Математические модели срочной структуры безрисковых процентных ставок и их приложение к анализу рынка в зоне евро

Заночкин Андрей Юрьевич
E-mail: andyzanochkin@gmail.com
Кафедра системного анализа
Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Смирнов Сергей Николаевич

Понятие срочной структуры процентных ставок является фундаментальным во многих областях финансового анализа. Существует множество различных методов построения кривой доходности, одним из которых является метод Смита-Уилсона [1]. В настоящее время данный метод имеет широкое распространение ввиду его относительной легкости в реализации.

Работа продолжает исследование свойств метода Смита–Уилсона, для которого выявлен ряд недостатков, в первую очередь, связанных с неустойчивостью, что приводит к необоснованно завышенным требованиям регулятора к страхованию в пенсионных фондах и компаниях, занимающихся страхованием жизни. Также работа существенно развивает применение более *квалифицированных* методов регуляризации, таких как итерационных метод Тихонова, неявная итерационная схема и метод задачи Коши [2]. Данные подходы, как и известный метод Тихонова, позволяют решить проблему чувствительности, при этом оставаясь в рамках исходной модели Смита-Уилсона, лишь немного модифицируя её.

Важно отметить, что модель Смита–Уилсона относится к классу сплайн–методов, так как является решением экстремальной задачи по поиску гладкого и сходящегося решения. С другой стороны, в [3] была предложена вероятностная постановка, напоминающая известную модель Вайсичека, приводящая к кривой доходности этой же формы. Таким образом, изучение метода позволяет проводить аналогии, как со стороны вероятностной постановки, так и с точки зрения оптимизационной задачи.

Более того, при изучении возможных модификаций две разные интерпретации модели позволяют взглянуть на задачу под разными углами. При этом основной акцент все же делается на вероятностную постановку, а именно на связь кривой доходности с интегральным процессом Орнштейна–Уленбека. Отталкиваясь от этого подхода и накладывая требования стационарности в широком смысле мы приходим к близкой, но уже несколько иной динамической методике.

Пусть в момент времени s на дату $t \geqslant s$ прогнозируется случайная форвардная ставка $F_{s,t}$, которая описываться через стандартное гауссовское поле $W_{s,t}$

$$dF_s(t) = \alpha(\omega - F_s(t))\,dt + \sigma\,dW_s(t)$$

где заданы постоянные параметры $\alpha > 0$ — скорость сходимости, ω — предельная форвардная ставка и $\sigma > 0$ — стандартное отклонение процесса.

Для удовлетворения условия стационарности очевидно требуется

$$\mathbb{E}F_{s,0} = \omega, \quad \mathrm{Cov}(F_{s_1,0}, F_{s_2,0}) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(s_1 \wedge s_2).$$

А значит $F_{s,0}$ — винеровский процесс со средним ω и дисперсией $\frac{\sigma^2}{2\alpha}$.

Опираясь на идею линеаризации функции дисконтирования из [3], а также предполагая, что цены инструментов содержат гауссовскую случайную ошибку, предложены явные аналитические формулы для вмененной динамической модели в виде уравнений фильтра Калмана. Полученная стохастическая модель по сути порождена оптимизационной задачей Смита–Уилсона. Частным случаем данной модели является одношаговый случай, дающий в качестве своего решения предложенную статическую формулу для задачи регуляризации по Тихонову.

Стоит отметить, что идея определения форвардной ставки в виде гауссовского поля не нова. Более того, известны условия, при которых построенная модель будет удовлетворять условию безарбитражности [4]. В рамках нашей модели эти условия накладывают требования на динамическую связь между параметрами α, σ, ω.

В заключении предлагается новый метод выбора параметра регуляризации, опирающийся на вероятностную постановку. В основе подхода лежит классический принцип кросс–валидации, примененный с учетом вероятностной постановки задачи фильтрации. Так искомый параметр регуляризации для задачи $Ax = y$ является решением оптимизационной задачи

$$\lambda_{\mathrm{CVML}} = \arg\min_{\lambda} \frac{(A\mu_x - y)^* \left(\Sigma - \mathcal{D}[AMA^*]\right)^{-1} (A\mu_x - y)}{\sqrt[m]{\det\left(\Sigma - \mathcal{D}[AMA^*]\right)}},$$

где μ_x– априорное значение неизвестного x, $\mathcal{D}$ — оператор, определяющий нулями внедиагональные элементы, $M = M(\lambda) = \left(\lambda T^{-1} + A^*\Sigma^{-1}A\right)^{-1}$, Σ и T — матрица ковариации ошибки измерения и матрица ковариации априорной оценки соответственно. Данный подход к выбору параметра регуляризации описан для системы общего вида и имеет самостоятельную ценность.

Литература

1. Smith A., Wilson T. *Fitting Yield curves with long Term Constraints.* Research Notes, Bacon and Wodrow, 2001.

2. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. *Итерационные процедуры в некорректных задачах.* Наука, 1986.

3. Andersson H., Lindholm M. *On the relation between the Smith–Wilson method and integrated Ornstein–Uhlenbeck processes*, Research report in Mathematical Statistics 2013, ISSN 1650-0377.

4. Kennedy D.P. *The term structure of interest rates as a Gaussian random field.* Mathematical Finance, 247–258, 1994.