Гамильтонов формализм для задачи многокритериального управления движением

Комаров Юрий Андреевич
E-mail: ykomarov94@gmail.com
Кафедра системного анализа
Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор, академик
Куржанский Александр Борисович

Работа посвящена методам решения динамических задач многокритериальной оптимизации. Зачастую такие задачи решаются на основе решения задачи оптимизации для скалярной функции критериев, однако в большинстве реальных задач свертка критериев не может быть построена обоснованно. Поэтому представляет большой интерес разработка идеи векторного динамического программирования, которое должно позволить изучить динамику границы Парето. В результате проведенного исследования автором было показано, что при выполнении определённых условий для введённой функции цены выполняется принцип оптимальности. Были получены аналоги системы уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана и уточнены достаточные условия применимости предложенного подхода.

В первой части работы рассматривается дискретная динамическая система с векторным критерием следующего вида:

$$x_{t+1} = f(t, x_t, u_t), \quad t = \overline{0, \vartheta - 1},$$

$$x_0 = x^0, \qquad u_t \in \mathcal{P}_t,$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}_1(\vartheta, x, u) \\ \vdots \\ \mathcal{J}_p(\vartheta, x, u) \end{bmatrix} = \vec{\mathcal{J}}(\vartheta, x, u) = \sum_{\tau=0}^{\vartheta-1} \vec{\mathcal{L}}(\tau, x_\tau, u_\tau) + \vec{\varphi}(x_\vartheta) \to \mathcal{M}\text{in},$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m;\ \vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{L}}, \vec{\varphi} \in \mathbb{R}^p,$$

где под $\mathcal{M}\text{in}A$ понимается граница Парето множества A.

Для этой системы был введён векторный аналог функции цены в виде

$$\vec{\mathcal{V}}(0, x^0) = \mathcal{M}\text{in} \left\{ \sum_{\tau=0}^{\vartheta-1} \vec{\mathcal{L}}(\tau, x_\tau, u_\tau) + \vec{\varphi}(x_\vartheta) \middle| x_0 = x^0, u_t \in \mathcal{P}_t \right\}.$$

Было показано, что, в случае выполнения определённых условий, для паретовского фронта выполняется принцип оптимальности:

$$\vec{\mathcal{V}}(0, x^0) = \mathcal{M}\text{in} \left\{ \sum_{\tau=0}^{t} \vec{\mathcal{L}}(\tau, x_\tau, u_\tau) + \vec{\mathcal{V}}(t+1, x_{t+1}) \middle| u_\tau \in \mathcal{P}_\tau \right\},\ t = \overline{0, \vartheta - 1}.$$

Кроме того, был получен дискретный векторный аналог уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для введённой функции цены:

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{V}}(t, x) = \mathcal{M}\text{in} \left\{ \vec{\mathcal{L}}(t, x, u) + \vec{\mathcal{V}}(t+1, x_{t+1}) \middle| u \in \mathcal{P}_t \right\}, t = \overline{\vartheta - 1, 0}, \\ \vec{\mathcal{V}}(\vartheta, \cdot) = \vec{\varphi}(\cdot). \end{cases}$$

На примере одномерной стационарной линейной системы с дискретным временем было показано, что полученная система уравнений типа Гамильтона-Якоби-Беллмана является лишь необходимым, но не достаточным условием для отыскания функции цены и в общем случае не позволяет однозначно определить искомую границу Парето решаемой задачи.

Для частичного разрешения этой проблемы был предложен метод гарантированного точечного оценивания границы Парето, позволяющий свести полученный ранее аналог уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана к производной системе, решение которой определено единственным образом и гарантированно принадлежит искомой границе Парето.

В работе была рассмотрена многомерная постановка задачи достижимости для системы с дискретным временем и установлено взаимнооднозначное соответствие между решениями задачи в классической (однокритериальной) и векторной постановках:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(t;0,A\cap B) &= \left\{x\colon \min_{u(\cdot),x_0}\left\{d^2(x_0,A\cap B)\;\middle|\;x_t=x\right\}\leqslant 0\right\} = \\ &= \left\{x\colon \mathcal{M}\mathrm{in}\left\{\begin{pmatrix}d^2(x_0,A)\\ d^2(x_0,B)\end{pmatrix}\;\middle|\;x_t=x\right\}\leqslant 0\right\}.\end{aligned}$$

В заключительной части работы была рассмотрена динамическая система с векторным критерием в непрерывном времени. Для непрерывной постановки задачи был введён векторный аналог функции цены, после чего было продемонстрировано выполнение принципа оптимальности для границы Парето и получен векторный аналог уравнения Гамитона-Якоби-Беллмана в форме эволюционного уравнения:

$$\begin{cases}\lim\limits_{\delta\to+0}\dfrac{1}{\delta}\mathbf{h}\left(\vec{\mathcal{V}}(t,x),\mathcal{M}\mathrm{in}\left\{\displaystyle\int\limits_t^{t+\delta}\vec{\mathcal{L}}(s,x(s),u(s))ds+\vec{\mathcal{V}}(t+\delta,x(t+\delta))\right\}\right)=0,\\ \vec{\mathcal{V}}(\vartheta,\cdot)=\vec{\varphi}(\cdot).\end{cases}$$

Литература

1. Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation.* Birkhäuser, 2014.

2. Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. *Theory of Multiobjective Optimization.* Academic Press, 1985.

3. Лотов А. В., Поспелова И. И. *Многокритериальные задачи принятия решений.* М.:МАКС Пресс, 2008.