

Экзамен по математике в аспирантуру (сентябрь 2018)

ВАРИАНТ 2

1. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-2x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

2. Вычислить ранг матрицы A

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 11 \\ 3 & \lambda & -1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

в зависимости от значения параметра λ .

3. Выяснить, при каких значениях параметра α функциональная последовательность

$$f_n(x) = \frac{n^{-\alpha} x}{1+n^2 x^2}, \quad n \geq 1$$

сходится поточечно, а при каких равномерно на интервале $(0, +\infty)$.

4. Найти решение $y(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} 6xy(x)y'(x) - 5y^2(x) = 3x^2, \\ y(1) = -4. \end{cases}$$

5. Разложить в ряд Лорана по степеням z в кольце, содержащем точку -2 , функцию

$$w(z) = \frac{3(1-z^2)}{3z^2 + 8iz + 3}.$$

Указать границы этого кольца.

6. В базисе $B = \{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$ из функциональных элементов конъюнкции, дизъюнкции и отрицания построить схему из функциональных элементов (СФЭ) сложности не более 6 с входами x_1, x_2, x_3 и выходами y_1, y_2, y_3 , которая осуществляет следующее преобразование: на выходы y_1, y_2, y_3 передаются соответственно минимальное, максимальное и оставшееся третье из значений, поступающих на входы x_1, x_2, x_3 .

7. Среди целых чисел выделим подмножество «v2-чисел», запись которых в пятеричной позиционной системе счисления с возможными незначащими нулями в старших разрядах согласуется с формой Бэкуса–Наура:

$$\begin{aligned} \langle \text{v2-число} \rangle & ::= \langle \text{старт} \rangle \langle \text{финиш} \rangle \mid \langle \text{v2-число} \rangle \langle \text{v2-число} \rangle \mid \\ & \quad \langle \text{старт} \rangle \langle \text{v2-число} \rangle \langle \text{финиш} \rangle \mid 2 \langle \text{v2-число} \rangle \mid \langle \text{v2-число} \rangle 2 \\ \langle \text{старт} \rangle & ::= 1 \\ \langle \text{финиш} \rangle & ::= 0 \mid 3 \mid 4 \end{aligned}$$

Составить программу на одном из предлагаемых языков: Free Pascal, C, C++. Программа принимает на вход целое число N ($0 < N \leq 320000$) и с начала следующей строки считывает непустую последовательность из N символов. При $N \leq 0$ программа выводит «неверное N». Иначе программа анализирует последовательность. Она выводит «не v2-число», если входная последовательность не согласуется с данной БНФ. Если последовательность согласуется с БНФ, и записанное число при делении на 4 даёт остаток 2, то программа выводит «подходящее v2-число». Иначе программа выводит «не подходящее v2-число». Программа должна находить результат эффективно: за не более чем один проход по записи числа, используя память постоянного размера ($\lll 320000$), не зависящего от длины введённой записи числа. «Длинную» арифметику не использовать. Библиотечные функции для конвертации пятеричной записи в число не использовать.