Mean field game equations with underlying jump-diffusion process // AIP Conf. Proc. 26 September 2022. 2022. Vol.2522. No.1. Paper number: 060011.
- [94] Mincer J. Schooling, experience and earnings. New York: NBER. 1974.
- [95] Nikulin S.I., Rozanova O.S. On Certain Analytically Solvable Problems of Mean Field Games Theory // Moscow University Mathematics Bulletin. 2020. Vol.75. P.139-148.

- [96] Øksendal B. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications // Springer: Berlin. 2003.
- [97] Oppenheim A.V., Schafer R.W., Buck J.R. Discrete-Time Signal Processing // Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall. 1999.
- [98] Protter P. Stochastic Integration and Differential Equations // Springer: Berlin. 2005.
- [99] Rabitz H., Zhu W. A rapid monotonically convergent iteration algorithm for quantum optimal control over the expectation value of a positive definite operator // J. Chem. Phys. 1998. Vol.109. P.385-391.
- [100] Ramsey F.P. A mathematical theory of savings // The Economic Journal. 1928. Vol.152. No.38. P.543-559.
- [101] Rosen S. A theory of life earnings // Journal of Political Economy. 1976. Vol.84. No.4. P.345-568.
- [102] Ross S.M. Variations on Brownian Motion. Introduction to Probability Models //11th ed. Amsterdam: Elsevier. 2014. P.612-614.
- [103] Salomon J., Turinici G. A monotonic method for solving nonlinear optimal control problems with concave dependence on the state // Internat. J. Control. 2011. Vol.84. P.551-562.
- [104] Shananin A.A., Tarasenko M.V., Trusov N.V. Consumer Loan Demand Modeling // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends, CCIS. 2021. Vol.1476. P.417-428.
- [105] Shananin A.A., Trusov N.V. The household behaviour modelling based on Mean Field Games approach // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol.42. No.7. P.1738-1752.
- [106] Trélat E., Zuazua E. The turnpike property in finite-dimensional nonlinear optimal control // J. of Differential Equations, Elsevier. 2015. Vol.258. P.81-114.
- [107] Weiss Y. The determination of life cycle earnings: a survey // In: Handbook of Labour Economics. New York: Elsevier Science Publishers BV. 1986. P.603-640.
- [108] Worldbank. Household Over-Indebtedness in Russia. 2020.

Приложение А

Идентификация поведенческих характеристик экономического поведения домашних хозяйств в России

А.1 Распределение регионов статистики ОБДХ по группам

Богатая группа регионов. Хабаровский край, Камчатская область, Санкт-Петербург, Магаданская область, Москва, Московская область, Мурманская область, Сахалинская область, Тюменская область, Чукотский АО, Республика Саха (Якутия).

Средняя группа регионов. Краснодарский край, Красноярский край, Приморский край, Амурская область, Архангельская область, Астраханская область, Белгородская область, Владимирская область, Волгоградская область, Вологодская область, Воронежская область, Нижегородская область, Ивановская область, Иркутская область, Калининградская область, Тверская область, Калужская область, Кировская область, Костромская область, Самарская область, Курская область, Ленинградская область, Липецкая область, Новгородская область, Омская область, Пермский край, Ростовская область, Свердловская область, Томская область, Тульская область, Челябинская область, Ярославская область, Республика Башкортостан, Республика Карелия, Республика Коми, Республика Татарстан, Удмуртская республика, Еврейская АО, Новосибирская область, Забайкальский край, Республика Крым, Севастополь.

Бедная группа регионов. Алтайский край, Ставропольский край, Брянская область, Республика Ингушетия, Кемеровская область, Курганская область, Оренбургская область, Орловская область, Пензенская область, Псковская область, Рязанская область, Саратовская область, Смоленская область, Тамбовская область, Ульяновская область, Республика Адыгея, Республика Бурятия, Республика Дагестан, Кабардино-Балкарская республика,

Республика Алтай, Республика Калмыкия, Республика Марий Эл, Республика Мордовия, Республика Северная Осетия-Алания, Карачаево-Черкесская республика, Республика Тыва, Республика Хакасия, Чеченская республика, Чувашская республика.

А.2 Корпус статистики ОБДХ

Таблица А.1: Репрезентативные домашние хозяйства. Данные ОБДХ. Среднее за 2015-2020гг.

Бедная группа регионов. Город.	Средний состав семьи (чел.)	Доходы на чел./мес. (руб.)	Расходы на чел./мес. (руб.)	Доля детей, %	Доля работающих, %	Платежи по кредитам на чел./мес. (руб.)
Низкодоходные заемщики	3.23	12 061	9 911	28.74%	55.88%	1 989
Высокодоходные заемщики	2.33	23 498	18 668	17.46%	73.31%	4 183
Бедная группа регионов. Село.	Средний состав семьи (чел.)	Доходы на чел./мес. (руб.)	Расходы на чел./мес. (руб.)	Доля детей, %	Доля работающих, %	Платежи по кредитам на чел./мес. (руб.)
Низкодоходные заемщики	3.34	9 776	8 196	29.23%	55.16%	1 621
Высокодоходные заемщики	2.29	20 742	16 239	14.11%	77.78%	3 848
Средняя группа регионов	Средний состав семьи (чел.)	Доходы на чел./мес. (руб.)	Расходы на чел./мес. (руб.)	Доля детей, %	Доля работающих, %	Платежи по кредитам на чел./мес. (руб.)
Низкодоходные заемщики	3.13	13 608	11 325	28.33%	58.05%	2 221
Высокодоходные заемщики	2.31	27 365	21 828	17.12%	73.92%	4 708
Богатая группа регионов	Средний состав семьи (чел.)	Доходы на чел./мес. (руб.)	Расходы на чел./мес. (руб.)	Доля детей, %	Доля работающих, %	Платежи по кредитам на чел./мес. (руб.)
Низкодоходные заемщики	3.14	20 449	16 869	31.25%	55.81%	3 446
Высокодоходные заемщики	2.29	43 311	34 030	18.18%	72.07%	7 563

А.3 Поведенческие характеристики социальных слоев в модели рамсеевского типа по корпусу статистики ОБДХ

При построении регрессий коэффициентов дисконтирования домашних хозяйств использовались следующие регрессоры: $r_L(t)$ — ставка по потребительским кредитам, $j_M(t)$ — месячная инфляция, $j_Q(t)$ — квартальная инфляция, $j_Y(t)$ — годовая инфляция, $\gamma_M(t)$ — месячный темп роста доходов, $\gamma_Q(t)$ — квартальный темп роста доходов, $\gamma_Y(t)$ — годовой темп роста доходов. В качестве единицы измерения времени выбран 1 мес.

Бедная группа регионов. Город.

1. Низкодходные заемщики. $\rho = 0.076$, $\theta = 0.8$.

$$\delta(t) = -0.000725124 + 0.6\delta(t-1) + 0.0347452r_L(t) + 0.110381j_M(t) - 0.00723926j_Q(t) - 0.0084633j_Y(t) - 0.16329\gamma_M(t) + 0.058404\gamma_Q(t) - 0.00105993\gamma_Y(t);$$

2. Высокодходные заемщики. $\rho = 0.1485$, $\theta = 2$.

$$\delta(t) = 0.00219122 + 0.4\delta(t-1) + 0.0338614r_L(t) + 0.27237j_M(t) - 0.0694272j_Q(t) + 0.0141031j_Y(t) - 0.500705\gamma_M(t) + 0.184474\gamma_Q(t) - 0.0253918\gamma_Y(t).$$

Бедная группа регионов. Село.

1. Низкодходные заемщики. $\rho = 0.2011$, $\theta = 0.5$.

$$\delta(t) = 0.0023868 + 0.6\delta(t-1) + 0.0173929r_L(t) + 0.216416j_M(t) - 0.0742245j_Q(t) + 0.0185995j_Y(t) - 0.304306\gamma_M(t) + 0.143424\gamma_Q(t) - 0.0225037\gamma_Y(t);$$

2. Высокодходные заемщики. $\rho = 0.1438$, $\theta = 1.5$.

$$\delta(t) = 0.00107087 + 0.4357\delta(t-1) + 0.0394316r_L(t) + 1.0950j_M(t) - 0.363468j_Q(t) + 0.0216114j_Y(t) - 0.000505248\gamma_M(t) + 0.0277406\gamma_Q(t) - 0.0309443\gamma_Y(t).$$

Средняя группа регионов.

1. Низкодходные заемщики. $\rho = 0.2012$, $\theta = 1$.

$$\delta(t) = 0.00116469 + 0.503623\delta(t-1) + 0.0322755r_L(t) + 0.304093j_M(t) - 0.0814840j_Q(t) + 0.00007j_Y(t) - 0.27404\gamma_M(t) + 0.0548106\gamma_Q(t) + 0.00420496\gamma_Y(t);$$

2. *Высокодходные заемщики.* $\rho = 0.2232$, $\theta = 3$.

$$\begin{aligned} \delta(t) = & 0.00184201 + 0.402144\delta(t-1) + 0.0381233r_L(t) + 0.532j_M(t) - 0.169731j_Q(t) + \\ & + 0.0163925j_Y(t) - 0.50206\gamma_M(t) + 0.198445\gamma_Q(t) - 0.0324286\gamma_Y(t). \end{aligned}$$

Богатая группа регионов.

1. *Низкодходные заемщики.* $\rho = 0.1088$, $\theta = 1.5$.

$$\begin{aligned} \delta(t) = & 0.00154208 + 0.44438\delta(t-1) + 0.0349383r_L(t) + 0.538465j_M(t) - 0.191123j_Q(t) + \\ & + 0.0123176j_Y(t) - 0.414096\gamma_M(t) + 0.172796\gamma_Q(t) - 0.0194089\gamma_Y(t); \end{aligned}$$

2. *Высокодходные заемщики.* $\rho = 0.2521$, $\theta = 5$.

$$\begin{aligned} \delta(t) = & 0.00455268 + 0.4\delta(t-1) + 0.0158744r_L(t) - 0.130258j_M(t) + 0.130295j_Q(t) + \\ & + 0.0167598j_Y(t) - 0.0424535\gamma_M(t) - 0.0344558\gamma_Q(t) - 0.0184782\gamma_Y(t). \end{aligned}$$

А.4 Распределение регионов статистики РМЭЗ НИУ ВШЭ по группам

Богатая группа регионов. Москва; Санкт-Петербург; Московская область; Ленинградская область, Волосовский район; Новая Москва.

Бедная группа регионов. Краснодар; Удмуртская Республика, Глазов и Глазовский район; Пермский край, Соликамск и Соликамский район; Калужская область, Куйбышевский район; Тамбовская область, Уварово и Уваровский район; Волгоградская область, Руднянский район; Казань; Курган; Оренбургская область, Орск; Республика Чувашия, Шумерля и Шумерлинский район; Ставропольский край, Георгиевск и Георгиевский район; Алтайский край, Курьинский район; Красноярск; Тверская область, Ржев и Ржевский район; Саратов; Томск; Липецк; Красноярский край, Назарово и Назаровский район; Республика Кабардино-Балкария: Залукокоаже и Зольский район; Алтайский край, Бийск и Бийский район; Коми Республика, Усинск и Усинский район; Владивосток; Амурская область, Тамбовский район; Саратовская область, Вольск и Вольский район; Коми Республика, Сыктывкар; Челябинск; Челябинская область, Красноармейский район; Нижний Новгород; Пензенская область, Земетчинский район; Краснодарский край, Куцевский район; Смоленск; Тула; Ростовская область, Батайск; Новосибирская область, Бердский район.

А.5 Корпус статистики РМЭЗ НИУ ВШЭ

Таблица А.2: Репрезентативные домашние хозяйства. Данные РМЭЗ НИУ ВШЭ. Среднее за 2016-2021гг.

Бедная группа регионов.	Средний состав семьи (чел.)	Доходы на чел./мес. (руб.)	Расходы на чел./мес. (руб.)	Платежи по кредитам на чел./мес. (руб.)	Сбережения на чел./мес. (руб.)
Низкодоходные заемщики	3.45	13 741	14 037	1 757	—
Высокодоходные заемщики	2.49	34 856	38 959	3 096	—
Автономные	2.57	17 013	17 664	—	—
Сберегатели	2.19	23 544	20 314	—	4 859
Выплачивающие ипотеку	3.28	27 743	23 089	—	—
Богатая группа регионов.	Средний состав семьи (чел.)	Доходы на чел./мес. (руб.)	Расходы на чел./мес. (руб.)	Платежи по кредитам на чел./мес. (руб.)	Сбережения на чел./мес. (руб.)
Низкодоходные заемщики	3.52	20 631	21 510	2 587	—
Высокодоходные заемщики	2.6	45 352	51 118	4 165	—
Автономные	2.4	25 466	27 645	—	—
Сберегатели	2.18	33 035	29 139	—	6 148
Выплачивающие ипотеку	3.82	27 142	19 912	—	—

А.6 Поведенческие характеристики социальных слоев в модели рамсеевского типа по корпусу статистики РМЭЗ НИУ ВШЭ

При построении регрессий коэффициентов дисконтирования и скорости обращения денег автономных домашних хозяйств использовались следующие регрессоры: $r_L(t)$ — ставка по потребительским кредитам, $r_{D,RUB}(t)$ — ставка по рублевым депозитам, $r_{D,CURR}(t)$ — ставка по валютным депозитам, $USD(t)$ — курс доллара США, $EUR(t)$ — курс евро, $j_M(t)$ — месячная инфляция, $j_Q(t)$ — квартальная инфляция, $j_Y(t)$ — годовая инфляция, $\gamma_M(t)$ — месячный темп роста доходов, $\gamma_Q(t)$ — квартальный темп роста доходов, $\gamma_Y(t)$ — годовой темп роста доходов. В качестве единицы измерения времени выбран 1 мес.

Бедная группа регионов.

1. Низкодоходные заемщики. $\rho = 0.069$, $\theta = 0.8$.

$$\begin{aligned} \delta(t) = & 0.0031133 + 0.2\delta(t-1) + 0.044502r_L(t) + 0.061119j_M(t) + 0.014228j_Q(t) + \\ & + 0.0069953j_Y(t) - 0.1045\gamma_M(t) - 0.022221\gamma_Q(t) - 0.0026347\gamma_Y(t); \end{aligned}$$

2. Высокодоходные заемщики. $\rho = 0.146$, $\theta = 3$.

$$\begin{aligned} \delta(t) = & 0.00060403 + 0.20759\delta(t-1) + 0.057741r_L(t) + 0.1537j_M(t) - 0.0067653j_Q(t) + \\ & + 0.0010296j_Y(t) - 0.093998\gamma_M(t) + 0.044232\gamma_Q(t) - 0.015455\gamma_Y(t); \end{aligned}$$

3. Автономные.

$$\begin{aligned} \theta(t) = & -0.21663 + 0.32597\theta(t-1) + 0.015284USD(t) + 0.0022494EUR(t) + 4.7795j_M(t) + \\ & + 5.7177j_Q(t) - 1.3564j_Y(t) + 110.1934\gamma_M(t) + 241.0505\gamma_Q(t) - 59.2078\gamma_Y(t); \end{aligned}$$

4. Сберегатели $\rho = 0.303$, $\theta = 5$.

$$\begin{aligned} \delta(t) = & 0.0015432 + 0.2833\delta(t-1) + 0.03526r_{D,RUB}(t) + 0.01343r_{D,CURR}(t) - \\ & - 0.000025609USD(t) + 0.0000053566EUR(t) - 0.01653j_M(t) + 0.017189j_Q(t) + \\ & + 0.00059629j_Y(t) - 0.04245\gamma_M(t) + 0.05223\gamma_Q(t) - 0.0085175\gamma_Y(t); \end{aligned}$$

5. Выплачивающие ипотеку. $\theta = 2$.

Богатая группа регионов.

1. Низкодходные заемщики. $\rho = 0.097$, $\theta = 1$.

$$\delta(t) = 0.0026726 + 0.322\delta(t-1) + 0.036928r_L(t) + 0.12178j_M(t) - 0.014488j_Q(t) + \\ + 0.0032797j_Y(t) - 0.1209\gamma_M(t) - 0.1063\gamma_Q(t) + 0.031219\gamma_Y(t);$$

2. Высокодходные заемщики. $\rho = 0.251$, $\theta = 3$.

$$\delta(t) = 0.0022068 + 0.31199\delta(t-1) + 0.034313r_L(t) + 0.29939j_M(t) - 0.040785j_Q(t) + \\ + 0.00072643j_Y(t) - 0.12795\gamma_M(t) - 0.16789\gamma_Q(t) + 0.051094\gamma_Y(t);$$

3. Автономные.

$$\theta(t) = -0.21663 + 0.32597\theta(t-1) + 0.015284USD(t) + 0.0022494EUR(t) + 4.7795j_M(t) + \\ + 5.7177j_Q(t) - 1.3564j_Y(t) + 110.1934\gamma_M(t) + 241.0505\gamma_Q(t) - 59.2078\gamma_Y(t);$$

4. Сберегатели $\rho = 0.352$, $\theta = 5$.

$$\delta(t) = 0.0018807 + 0.29679\delta(t-1) + 0.024962r_{D,RUB}(t) + 0.021081r_{D,CURR}(t) - \\ - 0.00002611USD(t) - 0.0000051606EUR(t) - 0.0076837j_M(t) + 0.001312j_Q(t) + \\ + 0.0057084j_Y(t) - 0.057441\gamma_M(t) + 0.0059485\gamma_Q(t) + 0.016572\gamma_Y(t);$$

5. Выплачивающие ипотеку. $\theta = 2$.

Приложение В

Идентификация поведения работников на рынке труда

Коэффициент дисконтирования оценен по состоянию на 12.2021г. В качестве единицы измерения времени выбран 1 мес.

Бедная группа регионов. Город. Низкодходные заемщики.

$$\hat{\xi}_1 = 65, \hat{\zeta}_1 = 0.15, \hat{\mu} = -0.5, \rho = 0.076, \delta = 0.012101.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.08 раза за 2.5 мес. и составит 26.98 тыс. руб.

Бедная группа регионов. Город. Высокодходные заемщики.

$$\hat{\xi}_1 = 72, \hat{\zeta}_1 = 0.1472, \hat{\mu} = -0.3, \rho = 0.1485, \delta = 0.011451.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.14 раза за 1.3 мес. и составит 49.51 тыс. руб.

Бедная группа регионов. Село. Низкодходные заемщики.

$$\hat{\xi}_1 = 94, \hat{\zeta}_1 = 0.1349, \hat{\mu} = -0.2, \rho = 0.2011, \delta = 0.01096.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.05 раза за 2.9 мес. и составит 23.49 тыс. руб.

Бедная группа регионов. Село. Высокодходные заемщики.

$$\hat{\xi}_1 = 60, \hat{\zeta}_1 = 0.135, \hat{\mu} = -0.3, \rho = 0.1438, \delta = 0.010459.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.14 раза за 1.6 мес. и составит 46.21 тыс. руб.

Средняя группа регионов. Низкодходные заемщики.

$$\hat{\xi}_1 = 40, \hat{\zeta}_1 = 0.157, \hat{\mu} = -0.6, \rho = 0.2012, \delta = 0.011446.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.1 раза за 3.4 мес. и составит 32.43 тыс. руб.

Средняя группа регионов. Высокодходные заемщики.

$$\hat{\xi}_1 = 46, \hat{\zeta}_1 = 0.145, \hat{\mu} = -0.4, \rho = 0.2232, \delta = 0.010835.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.11 раза за 2.7 мес. и составит 60.4 тыс. руб.

Богатая группа регионов. Низкодходные заемщики.

$$\hat{\xi}_1 = 60, \hat{\zeta}_1 = 0.1633, \hat{\mu} = -1, \rho = 0.1088, \delta = 0.012493.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.07 раза за 3.2 мес. и составит 46.46 тыс. руб.

Богатая группа регионов. Высокодходные заемщики.

$$\hat{\xi}_1 = 78, \hat{\zeta}_1 = 0.16, \hat{\mu} = -0.8, \rho = 0.2521, \delta = 0.010618.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.11 раза за 1.8 мес. и составит 96.5 тыс. руб.

Приложение С

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ

СВИДЕТЕЛЬСТВО О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ
№.2022619524 «Анализ спроса на потребительский кредит в РФ». Правообла-
датель: ТРУСОВ НИКОЛАЙ ВСЕВОЛОДОВИЧ. Заявка №. 2022618580. Дата государ-
ственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 23 мая 2022г.



Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No. 2023685691. «Программный комплекс для анализа экономического поведения домашних хозяйств в РФ». Автор: Трусов Николай Всеволодович. Правообладатель: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН). Заявка No.2023685460. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 29 ноября 2023г.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023685691

«Программный комплекс для анализа экономического поведения домашних хозяйств в РФ»

Правообладатель: **Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН) (RU)**

Автор(ы): **Трусов Николай Всеволодович (RU)**



Заявка № 2023685460

Дата поступления 24 ноября 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 29 ноября 2023 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №.2023685827. «Моделирование экономического поведения домашних хозяйств в условиях несовершенного рынка кредитов». Автор: ТРУСОВ Николай Всеволодович. Правообладатель: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН). Заявка №.2023685469. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 30 ноября 2023г.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023685827

«Моделирование экономического поведения домашних хозяйств в условиях несовершенного рынка кредитов».

Правообладатель: **Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН) (RU)**

Автор(ы): **Трусов Николай Всеволодович (RU)**

Заявка № **2023685469**

Дата поступления **24 ноября 2023 г.**

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **30 ноября 2023 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

