

Московский Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Клемашев Николай Иванович

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СТАТИСТИКИ
С ПОМОЩЬЮ НЕОКЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СПРОСА

05.13.18 — математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических
наук, профессор, чл.-корр. РАН
А. А. Шананин

Москва, 2018 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение	5
ГЛАВА 1. Модель потребительского спроса Парето и её обобщение на случай двух и более рациональных репрезентативных потребителей	26
1.1. Методы проверки согласованности обратных функций спроса с классической моделью Парето	26
1.1.1. Модель потребительского спроса Парето и рационализируемость обратных функций спроса	26
1.1.2. Критерии рационализируемости обратных функций спроса	28
1.1.3. Понятие слабой отделимости товарных подгрупп	33
1.2. Методы проверки согласованности торговой статистики с моделью Парето	36
1.2.1. Рационализируемость торговой статистики и непараметрический метод построения экономических индексов	36
1.2.2. Анализ сегментированности товарных рынков с помощью непараметрического метода	42
1.3. Обобщённый непараметрический метод	45
1.4. Прогнозирование с помощью аксиом выявленного предпочтения	52
1.4.1. Прогнозирование на основе торговой статистики	52
1.4.2. Прогнозирование на основе набора кривых Энгеля	54

1.5. Оценки класса сложности задачи проверки согласованности торговой статистики с неоклассической моделью потребительского спроса с несколькими рациональными репрезентативными потребителями	60
ГЛАВА 2. Сравнение эффективности аксиом выявленного предпочтения для исследования сегментации товарных рынков и для прогнозирования	
	72
2.1. Оценки вероятности выполнения аксиом выявленного предпочтения на случайных товарных группах	72
2.2. Оценки мощности тестов выполнения аксиом выявленного предпочтения	77
2.3. Оценки размеров прогнозных множеств, построенных с помощью аксиом выявленного предпочтения	82
ГЛАВА 3. Исследование экономических данных в рамках неоклассической модели потребительского спроса с двумя рациональными репрезентативными потребителями	
	86
3.1. Исследование бюджетной статистики Великобритании	86
3.2. Исследование торговой статистики фондового рынка Китая	96
ГЛАВА 4. Обзор численных методов и программных инструментов	
	117
4.1. Система анализа торговой статистики «Индекс»	117
4.2. Сравнение аксиом выявленного предпочтения	119
4.2.1. Случайные группы	119
4.2.2. Случайные цены	121

4.2.3. Размеры множества прогнозов	122
4.3. Анализ кризиса на фондовом рынке Китая	123
4.4. Анализ бюджетной статистики Великобритании	126
Заключение	131
Благодарности	134
Список литературы	135
Приложение	144
П.1. Листинги программ	144

ВВЕДЕНИЕ

При построении экономических индексов потребительских цен и объёмов потребления мы всегда исходим из некоторой модели потребительского поведения. Статистические службы используют, как правило, индекс Ласпейреса. Для его расчёта в некоторый период времени, называемый базовым, формируется потребительская корзина, которая используется для определения индекса во всех последующих периодах. Индекс Ласпейреса для произвольного исследуемого периода определяется как отношение стоимости потребительской корзины в ценах исследуемого периода к стоимости такой же корзины в ценах базового периода. Этот индекс согласован с моделями экстенсивного роста, построены пропорций в которых обосновано теоремой о магистрали. обстоятельный обзор различных индексов, используемых в статистике, содержится в монографиях [31, 5, 24, 20, 22, 11, 3, 40, 29, 2, 12, 21, 30, 10, 9].

В настоящее время наблюдается иной тип роста, связанный не столько с количественным приростом товаров, сколько с изменением их качества, появлением новых продуктов и большим разнообразием товаров и услуг. Этим изменениям соответствуют другие модели экономического роста. Возникает необходимость исследования структурных сдвигов в потреблении, с учетом замещения товаров. Для этого необходима разработка панели экономических показателей, состоящей из нескольких экономических индексов, характеризующих потребление в разных сегментах. В связи с этим возникает необходимость исследования сегментации потребительского спроса.

Для того, чтобы исследовать замещение товаров, в начале XX века В. Парето предложил модель ([1, 79]), согласно которой поведение всей совокупности домашних хозяйств можно описать как действия одного рациональ-

ного репрезентативного потребителя, принимающего решение о потреблении на основе максимизации своей функции полезности при бюджетном ограничении. Модель Парето учитывает явление замещения товаров при изменении структуры цен, которое не учитывается при расчете индекса Ласпейреса, поскольку потребительская корзина фиксируется один раз для всех исследуемых периодов.

В работах Бюшгенса [4] и Конюса [19] был предложен подход к определению экономических индексов, основанный на модели Парето. Этот подход привёл в разработке индексов Конюса.

Индекс Конюса существует тогда и только тогда, когда наблюдаемые цены и объёмы потребления согласуются с моделью Парето. Для каждой модели существует обратная задача, заключающаяся в восстановлении элементов модели по наблюдаемым данным. В случае с моделью Парето обратная задача заключается в восстановлении функции полезности репрезентативного потребителя по имеющимся данным о потреблении и ценах. Модель может не соответствовать моделируемому явлению. В этом случае обратная задача оказывается неразрешимой.

В работах [41, 94]¹ было отмечено, что есть некоторые условия для того, чтобы модель Парето соответствовала наблюдениям. Эти условия были впервые сформулированы в работе [87]². Среди условий разрешимости обратной задачи для модели Парето есть условия существования интегрирующего множителя у дифференциальной формы обратных функций спроса, называемые условиями Фробениуса. Эти условия являются условиями типа равенства и нарушаются при малых возмущениях обратных функций спроса. Исследованием и интерпретацией нарушения этих условий занимался Samuelson, который заложил основы теории выявленного

¹Обе работы на английском языке приводятся в [50].

²На русском языке работа приводится, например, в [28].

предпочтения в работе [82]. В работе [84] он назвал возможность нарушения условий Фробениуса при малых возмущения обратных функций спроса проблемой интегрируемости. Анализ условий интегрируемости и развитию теории выявленного предпочтения также посвящены работы [66, 65, 62, 83, 67, 53, 81, 42, 60, 75, 74, 90, 80, 69, 70, 85].

Дальнейшее развитие теории выявленного предпочтения привело к разработке критериев разрешимости обратной задачи для модели Парето, которые применимы к торговой статистике, т.е. набору данных о потреблении и ценах для нескольких товаров за несколько временных периодов. Один из критериев разрешимости обратной задачи Парето, пригодный для применения к торговой статистике, – сильная аксиома выявленного предпочтения – сформулирован в работе [67]. Первое доказательство того, что сильная аксиома выявленного предпочтения является критерием разрешимости обратной задачи Парето для обратных функций спроса, приведенное в [67], было неполным. Первое полное доказательство для обратных функций спроса было дано в работе [89]. В работах [53, 8] обсуждалась связь сильной аксиомы выявленного предпочтения с теоремой Каратеодори-Рашевского-Чжоу. В работе [43] отмечено, что если существует интегрирующий множитель для дифференциальной формы обратных функций спроса, то индекс Конюса совпадает с индексом Дивизиа ([56]). Поэтому, индексы Конюса называют также индексами Конюса-Дивизиа.

В работе [36] было дано доказательство того, что сильная аксиома выявленного предпочтения является критерием согласованности торговой статистики с моделью Парето.

Экономические индексы используются для описания образа жизни населения. Численность населения растёт, при этом уклад жизни может не меняться в течение нескольких десятилетий. Цены растут из-за инфляции, при этом структура цен меняется не часто. Это накладывает есте-

ственное требование инвариантности экономических индексов относительно масштабов как цен, так и объёмов потребления. Для того, чтобы индексы Конюса были инвариантны относительно масштабов, необходимо и достаточно, чтобы функция полезности репрезентативного потребителя в модели Парето была положительно однородной.

Ещё одной важной характеристикой экономических индексов является выполнение финансовых балансов, которое означает, что совокупная стоимость потреблённых товаров сохраняется при переходе от исходного описания к описанию в виде индексов. Другими словами, произведение индекса цен и индекса потребления должно совпадать со стоимостью всех потреблённых товаров. Если функция полезности положительно-однородная, то индексы Конюса сохраняют финансовые балансы. Без требования положительной-однородности функции полезности финансовые балансы, вообще говоря, не сохраняются.

Критерии согласованности торговой статистики с моделью Парето с положительно-однородной функцией полезности получены в работах [38] и [55]. Одним из таких критериев является выполнение однородной сильной аксиомы выявленного предпочтения.

Полученные в этих работах результаты позволили проводить эмпирические исследования для построения экономических индексов Конюса-Дивизиа, основанных на функции полезности репрезентативного потребителя. Метод построения этих индексов, основанный на теории выявленного предпочтения, называется непараметрическим, поскольку не делается предположений о параметрическом виде функции полезности.

В работе [92] обсуждается задача проверки слабой делимости товарных подгрупп с помощью сильной аксиомы выявленного предпочтения. Отделимая товарная подгруппа представляет собой отдельный сегмент товарного

рынка. Рациональный репрезентативный потребитель определяет, какую долю общих расходов потратить на товары отдельной подгруппы и после этого определяет объемы потребления товаров отдельной подгруппы отталкиваясь от цен только этих товаров. В той же работе автор отмечает, что нет эффективной процедуры проверки слабой отделимости. В работе [47] доказывается NP-полнота задачи проверки слабой отделимости товарных подгрупп с помощью сильной аксиомы выявленного предпочтения.

Как показано в ряде работ по исследованию статистики Швеции ([6]), Нидерландов ([25]) и фондовых рынков ([17]), нарушение гипотезы о репрезентативном рациональном потребителе может быть связано со структурными изменениями, происходящими в экономике. В работе [23] предложено объяснение связи нарушения гипотезы о репрезентативном потребителе с изменениями социальной структуры общества в рамках неоклассической модели потребительского спроса. Связь гипотезы о рациональном репрезентативном потребителе с функцией общественного благосостояния Бергсона обсуждалась в работе [51].

Первым подходом к анализу данных, для которых не существует решения обратной задачи для модели Парето, был подход, основанный на ослаблении условий разрешимости обратной задачи и введении количественного показателя, характеризующего степень несогласованности торговой статистики с моделью Парето. Подход был предложен в [39] и развивался в работах [68, 26]. Этот подход привёл к разработке обобщённого непараметрического метода. Другие показатели степени несогласованности торговой статистики с моделью Парето рассматривались во многих работах, включая [95, 93, 59, 63, 57, 88, 58].

Другой подход заключается в модификации модели Парето. Эта модификация заключается в рассмотрении не одного, а нескольких репрезентативных потребителей с разными функциями полезности, совокупное по-

ведение которых порождает наблюдаемый спрос. Эта модель учитывает наличие в обществе разных групп потребителей с разным образом жизни и разными предпочтениями. Она является более адекватным представлением потребительского поведения, если обратные функции спроса не удовлетворяют условиям согласованности с моделью Парето. Такая модель называется неоклассической моделью потребительского спроса.

В работах [32, 33, 48, 49] установлено, что минимальное количество рациональных репрезентативных потребителей связано с классом дифференциальной формы обратных функций спроса. В работе [77] доказывается NP-полнота задачи проверки согласованности торговой статистики с неоклассической моделью потребительского спроса с двумя и более репрезентативными рациональными потребителями без требования положительной однородности функций полезности репрезентативных потребителей.

В работе [46] рассматривается задача о проверке согласованности торговой статистики с моделью коллективного принятия решений внутри домашних хозяйств, которое состоит из нескольких потребителей с разными функциями полезности. Эта модель является более общей, чем неоклассическая модель потребительского спроса. Во-первых, в ней разделяется личное потребление, т.е. потребление отдельных членов домашнего хозяйства, и общее потребление, т.е. совместное потребление одного товара. Во-вторых, функции полезности каждого члена домашнего хозяйства зависят не только от личного потребления этого члена и общего потребления, но и от личных потреблений других членов домашнего хозяйства, что позволяет учитывать экстерналии.

В [46] получены необходимые условия согласованности торговой статистики с моделью коллективного принятия решений внутри домашних хозяйств без требования положительной однородности функций полезности. Вообще говоря, эти условия не являются достаточными, и в той же работе приво-

дится подтверждающий это пример и формулируются достаточные условия согласованности торговой статистики с моделью коллективного принятия решений внутри домашних хозяйств, при выполнении которых торговая статистика согласуется с частным случаем модели коллективного принятия решений внутри домашних хозяйств – моделью временного диктатора. Согласно этой модели, решение о совокупном потреблении домашнего хозяйства принимается одним из его членов, но в каждом периоде времени это может быть разный член домашнего хозяйства. Эта модель является ещё одним обобщением модели Парето на случай двух и более репрезентативных потребителей.

В работе [54] доказывается NP-полнота задачи проверки согласованности торговой статистики с моделью временного диктатора с функциями полезности общего вида, т.е. без требования положительной однородности.

Поэтому актуальна проблема разработки методов анализа торговой статистики при нарушении гипотезы о рациональном репрезентативном потребителе, вызванным наличием двух и более групп потребителей с разным образом жизни, при дополнительных модельных предположениях, позволяющих разработать эффективные методы анализа торговой статистики в случае нарушения гипотезы о рациональном репрезентативном потребителе.

Актуальной также является проблема анализа сегментации потребительского спроса. В работе [92] рассматривается подход, основанный на сильной аксиоме выявленного предпочтения, которая является критерием согласованности торговой статистики с моделью Парето с функцией полезности общего вида. Аналогичный подход можно разработать на основе однородной сильной аксиомы выявленного предпочтения. В работе [47] доказывается NP-полнота задачи проверки слабой делимости товарной подгруппы без предположения о положительной однородности функции полезности.

Сравнение двух аксиом выявленного предпочтения с точки зрения их применимости к исследованию сегментации товарных рынков также является актуальным.

Цель работы состоит в исследовании подходов к проблеме сегментации товарных рынков с помощью методов, основанных на теории выявленного предпочтения, и их сравнении, а также в разработке методов анализа торговой статистики в рамках неоклассической модели потребительского спроса с несколькими репрезентативными потребителями.

Для достижения целей диссертационной работы в первой главе были проанализированы результаты теории выявленного предпочтения, которые позволяют проверять согласованность торговой статистики с моделью Парето и неоклассической моделью потребительского спроса, рассчитывать экономические индексы, выделять отделимые товарные подгруппы и исследовать структуру потребительского спроса, а также прогнозировать объемы потребления и цены. При этом анализируются результаты, полученные как при дополнительном требовании положительной однородности функций полезности репрезентативных потребителей, так и без этого требования.

§1.1 носит обзорный характер. В нем вводится понятие рационализируемости обратных функций спроса в некотором классе функций полезности. В рамках диссертационного исследования рассматриваются два класса функций полезности. Первый класс это класс Φ_G непрерывных на \mathbb{R}_+^m , вогнутых, ненасыщаемых, неубывающих и положительных на $\text{int } \mathbb{R}_+^m$ функций. Второй класс это класс Φ_H положительно-однородных функций из Φ_G . Формулируются основные критерии рационализируемости обратных функций спроса в классах Φ_G и Φ_H . Вводится также понятие слабой отделимости товарных подгрупп и формулируются основные результаты, связанные с этим понятием.

Поскольку обратные функции спроса на практике неизвестны, в прикладных задачах анализируются не обратные функции спроса, а конечный набор данных о ценах и агрегированном потреблении, называемый торговой статистикой. В §1.2 формулируется понятие рационализируемости торговой статистики, определяемое как возможность продолжения торговой статистики до рационализируемых обратных функций спроса. Формулируются основные критерии рационализируемости торговых статистик в классах Φ_G и Φ_H . Для каждого из рассматриваемых классов функций полезности есть два критерия рационализируемости. Первый критерий, это выполнение некоторой аксиомы выявленного предпочтения. Для класса Φ_G это сильная аксиома выявленного предпочтения, а для класса Φ_H это однородная сильная аксиома. Вторым критерием это разрешимость некоторой системы линейных неравенств. Приводятся алгоритмы проверок сильной и однородной сильной аксиомы с оценкой порядка их сложности. Описывается непараметрический метод расчета индексов Конюса-Дивизиа, основанный на понятии рационализируемости торговой статистики в классе Φ_H .

В §1.2 также рассматривается понятие слабой отделимости товарных подгрупп в терминах торговой статистики. Анализируется вопрос о проверке слабой отделимости товарных подгрупп. Подчеркивается отсутствие эффективного численного метода для тестирования слабой отделимости как в классе Φ_G , так и в классе Φ_H , что согласуется с недавним результатом об NP-полноте задачи проверки отделимости для класса Φ_G , полученным в [47]. Вопрос о классе сложности задачи проверки слабой отделимости для класса Φ_H на сегодняшний день остается открытым.

Если торговая статистика не удовлетворяет сильной или однородной сильной аксиоме, то системы линейных неравенств, разрешимость которых равносильна выполнению аксиом выявленного предпочтения, оказываются неразрешимыми. Можно поставить вопрос о регуляризации этих систем

с помощью одного регуляризирующего параметра. Подход, основанный на введении регуляризирующего параметра, рассматривается в §1.3. Минимальное значение регуляризирующего параметра, при котором регуляризованная система линейных неравенств разрешима, называется показателем нерациональности. В зависимости от того, какая аксиома выявленного предпочтения рассматривается, говорят о показателе нерациональности в классе Φ_G или Φ_H . Описывается также обобщенный непараметрический метод анализа торговой статистики, который позволяет определять обобщенные индексы Конюса-Дивизиа.

В §1.4 рассматриваются методы решения задач прогнозирования объемов потребления и цен с помощью аксиом выявленного предпочтения. Подробно рассматривается задача прогнозирования объемов потребления, поскольку задача прогнозирования цен решается аналогично. Рассматривается классический подход к прогнозированию на основе торговой статистики, предложенный в [91] для класса Φ_G . В работе [7] исследован аналогичный подход для класса Φ_H , для которого получено конструктивное описание множества прогнозов в виде системы линейных неравенств.

Также рассматривается подход к прогнозированию на основе набора кривых Энгеля, предложенный в [44]. В этой работе формулируется результат, позволяющий разработать эффективный алгоритм прогнозирования объемов потребления на основе набора кривых Энгеля. Однако, этот результат в общем случае неверен и в §1.4 приводится опровергающий контрпример. Авторы [44] рассматривали рационализируемость в классе Φ_G . Для класса Φ_H метод прогнозирования на основе кривых Энгеля не отличается от описанного в [7] метода прогнозирования на основе торговой статистики.

В §1.5 формулируется неоклассическая модель потребительского спроса с произвольным конечным числом рациональных репрезентативных потребителей. Отмечается связь минимального количества репрезентативных потре-

бителей для того, чтобы обратные функции спроса были согласованы с неоклассической моделью, с классом дифференциальной формы обратных функций спроса. Рассматривается вопрос о проверке согласованности торговой статистики с неоклассической моделью с несколькими репрезентативными потребителями. Доказывается NP-полнота задачи проверки согласованности торговой статистики с моделью временного диктатора с функциями полезности из класса Φ_H . Для класса Φ_G аналогичный результат был получен в [54].

Во второй главе диссертации представлены описания и результаты трех численных экспериментов по сравнению сильной и однородной сильной аксиом выявленного предпочтения с точки зрения их практической применимости для выявления содержательных товарных подгрупп и исследования сегментации, а также для прогнозирования.

В §2.1 описывается эксперимент по сравнению частот выполнения сильной и однородной сильной аксиом на торговых статистиках товарных подгрупп, сформированных случайным образом. Для расчетов использовались торговые статистики Венгрии с 1975 по 1984 и Нидерландов с 1951 по 1977. Эти статистики исследовались в работах [6] и [25]. Для обеих статистик получились похожие результаты – частота выполнения сильной аксиомы существенно выше, чем частота выполнения однородной сильной аксиомы. Это говорит о том, что сильная аксиома выявленного предпочтения является слабым требованием и не позволяет отличить содержательные товарные подгруппы, которые образуют отдельный сегмент в структуре потребительского спроса, от случайных.

В §2.2 описывается эксперимент по сравнению мощностей аксиом выявленного предпочтения. Под мощностью понимается вероятность нарушения аксиом выявленного предпочтения на торговой статистике, которая заведомо не должна быть согласованной с моделью Парето. В [45] такая

статистика формируется из фактических цен, а вместо фактических объемов потребления берутся случайные неотрицательные векторы, которые генерируются независимо для каждого периода времени. В §2.2 рассматривается похожий подход. В качестве объемов потребления берутся фактические объемы потребления, а цены являются многомерным случайным процессом. Цены на отдельные товары предполагаются независимыми и моделируются так, что логарифмы отношений последовательных цен являются процессом авторегрессии. Это позволяет учитывать временную корреляцию цен, которая наблюдается в экономических данных.

Мощность сильной аксиомы выявленного предпочтения оказывается значительно ниже мощности однородной сильной аксиомы. Это полностью согласуется с результатами §2.1 и является еще одним аргументом в пользу использования однородной сильной аксиомы для анализа сегментации потребительского спроса.

В §2.3 описывается численный эксперимент по оценке размера множеств прогнозов, построенных с помощью сильной и однородной сильной аксиом выявленного предпочтения. В качестве оценки размера множеств прогнозов используется вероятность выполнения аксиом выявленного предпочтения на случайной торговой статистике, которая строится следующим образом. В качестве объемов потребления используются фактические объемы потребления, в качестве цен за все периоды, кроме последнего, используются фактические цены, а цены последнего периода являются случайным вектором, имеющим равномерное распределение на неотрицательной части единичной сферы. Такая случайная статистика соответствует задаче прогнозирования цен в последний период времени при фактических объемах потребления в тот же период. В результате эксперимента получилось, что для многих товарных групп частота выполнения сильной аксиомы на случайной торговой статистике близка к единице. Это означает, что в это

множество попадает почти любой неотрицательный вектор. Получается, что множество прогнозов, построенное с помощью сильной аксиомы выявленного предпочтения, не дает практически никакой дополнительной информации о возможных ценах.

В третьей главе описаны исследования экономических данных с помощью неоклассической модели потребительского спроса. В обоих исследованиях делаются некоторые дополнительные модельные предположения, которые позволяют разработать эффективные методы анализа. Если не делать никаких модельных предположений, то не приходится рассчитывать на возможность разработки эффективных методов анализа, поскольку задача проверки согласованности торговой статистики с общей неоклассической моделью с функциями полезности из класса Φ_G является NP-полной даже для двух репрезентативных потребителей.

В §3.1 исследуется бюджетная статистика Великобритании за период с 1975 по 1999. Бюджетная статистика содержит данные о ценах и об объемах потребления отдельных домашних хозяйств. Если сложить объемы потребления отдельных домашних хозяйств, получается торговая статистика, называемая в этом случае агрегированной. Эта статистика не удовлетворяет однородной сильной аксиоме, поэтому она не согласуется с моделью Парето с положительно-однородной функцией полезности. Наличие информации о расходах отдельных домашних хозяйств позволяет исследовать неравенство распределения расходов с помощью кривых Лоренца и коэффициентов Джини. По графику коэффициента Джини видно, что с 1983 по 1989 в Великобритании наблюдался рост неравенства распределения расходов. Это позволило выдвинуть предположение о том, что в этот период в Великобритании формировалась новая группа более богатых домашних хозяйств, предпочтения которых сильно отличалось от предпочтений остальных домашних хозяйств.

Отталкиваясь от этого предположения, была предпринята попытка отделить группу наиболее богатых домашних хозяйств по уровню расходов. Для этого была поставлена задача о последовательном отделении минимальной доли наиболее богатых домашних хозяйств, чтобы получить торговую статистику, удовлетворяющую однородной сильной аксиоме. Это удалось сделать, причем торговая статистика, построенная по потреблению отделенных наиболее богатых домашних хозяйств также удовлетворяет однородной сильной аксиоме. Таким образом, агрегированную торговую статистику удалось разбить на две торговые статистики, каждая из которых рационализируема положительно-однородной функцией. Это означает, что агрегированная торговая статистика согласуется с неоклассической моделью потребительского спроса с двумя репрезентативными потребителями с положительно-однородными функциями полезности. Первый репрезентативный потребитель, торговая статистика которого получается из агрегированной после отделения некоторых наиболее богатых домашних хозяйств, соответствует основной группе домашних хозяйств, в которую входит большинство домашних хозяйств. Второй репрезентативный потребитель, торговая статистика которого получена по потреблению отделенных наиболее богатых домашних хозяйств, соответствует формирующейся группе наиболее богатых домашних хозяйств, образ жизни которых сильно отличается от образа жизни основной группы.

Особенностью полученного результата является то, что с каждым годом доля наиболее богатых домашних хозяйств, которую необходимо отделять, не убывает. Получается, что группа наиболее богатых домашних хозяйств растет. Однако, рост не очень большой. В 1999 доля расходов группы наиболее богатых домашних хозяйств составляет около 12% от расходов всех домашних хозяйств. При этом, в эту группу входит всего 4% всех домашних хозяйств.

Для сравнения структур потребления были рассчитаны обобщенные индексы спроса Конюса-Дивизиа для четырех товарных подгрупп. Основное отличие в долях потребления по четырем подгруппам наблюдается в подгруппах «Продукты питания» и «Транспорт и развлечения». В потреблении группы наиболее богатых домашних хозяйств доля товаров категории «Транспорт и развлечения» существенно выше, чем доля категории «Продукты питания», тогда как для основной группы доли этих категорий в структуре потребления почти одинаковы.

В §3.2 исследуется торговая статистика фондовых рынков и анализируется кризис на фондовом рынке Китая летом 2015. На графиках индексов цен и объемов торгов видно, что с декабря 2014 резко возрасла волатильность индекса объемов торгов на фондовом рынке Китая, а индекс цен начал расти, хотя на графиках индексов объемов торгов и цен мирового фондового рынка никаких заметных изменений в динамике не наблюдалось. На графиках показателя нерациональности, построенным методом скользящего окна, наблюдается резкий рост показателя нерациональности торговой статистики Китая в декабре 2014.

Торговая статистика фондовых рынков, как правило, не согласуется с моделью Парето с положительно-однородной функцией полезности. Это связано с тем, что торги на фондовом рынке совершаются двумя категориями инвесторов – основными инвесторами и высокочастотными трейдерами или спекулянтами. У этих категорий инвесторов разные предпочтения и разные характерные временные горизонты сделок. Поведение основных инвесторов согласуется с моделью Парето, однако наблюдаемые объемы торгов объединяют торги основных инвесторов и высокочастотных трейдеров. Поэтому, торговая статистика не удовлетворяет однородной сильной аксиоме. Для подтверждения такого взгляда на причины нарушения однородной сильной аксиомы проводится эксперимент, аналогичный эксперименту из §2.2.

Активность высокочастотных трейдеров зависит от акций и от состояния фондового рынка. В кризисных состояниях их активность возрастает. Однако, даже при нормальном состоянии фондового рынка их активность приводит к нарушению однородной сильной аксиомы. Существует некоторый уровень показателя нерациональности, характерный для нормального режима функционирования фондового рынка Китая. Этот уровень называется нормальным.

Если описывать поведение инвесторов на фондовом рынке Китая в рамках модели Парето, то кризис есть результат изменения предпочтений основных инвесторов. Среди высокочастотных трейдеров есть как профессионалы, так и те, кто не имеет специальной подготовки и совершают торги на основе своей интуиции. Как отмечают в [86], на фондовом рынке Китая летом 2015 года доля индивидуальных инвесторов составляла около 85%.

Было выдвинуто предположение о том, что профессиональные высокочастотные трейдеры спрогнозировали будущее изменение доходности некоторых акций, которое приведёт к изменению функции полезности основных инвесторов. Это привело к тому, что в течение некоторого периода на фондовом рынке Китая присутствовало два типа основных инвесторов – основные инвесторы с ещё не изменившейся функцией полезности, и профессиональные краткосрочные трейдеры, правильно спрогнозовавшие будущее изменение функции полезности основных инвесторов. Они вели себя так, как вели бы основные инвесторы после изменения их функции полезности.

Для выделения такого периода необходимо определить такие периоды, которые приводят к росту показателя нерациональности сверх нормального уровня. Для этого был предложен альтернативный способ регуляризации системы линейных неравенств, разрешимость которой равносильна выполнению однородной сильной аксиомы. Это регуляризация в интегральной метрике, в результате применения которой получают показатели нераци-

ональности для отдельных пар периодов времени. Задача определения этих показателей является задачей линейного программирования.

В результате исследования решения двойственной задачи были выделены четыре месяца, исключение которых приводит к снижению показателя нерациональности ниже нормального уровня. Если брать интервал от минимального среди выделенных месяцев до максимального, то получится период длительностью в пять месяцев. Предположительно этот период является переходным. В этот период происходит постепенное изменение предпочтений основных инвесторов и присутствуют два типа основных инвесторов – со старыми и новыми предпочтениями. При этом, до переходного периода есть только один тип основных инвесторов со старыми предпочтениями, а после него также остаётся один тип основных инвесторов, но с новыми предпочтениями.

Для подтверждения такого взгляда на природу кризиса была поставлена задача разделить объёмы торгов переходного периода между двумя типами основных инвесторов, которые существуют до и после переходного периода. Для решения этой задачи предложена процедура, основанная на последовательном решении нескольких задач минимизации выпуклой квадратичной функции при линейных ограничениях, т.е. задачи квадратичного программирования. В результате применения этой процедуры поставленная задача была успешно решена, что является подтверждением корректности описанного выше взгляда на природу кризиса.

Для более глубокого анализа кризиса была также поставлена задача выделения минимального количества акций, корректировкой объемов торгов которых в выделенные ранее четыре периода можно добиться снижения показателя нерациональности до нормального уровня. Для решения этой задачи была предложена процедура, основанная на последовательном решении нескольких задач проектирования цен и объемов торгов на прогноз-

ные множества, построенные с помощью однородной сильной аксиомы. Эти задачи являются задачами квадратичного программирования.

В результате применения процедуры были выделены 30 акций. Дальнейший перебор подгрупп этих акций позволил выделить всего одну акцию, корректируя объемы торгов которой можно снизить показатель нерациональности до нормального уровня. Это акция CITIC Securities, ведущего инвестиционного банка. Эта компания интерпретируется как репрезентативный представитель сектора инвестиционных банков. У основных инвесторов произойдет изменение предпочтений относительно акций инвестиционных банков и это изменение было спрогнозировано профессиональными трейдерами. В результате анализа графика цен на акции CITIC Securities удалось уточнить сценарий кризиса.

В четвертой главе приводятся описания численных методов, использованных в диссертационном исследовании, и описания программ для ЭВМ разработанных для решения поставленных в диссертационном исследовании задач.

В §4.1 приводится краткое описание программного комплекса «Индекс», который является удобным инструментом для анализа торговой статистики с графическим интерфейсом. Функционал этого программного комплекса был расширен для решения новых задач, поставленных в диссертационном исследовании.

В §4.2 приводится описание программной реализации методов сравнения аксиом выявленного предпочтения, которые описываются во второй главе.

В §4.3 приводится описание программной реализации методов анализа торговой статистики фондового рынка Китая, которые описываются в §3.2.

В §4.4 приводится описание программной реализации методов анализа бюджетной статистики Великобритании, описанных в §3.1. Для анализа

данных Великобритании был разработан новый программный комплекс на языке программирования C++. Комплекс реализует основные алгоритмы анализа торговой статистики, реализованные в программном комплексе «Индекс», не имеет графического интерфейса и предназначен для быстрой разработки новых методов анализа данных на основе обобщенного непараметрического метода. Исходный код нового программного комплекса находится в открытом доступе на сайте GitHub³.

В приложении **П.1** содержатся листинги программ, упомянутых в четвертой главе.

Научная новизна заключается в оригинальных постановках задач и новых результатах, полученных как теоретическим путем, так и в результате проведения численных экспериментов и анализа экономических данных.

В западной литературе по теории выявленного предпочтения рассматривается как правило класс Φ_G . Однако, для построения положительно-однородных экономических индексов необходимо, чтобы рационализирующая функция полезности была положительно-однородной, что приводит к необходимости рассмотрения рационализируемости в классе Φ_H . В диссертационной работе впервые проведено сравнение двух аксиом с точки зрения решения с их помощью актуальных практических задач анализа сегментированности товарных рынков и прогнозирования объемов потребления и цен. Полученные результаты позволяют говорить о том, что для решения прикладных задач следует требовать положительной однородности рационализирующей функции полезности и использовать однородную сильную аксиому.

Анализ экономических данных в рамках неоклассической модели потребительского спроса является актуальной проблемой. Однако, как следует

³<https://github.com/nklemashev/phd/tree/master/uk/AxiomsPhD>

из работ по оценке класса сложности задач проверки согласованности торговой статистики с неоклассической моделью потребительского спроса и её частными случаями, возможность разработки эффективных алгоритмов для решения этих задач маловероятна. Задача проверки согласованности торговой статистики с неоклассической моделью с двумя репрезентативными потребителями с функциями полезности из класса Φ_G является NP-полной ([77]). Для другой модели с несколькими репрезентативными потребителями – модели временного диктатора с функциями полезности из класса Φ_G – результат аналогичен. Задача проверки согласованности торговой статистики с этой моделью также является NP-полной для двух и более диктаторов ([54]). В диссертационном исследовании получен новый результат в этом же направлении исследований – доказана NP-полнота задачи проверки согласованности торговой статистики с моделью временного диктатора с функциями полезности из класса Φ_H для двух и более диктаторов.

В работах [54, 76, 77] предлагаются различные численные методы для проверки согласованности торговой статистики с неоклассической моделью и её частными случаями, а также с более общей моделью коллективного потребления, задача проверки согласованности торговой статистики с которой рассматривалась в [46]. Эти методы основаны на эвристических соображениях, разработанных в литературе по решению NP-полных задач. В диссертационном исследовании предлагается вводить дополнительные допущения, которые формулируются в экономических терминах и позволяют эффективно исследовать экономические данные в рамках неоклассической модели. Успешность такого подхода иллюстрируется двумя примерами анализа экономических данных.

В результате исследования бюджетной статистики Великобритании удалось впервые проанализировать изменение социальной структуры обще-

ства из-за формирования новой группы наиболее состоятельных домашних хозяйств с отличающимся от большинства домашних хозяйств образом жизни с помощью методов теории выявленного предпочтения. Анализ кризиса на фондовом рынке Китая в 2015 году является первым примером успешного анализа причин кризиса на фондовом рынке в рамках неоклассической модели потребительского спроса с учетом нарушения однородной сильной аксиомы даже при нормальном режиме функционирования фондового рынка.

Теоретическая и практическая ценность работы

Теоретическая ценность состоит в том, что показана сложность проверки согласованности торговой статистики с частным случаем неоклассической модели потребительского спроса с несколькими репрезентативными потребителями, предложен подход к выделению двух социальных классов при анализе бюджетной статистики и разработана методика анализа кризисов на фондовых рынках.

Практическая ценность состоит в том, что рассмотренные в работе подходы к анализу торговой и бюджетной статистики в рамках неоклассической модели потребительского спроса могут быть реализованы в виде программного комплекса для исследования социальной структуры общества и изучения экономического поведения отдельных социальных групп при изменении цен, объёмов продаж, а также номенклатуры товаров. Такой комплекс может быть полезен в крупных сетях розничной торговли, а также в статистических службах.

ГЛАВА 1

**МОДЕЛЬ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА ПАРЕТО И ЕЁ
ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ ДВУХ И БОЛЕЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ
РЕПРЕЗЕНТАТИВНЫХ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ**

1.1. Методы проверки согласованности обратных функций спроса с классической моделью Парето

1.1.1. Модель потребительского спроса Парето и рационализируемость обратных функций спроса

В модели потребительского спроса Парето предполагается, что совокупный спрос на некоторую группу из m товаров может быть описан как результат выбора объёмов потребления одним рациональным репрезентативным потребителем, который максимизирует свою функцию полезности F при бюджетном ограничении, которое зависит от вектора цен товаров P и имеющегося у него дохода I . Формально, при заданном векторе цен P и заданном доходе I спрос $X = X(P, I)$ определяется как решение следующей задачи оптимизации

$$F(Y) \rightarrow \max_{Y \geq 0}, \quad (1.1.1)$$

$$\langle P, Y \rangle \leq I. \quad (1.1.2)$$

В модели Парето спрос представлен в виде набора функций спроса, которые зависят от цен и дохода. Прямую зависимость от дохода можно исключить, поскольку для функций спроса справедливо равенство

$$X(P, I) = X\left(\frac{P}{I}, 1\right). \quad (1.1.3)$$

Таким образом, можно говорить о том, что функции спроса описывают зависимость объёмов потребления от цен. Для описания спроса также используют обратные функции спроса $P(X)$, выражающие зависимость цен от объёмов потребления.

Задача (1.1.1), (1.1.2) является прямой задачей в модели Парето. Обратной задачей в модели Парето является задача восстановления функции полезности рационального репрезентативного потребителя по заданным обратным функциям спроса. Другими словами, по заданным обратным функциям спроса $P(X)$ требуется найти такую функцию F из некоторого функционального класса Φ , что любой вектор спроса $X \geq 0$ является решением задачи оптимизации, соответствующей этому вектору спроса:

$$F(Y) \rightarrow \max_{Y \geq 0}, \quad (1.1.4)$$

$$\langle P(X), Y \rangle \leq \langle P(X), X \rangle. \quad (1.1.5)$$

Заметим, что в формулировке задачи оптимизации (1.1.4), (1.1.5) доход считается равным стоимости вектора объёмов потребления $\langle P(X), X \rangle$. Это не является ограничением в модели Парето при некоторых требованиях к функциям полезности. Действительно, если в модели Парето (1.1.1), (1.1.2) потребовать, чтобы функция полезности F была ненасыщаемой¹, то оптимальное решение задачи (1.1.1), (1.1.2) обращает неравенство (1.1.2) в равенство.

Если обратная задача Парето имеет решение, то говорят, что обратные функции спроса согласуются с моделью Парето с функцией полезности из класса Φ . В этом случае, обратные функции спроса называются рационализируемыми в классе Φ . Введём строгое определение рационализируемости обратных функций спроса.

¹Функция называется ненасыщаемой, если у неё отсутствует глобальный безусловный максимум.

Определение 1. Говорят, что обратные функции спроса $P(X)$ рационализируемы в функциональном классе Φ , если существует функция (полезности) $F \in \Phi$ такая, что

$$X \in \operatorname{Argmax}\{F(Y) \mid \langle P(X), Y \rangle \leq \langle P(X), X \rangle, Y \geq 0\} \quad (1.1.6)$$

для всех $X \geq 0$. При этом говорят, что функция F рационализирует обратные функции спроса $P(X)$.

В рамках теории выявленного предпочтения рассматриваются два функциональных класса функций полезности.

Определение 2. Говорят, что функция F принадлежит классу Φ_G , если она

- 1) непрерывна на \mathbb{R}_+^m ,
- 2) вогнута,
- 3) ненасыщаема,
- 4) монотонно неубывает²,
- 5) положительна на множестве $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^m$.

Определение 3. Говорят, что функция F принадлежит классу Φ_H , если она

- 1) принадлежит классу Φ_G ,
- 2) положительно-однородная первой степени.

1.1.2. Критерии рационализируемости обратных функций спроса

Известны два критерия рационализируемости обратных функций спроса в классе Φ_G , которые приводятся в следующей теореме.

²Функция f многих аргументов называется монотонно неубывающей, если для любых наборов значений её аргументов x и y таких, что $x \geq y$, выполнено $f(x) \geq f(y)$.

Теорема 1 ([89]). Пусть обратные функции спроса $P(X)$ неотрицательны и непрерывны на \mathbb{R}_+^m . Пусть $\langle P(X), X \rangle > 0$ для всех X из \mathbb{R}_+^m . Тогда следующие утверждения эквивалентны.

- 1) Обратные функции спроса $P(X)$ рационализируемы в классе Φ_G .
- 2) Существуют функции $F \in \Phi_G$ и λ , причём функция λ положительна и непрерывна на $\text{int } \mathbb{R}_+^m$, такие, что для всех $X \in \mathbb{R}_+^m$ и $Y \in \mathbb{R}_+^m$ выполнено

$$F(X) \leq F(Y) + \lambda(Y) \langle P(Y), X - Y \rangle. \quad (1.1.7)$$

- 3) Обратные функции спроса $P(X)$ удовлетворяют сильной аксиоме выявленного предпочтения, т.е. для любого $K \geq 0$ и для любых X, X^1, \dots, X^K и Y из \mathbb{R}_+^m таких, что

$$\langle P(X), X \rangle \geq \langle P(X), X^1 \rangle, \quad (1.1.8)$$

$$\langle P(X^1), X^1 \rangle \geq \langle P(X^1), X^2 \rangle, \quad (1.1.9)$$

$$\dots, \quad (1.1.10)$$

$$\langle P(X^K), X^K \rangle \geq \langle P(X^K), Y \rangle, \quad (1.1.11)$$

выполнено

$$\langle P(Y), Y \rangle \leq \langle P(Y), X \rangle. \quad (1.1.12)$$

Рассмотрим функцию F из класса Φ_H . Обозначим супердифференциал функции F в произвольной точке \hat{X} через $\partial F(\hat{X})$. Рассмотрим произвольный вектор \hat{P} из множества $\partial F(\hat{X})$. Тогда, по определению супердифференциала, имеем

$$F(X) - F(\hat{X}) \leq \langle \hat{P}, X - \hat{X} \rangle \quad (1.1.13)$$

для всех X из \mathbb{R}_+^m . Выведем обобщённое тождество Эйлера для вогнутых положительно-однородных функций. Для этого, следуя [35], положим в

(1.1.13) $X = \lambda \widehat{X}$ для произвольного положительного λ . Тогда, с учётом положительной однородности функции F , получаем, что для произвольного положительного λ справедливо неравенство

$$(\lambda - 1)F(\widehat{X}) \leq (\lambda - 1) \langle \widehat{P}, \widehat{X} \rangle, \quad (1.1.14)$$

из которого вытекает обобщённое тождество Эйлера: для любых $\widehat{X} \in \mathbb{R}_+^m$ и $\widehat{P} \in \partial F(\widehat{X})$ выполнено равенство

$$F(\widehat{X}) = \langle \widehat{P}, \widehat{X} \rangle. \quad (1.1.15)$$

Рассмотрим неравенства (1.1.7). Из них вытекает, что вектор Y является решением следующей задачи оптимизации

$$F(X) \rightarrow \max_{X \geq 0} \quad (1.1.16)$$

$$\langle P(Y), X \rangle \leq \langle P(Y), Y \rangle \quad (1.1.17)$$

Из необходимых условий первого порядка для экстремума этой задачи вытекает, что

$$\lambda(Y)P(Y) \in \partial F(Y). \quad (1.1.18)$$

Если потребовать, чтобы функция F принадлежала классу Φ_H , то из обобщённого тождества Эйлера следует, что

$$F(Y) = \lambda(Y) \langle P(Y), Y \rangle \quad (1.1.19)$$

для всех Y из \mathbb{R}_+^m . Если подставить это равенство в неравенства (1.1.7), то они преобразуются в

$$\lambda(X) \langle P(X), X \rangle \leq \lambda(Y) \langle P(Y), X \rangle. \quad (1.1.20)$$

Теорема 2 ([72, 26]). Пусть обратные функции спроса $P(X)$ неотрицательны и непрерывны на \mathbb{R}_+^m . Пусть $\langle P(X), X \rangle > 0$ для всех X из \mathbb{R}_+^m . Тогда следующие утверждения эквивалентны.

- 1) Обратные функции спроса $P(X)$ рационализируемы в классе Φ_H .
 2) Система линейных неравенств

$$\lambda(X) \langle P(X), X \rangle \leq \lambda(Y) \langle P(Y), X \rangle \quad X, Y \in \mathbb{R}_+^m \quad (1.1.21)$$

имеет решение $\lambda(X)$, которое положительно и непрерывно на $\text{int } \mathbb{R}_+^m$.

- 3) Обратные функции спроса $P(X)$ удовлетворяют однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения, т.е. для любого набора векторов X^1, \dots, X^K из \mathbb{R}_+^m выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \langle P(X^1), X^2 \rangle \langle P(X^2), X^3 \rangle \dots \langle P(X^K), X^1 \rangle \\ & \geq \langle P(X^1), X^1 \rangle \langle P(X^2), X^2 \rangle \dots \langle P(X^K), X^K \rangle. \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

- 4) Существуют функции $Q(P)$ и $F(X)$ из класса Φ_H такие, что

$$Q(P)F(X) \leq \langle P, X \rangle \quad P \in \mathbb{R}_+^m, X \in \mathbb{R}_+^m, \quad (1.1.23)$$

$$Q(P(X))F(X) = \langle P(X), X \rangle \quad X \in \mathbb{R}_+^m. \quad (1.1.24)$$

Следствие 1. Если функции $Q(P)$ и $F(X)$ из класса Φ_H удовлетворяют неравенствам (1.1.23) и (1.1.24), то функция

$$\lambda(X) = \frac{1}{Q(P(X))} \quad (1.1.25)$$

удовлетворяет неравенствам (1.1.21).

Доказательство. Из (1.1.23) и (1.1.24) вытекает, что для любых $X \in \text{int } \mathbb{R}_+^m$ и $P \in \mathbb{R}_+^m$ таких, что $Q(P) > 0$ выполнено

$$\frac{1}{Q(P(X))} \langle P(X), X \rangle \leq \frac{1}{Q(P)} \langle P, X \rangle. \quad (1.1.26)$$

Деление на $Q(P(X))$ корректно, поскольку из того, что $X \in \text{int } \mathbb{R}_+^m$, следует, что $F(X) > 0$ и $\langle P(X), X \rangle > 0$. Поэтому, из (1.1.24) следует, что $Q(P(X)) > 0$. Подставляя $P(Y)$ вместо P в неравенстве (1.1.26), получаем

$$\frac{1}{Q(P(X))} \langle P(X), X \rangle \leq \frac{1}{Q(P(Y))} \langle P(Y), X \rangle \quad (1.1.27)$$

для всех X и Y из $\text{int } \mathbb{R}_+^m$. Из этого следует, что функция

$$\lambda(X) = \frac{1}{Q(P(X))} \quad (1.1.28)$$

удовлетворяет неравенствам (1.1.21). *Следствие доказано.*

Следствие 2. Пусть функция $\lambda(X)$ положительна, непрерывна на $\text{int } \mathbb{R}_+^m$ и удовлетворяет (1.1.21). Тогда функции $F(X)$ и $Q(P(X))$ из (1.1.23), (1.1.24) могут быть представлены в виде

$$F(X) = \lambda(X) \langle P(X), X \rangle, \quad Q(P(X)) = \frac{1}{\lambda(X)}. \quad (1.1.29)$$

Доказательство. Определим функцию $F(X)$ как

$$F(X) = \inf \{ \lambda(Y) \langle P(Y), X \rangle \mid Y \in \mathbb{R}_+^m \}, \quad (1.1.30)$$

и функцию $Q(P)$ как преобразование Янга функции $F(X)$

$$Q(P) = \inf \left\{ \frac{\langle P, Y \rangle}{F(Y)} \mid Y \geq 0, F(Y) > 0 \right\}, \quad (1.1.31)$$

где функция $\lambda(X)$ непрерывна, положительна на $\text{int } \mathbb{R}_+^m$ и удовлетворяет неравенствам (1.1.21).

Эти функции удовлетворяют неравенствам (1.1.23). Поскольку $\lambda(X)$ удовлетворяет неравенствам (1.1.21), то

$$F(X) = \lambda(X) \langle P(X), X \rangle \quad (1.1.32)$$

и

$$\begin{aligned} Q(P(X)) &= \inf \left\{ \frac{\langle P(X), Y \rangle}{\lambda(Y) \langle P(Y), Y \rangle} \mid Y \geq 0, \lambda(Y) \langle P(Y), Y \rangle > 0 \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda(X)} \inf \left\{ \frac{\lambda(X) \langle P(X), Y \rangle}{\lambda(Y) \langle P(Y), Y \rangle} \mid Y \geq 0, \lambda(Y) \langle P(Y), Y \rangle > 0 \right\} = \frac{1}{\lambda(X)}. \end{aligned} \quad (1.1.33)$$

Следствие доказано.

Функции $F(X)$ и $Q(X)$, удовлетворяющие условиям (1.1.23) и (1.1.24), называются индексными функциями Конюса-Дивизиа. Функция $F(X)$ является индексной функцией спроса, а функция $Q(P)$ является индексной функцией цен.

1.1.3. Понятие слабой отделимости товарных подгрупп

Для исследования структуры потребительского спроса и анализа сегментации товарных рынков в рамках теории выявленного предпочтения вводится понятие слабой отделимости товарных подгрупп. Пусть все m товаров, составляющие товарную группу, называемую исходной, разбиты на $K + 1$ непересекающихся товарных подгрупп. Обозначим вектор потребления товаров k -ой подгруппы через X_k , а количество товаров в k -ой подгруппе через m_k . Обозначим обратные функции спроса, соответствующие ценам на товары k -ой подгруппы, через $P_k(X)$.

Определение 4. *Говорят, что товарные подгруппы $1, \dots, K$ слабо отделимы от исходной группы товаров, если исходная группа товаров рационализируема и рационализирующая функция полезности F представима в виде*

$$F(X) = F_0(F_1(X_1), \dots, F_K(X_K), X_{K+1}), \quad (1.1.34)$$

причём все функции F_0, F_1, \dots, F_K из одного функционального класса.

Каждая слабо отделимая подгруппа образует независимый сегмент товарного рынка, который можно анализировать отдельно от остальных товаров. Это позволяет говорить об индексах отдельных товарных групп и составлять панель экономических индексов, которая позволяет исследовать экономическую динамику более подробно.

Приведём ряд результатов относительно отделимости в классе Φ_H .

Теорема 3 ([6]). Пусть обратные функции спроса $P(X)$ рационализуемы в классе Φ_H . Пусть первые K товарных подгрупп слабо отделимы от исходной группы, т.е. рационализирующая функция полезности F может быть представлена в виде (1.1.34), где функции F_0, F_1, \dots, F_K принадлежат классу Φ_H . Тогда преобразование Янга функции F , определяемое как

$$Q(P) = \inf \left\{ \frac{\langle P, X \rangle}{F(X)} \mid X \geq 0, F(X) > 0 \right\} \quad (1.1.35)$$

может быть представлено в виде

$$Q(P) = Q_0(Q_1(P_1), \dots, Q_K(P_K), P_{K+1}), \quad (1.1.36)$$

где P_k – вектор цен на товары k -ой подгруппы, функция $Q_0(q_1, \dots, q_K, P_{K+1})$ является оптимальным значением целевой функции в задаче оптимизации

$$\frac{\sum_{k=1}^K q_k Y_k + \langle P_{K+1}, X_{K+1} \rangle}{F_0(Y_1, \dots, Y_K, X_{K+1})} \rightarrow \min, \quad (1.1.37)$$

$$(Y_1, \dots, Y_K, X_{K+1}) \in \mathbb{R}_+^{K+m_{K+1}}, \quad (1.1.38)$$

$$F_0(Y_1, \dots, Y_K, X_{K+1}) > 0, \quad (1.1.39)$$

а функции Q_k являются преобразованиями Янга функций F_k

$$Q_k(P_k) = \inf \left\{ \frac{\langle P_k, X_k \rangle}{F_k(X_k)} \mid X_k \in \mathbb{R}_+^{m_k}, F_k(X_k) > 0 \right\}. \quad (1.1.40)$$

Следствие 3. Пусть обратные функции спроса первых K подгрупп $P_1(X), \dots, P_K(X)$ рационализуемы в классе Φ_H . Обозначим индексные функции спроса и цен Конюса-Дивиза для этих подгрупп через F_k и Q_k . Пусть обратные функции спроса

$$\tilde{P}(X) = (Q_1(P_1(X)), \dots, Q_K(P_K(X)), P_{K+1}(X)) \quad (1.1.41)$$

рационализуемы в классе Φ_H . Обозначим соответствующие индексные функции спроса и цен Конюса-Дивиза через F_0 и Q_0 . Тогда обратные функции спроса $P(X)$ рационализуемы в классе Φ_H , причём

соответствующие им индексные функции спроса и цен Конюса-Дивизиа могут быть представлены в виде

$$F(X) = F_0(F_1(X_1), \dots, F_K(X_K), X_{K+1}), \quad (1.1.42)$$

$$Q(P(X)) = Q_0(Q_1(P_1(X)), \dots, Q_K(P_K(X)), P_{K+1}(X)). \quad (1.1.43)$$

Доказательство. По определению индексных функций Конюса-Дивизиа, функции F_k и Q_k удовлетворяют условиям

$$Q_k(P_k)F_k(X_k) \leq \langle P_k, X_k \rangle \quad P_k, X_k \in \mathbb{R}_+^{m_k}, \quad (1.1.44)$$

$$Q_k(P_k(X))F_k(X_k) = \langle P_k(X), X_k \rangle \quad X \in \mathbb{R}_+^m. \quad (1.1.45)$$

Индексные функции F_0 и Q_0 , соответствующие обратным функциям спроса $\tilde{P}(X)$, удовлетворяют, по определению, следующим условиям

$$Q_0(q_1, \dots, q_K, P_{K+1})F_0(y_1, \dots, y_K, X_{K+1}) \leq \sum_{k=1}^K q_k y_k + \langle P_{K+1}, X_{K+1} \rangle \quad (1.1.46)$$

для всех (q_1, \dots, q_K) и (y_1, \dots, y_K) из \mathbb{R}_+^K , P_{K+1} и X_{K+1} из $\mathbb{R}_+^{m_{K+1}}$, и

$$\begin{aligned} Q_0(Q_1(P_1(X)), \dots, Q_K(P_K(X)), P_{K+1}(X))F_0(F_1(X_1), \dots, F_K(X_K), X_{K+1}) \\ = \sum_{k=1}^{K+1} \langle P_k(X), X_k \rangle \end{aligned} \quad (1.1.47)$$

для всех X из \mathbb{R}_+^m .

Для доказательства рационализируемости обратных функций спроса $P(X)$ в классе Φ_H достаточно показать, что функции

$$F(X) = F_0(F_1(X_1), \dots, F_K(X_K), X_{K+1}), \quad (1.1.48)$$

$$Q(P) = Q_0(Q_1(P_1), \dots, Q_K(P_K), P_{K+1}) \quad (1.1.49)$$

принадлежат классу Φ_H и удовлетворяют условиям (1.1.23) и (1.1.24). То, что эти функции принадлежат классу Φ_H вытекает из того, что все функции, которые входят в определение этих функций, принадлежат классу Φ_H . Неравенство (1.1.23) вытекает из неравенств (1.1.45) и (1.1.46):

$$\begin{aligned}
 & Q(P)F(X) \\
 & Q_0(Q_1(P_1), \dots, Q_K(P_K), P_{K+1})F_0(F_1(X_1), \dots, F_K(X_K), X_{K+1}) \\
 & \leq \sum_{k=1}^K Q_k(P_k)F_k(X_k) + \langle P_{K+1}, X_{K+1} \rangle \leq \langle P, X \rangle. \quad (1.1.50)
 \end{aligned}$$

Равенство (1.1.24) вытекает из равенства (1.1.47). По теореме 2, обратные функции спроса $P(X)$ рационализируемы в классе Φ_H .

Возможность представления соответствующих индексов Конюса-Дивизиа в виде (1.1.42) и (1.1.43) вытекает из определения функций F и Q . *Следствие доказано.*

1.2. Методы проверки согласованности торговой статистики с моделью Парето

1.2.1. Рационализируемость торговой статистики и непараметрический метод построения экономических индексов

На практике обратные функции спроса $P(X)$ не доступны. Наблюдаются лишь их значения $P(X^t)$ для некоторого конечного набора векторов спроса X^t . Конечный набор $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ пар объёмов потребления X^t и соответствующих им цен $P^t = P(X^t)$ называется торговой статистикой. Под рационализируемостью торговой статистики понимается возможность её продолжения до рационализируемых обратных функций спроса.

Определение 5. Торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ называется рационализируемой в классе Φ , если существует функция (полезности) F из класса Φ такая, что

$$X^t \in \text{Argmax}\{F(Y) \mid \langle P^t, Y \rangle \leq \langle P^t, X^t \rangle, Y \in \mathbb{R}_+^m\} \quad (1.2.1)$$

для всех $t \in \{1, \dots, T\}$.

В рамках теории выявленного предпочтения были получены два критерия рационализируемости торговой статистики в классе Φ_G . Они представлены в формулировке следующей теоремы Африата-Верриана.

Теорема 4 ([36, 37, 91]). Следующие утверждения эквивалентны

- 1) Торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ рационализируема в классе Φ_G .
- 2) Существует решение $\{(U^t, \lambda^t) \mid t \in \{1, \dots, T\}\}$ системы линейных неравенств

$$U^t \leq U^\tau + \lambda^\tau \langle P^\tau, X^t - X^\tau \rangle \quad t, \tau = \overline{1, T}, \quad (1.2.2)$$

$$\lambda^t > 0 \quad t = \overline{1, T}. \quad (1.2.3)$$

- 3) Торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения, т.е. для любых t и τ , для которых существуют t_1, \dots, t_k такие, что

$$\langle P^t, X^t \rangle \geq \langle P^t, X^{t_1} \rangle, \quad (1.2.4)$$

$$\langle P^{t_1}, X^{t_1} \rangle \geq \langle P^{t_1}, X^{t_2} \rangle, \quad (1.2.5)$$

$$\dots \quad (1.2.6)$$

$$\langle P^{t_k}, X^{t_k} \rangle \geq \langle P^{t_k}, X^\tau \rangle, \quad (1.2.7)$$

выполнено

$$\langle P^\tau, X^\tau \rangle \leq \langle P^\tau, X^t \rangle \quad (1.2.8)$$

Для того, чтобы проверить выполнение сильной аксиомы выявленного предпочтения, необходимо построить транзитивное замыкание R^* отношения выявленного предпочтения R определённого на $\{X^t\}_{t=1}^T \times \{X^t\}_{t=1}^T$ следующим образом:

$$X^t R X^\tau \Leftrightarrow \langle P^t, X^t \rangle \geq \langle P^t, X^\tau \rangle. \quad (1.2.9)$$

Транзитивное замыкание отношения можно построить с помощью алгоритма Варшалла-Флойда за $O(T^3)$ операций. Сильная аксиома выявленного предпочтения равносильна тому, что для всех t и τ из $\{1, \dots, T\}$ из $X^t R^* X^\tau$ вытекает, что $\langle P^\tau, X^\tau \rangle \leq \langle P^\tau, X^t \rangle$. Это можно проверить за $O(T^2)$ операций. Таким образом, проверить выполнение сильной аксиомы выявленного предпочтения можно за $O(T^3)$ операций.

Стоит отметить, что, если $\langle P^t, X^t \rangle \neq \langle P^t, X^\tau \rangle$ для всех t и τ таких, что $t \neq \tau$, то задача проверки сильной аксиомы выявленного предпочтения равносильна проверке отсутствия циклов в ориентированном графе, задающим отношение выявленного предпочтения. Такую проверку можно сделать за $O(T^2)$ операций с помощью алгоритма поиска в ширину (см, например, [?]).

Для проверки рационализируемости торговой статистики в классе Φ_H есть также два критерия, которые приводятся в формулировке следующей теоремы Африата-Верриана.

Теорема 5 ([38, 55, 92]). *Следующие утверждения эквивалентны.*

- 1) *Торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ рационализируема в классе Φ_H .*
- 2) *Существует положительное решение $\lambda^t > 0$ ($t = 1, \dots, T$) системы линейных неравенств*

$$\lambda^t \langle P^t, X^t \rangle \leq \lambda^\tau \langle P^\tau, X^t \rangle, \quad t, \tau = \overline{1, T}. \quad (1.2.10)$$

3) Торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения, т.е. для любых t_1, \dots, t_k выполнено

$$\begin{aligned} \langle P^{t_1}, X^{t_2} \rangle \langle P^{t_2}, X^{t_3} \rangle, \dots, \langle P^{t_k}, X^{t_1} \rangle \\ \geq \langle P^{t_1}, X^{t_1} \rangle \langle P^{t_2}, X^{t_2} \rangle \dots \langle P^{t_k}, X^{t_k} \rangle. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Неравенство (1.2.11) для $k = 2$ может быть переписано в виде

$$\frac{\langle P^{t_1}, X^{t_2} \rangle}{\langle P^{t_2}, X^{t_2} \rangle} \geq \frac{\langle P^{t_1}, X^{t_1} \rangle}{\langle P^{t_2}, X^{t_1} \rangle}, \quad (1.2.12)$$

которое выражает эффект Гершенкрона – индекс Ласпейреса $\frac{\langle P^{t_1}, X^{t_2} \rangle}{\langle P^{t_2}, X^{t_2} \rangle}$ не меньше индекса Пааше $\frac{\langle P^{t_1}, X^{t_1} \rangle}{\langle P^{t_2}, X^{t_1} \rangle}$.

Для проверки однородной сильной аксиомы вводится матрица C , элементами которой являются индексы цен Пааше

$$C_{\tau t} = \frac{\langle P^t, X^t \rangle}{\langle P^\tau, X^t \rangle}. \quad (1.2.13)$$

Тогда неравенство (1.2.11) может быть переписано в виде

$$C_{t_1 t_2} C_{t_2 t_3} \dots C_{t_k t_1} \leq 1. \quad (1.2.14)$$

Матрица C задаёт взвешенный граф, вершины которого соответствуют периодам времени от 1 до T , а веса рёбер определяются значениями матрицы C . Любой цепочке временных индексов t_1, \dots, t_k можно приписать вес, определяемый как

$$C_{t_1 t_2} C_{t_2 t_3} \dots C_{t_{k-1} t_k}. \quad (1.2.15)$$

Однородная сильная аксиома выявленного предпочтения выполнена тогда и только тогда, когда максимальный вес любого цикла, т.е. цепочки временных индексов, первый и последний индекс которой совпадают, не превосходит единицы. Рассмотрим матрицу C^* максимальных весов всех цепочек,

элементы которой определяются как

$$C_{\tau t}^* = \max\{C_{\tau t_1} C_{t_1 t_2} \dots C_{t_k t} \mid (t_1, \dots, t_k) \subset \{1, \dots, T\}^k, k \geq 0\}. \quad (1.2.16)$$

Однородная сильная аксиома выполняется тогда и только тогда, когда все диагональные элементы матрицы C^* не превосходят единицы. Алгоритм Варшалла-Флойда позволяет за $O(T^3)$ операций построить эту матрицу или доказать, что все её элементы равны ∞ .

Процесс построения матрицы C^* можно описать в терминах идемпотентной алгебры. Для этого рассмотрим идемпотентное полукольцо с операциями $a \oplus b = \max\{a, b\}$ и $a \otimes b = ab$. Тогда матрица C^* определяется как

$$C^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} C^{\bullet k} = C \oplus C^{\bullet 2} \oplus \dots \oplus C^{\bullet k} \oplus \dots, \quad (1.2.17)$$

где под $C^{\bullet k}$ понимается возведение матрицы C в степень n в идемпотентном смысле, т.е. с заменой всех операций сложения на операцию \oplus . Обозначим через C^{*n} частичную сумму ряда (1.2.17). Если для некоторых $n \leq T$ и $t \in \{1, \dots, T\}$ величина C_{tt}^{*n} превосходит единицу, то все элементы матрицы C^* равны ∞ . В противном случае для вычисления суммы ряда (1.2.17) достаточно ограничиться первыми T слагаемыми.

Систему (1.2.10) можно переписать в виде

$$\lambda^t C_{\tau t} \leq \lambda^\tau, \quad \forall t, \tau = \overline{1, T}. \quad (1.2.18)$$

Если система (1.2.18) имеет положительное решение, то она эквивалентна системе

$$\lambda^\tau C_{\tau t}^* \leq \lambda^t, \quad \forall t, \tau = \overline{1, T}. \quad (1.2.19)$$

Эта система имеет положительное решение тогда и только тогда, когда все элементы матрицы C^* конечны. В этом случае, в качестве решения систем

(1.2.19) и (1.2.18) можно взять

$$\lambda^t = \max\{C_{t\tau}^* \mid \tau \in \{1, \dots, T\}\}. \quad (1.2.20)$$

Имея решение $\{\lambda^t\}_{t=1}^T$, можно определить индексную функцию спроса Конюса-Дивизиа

$$F(X) = \min\{\lambda^\tau \langle P^\tau, X \rangle \mid \tau \in \{1, \dots, T\}\}. \quad (1.2.21)$$

Соответствующая индексная функция цен Конюса-Дивизиа $Q(P)$ определяется как преобразование Янга индексной функции спроса

$$Q(P) = \inf \left\{ \frac{\langle P, X \rangle}{F(X)} \mid X \geq 0, F(X) > 0 \right\}. \quad (1.2.22)$$

В [6] предлагается вычислять индексы спроса $F(X^t)$ и цен $Q(P^t)$ Конюса-Дивизиа как

$$F(X^t) = \lambda^t \langle P^t, X^t \rangle, \quad Q(P^t) = \frac{1}{\lambda^t}. \quad (1.2.23)$$

В работах [55, 68, 34] такой способ определения экономических индексов был назван **непараметрическим**.

Связь между сильной и однородной сильной аксиомами выявленного предпочтения устанавливается в следующей теореме.

Теорема 6 ([35]). *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *Торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения.*
- 2) *Торговая статистика $\{(P^t, \mu_t X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения для любого набора положительных μ_1, \dots, μ_T .*

1.2.2. Анализ сегментированности товарных рынков с помощью непараметрического метода

Понятие слабой отделимости в терминах торговых статистик определяется аналогично понятию слабой отделимости в терминах обратных функций спроса, которое дано в 1.1.3. Предположим, как и в 1.1.3, что все товары разбиты на $K + 1$ непересекающихся подгрупп. Будем обозначать объёмы потребления товаров k -ой подгруппы в период t через X_k^t , а вектор цен товаров k -ой подгруппы в период t через P_k^t . Предположим, что торговые статистики $\{(P_k^t, X_k^t)\}_{t=1}^T$ первых K подгрупп удовлетворяют однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения. Обозначим соответствующие индексы спроса и цен Конюса-Дивизиа через $F_k(X_k^t)$ и $Q_k(P_k^t)$.

Теорема 7 ([6]). *Если торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения и индексы спроса Конюса-Дивизиа могут быть представлены в виде*

$$F(X^t) = F_0(F_1(X_1^t), \dots, F_K(X_K^t), X_{K+1}^t), \quad (1.2.24)$$

то индексы цен Конюса-Дивизиа могут быть представлены в виде

$$Q(P^t) = Q_0(Q_1(P_1^t), \dots, Q_K(P_K^t), P_{K+1}^t), \quad (1.2.25)$$

где функция $Q_0(q_1^t, \dots, q_K^t, P_{K+1}^t)$ является оптимальным значением целевой функции в задаче оптимизации

$$\frac{\sum_{k=1}^K q_k^t Y_k + \langle P_{K+1}^t, X_{K+1} \rangle}{F_0(Y_1, \dots, Y_K, X_{K+1})} \rightarrow \inf, \quad (1.2.26)$$

$$(Y_1, \dots, Y_K, X_{K+1}) \in \mathbb{R}_+^{K+m_{K+1}}, \quad (1.2.27)$$

$$F_0(Y_1, \dots, Y_K, X_{K+1}) > 0, \quad (1.2.28)$$

а функции $Q_k(P_k^t)$ являются преобразованиями Янга функций $F_k(X_k^t)$

$$Q_k(P_k^t) = \inf \left\{ \frac{\langle P_k^t, X_k \rangle}{F_k(X_k)} \mid X_k \geq 0, F_k(X_k) > 0 \right\}. \quad (1.2.29)$$

Сформируем новую торговую статистику $\widetilde{\mathcal{TS}} = \{(\widetilde{\mathcal{P}}^t, \widetilde{\mathcal{X}}^t)\}_{t=1}^T$ из индексов первых K подгрупп и элементов торговой статистики $(K+1)$ -ой подгруппы, определив цены \mathcal{P}^t и объёмы потребления \mathcal{X}^t как

$$\mathcal{P}^t = (Q_1(P_1^t), \dots, Q_K(P_K^t), P_{K+1}^t), \mathcal{X}^t = (F_1(X_1^t), \dots, F_K(X_K^t), X_{K+1}^t). \quad (1.2.30)$$

Обозначим через TS торговую статистику всех товаров.

Следствие 4 ([6]). *Если торговая статистика $\widetilde{\mathcal{TS}}$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения, то торговая статистика TS также удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения, причём соответствующие индексы спроса $F(X^t)$ и цен $Q(P^t)$ Конюса-Дивизиа могут быть представлены в виде*

$$F(X^t) = F_0(F_1(X_1^t), \dots, F_K(X_K^t), X_{K+1}^t), \quad (1.2.31)$$

$$Q(P^t) = Q_0(Q_1(P_1^t), \dots, Q_K(P_K^t), P_{K+1}^t), \quad (1.2.32)$$

где F_0 и Q_0 являются индексными функциями Конюса-Дивизиа, построенными по торговой статистике $\widetilde{\mathcal{TS}}$.

Следствие 4 показывает, что индексы Конюса-Дивизиа для группы, состоящей из всех товаров, могут быть получены из индексов Конюса-Дивизиа отдельных подгрупп. Отделимые подгруппы могут быть также разбиты на группы товаров, для которых существуют индексы Конюса-Дивизиа. Таким образом, формируется иерархия индексов, которую можно представить в виде графа, вершинами которого являются товарные группы, а рёбра показывают отношения делимости товарных групп. Такой граф отражает структуру потребительского спроса.

Опишем подробно процедуру проверки делимости. Пусть требуется проверить, что подгруппа товаров является делимой. Обозначим объёмы потребления и цены товаров этой подгруппы через $X^{1,t}$ и $P^{1,t}$ соответственно,

а объёмы потребления и цены остальных товаров через $X^{2,t}$ и $P^{2,t}$ соответственно. Для проверки отделимости подгруппы товаров необходимо проверить, что торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ рационализируема функцией полезности F , которая может быть представлена в виде

$$F(X) = F_0(F_1(X^{1,t}), X^{2,t}), \quad (1.2.33)$$

причём функции F_0 и F_1 из одного класса Φ .

Для класса Φ_H это означает, что торговая статистика статистика $\{(P^{1,t}, X^{1,t})\}_{t=1}^T$ во-первых, должна удовлетворять однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения, и, во-вторых, должны существовать индексы Конюса-Дивизиа $\{(Q^{1,t}, F^{1,t})\}_{t=1}^T$ такие, что торговая статистика

$$\{((Q^{1,t}, P^{2,t}), (F^{1,t}, X^{2,t}))\}_{t=1}^T \quad (1.2.34)$$

удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения.

Первое требование можно проверить описанными в 1.2.1 методами с помощью алгоритма Варшалла-Флойда. Для проверки второго требования на текущий момент не известно формального алгоритма. Проверить выполнение однородной сильной аксиомы для торговой статистики (1.2.34) можно также с помощью алгоритма Варшалла-Флойда. Трудности возникают в связи с тем, что индексы Конюса-Дивизиа $\{(Q^{1,t}, F^{1,t})\}_{t=1}^T$ определяются через решение системы линейных неравенств (1.2.10), которая может иметь несколько решений³. Поэтому, на практике в рамках непараметрического метода делается проверка выполнения однородной сильной аксиомы для торговой статистики (1.2.34), где для расчета индексов Конюса-Дивизиа используется решение системы (1.2.10), которое определяется с помощью алгоритма Варшалла-Флойда, описанного в 1.2.1.

³Поскольку система однородная, всякое решение определено с точностью до мультипликативной константы. Однако, даже если отождествить все решения, отличающиеся мультипликативной константой, всё равно возможно несколько решений.

Для класса Φ_G ситуация аналогична.

Теорема 8 ([92]). *Следующие утверждения эквивалентны.*

- 1) Торговая статистика $\{(P^{1,t}, X^{1,t})\}_{t=1}^T$ рационализируема функцией F , представимой в виде (1.2.33), где функции F_0 и F_1 из класса Φ_G .
- 2) Существуют $U^t, V^t, \lambda^t > 0, \mu^t > 0$ ($t \in \{1, \dots, T\}$), удовлетворяющие системе неравенств

$$U^t \leq U^\tau + \lambda^\tau \langle P^{2,\tau}, X^{2,t} - X^{2,\tau} \rangle + \frac{\lambda^\tau}{\mu^\tau} (V^t - V^\tau) \quad t, \tau = \overline{1, T} \quad (1.2.35)$$

$$V^t \leq V^\tau + \mu^\tau \langle P^{1,\tau}, X^{1,t} - X^{1,\tau} \rangle \quad t, \tau = \overline{1, T} \quad (1.2.36)$$

- 3) Торговые статистики $\{(P^{1,t}, X^{1,t})\}_{t=1}^T$ и $\left\{ \left(\left(\frac{1}{\mu^t}, P^{2,t} \right), (V^t, X^{2,t}) \right) \right\}_{t=1}^T$ удовлетворяют сильной аксиоме выявленного предпочтения для некоторых μ^t и V^t , удовлетворяющих неравенствам (1.2.36).

Эта теорема повторяет рассуждения, приведённые выше для класса Φ_H , с заменой индексов Конюса-Дивизиа $\{(Q^{1,t}, F^{1,t})\}_{t=1}^T$ на величины $\left\{ \left(\frac{1}{\mu^t}, V^t \right) \right\}_{t=1}^T$.

В работе [47] доказывается NP-полнота задачи о проверке рационализируемости торговой статистики функцией полезности F , представимой в виде (1.2.33), где функции F_0 и F_1 из класса Φ_G . Вопрос о классе сложности аналогичной задачи с заменой класса Φ_G на класс Φ_H на сегодняшний день остается открытым.

1.3. Обобщённый непараметрический метод

Торговая статистика может не удовлетворять сильной или однородной сильной аксиомам выявленного предпочтения. Это означает, что обратная задача для модели Парето не имеет решения. Один из подходов в

таких случаях заключается в регуляризации обратной задачи, т.е. в ослаблении её условий с помощью некоторых параметров регуляризации. Чтобы применить этот подход к аксиомам выявленного предпочтения, введём дополнительный параметр в определение аксиом выявленного предпочтения.

Напомним определение отношения выявленного предпочтения, которое используется в формулировке сильной аксиомы выявленного предпочтения. Это отношение определяется для торговой статистики $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ на множестве $\{X^t\}_{t=1}^T \times \{X^t\}_{t=1}^T$ и задаётся следующим образом:

$$X^t R X^\tau \Leftrightarrow \langle P^t, X^t \rangle \geq \langle P^t, X^\tau \rangle. \quad (1.3.1)$$

Рассмотрим также отношение выявленного предпочтения $\mathcal{R}(\omega)$, задаваемое следующим образом:

$$X^t \mathcal{R}(\omega) X^\tau \Leftrightarrow \langle P^t, X^t \rangle \geq \omega \langle P^t, X^\tau \rangle. \quad (1.3.2)$$

Чем больше значение ω , тем меньше пар из $\{X^t\}_{t=1}^T \times \{X^t\}_{t=1}^T$ находятся в отношении $\mathcal{R}(\omega)$. Само отношение выявленного предпочтения R совпадает с $\mathcal{R}(1)$.

Если в определении сильной аксиомы выявленного предпочтения вместо отношения R использовать отношение $\mathcal{R}(\omega)$, то мы приходим к следующему определению.

Определение 6. *Говорят, что торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω , если для любых t, t_1, \dots, t_k, τ таких, что*

$$\langle P^t, X^t \rangle \geq \omega \langle P^t, X^{t_1} \rangle, \quad (1.3.3)$$

$$\langle P^{t_1}, X^{t_1} \rangle \geq \omega \langle P^{t_1}, X^{t_2} \rangle, \quad (1.3.4)$$

$$\dots, \quad (1.3.5)$$

$$\langle P^{t_k}, X^{t_k} \rangle \geq \omega \langle P^{t_k}, X^\tau \rangle, \quad (1.3.6)$$

выполнено

$$\langle P^\tau, X^\tau \rangle \leq \omega \langle P^\tau, X^t \rangle. \quad (1.3.7)$$

Чем выше значение ω , тем меньше последовательностей индексов t, t_1, \dots, t_k, τ , удовлетворяющих неравенствам (1.3.3)–(1.3.6). С другой стороны, чем выше значение ω , тем больше пар индексов t и τ , для которых выполняется неравенство (1.3.7). Таким образом, с ростом значения ω требование выполнения сильной аксиомы выявленного предпочтения с показателем ω становится менее ограничительным, что повышает шансы произвольной торговой статистики удовлетворить требованиям этой аксиомы.

Справедлива следующая теорема, частично обобщающая теорему Африата-Верриана (теорема 4 на стр. 37).

Теорема 9. *Следующие утверждения эквивалентны.*

- 1) *Торговая статистика удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω .*
- 2) *Существует решение $\{(U^t, \lambda^t) \mid t \in \{1, \dots, T\}\}$ системы линейных неравенств*

$$U^t \leq U^\tau + \lambda^\tau \omega \langle P^\tau, X^t - X^\tau \rangle \quad t, \tau = \overline{1, T}, \quad (1.3.8)$$

$$\lambda^t > 0 \quad t = \overline{1, T}. \quad (1.3.9)$$

Доказательство. Докажем, что из 1) следует 2). Пусть есть торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$. Определим максимальный временной индекс $\max(I)$ некоторого множества I периодов из $\{1, \dots, T\}$ как такой период t^* , что для любого $t \in I$ из $X^t \mathcal{R}^*(\omega) X^{t^*}$ следует $X^{t^*} \mathcal{R}^*(\omega) X^t$.

Рассмотрим следующий алгоритм, который строит наборы чисел $\{U^t\}_{t=1}^T$ и $\{\lambda^t\}$.

- (1) Положим $I = \{1, \dots, T\}$, $B = \emptyset$.

(2) Положим $m = \max(I)$.

(3) Положим $E = \{t \in I \mid X^t \mathcal{R}^*(\omega) X^m\}$. Если $B = \emptyset$, положим $U^m = \lambda^m = 1$ переходим на шаг (6). В противном случае переходим на шаг (4).

(4) Положим

$$U^m = \min_{t \in E} \min_{\tau \in B} \min \{U^\tau + \lambda^\tau (\omega \langle P^\tau, X^t \rangle - \langle P^\tau, X^\tau \rangle), U^\tau\}. \quad (1.3.10)$$

(5) Положим

$$\lambda^m = \max_{t \in E} \max_{\tau \in B} \max \left\{ \frac{U^\tau - U^m}{\omega \langle P^t, X^\tau \rangle - \langle P^t, X^t \rangle}, 1 \right\}. \quad (1.3.11)$$

Корректность деления на $\omega \langle P^t, X^\tau \rangle - \langle P^t, X^t \rangle$ обосновывается ниже.

(6) Положим $U^t = U^m$, $\lambda^t = \lambda^m$ для всех $t \in E$.

(7) Положим $I = I \setminus E$, $B = B \cup E$. Если $I = \emptyset$, завершаем работу алгоритма. В противном случае, переходим на шаг (2).

Покажем, что если торговая статистика удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω , то получаемые в результате выполнения описанного алгоритма значения $\{U^t\}_{t=1}^T$ и $\{\lambda^t\}_{t=1}^T$ удовлетворяют системе (1.3.8)–(1.3.9). Положительность λ^t очевидна. Покажем, что после каждого выполнения шага (6) полученные значения U^t и λ^t удовлетворяют неравенствам (1.3.9). Для этого необходимо показать, что

- (i) $U^t \leq U^\tau + \lambda^\tau (\omega \langle P^\tau, X^t \rangle - \langle P^\tau, X^\tau \rangle) \quad \tau \in B, t \in E,$
- (ii) $U^\tau \leq U^t + \lambda^t (\omega \langle P^t, X^\tau \rangle - \langle P^t, X^t \rangle) \quad \tau \in B, t \in E,$
- (iii) $U^t \leq U^\tau + \lambda^\tau (\omega \langle P^\tau, X^t \rangle - \langle P^\tau, X^\tau \rangle) \quad t, \tau \in E, t \neq \tau.$

Неравенства (i) следуют из определения U^m и U^t на шагах (4) и (6). Для доказательства (ii) отметим, что $\omega \langle P^t, X^\tau \rangle > \langle P^t, X^t \rangle$ для всех $\tau \in B$. Действительно, если это не так, то $X^t \mathcal{R}^*(\omega) X^\tau$ для некоторого $\tau \in B$. В таком случае, период t должен был попасть в множество B раньше

периода τ . Это приводит к противоречию с тем, что $t \in E$. Поэтому, деление на $\omega \langle P^t, X^\tau \rangle - \langle P^t, X^t \rangle$ на шаге (5) корректно и

$$\lambda^t = \lambda^m \geq \frac{U^\tau - U^t}{\omega \langle P^t, X^\tau \rangle - \langle P^t, X^t \rangle} \quad \tau \in B, t \in E.$$

Умножая на $\omega \langle P^t, X^\tau \rangle - \langle P^t, X^t \rangle$ и переставляя слагаемые, получаем неравенства (ii).

Для доказательства (iii) покажем, что если t и τ из E , то $\langle P^\tau, X^\tau \rangle \leq \omega \langle P^\tau, X^t \rangle$. Предположим, что это не так. Тогда $\langle P^\tau, X^\tau \rangle > \omega \langle P^\tau, X^t \rangle$, что противоречит выполнению сильной аксиомы с показателем ω . Действительно, из того, что $t \in E$, вытекает, что $X^t \mathcal{R}^*(\omega) X^m$, а из того, что $\tau \in E$, следует $X^\tau \mathcal{R}^*(\omega) X^m$, откуда, по определению m на шаге (2), следует, что $X^m \mathcal{R}^*(\omega) X^\tau$. Поэтому, $X^t \mathcal{R}^*(\omega) X^\tau$ и из сильной аксиомы с показателем ω вытекает неравенство $\langle P^\tau, X^\tau \rangle \leq \omega \langle P^t, X^\tau \rangle$.

Для всех t и τ из E выполнено $U^t = U^\tau$ и $\lambda^t = \lambda^m > 0$. Поэтому, из полученного неравенства $\langle P^\tau, X^\tau \rangle \leq \omega \langle P^t, X^\tau \rangle$ вытекают неравенства (iii).

Для доказательства того, что из 2) следует 1), рассмотрим наборы чисел $\{U^t\}_{t=1}^T$ и $\{\lambda^t\}_{t=1}^T$, удовлетворяющих неравенствам (1.3.8)–(1.3.9). Пусть цепочка временных периодов t, t_1, \dots, t_k, τ такова, что

$$\begin{aligned} \langle P^t, X^t \rangle &\geq \omega \langle P^t, X^{t_1} \rangle, \\ \langle P^{t_1}, X^{t_1} \rangle &\geq \omega \langle P^{t_1}, X^{t_2} \rangle, \\ &\dots, \\ \langle P^{t_k}, X^{t_k} \rangle &\geq \omega \langle P^{t_k}, X^\tau \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку λ^t положительны, из этих неравенств и из (1.3.8) вытекает, что $U^\tau \leq U^t$. Отсюда следует, что $\langle P^\tau, X^\tau \rangle \leq \omega \langle P^\tau, X^t \rangle$, что доказывает выполнение сильной аксиомы с показателем ω . *Теорема доказана.*

Метод проверки выполнения сильной аксиомы, описанный в 1.2.1, тривиально обобщается для проверки выполнения сильной аксиомы с показателем ω .

В определение однородной сильной аксиомы выявленного предпочтения также можно ввести показатель ω , с помощью которого можно её ослабить.

Определение 7. *Говорят, что торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω , если для любых t_1, \dots, t_k выполнено*

$$\begin{aligned} \omega^k \langle P^{t_1}, X^{t_2} \rangle \langle P^{t_2}, X^{t_3} \rangle, \dots \langle P^{t_k}, X^{t_1} \rangle \\ \geq \langle P^{t_1}, X^{t_1} \rangle \langle P^{t_2}, X^{t_2} \rangle \dots \langle P^{t_k}, X^{t_k} \rangle. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Из определения видно, что чем выше значение ω , тем больше цепочек временных индексов t_1, \dots, t_k , для которых выполняется неравенство (1.3.12). Таким образом, как и в случае с сильной аксиомой выявленного предпочтения, с ростом значения ω требование выполнения однородной сильной аксиомы выявленного предпочтения с показателем ω становится менее ограничительным, что повышает шансы произвольной торговой статистики удовлетворить требованиям этой аксиомы.

Справедлива следующая теорема, частично обобщающая теорему 5.

Теорема 10 ([68]). *Следующие утверждения эквивалентны.*

- 1) *Торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω .*
- 2) *Существует положительное решение $\lambda^t > 0$ ($t = 1, \dots, T$) системы линейных неравенств*

$$\lambda^t \langle P^t, X^t \rangle \leq \omega \lambda^\tau \langle P^\tau, X^t \rangle, \quad t, \tau = \overline{1, T}. \quad (1.3.13)$$

Для проверки выполнения однородной сильной аксиомы и поиска решения системы (1.3.13) достаточно рассмотреть матрицу $C(\omega)$ индексов цен Пааше с показателем ω , элементы которой задаются как

$$C_{\tau t}(\omega) = \frac{1 \langle P^t, X^t \rangle}{\omega \langle P^\tau, X^t \rangle}, \quad (1.3.14)$$

и повторить выкладки, проведённые для матрицы C в 1.2.1.

Показатель ω играет роль регуляризирующего параметра. Поскольку при регуляризации исходной задачи, не имеющей решения, мы стремимся получить задачу максимально близкую к исходной, вводится понятие показателя нерациональности торговой статистики.

Определение 8. Показателем нерациональности торговой статистики в классе Φ_G называется минимальное значение показателя ω , при котором торговая статистика удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω .

Определение 9. Показателем нерациональности торговой статистики в классе Φ_H называется минимальное значение показателя ω , при котором торговая статистика удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω .

Рассмотрим некоторую торговую статистику $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$, показатель нерациональности в классе Φ_H которой равен $\omega_H > 1$. Обозначим через $\{\lambda^t\}_{t=1}^T$ положительное решение системы

$$\lambda^t \langle P^t, X^t \rangle \leq \omega_H \lambda^\tau \langle P^\tau, X^t \rangle, \quad t, \tau = \overline{1, T}, \quad (1.3.15)$$

полученное с помощью метода решения системы (1.2.10), описанного в 1.2.1. Используя это решение, определим обобщённые индексы Конюса-Дивизиа спроса $F(X^t)$ и цен $Q(P^t)$ согласно тем же формулам (1.2.23), которые использовались для определения индексов Конюса-Дивизиа в 1.2.1, т.е. как

$$F(X^t) = \lambda^t \langle P^t, X^t \rangle, \quad Q(P^t) = \frac{1}{\lambda^t}. \quad (1.3.16)$$

Такой метод определения экономических индексов в [68, 26] называется **обобщённым непараметрическим методом**.

1.4. Прогнозирование с помощью аксиом выявленного предпочтения

1.4.1. Прогнозирование на основе торговой статистики

Рассмотрим некоторую торговую статистику $TS = \{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$. С помощью аксиом выявленного предпочтения можно решать две задачи прогнозирования – спрогнозировать объёмы потребления при заданных ценах и спрогнозировать цены при заданных объёмах потребления. Поскольку обе задачи имеют схожую идею решения, в данном разделе подробно описывается решение только первой задачи.

Пусть торговая статистика TS удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения. Пусть дан некоторый вектор цен P , не совпадающий ни с одним из векторов цен из торговой статистики TS . Тогда, как предложено в [91], в качестве прогноза объёмов потребления при ценах P можно взять множество $K_V^G(P; TS)$ всех неотрицательных векторов X таких, что объединённая торговая статистика $TS \cup \{(P, X)\}$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения.

Если торговая статистика TS удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω , то в качестве прогноза объёмов потребления при ценах P можно взять множество $K_V^G(P; TS, \omega)$ всех неотрицательных векторов X таких, что объединённая торговая статистика $TS \cup \{(P, X)\}$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω . При этом очевидно, что ранее введённое множество $K_V^G(P; TS)$ совпадает с $K_V^G(P; TS, 1)$.

Для однородной сильной аксиомы выявленного предпочтения определение аналогично. Если торговая статистика TS удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω , то в качестве прогноза объёмов потребления при ценах P можно взять множество $K_V^H(P; TS, \omega)$ всех неотрицательных векторов X таких, что объединённая торговая статистика $TS \cup \{(P, X)\}$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω .

Аналогичные рассуждения можно повторить для задачи прогнозирования цен при заданных объемах потребления. Введем по аналогии с $K_V^H(P; TS, \omega)$ множество $K_P^H(X; TS, \omega)$ как множество таких $P \in \mathbb{R}_{++}^m$, что объединённая торговая статистика $TS \cup \{(P, X)\}$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω .

Множества $K_V^H(P; TS, \omega)$ и $K_P^H(X; TS, \omega)$ при $\omega \geq 1$ задаётся системой линейных неравенств, как следует из следующей теоремы.

Теорема 11 ([7]). Пусть торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем $\omega \geq 1$. Положим

$$C_{\tau t}^*(\omega) = \max\{\omega^{-k-1} C_{\tau t_1} C_{t_1 t_2} \dots C_{t_k t} \mid (t_1, \dots, t_k) \subset \{1, \dots, T\}^k, k \geq 0\} \quad (1.4.1)$$

и

$$\gamma_{\tau}(P, \omega) = \min_{t \in \{1, \dots, T\}} \left\{ \frac{\omega^2}{C_{t\tau}^*(\omega)} \frac{\langle P, X^t \rangle}{\langle P^t, X^t \rangle} \right\}, \quad (1.4.2)$$

$$\sigma_t(X, \omega) = \min_{\tau \in \{1, \dots, T\}} \left\{ \frac{\omega^2}{C_{t\tau}^*(\omega)} \frac{\langle P^{\tau}, X \rangle}{\langle P^t, X^t \rangle} \right\} \quad (1.4.3)$$

где, как и ранее, $C_{\tau t}$ – элементы матрицы индексов цен Пааше.

Тогда

$$K_V^H(P; TS, \omega) = \{X \in \mathbb{R}_+^m \mid \gamma_\tau(P, \omega) \langle P^\tau, X \rangle \geq \langle P, X \rangle, \tau \in \{1, \dots, T\}\}, \quad (1.4.4)$$

$$K_P^H(X; TS, \omega) = \{P \in \mathbb{R}_{++}^m \mid \sigma_t(X, \omega) \langle P, X^t \rangle \geq \langle P, X \rangle, t \in \{1, \dots, T\}\}. \quad (1.4.5)$$

Значения $C_{\tau t}^*(\omega)$ вычисляются с помощью алгоритма Варшалла-Флойда за $O(T^3)$ операций. Эти значения не зависят от цен P , поэтому их нужно вычислять один раз для каждой торговой статистики и каждого значения ω и далее применять для построения прогноза для произвольного вектора цен P или вектора объемов потребления X . Величины γ_τ зависят от вектора P , однако они могут быть вычислены за $O(T)$ операций. Величины σ_t зависят от вектора X , однако они вычисляются за $O(T)$ операций.

Для множества $K_V^G(P; TS, \omega)$ нет аналогичного представления ни для каких ω . Однако, в работе [91] получено аналитическое выражение для множества

$$K_V^G(P; TS, 1) \cap \{X \in \mathbb{R}_+^m \mid \langle P, X \rangle = 1\}, \quad (1.4.6)$$

которое возникает, когда помимо цен мы фиксируем ещё и уровень расходов.

1.4.2. Прогнозирование на основе набора кривых Энгеля

В работе [44] рассматривается подход к решению задачи прогнозирования спроса на основе набора кривых Энгеля. Кривой Энгеля называется зависимость $q = q(e; P)$ спроса от уровня расходов e при некотором фиксированном векторе цен P .

Говорят, что конечный набор кривых Энгеля $\{q^t(\cdot; P^t)\}_{t=1}^T$ рационализуем в классе Φ , если для любого набора положительных уровней расходов

$\{e_t\}_{t=1}^T$ торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$, где $X^t = q^t(P^t, e_t)$, рационализируема в классе Φ .

Рассмотрим торговую статистику $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$, удовлетворяющую однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения. Предположим дополнительно, что кривые Энгеля, соответствующие ценам P^t , являются однозначными функциями. Тогда, поскольку торговая статистика рационализируется положительно-однородной функцией полезности, кривые Энгеля являются лучами, т.е. задаются в виде $q^t(e; P^t) = eX^t$. Поэтому, согласно теореме 6, набор кривых Энгеля рационализируем в классе Φ_G . Таким образом, из рационализируемости торговой статистики $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ в классе Φ_H вытекает рационализируемость набора кривых Энгеля $\{q^t(\cdot; P^t)\}_{t=1}^T$ в классе Φ_G при дополнительном предположении об однозначности кривых Энгеля. Эквивалентность рационализируемости торговой статистики $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ в классе Φ_H и рационализируемости набора кривых Энгеля $\{q^t(\cdot; P^t)\}_{t=1}^T$ в классе Φ_H вытекает из инвариантности однородной сильной аксиомы относительно изменения масштабов цен и объёмов потребления.

В работе [44] предлагается подход к прогнозированию спроса на основе строгой аксиомы выявленного предпочтения и набора кривых Энгеля. Строгая аксиома выявленного предпочтения является более сильным требованием, чем сильная аксиома выявленного предпочтения. Для ее формулировки также используется отношение транзитивное замыкание отношения выявленного предпочтения R^* , введённое в 1.2. Говорят, что торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет строгой аксиоме выявленного предпочтения, если для любой пары временных индексов t и τ из $X^t R^* X^\tau$ и $X^t \neq X^\tau$ вытекает, что $\langle P^\tau, X^\tau \rangle < \langle P^\tau, X^t \rangle$.

Пусть заданы конечный набор кривых Энгеля $\{q^t(\cdot; P^t)\}_{t=1}^T$, некоторый вектор цен P , не совпадающий ни с одним из векторов P^1, \dots, P^T , и некоторый уровень расходов e . Рассмотрим множества $S(P, e, \{e_t\}_{t=1}^T)$, содержащие все

$X \in \mathbb{R}_+^m$ такие, что $\langle P, X \rangle = e$ и торговая статистика

$$\{(P^t, q^t(e_t; P^t))\}_{t=1}^T \cup \{(P, X)\} \quad (1.4.7)$$

удовлетворяет строгой аксиоме выявленного предпочтения.

Если задан некоторый набор кривых Энгеля $E = \{q^t(\cdot; P^t)\}_{t=1}^T$, рационализуемый в некотором классе Φ , то в качестве прогноза объёмов потребления при некотором векторе цен P , не совпадающим ни с одним из векторов P^1, \dots, P^T , и некотором уровне расходов e можно рассматривать множество $\tilde{K}_V = \tilde{K}_V(P, e; E, \Phi)$ всех $X \in \mathbb{R}_+^m$ таких, что $\langle P, X \rangle = e$ и торговые статистики

$$\{(P^t, q^t(e_t; P^t))\}_{t=1}^T \cup \{(P, X)\} \quad (1.4.8)$$

рационализуемы в классе Φ для всех наборов положительных уровней расходов e_1, \dots, e_T . Для краткости, будем обозначать множества $\tilde{K}_V(P, e; E, \Phi_H)$ и $\tilde{K}_V(P, e; E, \Phi_G)$ через $\tilde{K}_V^H(P, e; E)$ и $\tilde{K}_V^G(P, e; E)$ соответственно.

В работе [44] определяются специальные уровни расходов \tilde{e}_t , исходя из условий

$$\langle P, q^t(\tilde{e}_t) \rangle = e, \quad (1.4.9)$$

и утверждается, что если спрос является слабо нормальным⁴, то для любого набора уровней расходов $\{e_t\}_{t=1}^T$ справедливо включение

$$S(P, e, \{\tilde{e}_t\}_{t=1}^T) \subseteq S(P, e, \{e_t\}_{t=1}^T). \quad (1.4.10)$$

Введем по аналогии с множествами $\tilde{K}_V^H(P, e; E)$ и $\tilde{K}_V^G(P, e; E)$ множество $\tilde{K}_V^S(P, e; E)$ как множество всех $X \in \mathbb{R}_+^m$ таких, что $\langle P, X \rangle = e$ и торговые

⁴Это означает что для любого $t \in \{1, \dots, T\}$ и любых двух уровней расходов e и e' таких, что $e \geq e'$, выполнено $q^t(e) \geq q^t(e')$.

статистики

$$\{(P^t, q^t(e_t; P^t))\}_{t=1}^T \cup \{(P, X)\} \quad (1.4.11)$$

удовлетворяют строгой аксиоме выявленного предпочтения для всех наборов положительных уровней расходов e_1, \dots, e_T . Тогда из (1.4.10) вытекает

$$\tilde{K}_V^S(P, e; E) = S(P, e, \{\tilde{e}_t\}_{t=1}^T). \quad (1.4.12)$$

Это равенство в общем случае неверно, что доказывает неправильность включения (1.4.10). Для того, чтобы привести опровергающий контрпример, введём, по аналогии с $S(P, e, \{e_t\}_{t=1}^T)$, множество $G(P, e, \{e_t\}_{t=1}^T)$, содержащее все $X \in \mathbb{R}_+^m$ такие, что $\langle P, X \rangle = e$ и торговая статистика

$$\{(P^t, q^t(e_t; P^t))\}_{t=1}^T \cup \{(P, X)\} \quad (1.4.13)$$

удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения.

Рассмотрим группу из трёх товаров с кривыми Энгеля

$$q^1(e; P^1) = (1, \varepsilon, \varepsilon)'e,$$

$$q^2(e; P^2) = (\varepsilon, 1, \varepsilon)'e,$$

$$q^3(e; P^3) = (\varepsilon, \varepsilon, 1)'e,$$

которые соответствуют ценам

$$P^1 = (2 \ 1 \ 4)',$$

$$P^2 = (2 \ 1 \ 2)',$$

$$P^3 = (2 \ 2 \ 1)'. \quad .$$

Пусть наблюдаемые объёмы потребления X^t соответствуют единичным уровням расходов, т.е. $X^t = q^t(1; P^t)$. Поскольку кривые Энгеля зависят ещё и от ε , то и наблюдаемые объёмы потребления X^t тоже зависят от ε . Поэтому, далее наблюдаемые объёмы потребления обозначаются через $X^t(\varepsilon)$.

Построим матрицу $PX(\varepsilon) = (\langle P^t, X^\tau(\varepsilon) \rangle)_{t,\tau=1}^T$ всевозможных попарных скалярных произведений векторов цен и наблюдаемых объёмов потребления. Получаем следующую матрицу

$$PX(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 2 + 5\varepsilon & 1 + 6\varepsilon & 4 + 3\varepsilon \\ 2 + 3\varepsilon & 1 + 4\varepsilon & 2 + 3\varepsilon \\ 2 + 3\varepsilon & 2 + 3\varepsilon & 1 + 4\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Если $\varepsilon = 0$, то отношение выявленного предпочтения $R(0)$ задаётся матрицей

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транзитивное замыкание $R^*(0)$ отношения $R(0)$ совпадает с ним, т.е. $R^*(0) = R(0)$. Можно показать, что торговая статистика $\{(P^t, X^t(0))\}_{t=1}^T$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения. Для упрощения дальнейших вычислений мы будем подробно рассматривать случай $\varepsilon = 0$, что соответствует нулевым наблюдаемым объёмам потребления. Торговая статистика $\{(P^t, X^t(0.5))\}_{t=1}^T$ также удовлетворяет однородной сильной аксиоме и все нижеследующие вычисления можно повторить для $\varepsilon = 0.5$, что соответствует положительным объёмам потребления.

Будем строить множества прогнозов для цен $P = (1, 1, 1)'$ и уровня расходов $e = 2$. Специальные уровни расходов $\{\tilde{e}_t\}_{t=1}^3$, определяющиеся из условий (1.4.9), в данном примере (при $\varepsilon = 0$) равны 2 для всех периодов времени. Множество $G(P, e, \{\tilde{e}_t\}_{t=1}^3)$ задаётся системой неравенств

$$X_1 \leq 2 - \frac{3}{2}X_2 \tag{1.4.14}$$

$$X_3 = 2 - X_1 - X_2 \tag{1.4.15}$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0. \tag{1.4.16}$$

Отсюда можно видеть, что $G(P, e, \{\tilde{e}_t\}_{t=1}^3)$ является замыканием $S(P, e, \{\tilde{e}_t\}_{t=1}^3)$. Поэтому, если (1.4.12) верно, то

$$\tilde{K}_V^G(P, e; E) = G(P, e, \{\tilde{e}_t\}_{t=1}^3). \quad (1.4.17)$$

Поскольку кривые Энгеля являются лучами, множество $K_V^H(P, e; TS) = K_V^H(P; TS, 1) \cap \{X \in \mathbb{R}_+^m \mid \langle P, X \rangle = e\}$ совпадает с $\tilde{K}_V^G(P, e; E)$.

Таким образом, из (1.4.12) вытекает равенство

$$K_V^H(P, e) = G(P, e, \{\tilde{e}_t\}_{t=1}^3). \quad (1.4.18)$$

Множество $K_V^H(P, e; TS)$ задаётся системой неравенств

$$X_3 = 2 - X_1, \quad (1.4.19)$$

$$X_2 = 0, \quad (1.4.20)$$

$$X_1 \geq 0, X_1 \leq 2. \quad (1.4.21)$$

Сравнивая (1.4.19)-(1.4.21) с (1.4.19)-(1.4.21), мы видим, что множество $K_V^H(P, e; TS)$ является собственным подмножеством множества $G(P, e, \{\tilde{e}_t\}_{t=1}^3)$, что противоречит (1.4.18).

Если повторить все вычисления при $\varepsilon = 0.5$, то множество $G(P, e, \{\tilde{e}_t\}_{t=1}^3)$ будет задаваться системой

$$X_1 \leq 1.75 - 1.5X_2$$

$$X_2 \leq 1$$

$$X_1 + X_2 \geq 1$$

$$X_3 = 2 - X_1 - X_2$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0,$$

а множество $K_V^H(P, e; TS)$ будет задаваться системой

$$X_1 \leq 1.75 - 1.5X_2$$

$$X_2 \leq 0.625$$

$$X_1 + X_2 \geq 1$$

$$X_3 = 2 - X_1 - X_2$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0.$$

Мы видим, что и в этом случае равенство (1.4.18) не выполняется. Это доказывает неверность равенства (1.4.12).

1.5. Оценки класса сложности задачи проверки согласованности торговой статистики с неоклассической моделью потребительского спроса с несколькими рациональными репрезентативными потребителями

Торговая статистика может не удовлетворять аксиомам выявленного предпочтения из-за неоднородности общества. Если совокупное потребление представляет собой сумму потреблений нескольких социальных групп с сильно различающимися предпочтениями, то обратные функции спроса не могут быть рационализированы одной функцией полезности.

Естественным обобщением модели Парето является неоклассическая модель потребительского спроса, согласно которой совокупное потребление складывается из потреблений нескольких репрезентативных потребителей, каждый из которых является рациональным, т.е. принимает решение исходя из максимизации своей функции полезности при своем бюджетном ограничении. Формально, в неоклассической модели потребительского спроса совокупное потребление X при заданных ценах P определяется как сумма

$\sum_{k=1}^K X^k$ векторов X^k , каждый из которых является решением следующей задачи

$$F_k(Y) \rightarrow \max_{Y \geq 0} \quad (1.5.1)$$

$$\langle P, Y \rangle \leq I_k, \quad (1.5.2)$$

где I_k – совокупный доход k -ого репрезентативного потребителя.

Вопрос о проверке согласованности обратных функций спроса с неоклассической моделью потребительского исследования в работах [32, 33] для положительно-однородных функций полезности и в работах [48, 49] для более общего класса функций полезности, которые могут быть не положительно-однородными. В этих же работах отмечена связь между минимальным количеством репрезентативных потребителей, необходимым для согласованности обратных функций спроса с неоклассической моделью, и классом дифференциальной формы обратных функций спроса.

В терминах торговой статистики $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ задача проверки согласованности экономических данных с неоклассической моделью потребительского спроса с K репрезентативными потребителями ставится следующим образом: можно ли представить векторы совокупного потребления X^t в виде сумм

$$X^t = \sum_{k=1}^K X^{k,t} \quad (1.5.3)$$

неотрицательных векторов $X^{k,t}$ таких, что торговые статистики

$$\{(P^t, X^{1,t})\}_{t=1}^T, \dots, \{(P^t, X^{K,t})\}_{t=1}^T \quad (1.5.4)$$

рационализируемы в некотором классе Φ . При этом, поскольку при анализе спроса желательно описывать совокупный спрос в терминах наименьшего числа переменных, естественно рассматривать вопрос о определении минимального значения K , при котором возможно представление (1.5.3) при условии рационализируемости торговых статистик (1.5.4).

Если в качестве класса Φ рассматривать класс Φ_G , то вопрос о согласованности торговой статистики $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ с неоклассической моделью потребительского спроса сводится в вопросу о возможности разбить векторы потребления на суммы (1.5.3) так, чтобы торговые статистики (1.5.4) удовлетворяли сильной аксиоме выявленного предпочтения. В работе [77] доказано, что задача проверки согласованности торговой статистики с неоклассической моделью потребительского спроса с двумя потребителями с функциями полезности из класса Φ_G является NP-полной.

Другим обобщением модели Парето на случай двух и более репрезентативных потребителей является модель временного диктатора, рассмотренная в [46]. Сформулированное в [46] достаточное условие согласованности торговой статистики с моделью временного диктатора, которое включает в себя необходимые условия, равносильно тому, что торговую статистику можно разбить на несколько торговых статистик по отдельным периодам времени, каждая из которых удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения. Это приводит к следующему определению согласованности торговой статистики с моделью временного диктатора.

Определение 10. *Говорят, что торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ согласуется с моделью временного диктатора с K диктаторами с функциями полезности из класса Φ , если существуют функции F_1, F_2, \dots, F_K из класса Φ такие, что для каждого t из $\{1, \dots, T\}$ существует k из $\{1, \dots, K\}$ такой, что $F_k(X) \leq F_k(X^t)$ для всех $X \in \mathbb{R}_+^m$ таких, что $\langle P^t, X \rangle \leq \langle P^t, X^t \rangle$.*

Из определения следует, что торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ согласуется с моделью временного диктатора с K диктаторами с функциями полезности из класса Φ тогда и только тогда, когда множество периодов времени $\{1, \dots, T\}$ можно разбить на K непересекающихся подмножеств $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_K$

таких, что торговые статистики

$$\{(P^t, X^t)\}_{t \in \mathcal{T}_1}, \dots, \{(P^t, X^t)\}_{t \in \mathcal{T}_K} \quad (1.5.5)$$

рационализируемы в классе Φ .

Вопрос о классе сложности задачи проверки согласованности торговой статистики впервые исследован в работе [54].

Теорема 12 ([54]). *Задача проверки согласованности торговой статистики $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ с моделью временного диктатора с K диктаторами с функциями полезности из класса Φ_G при $K \geq 2$ является NP-полной.*

В диссертационном исследовании был получен аналогичный результат для класса Φ_H .

Теорема 13. *Задача проверки согласованности торговой статистики $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ с моделью временного диктатора с K диктаторами с функциями полезности из класса Φ_H при $K \geq 2$ является NP-полной.*

Для доказательства теоремы 13 рассмотрим следующие задачи.

Задача DAP(K): Заданы ориентированный граф $G = (V, E)$ размера T и натуральное число $K \geq 2$. Требуется определить, существует ли разбиение множества V на $s \leq K$ непересекающихся множеств V_1, \dots, V_s такое, что для любого j ($j = \overline{1, s}$) подграф $G_j = (V_j, E_j)$, порождённый вершинами из V_j , не содержит циклов.

Задача WAP(K): Заданы взвешенный граф $G = (V, E)$ размера T с матрицей весов $W \in \mathbb{R}^{T \times T}$, причём $w_{tt} = 0$ для всех t ($t = \overline{1, T}$), и натуральное число $K \geq 2$. Требуется определить, существует ли разбиение множества V на $s \leq K$ непересекающихся множеств V_1, \dots, V_s , такое, что для любого j ($j = \overline{1, s}$) подграф $G_j = (V_j, E_j)$, порождённый вершинами из V_j , не содержит циклов отрицательной длины.

Задача HARP(K): Заданы торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ и натуральное число $K \geq 2$. Требуется определить, существует ли разбиение множества $\{1, \dots, T\}$ на $s \leq K$ непересекающихся множеств $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_s$ такое, что для любого j ($j = \overline{1, s}$) торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t \in \mathcal{T}_j}$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения.

Задача DAP(K) называется задачей ациклического разбиения ориентированного графа.

Задача считается NP-полной, если она принадлежит классу NP и является NP-трудной. Принадлежность классу NP означает, что задача может быть решена за полиномиальное время недетерминированной машиной Тьюринга. Недетерминированная машина Тьюринга может иметь несколько вариантов перехода из одного состояния. В этом случае ее следующее состояние не определено. Считается, что если для некоторого состояния есть несколько вариантов перехода в следующее состояние, то в этот момент машина Тьюринга создаёт несколько своих копий, по одной на каждое следующее состояние, и все эти копии продолжают выполнять тот же самый набор инструкций. Последовательность переходов недетерминированной машины Тьюринга можно представить в виде дерева, отдельные ветви которого соответствуют вычислениям одной копии машины Тьюринга. Более подробные определения представлены в [61].

Очевидно, что задача HARP(K) принадлежит классу NP, поскольку её можно решить, перебирая всевозможные разбиения и проверяя правильность каждого, а проверить правильность одного разбиения можно за полиномиальное время с помощью алгоритма Варшалла-Флойда⁵. Перебор всевозможных вариантов разбиения можно представить в виде дерева,

⁵Алгоритм Варшалла-Флойда использует арифметические операции над вещественными числами. При рассуждениях о классах сложности P и NP, а также о полиномиальной сводимости задач здесь и далее считается, что машина Тьюринга может выполнять арифметические операции над вещественными числами за ограниченное количество шагов.

каждый путь от корня до листа которого соответствует конкретному разбиению. Этот перебор реализуется ветвлением процесса вычислений недетерминированной машины Тьюринга. Поэтому, задача $\text{HARP}(K)$ может быть решена недетерминированной машиной Тьюринга за полиномиальное время.

NP -трудность задачи X означает, что любая задача из класса NP может быть сведена к решению задачи X за полиномиальное время. Доказательство NP -трудности строится следующим образом. Для доказательства NP -трудности задачи выбирается некоторая задача, NP -трудность которой уже доказана, и сводится за полиномиальное время к задаче, NP -трудность которой необходимо доказать. В качестве такой задачи рассматривается задача $\text{DAP}(K)$.

Мы сводим задачу $\text{DAP}(K)$ к задаче $\text{WAP}(K)$, тем самым доказывая NP -трудность задачи $\text{WAP}(K)$, а затем сводим задачу $\text{WAP}(K)$ к задаче $\text{HARP}(K)$.

NP -полнота задачи $\text{DAP}(K)$ для $K \geq 2$ утверждается в [61] (стр. 193), однако доказательство не приводится. Доказательство NP -полноты задачи $\text{DAP}(2)$ можно найти, например, в [52]. Автору диссертационного исследования не удалось найти доказательства NP -полноты задачи $\text{DAP}(K)$ для $K \geq 3$, поэтому доказательство этого результата приводится ниже.

Предложение 1. *Задача $\text{DAP}(K)$ для $K \geq 3$ является NP -полной.*

Доказательство. Рассмотрим задачу раскраски графа в K цветов.

COL(K): Заданы граф $G(V, E)$, натуральное число $K \geq 3$. Требуется определить, существует ли правильная вершинная раскраска графа G в K цветов.

NP -полнота задачи $\text{COL}(K)$ для $K \geq 3$ доказана в [27].

Задача $DAP(K)$ принадлежит классу NP , поскольку она может быть решена перебором всевозможных разбиений множества V на K непересекающихся подмножеств, а проверка ацикличности графов, порождённых заданным разбиением множества вершин, может быть выполнена за полиномиальное время.

Сведём задачу $COL(K)$ к задаче $DAP(K)$ для $K \geq 3$.

Пусть есть граф $G(V, E)$, натуральное число $K \geq 3$. Построим ориентированный граф \tilde{G} следующим образом. Рассмотрим множество вершин

$$V_c = \{c_1, \dots, c_K\}.$$

Эти вершины соответствуют цветам раскраски графа. Зададим множество рёбер, соединяющих вершины из V_c друг с другом следующим образом:

$$E_c = \{(c_i, c_j) \mid i, j = \overline{1, K}, i \neq j\}.$$

Таким образом, граф (V_c, E_c) является полным.

Каждая вершина $c_j \in V_c$ соединяется со всеми вершинами из множества V . Обозначим множество соответствующих рёбер через E_j :

$$E_j = \{(c_j, v) \mid v \in V\}.$$

Каждому ребру в графе G соответствует пара рёбер в графе \tilde{G} :

$$E' = \cup_{\{u,v\} \in E} \{(u, v), (v, u)\}.$$

Граф \tilde{G} задаётся следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= V \cup V_c, \\ \tilde{E} &= E \cup E_c \cup E' \cup \left(\cup_{j=1}^K E_j\right), \\ \tilde{G} &= (\tilde{V}, \tilde{E}). \end{aligned}$$

Пусть функция $f : V \rightarrow \{1, \dots, K\}$ задаёт правильную раскраску графа G . Тогда множества

$$\tilde{V}_j = \{c_j\} \cup \{v \in V \mid f(v) = j\}$$

задают разбиение множества вершин \tilde{V} , такое, что графы

$$\tilde{G}_j = (\tilde{V}_j, \tilde{E}_j),$$

порождённые вершинами из \tilde{V}_j , не содержат циклов. Действительно, циклов, не содержащих c_j , быть не может, поскольку f задаёт правильную вершинную раскраску. Циклов, содержащих c_j быть не может, поскольку в \tilde{E} нет рёбер вида (v, c_j) для $v \in V$.

Пусть непересекающиеся множества $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_s$, ($s \leq K$) задают разбиение множества \tilde{V} , такое, что графы

$$\tilde{G}_j = (\tilde{V}_j, \tilde{E}_j),$$

порождённые вершинами из \tilde{V}_j , не содержат циклов.

Каждая из вершин множества V_c должна быть хотя бы в одном из множеств $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_s$. Ни одно из множеств $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_s$ не может содержать двух вершин из множества V_c , поскольку в противном случае эти две вершины образовывали бы цикл. Поэтому, $s = K$, и можно считать, что

$$\tilde{V}_j \cap V_c = \{c_j\}.$$

Зададим функцию $f : V \rightarrow \{1, \dots, K\}$ следующим образом:

$$f(v) = j : v \in \tilde{V}_j.$$

Поскольку в \tilde{V}_j нет циклов, среди вершин из $\tilde{V}_j \cap V$ нет вершин, соединённых ребром из E . Поэтому, f задаёт правильную вершинную раскраску графа G .

Предложение доказано.

Предложение 2. Задача $WAP(K)$ для $K \geq 2$ является NP -полной.

Доказательство. Задача $WAP(K)$ для $K \geq 2$ принадлежит классу NP , поскольку она может быть решена перебором всевозможных разбиений множества V на K непересекающихся подмножеств, а проверка отсутствия циклов отрицательной длины в графах, порождённых заданным разбиением множества вершин, может быть выполнена за полиномиальное время с помощью алгоритма Варшалла-Флойда.

Сведём задачу $DAP(K)$ к задаче $WAP(K)$. Пусть есть ориентированный граф $G = (V, E)$ размера T с матрицей инцидентности $A \in \{0, 1\}^{T \times T}$. Для сведения задачи $DAP(K)$ к задаче $WAP(K)$ достаточно построить взвешенный граф $H = (V, \tilde{E})$, такой, что в этом графе есть цикл отрицательной длины, начинающийся и заканчивающийся в вершине $v \in V$ тогда и только тогда, когда в графе G есть цикл, начинающийся и заканчивающийся в вершине v . При доказательстве достаточно ограничиться циклами без повторяющихся вершин.

Определим матрицу весов $W = (w_{t\tau})_{t,\tau=1}^T$ следующим образом:

$$w_{t\tau} = \begin{cases} T + 1, & \text{если } (v_t, v_\tau) \notin E, \\ 0, & \text{если } t = \tau, \\ -1, & \text{если } (v_t, v_\tau) \in E. \end{cases}$$

Пусть в графе G есть цикл

$$(v_{t_1}, v_{t_2}, \dots, v_{t_k}, v_{t_1}).$$

Это означает, что

$$(v_{t_1}, v_{t_2}) \in E, (v_{t_2}, v_{t_3}) \in E, \dots, (v_{t_{k-1}}, v_{t_k}) \in E, (v_{t_k}, v_{t_1}) \in E.$$

Следовательно,

$$w_{t_1 t_2} = -1, w_{t_2 t_3} = -1, \dots, w_{t_{k-1} t_k} = -1, w_{t_k t_1} = -1,$$

и

$$w_{t_1 t_2} + w_{t_2 t_3} + \dots + w_{t_{k-1} t_k} + w_{t_k t_1} = -k < 0.$$

Таким образом,

$$(v_{t_1}, v_{t_2}, \dots, v_{t_k}, v_{t_1})$$

является циклом отрицательной длины в графе H .

Пусть в графе H есть цикл

$$(v_{t_1}, v_{t_2}, \dots, v_{t_k}, v_{t_1})$$

отрицательной длины, т.е.

$$w_{t_1 t_2} + w_{t_2 t_3} + \dots + w_{t_{k-1} t_k} + w_{t_k t_1} < 0. \quad (1.5.6)$$

Если последовательность вершин

$$(v_{t_1}, v_{t_2}, \dots, v_{t_k}, v_{t_1})$$

не образует цикла в графе G , то один из весов

$$w_{t_1 t_2}, w_{t_2 t_3}, \dots, w_{t_{k-1} t_k}, w_{t_k t_1}$$

равен $T + 1$. Поскольку рассматриваются только циклы без повторяющихся вершин, $k \leq T$. Поэтому, сумма в (1.5.6) не может быть отрицательной.

Полученное противоречие доказывает, что последовательность вершин

$$(v_{t_1}, v_{t_2}, \dots, v_{t_k}, v_{t_1})$$

образует цикл в графе G .

Предложение доказано.

Доказательство теоремы 13. Сведём задачу WAP(K) к задаче HARP(K). Проверка однородной сильной аксиомы для торговой статистики $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ равносильна проверкам неравенств

$$\log \left(\frac{\langle P^{t_1}, X^{t_2} \rangle}{\langle P^{t_1}, X^{t_1} \rangle} \right) + \log \left(\frac{\langle P^{t_2}, X^{t_3} \rangle}{\langle P^{t_2}, X^{t_2} \rangle} \right) + \dots + \\ \log \left(\frac{\langle P^{t_{k-1}}, X^{t_k} \rangle}{\langle P^{t_{k-1}}, X^{t_{k-1}} \rangle} \right) + \log \left(\frac{\langle P^{t_k}, X^{t_1} \rangle}{\langle P^{t_k}, X^{t_k} \rangle} \right) \geq 0$$

для всех последовательностей различных индексов $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ из $\{1, \dots, T\}$.

Пусть есть взвешенный граф $G = (V, E)$ размера T с матрицей весов W из $\mathbb{R}^{T \times T}$, причём $w_{tt} = 0$ для всех t ($t = \overline{1, T}$), и натуральное число $K \geq 2$.

Для сведения задачи WAP(K) к задаче HARP(K) достаточно построить торговую статистику $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ так, что

$$\log \left(\frac{\langle P^t, X^\tau \rangle}{\langle P^t, X^t \rangle} \right) = w_{t\tau}$$

для всех t, τ .

Построим такую торговую статистику для T товаров. Положим

$$\begin{aligned} P_t^t &= T + 1 & t &= \overline{1, T} \\ P_\tau^t &= \varepsilon > 0 & t, \tau &= \overline{1, T}, t \neq \tau. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{T \times T}$ матрицу, строками которой являются векторы P^t . Будем искать X^t такие, что

$$\langle P^t, X^\tau \rangle = e^{w_{t\tau}}, \quad t, \tau = \overline{1, T} \quad (1.5.7)$$

$$X^t \in \mathbb{R}_+^m \setminus 0 \quad t = \overline{1, T}. \quad (1.5.8)$$

Система уравнений (1.5.7) распадается на T независимых систем

$$\mathcal{P}X^\tau = \begin{pmatrix} e^{w_{1\tau}} \\ e^{w_{2\tau}} \\ \dots \\ e^{w_{T\tau}} \end{pmatrix}.$$

При $\varepsilon = 0$ определитель матрицы \mathcal{P} отличен от нуля. Однако, при $\varepsilon = 0$ векторы цен P^t имеют нулевые элементы, что недопустимо. Однако, поскольку определитель матрицы \mathcal{P} непрерывно зависит от ε , то при малых $\varepsilon > 0$ этот определитель также отличен от нуля. Поэтому, для таких ε существует \mathcal{P}^{-1} и X^τ определяются однозначно:

$$X^\tau = \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} e^{w_{1\tau}} \\ e^{w_{2\tau}} \\ \dots \\ e^{w_{T\tau}} \end{pmatrix}.$$

Для завершения доказательства необходимо убедиться в выполнении условий (1.5.8). При $\varepsilon = 0$ $X^\tau > 0$ для всех τ . Поскольку элементы обратной матрицы непрерывно зависят от элементов исходной матрицы, существует $\varepsilon > 0$ такое, что векторы X^t остаются положительными для всех τ .

Теорема 13 доказана.

ГЛАВА 2

**СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ АКСИОМ ВЫЯВЛЕННОГО
ПРЕДПОЧТЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СЕГМЕНТАЦИИ
ТОВАРНЫХ РЫНКОВ И ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ****2.1. Оценки вероятности выполнения аксиом выявленного предпочтения на случайных товарных группах**

В 1.2.2 было введено понятие слабой отделимости, а также была обсуждена проблема проверки отделимости товарных групп. Товарных подгрупп, отделимость которых может быть доказана, например методами, описанными в 1.2.2, может оказаться много. В группе из m товаров может быть до $2^m - m$ таких товарных подгрупп, если исключать подгруппы, состоящие из одного товара. Среди них могут оказаться осмысленные товарные группы, которым можно приписать некоторое осмысленное название на основании состава этих групп, например, группа мясных продуктов. Однако, среди них могут также оказаться и те группы, которые трудно интерпретировать, поскольку они содержат очень разнородные товары, например, отдельные виды мясных продуктов и некоторые виды одежды. Кроме того, формализованного критерия проверки осмысленности товарной группы нет, и решение об адекватности выделения той или иной группы товаров в отдельный сегмент должен принимать человек, который не может проанализировать большое количество товарных групп.

В связи с этим приобретает актуальность вопрос об алгоритмическом выделении ограниченного количества товарных групп, которые могут выступать в роли отдельных сегментов. Есть два класса функций полезности, которые можно использовать для проверки отделимости товарных групп и составления ограниченного списка товарных групп, которые по фор-

мальным признакам могут образовывать отдельные сегменты в структуре потребительского спроса. Очевидно, что если использовать однородную сильную аксиому выявленного предпочтения, то проверку на делимость могут пройти не все подгруппы, удовлетворяющие сильной аксиоме выявленного предпочтения, поскольку однородная сильная аксиома является более жестким ограничением. Для того, чтобы количественно сравнить, насколько однородная сильная аксиома является более жестким условием, чем сильная аксиома, были проведены численные эксперименты для оценки вероятности выполнения двух аксиом выявленного предпочтения на случайно сформированных товарных подгруппах в зависимости от количества товаров в этих подгруппах.

В численных экспериментах использовались две торговые статистики. Первая торговая статистика содержит данные о ценах и объёмах потребления в Венгрии с 1975 по 1984 годы. В этой торговой статистике представлены данные по 196 товарам ([71]). Эта торговая статистика исследовалась во многих работах, в частности в [6, 26, 17]. Вторая торговая статистика содержит данные о ценах и объёмах потребления в Нидерландах с 1951 по 1977 годы ([73]). В этой торговой статистике представлены данные по 106 товарам. Эта торговая статистика исследовалась в [25].

Для торговой статистики Венгрии для каждого целого b от 3 до 193 генерировались 100 000 случайных товарных подгрупп размера b , т.е. содержащих b товаров. Товары выбирались из всех 196 товаров случайным образом без повторений. Для всех прочих размеров случайных подгрупп (2, 194, 195, 196) перебирались всевозможные товарные подгруппы, поскольку их меньше 100 000. Для каждого размера случайных товарных групп оценивалась частота выполнения сильной и однородной сильной аксиом выявленного предпочтения для сгенерированных товарных подгрупп. Полученная в результате численного эксперимента зависимость частоты

выполнения аксиом выявленного предпочтения от размера случайных подгрупп представлена на рисунке 2.1.

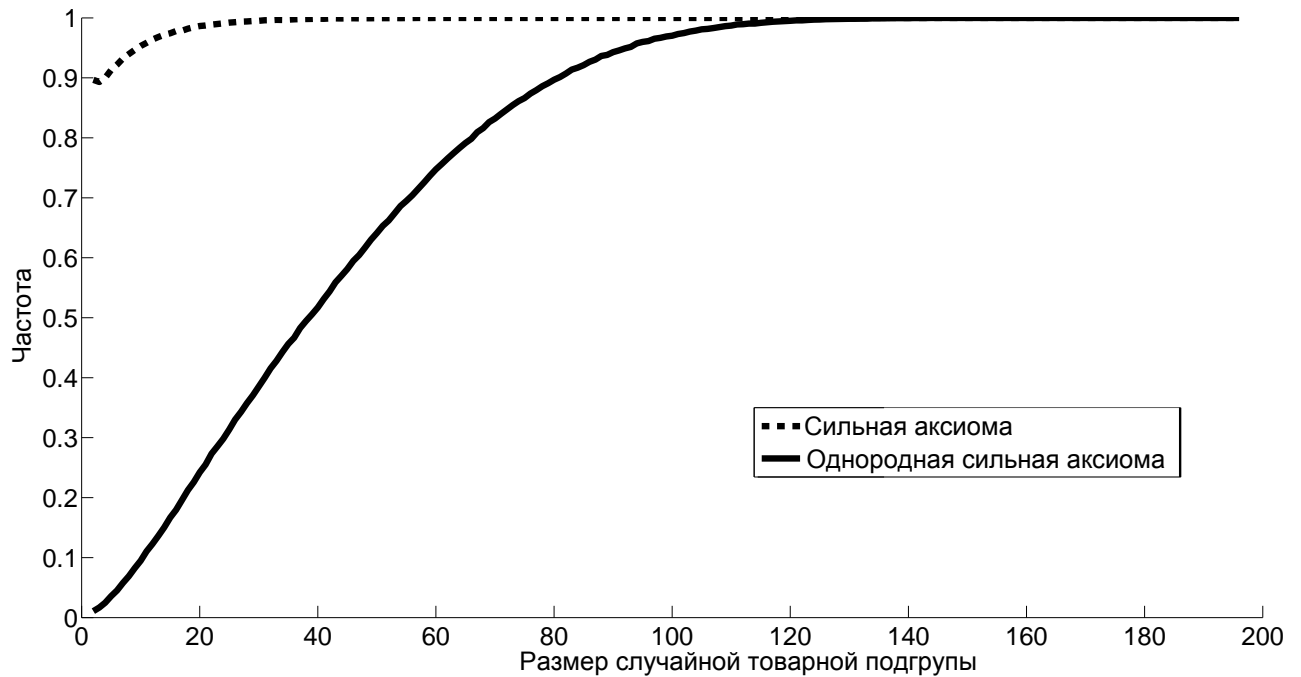


Рис. 2.1. Частота выполнения аксиом выявленного предпочтения на случайных подгруппах торговой статистики Венгрии в зависимости от размера случайной товарной подгруппы.

Из рисунка видно, что для любого размера случайных подгрупп частота выполнения сильной аксиомы выявленного предпочтения близка к единице. Это означает, что наугад выбранная товарная подгруппа с большой вероятностью будет удовлетворять сильной аксиоме выявленного предпочтения и окажется отделимой. Это не согласуется с представлениями о том, что в структуре потребительского спроса не должно быть много отдельных товарных сегментов и что наугад выбранная товарная подгруппа вряд ли окажется осмысленной. Это также говорит о низкой информативности факта выполнения сильной аксиомы выявленного предпочтения.

Для однородной сильной аксиомы зависимость другая. Видно, что для групп относительно небольшого размера частота выполнения однородной сильной аксиомы невысока. Это означает, что наугад выранная товарная

подгруппа небольшого размера с большой вероятностью не будет удовлетворять однородной сильной аксиоме и, как следствие, не окажется отделимой. Это также говорит о высокой информативности факта выполнения однородной сильной аксиомы для товарных групп небольшого размера, что повышает уверенность в том, что товарная группа, являющаяся отделимой в классе Φ_H , действительно представляет независимый сегмент в структуре потребительского спроса, в котором существует тесная связь между спросом и ценами на товары этой подгруппы.

Для подгрупп большего размера частота выполнения однородной сильной аксиомы приближается к единице. Это можно объяснить следующим образом. Торговая статистика всех 196 товаров удовлетворяет однородной сильной аксиоме. Если исключить небольшое количество товаров, то это не приведёт к существенным изменениям в индексах цен Пааше, которые используются при проверке выполнения однородной сильной аксиомы. Следовательно, это не приведёт к существенным изменениям в вероятности выполнения однородной сильной аксиомы.

Для торговой статистики Нидерландов была проведена аналогичная процедура. График зависимости частоты выполнения аксиом выявленного предпочтения от размера случайных подгрупп представлен на рисунке 2.2.

Графики получились похожими на графики на рисунке 2.1. Основные отличия заключаются в том, что все частоты стали визуально ниже. Это объясняется тем, что в торговой статистике Нидерландов более, чем в два раза больше временных периодов, чем в торговой статистике Венгрии. Однако, даже при таком увеличении количества периодов наблюдений, частота выполнения сильной аксиомы по-прежнему остаётся довольно высокой даже для подгрупп небольшого размера. Для случайных подгрупп, состоящих более чем из 30 товаров, эта частота мало отличается от единицы.

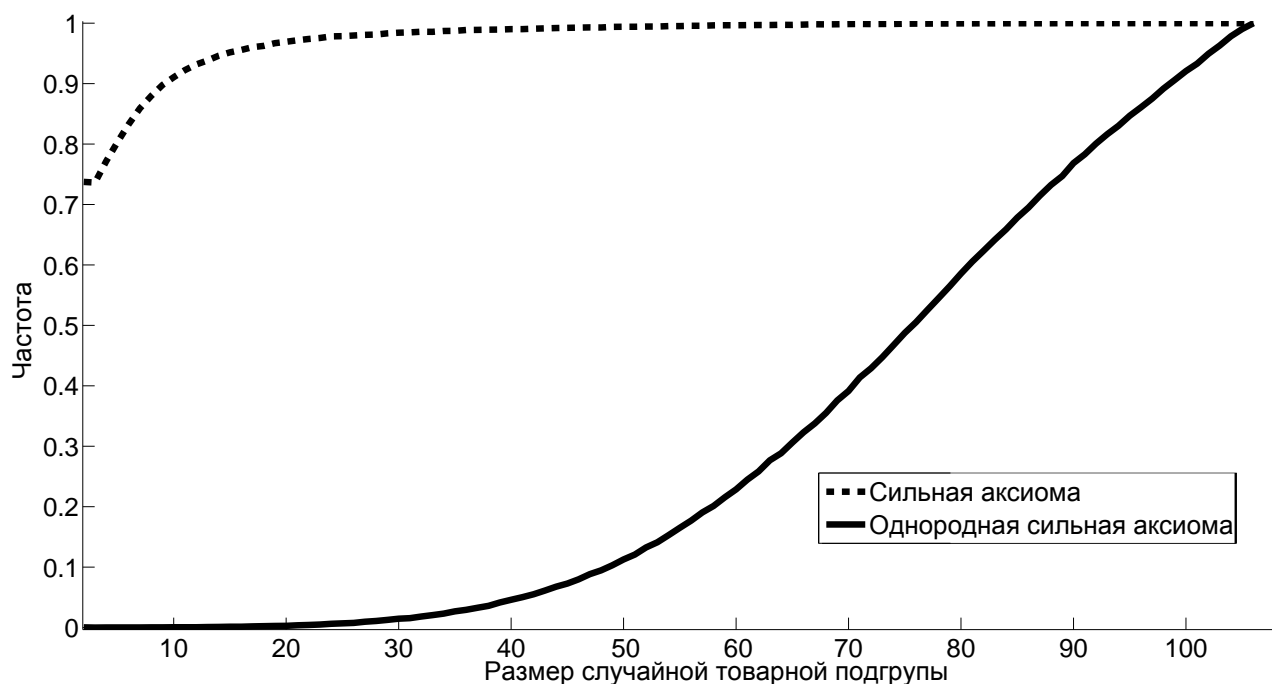


Рис. 2.2. Частота выполнения аксиом выявленного предпочтения на случайных подгруппах торговой статистики Нидерландов в зависимости от размера случайной товарной подгруппы.

Заметно ниже стали частоты выполнения однородной сильной аксиомы. Если для торговой статистики Венгрии частота выполнения однородной сильной аксиомы становилась мало отличной от единицы уже для случайных подгрупп, содержащих 120 товаров, т.е. примерно 61% от количества всех товаров, то для торговой статистики Нидерландов эта частота становится близкой к единице для случайных подгрупп, содержащих не менее 100 товаров, т.е. примерно 94% от количества всех товаров. Это является ещё более сильным подтверждением высокой информативности факта выполнения однородной сильной аксиомы.

Подводя итог этих численных экспериментов, можно с уверенностью сказать, что однородная сильная аксиома выявленного предпочтения является более предпочтительным критерием для проверки делимости товарных подгрупп, поскольку выделяет существенно меньше делимых товарных подгрупп, что сокращает нагрузку на эксперта, проверяющего адекватность

выделенных отделимых товарных подгрупп.

2.2. Оценки мощности тестов выполнения аксиом выявленного предпочтения

Этот раздел посвящён оценке мощности тестов выполнения аксиом выявленного предпочтения. Под мощностью в данном случае понимается вероятность нарушения аксиом выявленного предпочтения на торговых статистиках, в которых отсутствует связь между объёмами потребления с ценами. Такие торговые статистики создаются искусственно с помощью разных алгоритмов. В [45], например, в качестве цен берутся фактические цены, а в качестве объёмов потребления используются случайные неотрицательные векторы, генерируемые независимо для каждого периода времени. Недостатком этого подхода является то, что автор не учитывает корреляцию в объёмах потребления за последовательные периоды времени, которая наблюдается во временных рядах объёмов потребления. Это делает генерируемые автором торговые статистики сильно отличающимися от фактических данных.

В рамках диссертационного исследования предложен новый подход к оценке мощности тестов выполнения аксиом выявленного предпочтения. Пусть есть некоторая торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$. Рассмотрим случайную торговую статистику $\widetilde{TS} = \{(\widetilde{P}^t, X^t)\}_{t=1}^T$, в которой в качестве объёмов потребления используются фактические объёмы потребления X^t , а цены являются случайными. Цены отдельных товаров \widetilde{P}_i^t являются случайным процессом с таким распределением, что логарифмы отношения последовательных цен

$$z_i^t = \log \left(\frac{P_i^t}{P_i^{t-1}} \right) \quad (2.2.1)$$

являются авторегрессионным процессом $AR(p_i)$. Это означает, что случайные величины z_i^t удовлетворяют равенствам

$$z_i^t = \beta_{i,0} + \sum_{\tau=1}^{p_i} \beta_{i,\tau} z_i^{t-\tau} + \varepsilon_{i,t}, \quad t = \overline{p_i + 2, T}, \quad (2.2.2)$$

$$z_i^t = \log \left(\frac{P_i^t}{P_i^{t-1}} \right), \quad t = \overline{1, p_i + 1}, \quad (2.2.3)$$

где $\varepsilon_{i,t}$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ_i^2 . Цены разных товаров предполагаются независимыми.

Авторегрессионная модель позволяет учитывать зависимость величин z_i^t от их значений в предыдущих периодах времени. Параметры $\beta_{i,\tau}$ и σ_i^2 авторегрессионных моделей оцениваются методом наименьших квадратов по фактическим ценам. Порядки p_i авторегрессионных моделей подбираются с помощью критерия Акаике (см., например, [64]).

Мощность тестов выполнения аксиомы выявленного предпочтения определяется как вероятность того, что она выполняется для случайной торговой статистики \widetilde{TS} . Для оценки этой вероятности генерируется $B = 20\,000$ реализаций случайной торговой статистики \widetilde{TS} . Обозначим эти реализации через $\{\widetilde{TS}_b\}_{b=1}^B$. Мощность \widehat{W}_G теста выполнения сильной аксиомы выявленного предпочтения определяется как частота нарушения сильной аксиомы на торговых статистиках $\{\widetilde{TS}_b\}_{b=1}^B$. Мощность \widehat{W}_H теста выполнения однородной сильной аксиомы выявленного предпочтения определяется аналогично.

Целью данного исследования является оценка вероятности нарушения аксиом выявленного предпочтения при отсутствии явной связи между объёмами потребления и ценами. При этом существенным является то, что в исходной товарной группе, по которой строится исходная торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$, есть сильная связь между объёмами потребления и

спросом, т.е. группа может рассматриваться как отдельный сегмент. Поэтому, в качестве исходных товарных групп в рамках диссертационного исследования использовались товарные группы торговой статистики Венгрии, выделенные статистической службой Венгрии и удовлетворяющие однородной сильной аксиоме. Список этих групп вместе с оценками мощностей \widehat{W}_G и \widehat{W}_H приводится в таблице 2.1.

Таблица 2.1: Показатели мощности тестов выполнения аксиом выявленного предпочтения.

Товарная группа	\widehat{W}_H	\widehat{W}_G
Мясо	0.99885	0.02425
То же + мясные продукты	0.99665	0.00300
То же + рыбные продукты	0.99590	0.00000
То же + масло и жир (без маргарина)	0.99615	0.00080
То же + маргарин	0.99665	0.00205
Пищевые продукты	0.99075	0.01945
То же + сладости + овощи и фрукты	0.97540	0.04835
То же + напитки	0.99555	0.31590
То же + табак	0.99565	0.37710
То же + одежда (без обуви)	0.99560	0.18590
То же + обувь	0.99690	0.10725
То же + жилищное обслуживание	0.99710	0.11835
То же + энергия в быту	0.99390	0.06625
То же + бытовое оснащение	0.99120	0.13135
То же + здравоохранение и гигиена	0.98975	0.10915
То же + транспорт и информация	0.99385	0.20065

Таблица 2.1: Показатели мощности тестов выполнения аксиом выявленного предпочтения (продолжение).

Товарная группа	\widehat{W}_H	\widehat{W}_G
То же + образование, культура, спорт, отдых	0.99910	0.16085
Все товары	0.99820	0.11710
Фрукты	0.99980	0.29495
Напитки	0.99985	0.53080
То же + табак + одежда	0.99985	0.13670
То же + жилищное обслуживание	0.99985	0.37800
То же + энергия в быту	0.99970	0.36595
То же + бытовое оснащение	0.99910	0.24710
То же + здравоохранение и гигиена	0.99910	0.25350
То же + транспорт и информация	0.99965	0.13800
Одежда, жилищное обслуживание, энергия в быту, бытовое оснащение, здравоохранение	0.99630	0.01460
Амортизация личного жилья, энергия в быту, бытовое оснащение, здравоохранение и гигиена	0.98545	0.02960

Из этой таблицы видно, что показатели мощности теста выполнения однородной сильной аксиомы лежат в интервале от 0.97540 до 0.99985 для всех исследуемых товарных групп, что говорит об очень высокой мощности этого теста. Для сильной аксиомы максимальная мощность равна 0.53080, причём для большинства групп она значительно ниже 0.5. Распределение

показателей мощности теста выполнения сильной аксиомы представлено в виде гистограммы на рисунке 2.3.

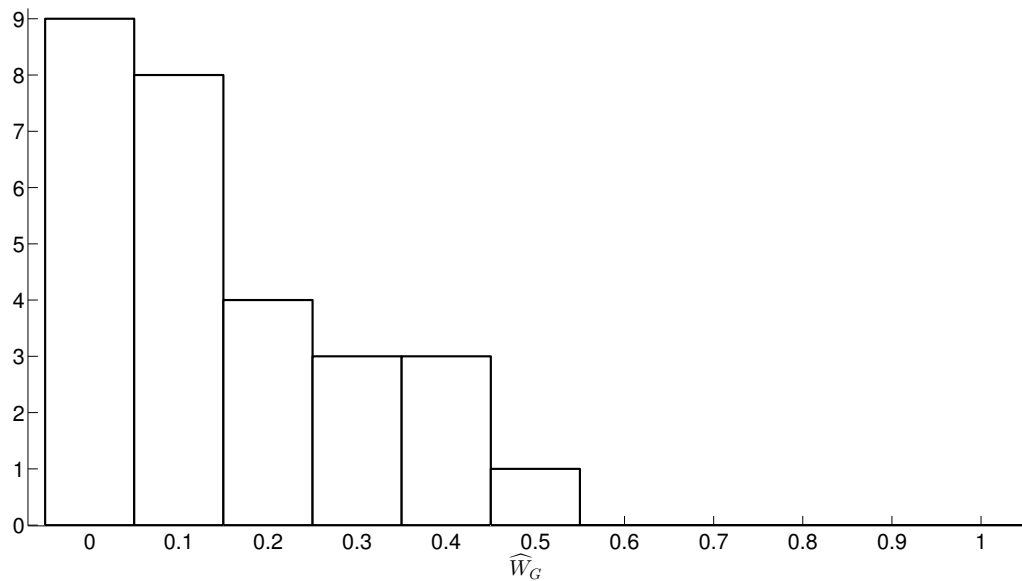


Рис. 2.3. Гистограмма распределения значений \widehat{W}_G для товарных групп, перечисленных в таблице 2.1. Высоты столбцов показывают количество товарных групп, показатели \widehat{W}_G которых попадают в соответствующие диапазоны значений. Например, высота второго столбца равна 8. Это означает, что у 8 товарных групп показатель \widehat{W}_G лежит в интервале от 0.05 до 0.15.

Высокие показатели мощности теста выполнения однородной сильной аксиомы говорят о том, что выполнение этой аксиомы для торговой статистики некоторой товарной группы говорит о наличии сильной зависимости между ценами и объёмами потребления товарой этой группы, тогда как сильная аксиома выявленного предпочтения может выполняться и для групп, в которых нет зависимости между ценами и объёмами потребления. Это является ещё одним аргументом в пользу выбора однородной сильной аксиомы в качестве инструмента для анализа сегментации товарных рынков.

2.3. Оценки размеров прогнозных множеств, построенных с помощью аксиом выявленного предпочтения

В 1.4.1 описаны методы прогнозирования с помощью аксиом выявленного предпочтения на основе торговой статистики. В результате применения описанных методов получается прогнозное множество, состоящее в общем случае из более, чем одного вектора. Одной из характеристик этого множества является его размер, который зависит как от количества временных периодов торговой статистики, так и от выбранной аксиомы выявленного предпочтения. Чем больше размер прогнозного множества, тем менее оно полезно на практике, поскольку даёт мало информации о величинах, которые необходимо спрогнозировать. Для оценки влияния выбора аксиомы выявленного предпочтения на размер прогнозного множества был проведён численный эксперимент.

Рассмотрим некоторую торговую статистику $TS = \{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ и построим случайную торговую статистику $\widetilde{TS} = \{(\widetilde{P}^t, X^t)\}_{t=1}^T$, в которой объёмы потребления взяты из исходной торговой статистики TS , цены первых $T - 1$ периодов также взяты из исходной торговой статистики, т.е. $\widetilde{P}^t = P^t$ для t от 1 до $T - 1$, а цены в период времени T являются случайным вектором, имеющим равномерное распределение на неотрицательной части единичной сферы $\{P \in \mathbb{R}_+^m \mid \|P\| = 1\}$. В качестве оценок размеров прогнозного множества при прогнозировании цены в период T , соответствующей объёму потребления X^T , используются вероятности P_G и P_H выполнения аксиом выявленного предпочтения – сильной и однородной сильной соответственно.

Для оценок вероятностей P_G и P_H используется метод Монте-Карло. Генерируются 100 000 реализаций случайной торговой статистики \widetilde{TS} . В качестве оценок \widehat{P}_G и \widehat{P}_H вероятностей P_G и P_H используются частоты

выполнения сильной и однородной сильной аксиомам выявленного предпочтения на сгенерированных торговых статистиках. Описанная процедура применялась к торговым статистикам товарных групп, приведённых в таблице 2.1. Полученные оценки \hat{P}_G и \hat{P}_H представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2: Показатели оценок размеров множеств прогнозов.

Товарная группа	\hat{P}_H	\hat{P}_G
Мясо	0.3673	0.4515
То же + мясные продукты	0.29239	0.76349
То же + рыбные продукты	0.2763	0.71422
То же + масло и жир (без маргарина)	0.26541	0.44701
То же + маргарин	0.26906	0.43762
Пищевые продукты	0.27244	1
То же + сладости + овощи и фрукты	0.20612	0.54206
То же + напитки	0.13977	0.30826
То же + табак	0.15899	1
То же + одежда (без обуви)	0.17967	0.38646
То же + обувь	0.1813	0.33246
То же + жилищное обслуживание	0.17606	0.27887
То же + энергия в быту	0.17104	0.28093
То же + бытовое оснащение	0.1535	1
То же + здравоохранение и гигиена	0.15713	1
То же + транспорт и информация	0.15538	1
То же + образование, культура, спорт, отдых	0.15969	1
Все товары	0.16237	1
Фрукты	0.20574	0.42853

Таблица 2.2: Показатели оценок размеров множеств прогнозов (продолжение).

Товарная группа	\hat{P}_H	\hat{P}_G
Напитки	0.10804	0.31209
То же + табак + одежда	0.21383	0.61266
То же + жилищное обслуживание	0.1856	0.39121
То же + энергия в быту	0.1728	0.21486
То же + бытовое оснащение	0.14919	1
То же + здравоохранение и гигиена	0.14919	1
То же + транспорт и информация	0.1324	1
Одежда, жилищное обслуживание, энергия в быту, бытовое оснащение, здравоохранение	0.20401	1
Амортизация личного жилья, энергия в быту, бытовое оснащение, здравоохранение и гигиена	0.16386	1

Из полученных результатов видно, что для большинства рассмотренных товарных групп частота выполнения сильной аксиомы близка к единице. Это означает, что соответствующие прогнозные множества мало отличаются от тривиального прогнозного множества – неотрицательной части единичной сферы $\{P \in \mathbb{R}_+^m \mid \|P\| = 1\}$, – и не дают практически никакой дополнительной информации о ценах. Это приводит к тому, что подход к прогнозированию цен с помощью сильной аксиомы практически непригоден для прогнозирования цен. Прогнозные множества, построенные с помощью однородной сильной аксиомы, имеют существенно меньший размер,

что говорит о более узком диапазоне для прогнозируемых цен. Это делает подход к прогнозированию цен с помощью однородной сильной аксиомы пригодным для практики прогнозирования цен.

ГЛАВА 3

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ДАННЫХ В РАМКАХ
НЕОКЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА
С ДВУМЯ РАЦИОНАЛЬНЫМИ РЕПРЕЗЕНТАТИВНЫМИ
ПОТРЕБИТЕЛЯМИ****3.1. Исследование бюджетной статистики Великобритании**

В 1.5 было отмечено, что задачи проверки торговой статистики на согласованность с неоклассической моделью потребительского спроса с функциями полезности из класса Φ_G являются NP-полными уже для случая двух репрезентативных потребителей. Основная сложность заключается в разделении совокупного объёма потребления на объёмы потребления отдельных репрезентативных потребителей. Одним из путей преодоления этой сложности является использование более детальной информации о потребительском поведении домашних хозяйств. Примером такой более детальной информации является бюджетная статистика.

Бюджетная статистика содержит данные о ценах и потреблении набора товаров отдельными домашними хозяйствами. Для получения таких данных несколько домашних хозяйств ведут дневники расходов, в которые записывают свои расходы на каждый товар из выделенной группы. В рамках диссертационной работы был проведён анализ бюджетной статистики Великобритании. Эта статистика была собрана в ходе опроса домашних хозяйств Family Expenditure Survey в период с 1975 по 1999. Каждый год для участия в опросе отбиралось около 7 000 домашних хозяйств. Каждое из опрошенных домашних хозяйств записывало расходы по 68 категориям товаров в течение двух недель. Данные о распределении расходов на эти товары, а также различные социально-демографические характе-

ристики домашних хозяйств, участвовавших в опросе, доступны в виде онлайн-приложения к работе [44]. Цены рассматриваемых категорий товаров, представляющие собой индексы, выражающие стоимости товаров в ценах 1975 года, были предоставлены авторами работы [44] по личному запросу.

Если сложить объемы потребления всех домашних хозяйств по каждой категории товаров за каждый год, то получается агрегированная торговая статистика, содержащая цены и агрегированное потребление группы товаров. Эта торговая статистика не удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения. Для того, чтобы эффективно проверить согласованность торговой статистики с неоклассической моделью потребительского спроса с двумя потребителями, необходимо сделать предположение о разделении совокупного потребления между двумя репрезентативными потребителями. Для этого был проведён анализ динамики неравенства распределения расходов домашних хозяйств, участвовавших в опросе.

Для сравнения неравенства в расходах домашних хозяйств в начале и в конце рассматриваемого периода, были построены кривые Лоренца для 1975 и 1999 годов. Кривая Лоренца показывает распределение расходов домашних хозяйств и позволяет оценить степень неравенства распределения расходов. Исходными данными для построения кривых Лоренца являются данные о расходах домашних хозяйств. Пусть есть N домашних хозяйств. Обозначим расходы домашнего хозяйства i через I_i . Будем считать, что домашние хозяйства упорядочены по возрастанию расходов, т.е. $I_1 \leq I_2 \leq \dots \leq I_N$. Обозначим совокупные расходы всех домашних хозяйств через I . Введём также величины

$$S_i = \frac{\sum_{j=1}^i I_j}{I}.$$

Кривая Лоренца строится по набору точек

$$(0, 0), \left(\frac{1}{N}, S_1\right), \left(\frac{2}{N}, S_2\right), \dots, \left(\frac{N-1}{N}, S_{N-1}\right), (1, 1).$$

Кривая Лоренца всегда лежит не выше прямой, соединяющей точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$, и совпадает с ней только при равномерном распределении расходов населения. Удвоенная площадь фигуры, заключенной между этой прямой и кривой Лоренца, называется коэффициентом Джини. Этот индекс показывает степень неравенства распределения расходов населения.

Кривые Лоренца для 1975 и 1999 годов представлены на рисунке 3.1. Из рисунка видно, что неравенство распределения расходов населения в 1999 году выше, чем в 1975 году. Были также вычислены коэффициенты Джини за каждый год. График коэффициента Джини представлен на рисунке 3.2. Из графика видно, что в период между 1983 и 1989 годами в Великобритании наблюдался сильный рост неравенства распределения расходов домашних хозяйств. Это наблюдение позволило выдвинуть гипотезу о том, что в рассматриваемый период в Великобритании формировалась новая группа более богатых домашних хозяйств, потребительское поведение которых сильно отличалось от поведения остальных домашних хозяйств. Из-за этого агрегированная торговая статистика не согласуется с моделью Парето и необходимо рассматривать более общую неоклассическую модель потребительского спроса с двумя репрезентативными потребителями, которые разделяются по некоторому уровню расходов. Предположение о том, что репрезентативные потребители должны разделяться именно уровнем расходов, является дополнительным модельным предположением.

Для проверки согласованности агрегированной торговой статистики с неоклассической моделью с двумя репрезентативными потребителями при указанном модельном предположении все домашние хозяйства в каждом году

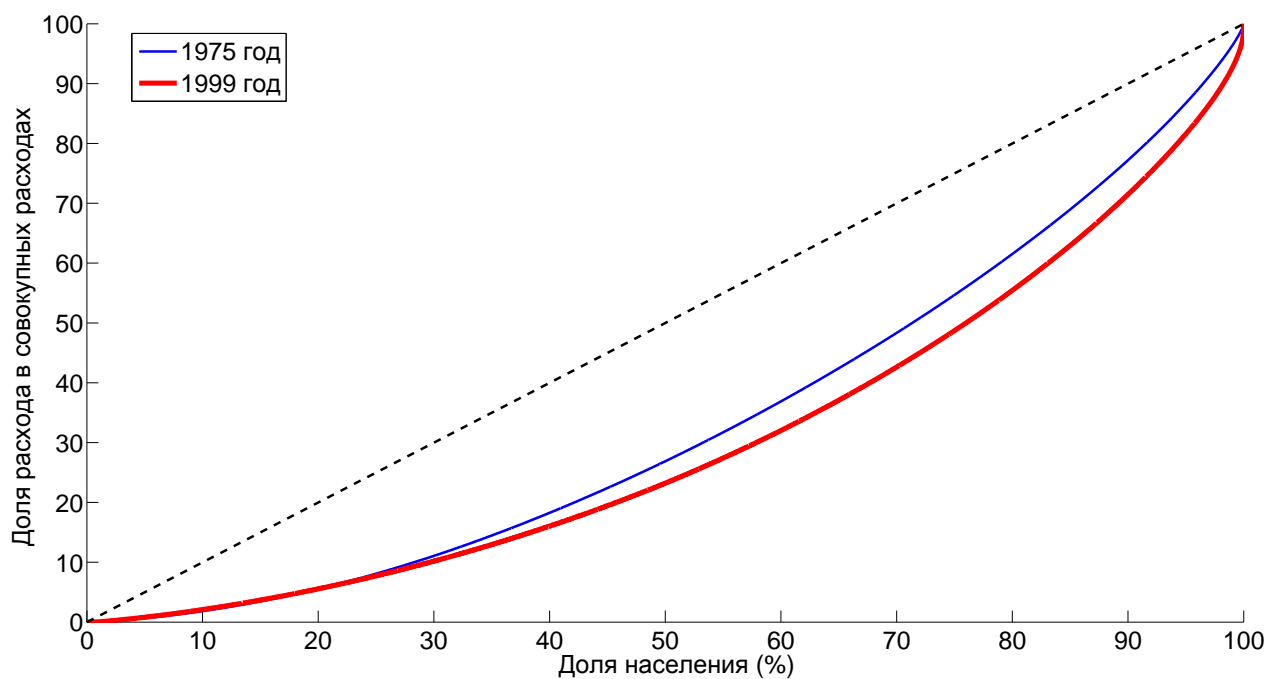


Рис. 3.1. Кривые Лоренца, построенные по данным о расходах домашних хозяйств в 1975 и 1999 годах.



Рис. 3.2. Коэффициенты Джини в Великобритании по годам, построенные по данным о расходах домашних хозяйств.

были разбиты на 100 страт по уровням расходов. Агрегированная торговая статистика за период с 1975 по 1987 удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения. При добавлении наблюдений за

1988 год, агрегированная торговая статистика перестает удовлетворять однородной сильно аксиоме выявленного предпочтения. Однако, если исключить потребление одного процента наиболее богатых¹ домашних хозяйств в 1988 году, то агрегированная торговая статистика удовлетворяет однородной сильной аксиоме.

При добавлении агрегированного потребления за 1989 год, агрегированная статистика перестает удовлетворять однородной сильной аксиоме. Для того, чтобы она удовлетворяла однородной сильной аксиоме достаточно исключить из данных за 1989 потребление двух процентов наиболее богатых домашних хозяйств. При этом, торговая статистика, сформированная из потребления одного процента наиболее богатых домашних хозяйств в 1988 году и двух процентов наиболее богатых домашних хозяйств в 1989 году, также удовлетворяет однородной сильной аксиоме. Таким образом, вся агрегированная статистика за период с 1975 по 1989 оказывается разбита на две торговые статистики, удовлетворяющие однородной сильной аксиоме. Первая торговая статистика содержит потребления большинства домашних хозяйств. Вторая содержит потребление нескольких процентов наиболее богатых домашних хозяйств.

Таким образом, если ограничиваться периодом с 1975 по 1989 годы, то можно говорить о выделении двух групп домашних хозяйств. Потребление первой группы определяется совокупным потреблением большинства домашних хозяйств, исключая, как описано выше, потребление нескольких процентов наиболее богатых домашних хозяйств. Будем называть эту группу основной. Потребление второй группы складывается из совокупного потребления тех наиболее богатых домашних хозяйств, которые были исключены в 1988 и 1989 годах. Будем называть вторую группу группой

¹Здесь и далее в этом разделе под наиболее богатыми домашними хозяйствами понимаются домашние хозяйства с наибольшими расходами среди всех домашних хозяйств, принимавших участие в опросе Family Expenditure Survey

наиболее богатых домашних хозяйств.

При добавлении последующих периодов ситуация повторяется. Если к торговой статистике основной группы добавить совокупное потребление всех домашних хозяйств за 1990 год, то получающаяся при это торговая статистика не удовлетворяет однородной сильной аксиоме. Однако, если к торговой статистике основной группы добавить потребление всех домашних хозяйств, исключая потребление двух процентов наиболее богатых домашних хозяйств, то получающаяся торговая статистика удовлетворяет однородной сильной аксиоме. При этом, если добавить потребление двух процентов наиболее богатых домашних хозяйств в торговую статистику группы наиболее богатых домашних хозяйств, то получается торговая статистика, удовлетворяющая однородной сильной аксиоме.

При добавлении последующих периодов проводилась аналогичная процедура. Сначала к торговой статистике основной группы добавлялось совокупное потребление всех домашних хозяйств за один год. Это приводило к нарушению однородной сильной аксиомы. Из совокупного потребления исключалось потребление такого количества выделенных ранее страт наиболее богатых домашних хозяйств, чтобы торговая статистика основной группы удовлетворяла однородной сильной аксиоме, и при этом, чтобы торговая статистика группы наиболее богатых домашних хозяйств с добавлением потребления исключаемых из основного класса домашних хозяйств также удовлетворяла однородной сильной аксиоме.

С каждым годом количество страт, которые необходимо было выделить в группу наиболее богатых домашних хозяйств, не убывало. Для последнего из рассматриваемых периодов, т.е. для 1999 года, необходимо отделить 4% наиболее богатых домашних хозяйств от основной группы. Зависимость доли домашних хозяйств по уровням расходов, которые были отнесены к основной группе, от года представлена на рисунке 3.3.

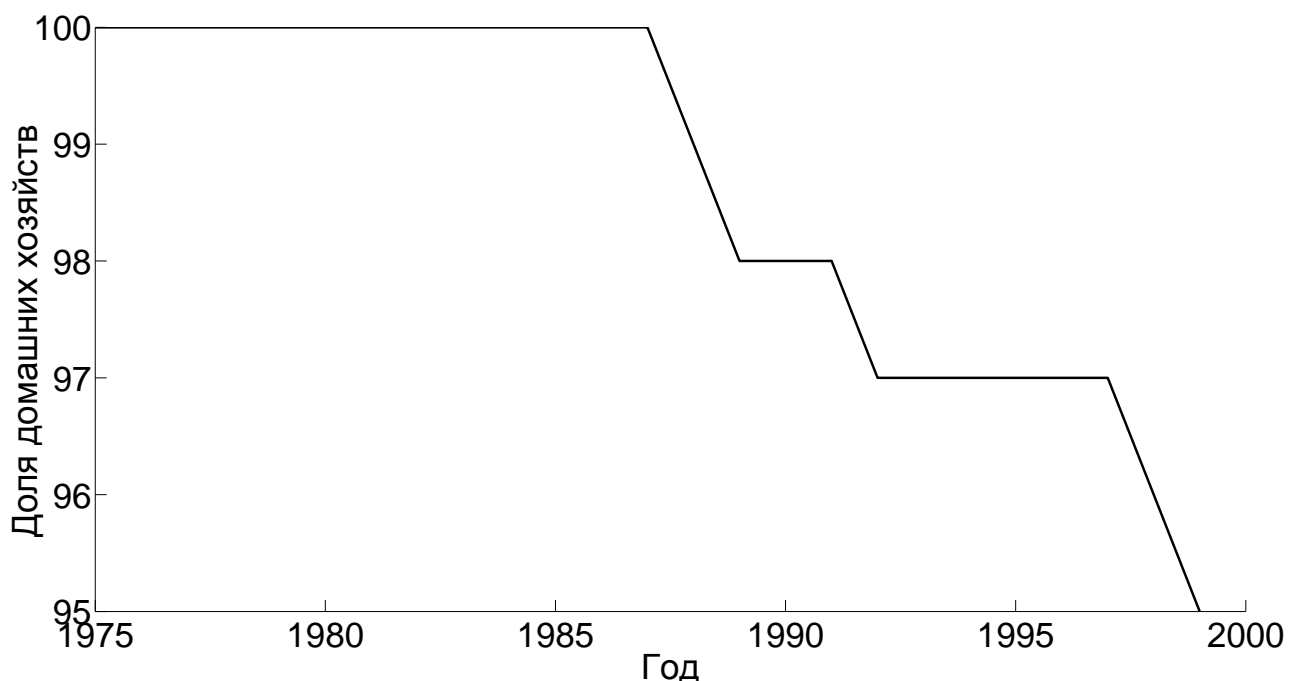


Рис. 3.3. Доля домашних хозяйств, начиная с наименее богатых, которая входит в состав основной группы.

Таким образом, удалось разделить агрегированную торговую статистику на две торговые статистики, удовлетворяющие однородной сильной аксиоме. Это говорит о том, что агрегированная торговая статистика согласуется с неоклассической моделью потребительского спроса с двумя репрезентативными потребителями с функциями полезности из класса Φ_H . То, что размер группы наиболее богатых домашних хозяйств со временем не убывает согласуется со сформулированной ранее гипотезой о том, что в Великобритании в рассматриваемый период формировался новая группа наиболее богатых домашних хозяйств, образ жизни которых сильно отличается от образа жизни остальных домашних хозяйств.

Для сравнения двух выделенных групп были рассчитаны индексы спроса Конюса-Дивизиа для этих двух групп. Графики полученных индексов представлены на рисунке 3.4. Из графиков видно, что индекс спроса группы наиболее богатых домашних хозяйств сильно растет, демонстрируя более чем двухкратное увеличение за 11 лет, несмотря на то, что в конце рассмат-

риваемого периода эта группа составляет всего 4% домашних хозяйств. Индекс спроса основной группы при этом колеблется вокруг фиксированного уровня.

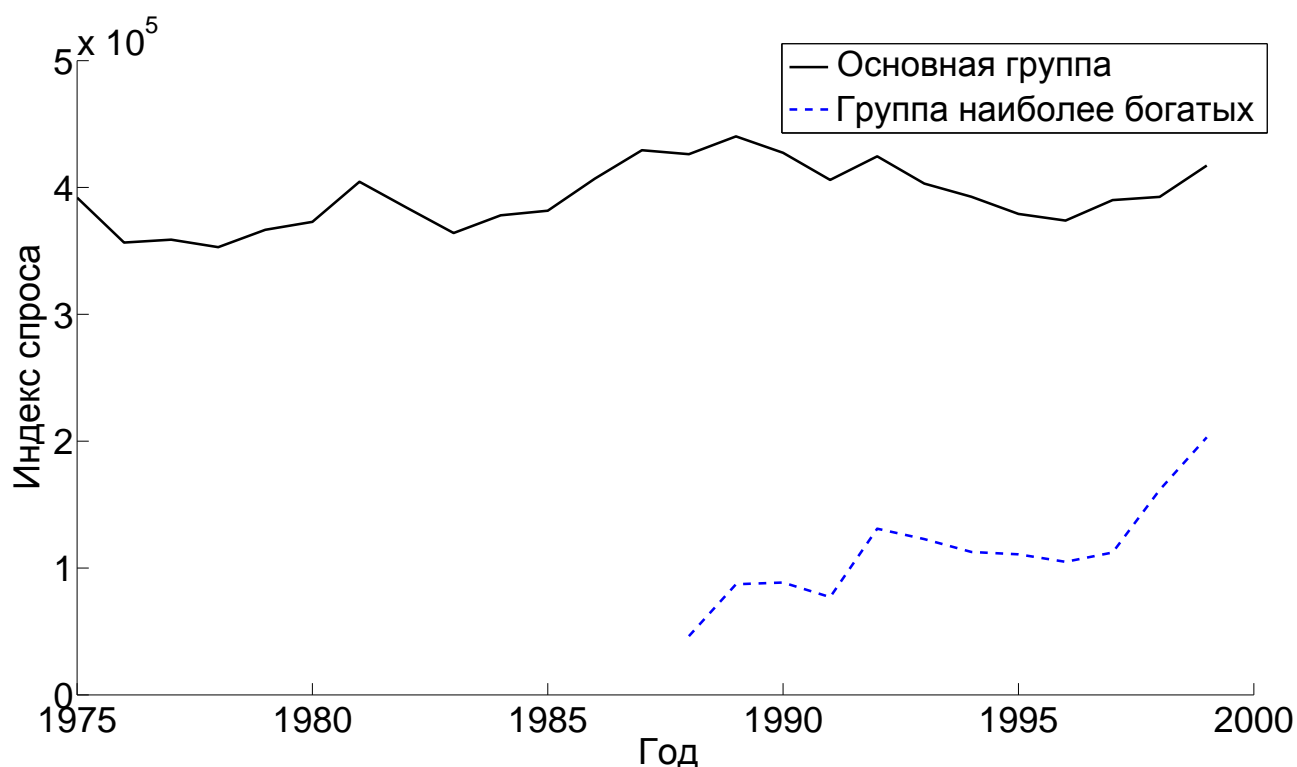


Рис. 3.4. Индексы спроса на все товары для двух выделенных групп.

Для сравнения расходов двух групп был построен график доли расходов группы наиболее богатых домашних хозяйств в совокупных расходах всех анализируемых домашних хозяйств. График представлен на рисунке 3.5. Эта доля очень быстро растет и поднимается до 12% в 1999 году. Этот график показывает, что расходы группы наиболее богатых домашних хозяйств очень велики по сравнению с расходами основной группы, что согласуется с высоким коэффициентом Джини в 1999 году.

Для сопоставления структур потребления двух выделенных групп все товары и услуги были разбиты на 4 товарные группы:

- 1) Продукты питания;

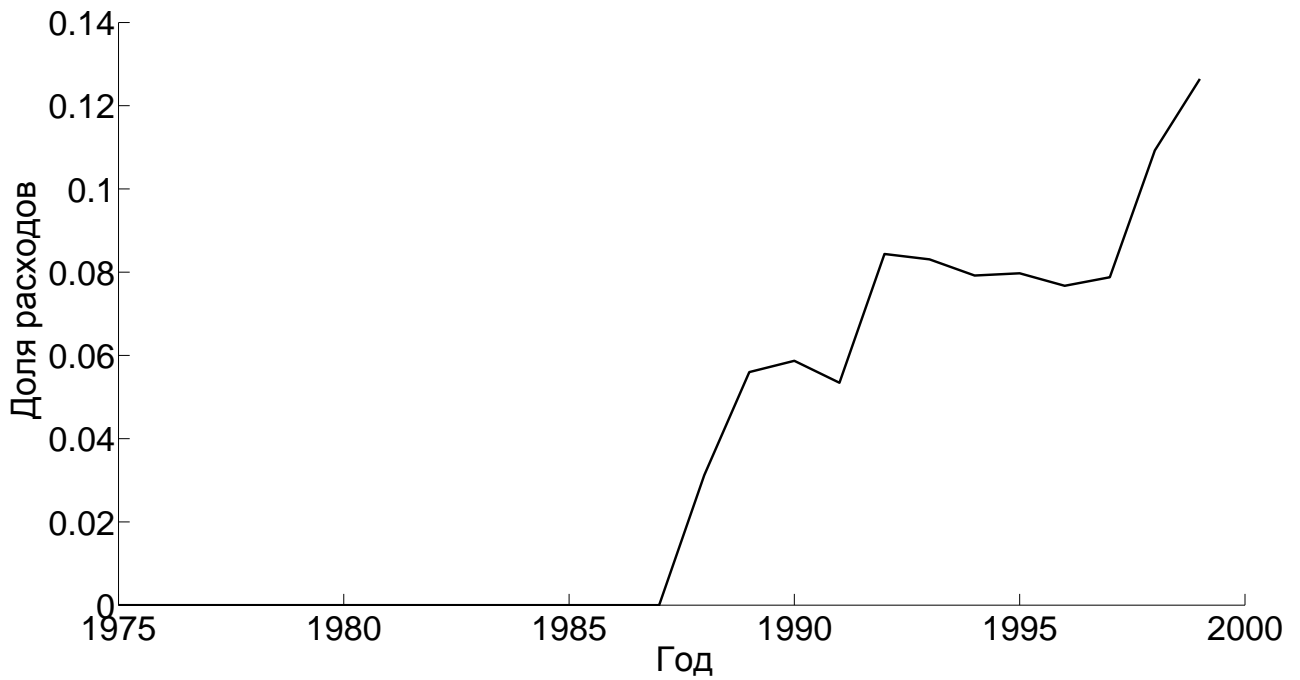


Рис. 3.5. Доля расходов группы наиболее богатых домашних хозяйств.

- 2) Одежда и обувь;
- 3) Аренда, энергия, ремонт и связь;
- 4) Транспорт и развлечения.

Торговые статистики этих товарных групп для каждой из выделенных групп домашних хозяйств не удовлетворяют однородной сильной аксиоме. Поэтому, для этих товарных групп были вычислены обобщенные индексы спроса Конюса-Двизиа с помощью описанного в 1.3 обобщенного непараметрического метода. Эти индексы использовались для расчета средней доли потребления товаров каждой из товарных групп.

Опишем метод расчета средних долей потребления товаров из нескольких товарных групп. Пусть задана некоторая торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$. Обозначим индексы спроса на все товары и на товары из группы i через F_0^t и F_i^t . Средняя доля потребления товаров из группы i оценивается как

$$s_i = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{F_i^t}{F_0^t}}{\sum_{j=1}^4 \sum_{t=1}^T \frac{F_j^t}{F_0^t}}. \quad (3.1.1)$$

Средние доли потребления по четырем товарным группам для выделенных групп домашних хозяйств представлены в таблице 3.1. Основное отличие между двумя группами домашних хозяйств заключается в соотношении средних долей потребления товаров из групп «Продукты питания» и «Транспорт и развлечения». У группы наиболее богатых домашних хозяйств потребление товаров из группы «Транспорт и развлечения» примерно в два раза выше, чем потребление товаров из группы «Продукты питания». Для основной группы домашних хозяйств средние доли потребления товаров из этих двух товарных групп почти совпадают.

Таблица 3.1. Средние доли потребления по товарным группам.

Товарная группа	Основная группа	Группа наиболее богатых
Продукты питания	0.27161	0.17737
Одежда и обувь	0.12294	0.093739
Аренда, энергия, ремонт и связь	0.30658	0.34376
Транспорт и развлечения	0.29887	0.38513

Рассматриваемый в бюджетной статистике Великобритании период заканчивается 1999 годом. На рисунке 3.6 представлен график коэффициента Джини с 1977 по 2016. Данные взяты с официального сайта офиса национальной статистики Великобритании². Этот график отличается от графика, приведенного на рисунке 3.2 потому, что, во-первых, использовались данные о доходах, а не о расходах, и, во-вторых, данные получены по другим домашним хозяйствам. Однако, по форме этот график в период с 1977 по 1999 похож на график на рисунке 3.2. В частности, на нем виден рост неравенства распределения доходов примерно в тот же период – с 1983 по 1989. Видно, что с 2000 года коэффициент Джини начал медленно

²<https://www.ons.gov.uk/peoplepopulationandcommunity/personalandhouseholdfinances/incomeandwealth/datasets/householddisposableincomeandinequality>

снижаться, что говорит о снижении неравенства распределения доходов. Представляет интерес продолжение данного исследования на период после 1999 года с целью изучения последующей динамики в размере группы наиболее богатых домашних хозяйств.

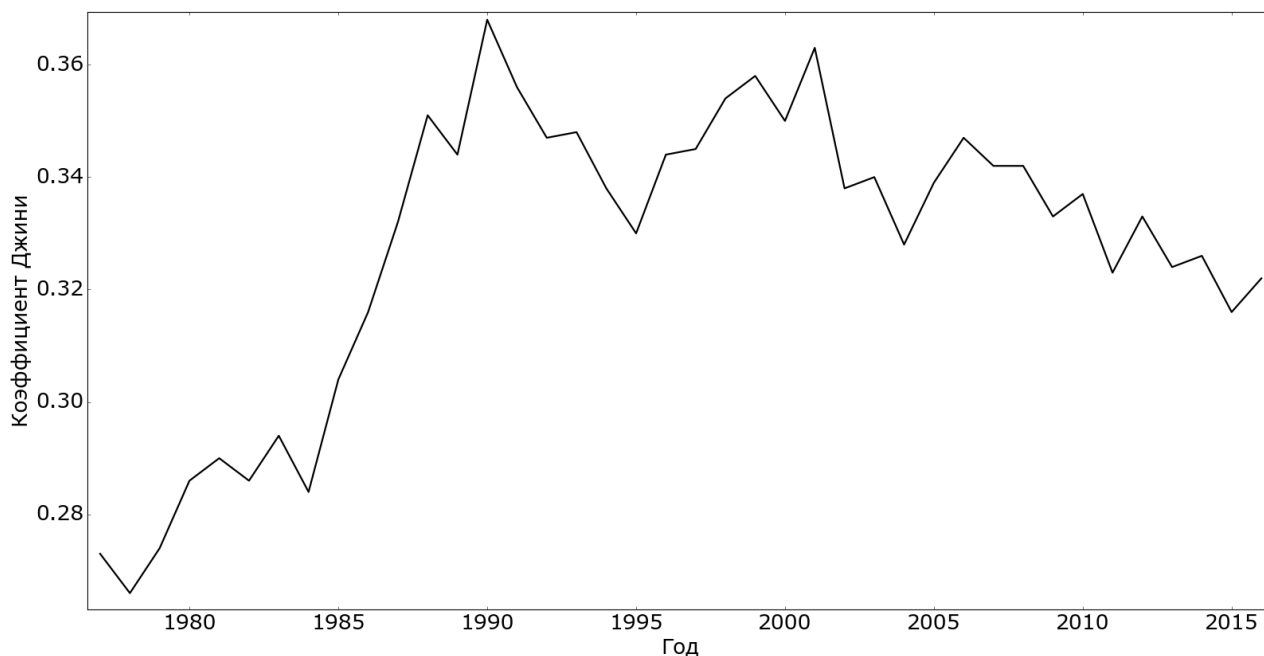


Рис. 3.6. Коэффициент Джини, рассчитанный офисом национальной статистики Великобритании.

3.2. Исследование торговой статистики фондового рынка Китая

Бюджетная статистика, пример исследования которой рассмотрен в разделе 3.1, доступна не так часто, как торговая статистика. В случае, когда имеется торговая статистика без порождающей её бюджетной статистики, которая не согласуется с моделью Парето, необходимы другие модельные предположения для того, чтобы можно было исследовать эту статистику с точки зрения неоклассической модели потребительского спроса.

Летом 2015 года индексы фондовых бирж Китая показали резкий спад. Статистику фондовых рынков также можно исследовать с помощью обоб-

щенного непараметрического метода. В качестве векторов потребления выступают векторы объемов торгов. Поэтому, индексы спроса Конюса-Дивизиа в этом разделе называются индексами объема. Пример исследования торговой статистики фондовых рынков представлен в работе [18].

Для сравнения динамики мирового рынка акций и рынка китайских акций были рассчитаны обобщенные индексы объема и цен Конюса-Дивизиа для всех акций, включая акции китайских бирж, и отдельно для акций китайских бирж. Использовались месячные данные об объемах торгов и ценах, полученные по дневным данным об объемах торгов и ценах закрытия. Графики рассчитанных индексов представлены на рисунках 3.7 и 3.8. На графике индекса объема на рисунке 3.7 виден рост волатильности индекса, начиная с конца 2014 года, тогда как мировой индекс показывает стабильную динамику. На графике индекса цен на рисунке 3.8 видно, что индекс китайского рынка начинает расти с конца 2014 года, отрываясь от индекса мирового фондового рынка. Видно также, что этот рост заканчивается к лету 2015 года, а после него начинается резкий спад. Этот спад был также отражен в резком падении индексов фондовых бирж Китая летом 2015 года.

Также была исследована динамика показателя нерациональности³. Для этого были рассчитаны показатели нерациональности для мирового и китайского фондовых рынков методом скользящего окна с шириной 12 месяцев. Было рассмотрено несколько временных окон, шириной 12 месяцев, которые сдвигались с шагом в один месяц. На каждом шаге временное окно выделяет 12 подряд идущих периодов времени. По торговым статистикам китайского и мирового рынков за эти периоды вычислялись показатели нерациональности. Такой подход позволяет исследовать временную

³Здесь и далее в этом разделе под показателем нерациональности понимается показатель нерациональности в классе Φ_H

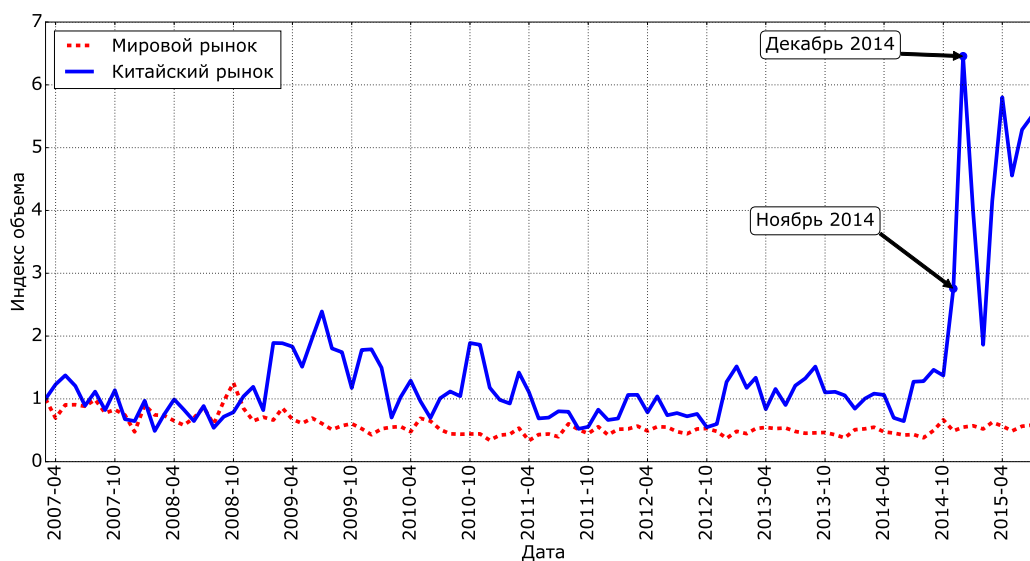


Рис. 3.7. Индексы объема для китайского и мирового фондовых рынков.

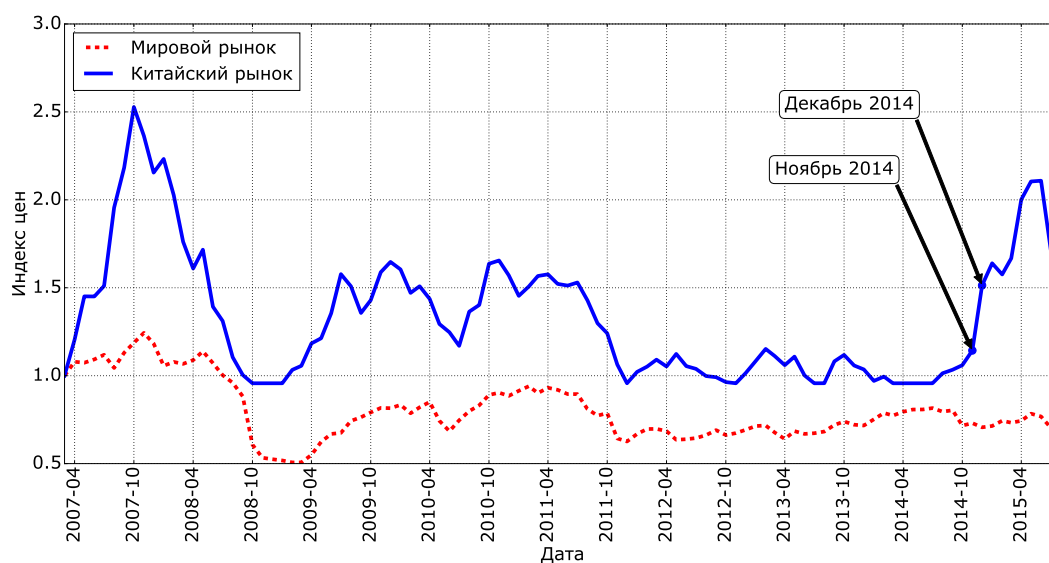


Рис. 3.8. Индексы цен для китайского и мирового фондовых рынков.

динамику показателя нерациональности.

Графики показателей нерациональности, рассчитанных описанным методом, представлены на рисунке 3.9. По оси абсцисс откладываются правые границы периодов, за которые рассчитаны показатели нерациональности. На графике виден резкий рост показателя нерациональности для китай-

ского фондового рынка в конце 2014 года. Резкий рост приходится на декабрь 2014. Это означает, что показатель иррациональности фондового рынка Китая по данным за 2014 год сильно вырос по сравнению с показателем за период с декабря 2013 по ноябрь 2014. Показатели иррациональности мирового фондового рынка не показывают никаких резких скачков.

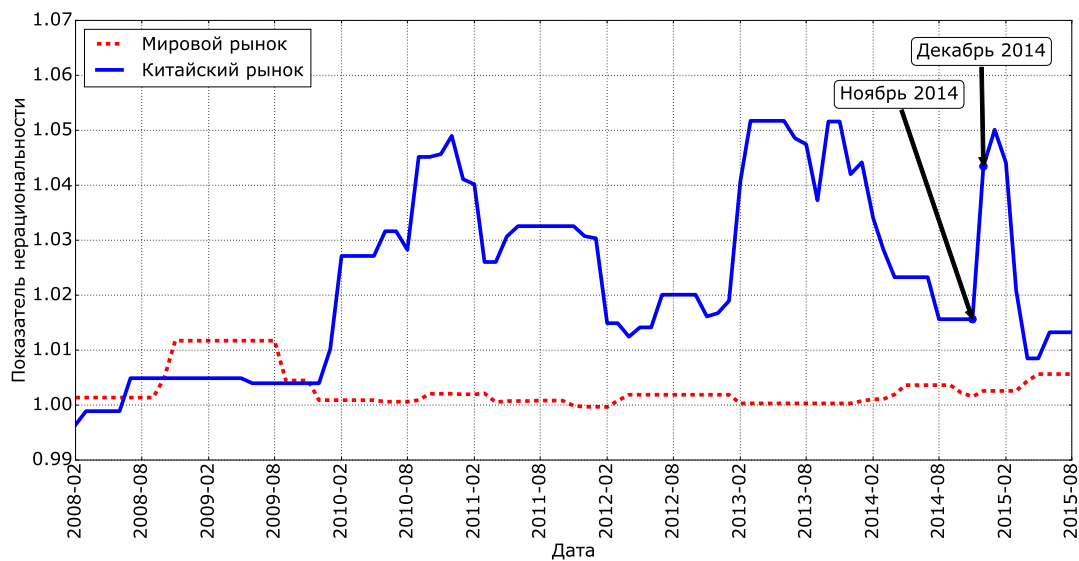


Рис. 3.9. Показатели иррациональности, рассчитанные методом скользящего окна. По оси абсцисс откладываются правые границы периодов, за которые рассчитаны показатели иррациональности.

Эти наблюдения позволяют заключить, что в конце 2014 года что-то изменилось в состоянии фондового рынка Китая и это изменение привело к кризису летом 2015 года. Для того, чтобы исследовать этот кризис был проведен анализ торговой статистики Китая за период с января 2014 по август 2015 с помощью обобщенного непараметрического метода. Исследование проводилось в рамках представления о том, что все участники торгов на фондовом рынке могут быть разделены на два класса – основные инвесторы и высокочастотные трейдеры. Основные инвесторы воспринимают акции как услуги по росту дохода. Они довольно редко меняют состав сво-

его портфеля, поскольку рассчитывают не только на рост стоимости акций, но и на выплату дивидендов. Предполагается, что при постоянных предпочтениях поведение основных инвесторов описывается моделью Парето.

Высокочастотные трейдеры покупают и продают акции, чтобы получить быструю прибыль на краткосрочных колебаниях цен акций. Для них акции являются инструментом быстрой прибыли. Они очень часто меняют свой портфель. Высокочастотные трейдеры разделяются на профессиональных и непрофессиональных. Профессиональные трейдеры покупают и продают акции на основе тщательного анализа состояния компаний. Непрофессиональные трейдеры используют свою интуицию. Надо отметить, что особенностью фондового рынка Китая в анализируемый период является очень высокая доля индивидуальных инвесторов, большинство из которых являются непрофессиональными трейдерами. Летом 2015 года, как отмечено в [86], доля индивидуальных инвесторов составляла 85%.

Прежде чем пакет акций перейдет от одного основного инвестора к другому, он пройдет через некоторое количество высокочастотных трейдеров. Количество таких промежуточных переходов зависит как от акции, так и от состояния фондового рынка в целом. Поскольку мы наблюдаем общие объемы торгов, куда входят объемы торгов как основных инвесторов, так и высокочастотных трейдеров, торговая статистика фондового рынка Китая не удовлетворяет однородной сильной аксиоме.

Для того, чтобы подтвердить такую точку зрения на причины нарушения однородной сильной аксиомы на торговой статистике фондового рынка Китая, был проведен численный эксперимент, похожий на описанный в 2.2. По торговой статистике фондового рынка Китая с месячными данными за период с января 2014 по август 2015 была составлена случайная торговая статистика. Объемы торгов этой статистики совпадают с фактическими, а цены задаются случайным процессом, описанным в 2.2. Было сгенерировано

100 000 реализаций этой случайной торговой статистики. Среднее значение логарифма показателя нерациональности по сгенерированным торговым статистикам составляет 0.28. Это намного выше, чем значение логарифма показателя нерациональности фактической торговой статистики Китая с января 2014 по август 2015, которое равно 0.049. На рисунке 3.10 представлена гистограмма значений логарифма показателя нерациональности для сгенерированных торговых статистик, на которой также отмечено значение логарифма показателя нерациональности для фактической торговой статистики. Из этой гистограммы видно, что показатели нерациональности случайной торговой статистики как правило значительно выше, чем показатель нерациональности фактической торговой статистики. Поскольку случайная торговая статистика сформирована так, что цены не зависят от объемов торгов, полученные результаты говорят о том, что между фактическими ценами и объемами торгов существует сильная связь, хотя торговая статистика не согласуется идеально с моделью Парето. Это говорит о том, что нарушение однородной сильной аксиомы на торговой статистике фондового рынка Китая может объясняться небольшими искажениями в объемах торгов, вызванных активностью высокочастотных трейдеров.

Существует некоторый уровень показателя нерациональности, который характеризует нормальное состояние фондового рынка Китая. В периоды кризисов активность высокочастотных трейдеров возрастает и показатель нерациональности превосходит свой нормальный уровень.

Для того, чтобы определить уровень показателя нерациональности, характерный для нормального режима функционирования фондового рынка Китая, были исследованы графики логарифма показателя нерациональности, построенные описанным выше методом скользящего окна по дневным, недельным и месячным данным с января 2009 по август 2015 с разными временными окнами. Примеры полученных графиков представлены на ри-

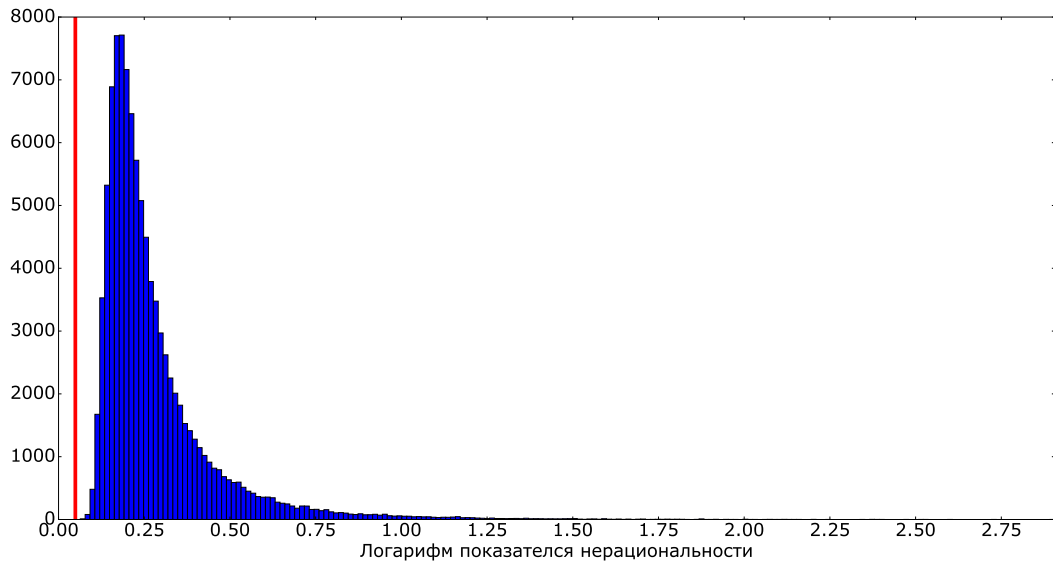


Рис. 3.10. Гистограмма значений логарифма показателей иррациональности сгенерированных торговых статистик. Вертикальной жирной линией отмечено значение логарифма фактической торговой статистики фондового рынка Китая.

сунках 3.11–3.13. В результате анализа этих графиков был сделан вывод о том что логарифм показателя иррациональности для нормального состояния фондового рынка Китая составляет 0.035. Обозначим это значение через Ω^* и будем далее называть его нормальным уровнем логарифма показателя иррациональности. Логарифм показателя иррациональности торговой статистики с января 2014 по август 2015 равен 0.049, что превышает нормальный уровень логарифма показателя иррациональности.

Активность высокочастотных трейдеров может возрасти и в том случае, если они спрогнозируют будущее изменение предпочтений основных инвесторов. В этом случае, они будут вести себя так, как вели бы себя основные инвесторы с изменившимися предпочтениями. Это приводит к тому, что в некоторый период на рынке присутствуют два типа инвесторов, поведение каждого из которых описывается моделью Парето, но с разными функциями полезности.

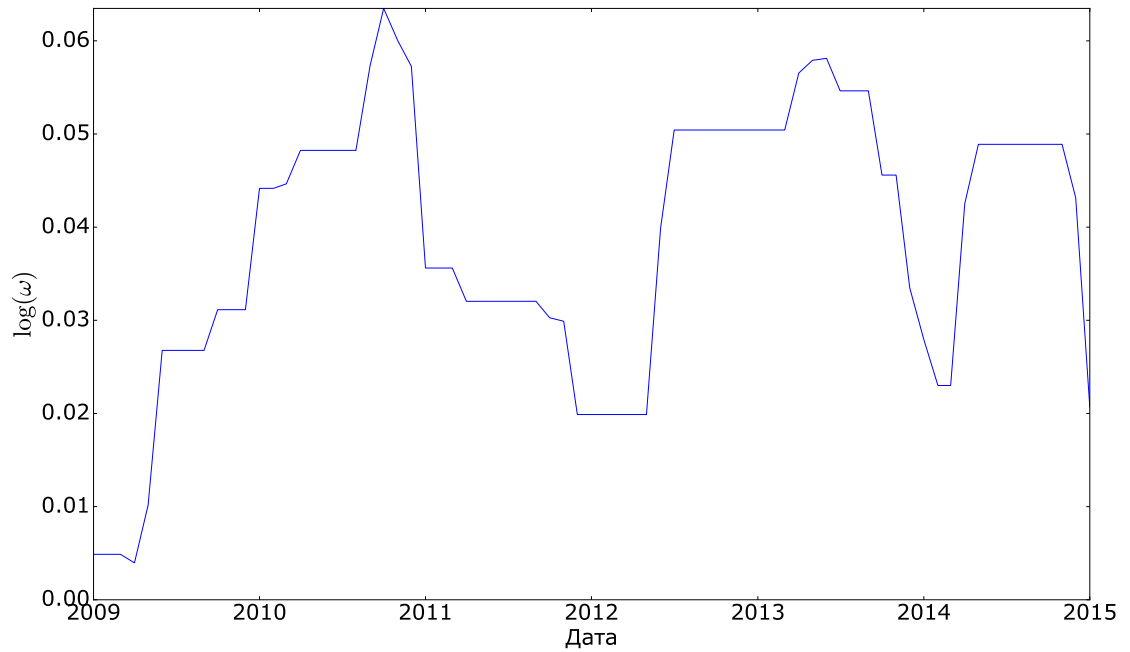


Рис. 3.11. Логарифмы показателей нерациональности, рассчитанные методом скользящего окна по месячным данным с шириной окна 18 месяцев.

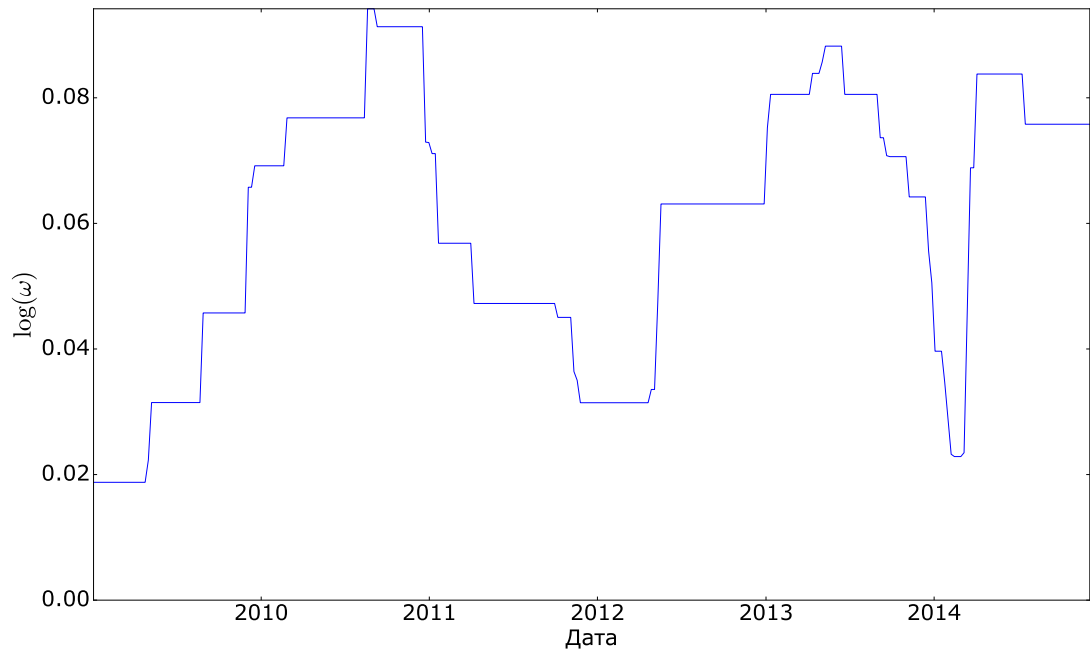


Рис. 3.12. Логарифмы показателей нерациональности, рассчитанные методом скользящего окна по недельным данным с шириной окна 78 недель.

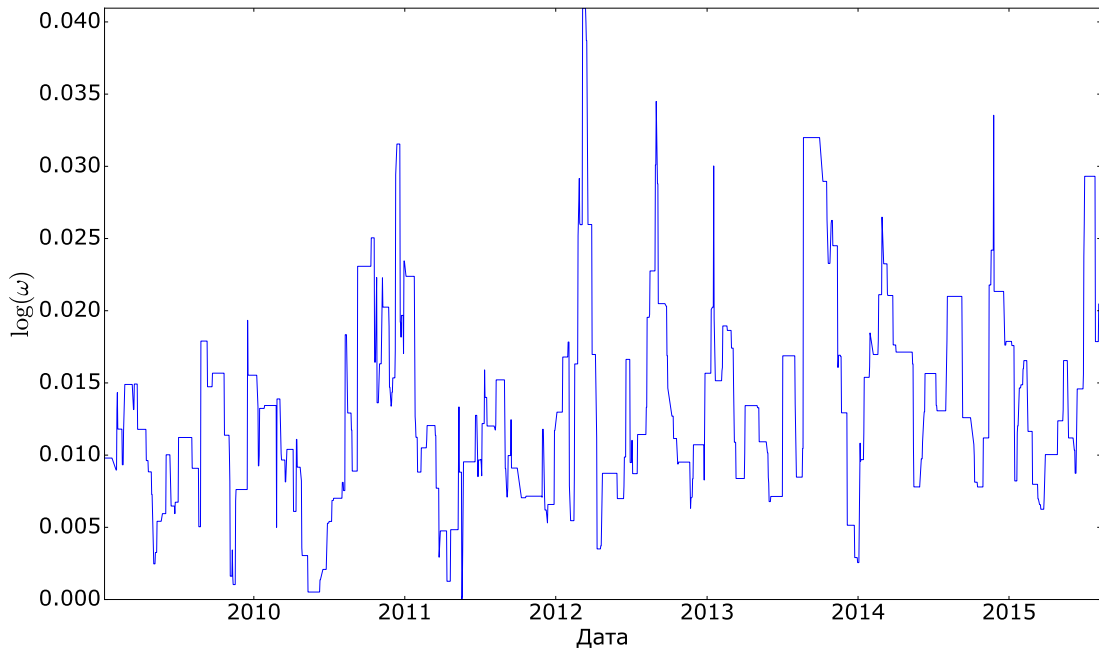


Рис. 3.13. Логарифмы показателей нерациональности, рассчитанные методом скользящего окна по дневным данным с шириной окна 31 день.

Для дальнейшего анализа необходимо было выделить те периоды, которые приводят к росту логарифма показателя нерациональности сверх нормального уровня. Однако один показатель нерациональности торговой статистики не позволяет этого сделать.

Показатель нерациональности позволяет оценить степень несогласованности торговой статистики с моделью Парето в целом. Согласно теореме Африата-Верриана, торговая статистика удовлетворяет однородной сильной аксиоме тогда и только тогда, когда существует положительное решение системы

$$\lambda^t C_{\tau t} \leq \lambda^\tau, \quad t, \tau = \overline{1, T} \quad (3.2.1)$$

относительно λ^t , где $C_{\tau t}$ индексы цен Пааше, определенные в 1.2.1. Разрешимость этой системы равносильна разрешимости системы

$$c_{\tau t} \leq \mu^\tau - \mu^t, \quad t, \tau = \overline{1, T}, \quad (3.2.2)$$

относительно μ^t , где $c_{\tau t} = \log(C_{\tau t})$. Эта система получается логарифмирование обеих частей неравенств (3.2.1), переобозначением $\log(\lambda^t)$ через μ^t и перестановкой слагаемых.

Нарушение однородной сильной аксиомы равносильно неразрешимости системы (3.2.2). Введение показателя нерациональности можно рассматривать как регуляризацию системы (3.2.2) в равномерной метрике, которая заключается в определении невязки

$$\min_{\mu^1, \dots, \mu^T} \max_{\{y_{\tau t} \geq 0 | \sum_{t=1}^T \sum_{\tau=1}^T y_{\tau t} = 1\}} y_{\tau t} (c_{\tau t} + \mu^t - \mu^\tau). \quad (3.2.3)$$

Значение невязки (3.2.3) совпадает с оптимальным значение целевой функции в следующей задаче линейного программирования

$$\zeta \rightarrow \min \quad (3.2.4)$$

$$\zeta \geq c_{\tau t} + \mu^t - \mu^\tau \quad t, \tau = \overline{1, T} \quad (3.2.5)$$

$$\zeta \geq 0, \quad (3.2.6)$$

а также со значением логарифма показателя нерациональности торговой статистики.

Двойственной к задаче (3.2.4)–(3.2.6) является задача о максимальном среднем цикле

$$\sum_{\tau=1}^T \sum_{t=1}^T c_{\tau t} x_{\tau t} \rightarrow \max \quad (3.2.7)$$

$$\sum_{t=1}^T x_{\tau t} = \sum_{t=1}^T x_{t\tau} \quad \tau = \overline{1, T} \quad (3.2.8)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{\tau=1}^T x_{\tau t} \leq 1. \quad (3.2.9)$$

Регуляризация в равномерной метрике приводит к одному регуляризующему параметру. В целях выделения периодов времени, приводящих к росту

логарифма показателя нерациональности сверх нормального уровня, можно рассматривать обобщение задачи (3.2.4)–(3.2.6), в котором вводятся показатели нерациональности для пар периодов времени:

$$\sum_{\tau=1}^T \sum_{t=1}^T \zeta_{\tau t} \rightarrow \min \quad (3.2.10)$$

$$\zeta_{\tau t} \geq c_{\tau t} + \mu^t - \mu^{\tau}, \quad t, \tau = \overline{1, T} \quad (3.2.11)$$

$$\zeta_{\tau t} \geq 0. \quad t, \tau = \overline{1, T} \quad (3.2.12)$$

Задача (3.2.10)–(3.2.12) осуществляет регуляризацию в «интегральной метрике» и имеет двойственную

$$\sum_{\tau=1}^T \sum_{t=1}^T c_{\tau t} x_{\tau t} \rightarrow \max \quad (3.2.13)$$

$$\sum_{t=1}^T x_{\tau t} = \sum_{t=1}^T x_{t\tau}, \quad \tau = \overline{1, T} \quad (3.2.14)$$

$$0 \leq x_{\tau t} \leq 1. \quad t, \tau = \overline{1, T} \quad (3.2.15)$$

Задача (3.2.13)–(3.2.15) является задачей о максимальном потоке.

Можно также дополнительно обобщить задачу (3.2.10)–(3.2.12) введением величины логарифма показателя нерациональности, характерного для нормального режима функционирования фондового рынка Китая Ω^* :

$$\sum_{\tau=1}^T \sum_{t=1}^T \zeta_{\tau t} \rightarrow \min \quad (3.2.16)$$

$$\zeta_{\tau t} \geq c_{\tau t} - \Omega^* + \mu^t - \mu^{\tau}, \quad t, \tau = \overline{1, T} \quad (3.2.17)$$

$$\zeta_{\tau t} \geq 0. \quad t, \tau = \overline{1, T} \quad (3.2.18)$$

В такой постановке решения $\zeta_{\tau t}$ интерпретируются как логарифмы показателей нерациональности для пар периодов сверх нормального уровня Ω^* . Двойственная задача к задаче (3.2.16)–(3.2.18) определяется следующим

образом:

$$\sum_{\tau=1}^T \sum_{t=1}^T (c_{\tau t} - \Omega^*) x_{\tau t} \rightarrow \max \quad (3.2.19)$$

$$\sum_{t=1}^T x_{\tau t} = \sum_{t=1}^T x_{t\tau}, \quad \tau = \overline{1, T} \quad (3.2.20)$$

$$0 \leq x_{\tau t} \leq 1. \quad t, \tau = \overline{1, T} \quad (3.2.21)$$

Среди решений задачи (3.2.19)–(3.2.21) есть такое решение $\{x_{t\tau}^*\}$, что $x_{t\tau}^* \in \{0, 1\}$. Это решение может быть представлено в виде ориентированного графа, вершины которого соответствуют периодам времени, а рёбра соответствуют тем парам (t, τ) , для которых $x_{t\tau}^* = 1$. Такое решение позволяет выделить наиболее несогласованные пары периодов.

Для анализируемой торговой статистики получается граф, представленный на рисунке 3.14. Из графа исключены все вершины, которые не входят в состав ни одного ребра. На графе отсутствуют обозначения направления, поскольку для каждой пары периодов (t, τ) , образующей ребро в графе, пара (τ, t) также образует ребро. Поэтому, каждое из показанных ребер на самом деле соответствуют двум ребрам, имеющим противоположные направления. Видно, что граф является двудольным. Первую долю образуют периоды

1. январь 2014;
2. февраль 2014;
3. март 2014.

Вторую долю образуют периоды

1. декабрь 2014;
2. январь 2015;
3. март 2015;

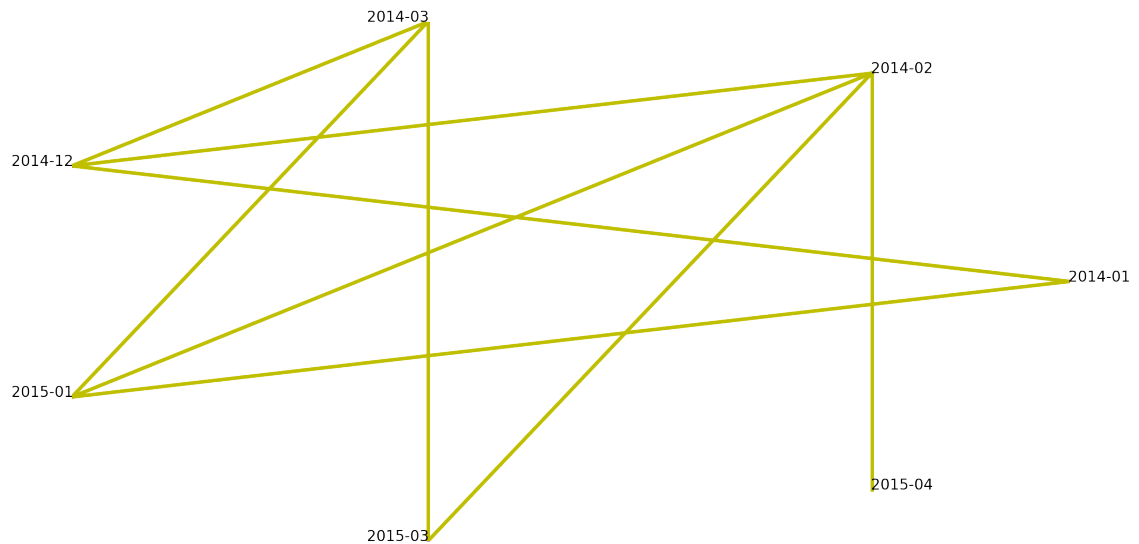


Рис. 3.14. Граф, построенный по решению задачи (3.2.19)–(3.2.21).

4. апрель 2015.

Исключение из торговой статистики периодов одной из долей приводит к снижению логарифма показателя нерациональности до уровня ниже Ω^* . Получается, что рост логарифма показателя нерациональности сверх нормального уровня вызван несогласованностью двух выделенных групп периодов.

Для дальнейшего анализа были выделены четыре месяца из второй доли, которые разбивают анализируемый период на два временных интервала – с января по ноябрь 2014 и с мая по август 2015. Торговая статистика каждого из этих временных интервалов имеет показатель нерациональности не выше нормального уровня Ω^* .

Было выдвинуто предположение, что в некоторые профессиональные высокочастотные трейдеры спрогнозировали будущее изменение предпочтений основных инвесторов. Это привело к тому, что в течение некоторого периода времени эти высокочастотные трейдеры вели себя как основные инвесторы с изменившимися предпочтениями, при этом основные инвесторы

продолжали вести торги в соответствии со своими старыми предпочтениями. По-видимому, это происходило в период с декабря 2014 по апрель 2015. В этот период поведение инвесторов можно описать как взаимодействие двух репрезентативных потребителей. Один репрезентативный потребитель соответствует основным инвесторам со старыми предпочтениями, а второй – профессиональным высокочастотным трейдерам, которые вели себя как основные инвесторы с новыми предпочтениями.

Поскольку торговые статистики до и после выделенных периодов имеют логарифмы показателей нерациональности ниже Ω^* , предполагается, что в периоды до выделенных месяцев у основных инвесторов были постоянные предпочтения и их поведение описывалось моделью Парето. После выделенных месяцев предпочтения основных инвесторов изменились. Их поведение также описывается моделью Парето, но с другой функцией полезности.

Для подтверждения описанной выше гипотезы о присутствии двух репрезентативных потребителей в период с декабря 2014 по апрель 2015, необходимо представить объёмы торгов X^t за каждый месяц в этом периоде в виде суммы $X^{1,t} + X^{2,t}$ так, чтобы пару $(P^t, X^{1,t})$ можно было присоединить к торговой статистике с января по ноябрь 2015, а пару $(P^t, X^{2,t})$ присоединить к торговой статистике с мая по август 2015, и при этом чтобы логарифмы показателей нерациональности полученных статистик не превосходили нормального уровня.

Для решения этой задачи рассмотрим следующую задачу. Пусть даны две торговые статистики TS^{main} , TS^{aux} , вектор объёмов торгов X^t и соответствующий вектор цен P^t . Требуется найти проекцию \hat{X}^t вектора X^t на множество прогнозов объёмов торгов $K_V^H(P^t; TS^{\text{main}}, e^{\Omega^*})$, построенное по торговой статистике TS^{main} , так, чтобы остаток от проекции $X^t - \hat{X}^t$ лежал в множестве прогнозов объёмов торгов $K_V^H(P^t; TS^{\text{aux}}, e^{\Omega^*})$, построенном по

торговой статистике TS^{aux} .

Формально, задача ставится следующим образом:

$$\|X^t - Z\|^2 \rightarrow \min_Z \quad (3.2.22)$$

$$Z \in K_V^H(P^t; TS^{\text{main}}, e^{\Omega^*}) \quad (3.2.23)$$

$$X^t - Z \in K_V^H(P^t; TS^{\text{aux}}, e^{\Omega^*}) \quad (3.2.24)$$

Ограничения (3.2.23)–(3.2.24) линейные, поскольку множества

$$K_V^H(P^t; TS^{\text{main}}, e^{\Omega^*}) \text{ и } K_V^H(P^t; TS^{\text{aux}}, e^{\Omega^*}) \quad (3.2.25)$$

задаются системами линейных неравенств, как было отмечено в 1.4. Поэтому задача (3.2.22)–(3.2.24) является задачей квадратичного программирования с выпуклой целевой функцией. Для её решения разработаны эффективные численные методы. В данной работе использовалась реализация алгоритма решения задачи квадратичного программирования в библиотеке ALGLIB⁴.

Задача (3.2.22)–(3.2.24) решает задачу о разбиении вектора объёмов торгов для одного периода. Для проверки гипотезы эта задача была решена для вектора объёмов торгов за декабрь 2014. При этом, поскольку предполагалось, что в начале переходного периода преобладали торги основных инвесторов со старыми предпочтениями, в качестве торговой статистики TS^{main} выступала торговая статистика за период с января по ноябрь 2014.

Получив решение $\hat{Z}^{2014-12}$ задачи (3.2.22)–(3.2.24) для объёма торгов за декабрь 2014, я добавил пару $(P^{2014-12}, \hat{Z}^{2014-12})$ к торговой статистике с января по ноябрь 2014, а пару $(P^{2014-12}, X^{2014-12} - \hat{Z}^{2014-12})$ к торговой статистике с мая по август 2015. Таким образом были получены две новые торговые статистики. Одна с января по декабрь 2014, вторая за декабрь

⁴<http://www.alglib.net/>

2014 и за период с мая по август 2015. Обозначим эти торговые статистики через $TS^{\text{left},1}$ и $TS^{\text{right},1}$. По построению, логарифмы показателей нерациональности этих двух торговых статистик равны Ω^* .

Далее, задача (3.2.22)–(3.2.24) решалась для объёмов торгов за январь 2015. При этом, в качестве торговой статистики TS^{main} выступала статистика $TS^{\text{left},1}$, а в качестве торговой статистики TS^{aux} выступала статистика $TS^{\text{right},1}$. Эта задача имеет единственное решение $\hat{Z}^{2015-01}$.

Пары

$$(P^{2015-01}, \hat{Z}^{2015-01}) \text{ и } (P^{2015-01}, X^{2015-01} - \hat{Z}^{2015-01})$$

были добавлены к торговым статистикам $TS^{\text{left},1}$ и $TS^{\text{right},1}$ соответственно, в результате чего были получены статистики $TS^{\text{left},2}$ и $TS^{\text{right},2}$.

Для оставших двух периодов – марта и апреля 2015 – были применены аналогичные действия. Отличие заключается только в том, что в качестве торговой статистики TS^{main} выступала торговая статистика, содержащая периоды с мая по август 2015, поскольку предполагалось, что к концу переходного периода преобладали торги основных инвесторов с новыми предпочтениями.

В результате были получены две торговые статистики $TS^{\text{left},4}$ и $TS^{\text{right},4}$. Первая содержит периоды с января 2014 по апрель 2015, за вычетом февраля 2015. Вторая содержит периоды с декабря 2014 по август 2015, также за вычетом февраля 2015. Февраль 2015 не был выделен на этапе выбора периодов для дальнейшего анализа, поскольку он не приводит к росту логарифма показателя нерациональности сверх нормального уровня Ω^* .

Объёмы торгов за февраль 2015 вместе с ценами за тот же период можно целиком добавить и к статистике $TS^{\text{left},4}$ и к статистике $TS^{\text{right},4}$, при этом логарифмы показателей нерациональности останутся на уровне Ω^* .

Это также означает, что объём торгов за февраль 2015 $X^{2015-02}$ можно разложить на сумму

$$\alpha X^{2015-02} + (1 - \alpha)X^{2015-02}$$

для произвольного $\alpha \in [0, 1]$, причём торговые статистики

$$TS^{\text{left},4} \cup \{(P^{2015-02}, \alpha X^{2015-02})\}$$

и

$$TS^{\text{right},4} \cup \{(P^{2015-02}, (1 - \alpha)X^{2015-02})\}$$

будут иметь логарифмы показателей нерациональности равные Ω^* .

Таким образом, удалось доказать согласованность анализируемой торговой статистики с неоклассической моделью с двумя репрезентативными потребителями в обобщённом смысле, т.е. с некоторым показателем нерациональности, который превосходит единицу. Первый репрезентативный потребитель соответствует основным инвесторам со старыми предпочтениями и существует с января 2014 по апрель 2015. Второй репрезентативный потребитель соответствует основным инвесторам с новыми предпочтениями и существует с декабря 2014 по август 2015. Это подтверждает выдвинутую ранее гипотезу о природе кризиса на фондовом рынке Китая.

Для более детального анализа мы попытались выделить те акции, из-за торгов которых выделенные ранее четыре месяца оказываются несогласованными с остальными периодами. Для этого была поставлена задача выделить наименьшее количество акций таких, что корректировкой объёмов торгов этих акций можно понизить логарифм показателя нерациональности всей торговой статистики до нормального уровня. Для этого использовались задачи проектирования на множества прогнозов объёмов торгов и цен, которые являются задачами квадратичного программирования.

Поскольку необходимо определить наименьшее количество акций, объемы торгов которых необходимо корректировать, рассматривалась также задача частичного проектирования объема торгов X на множество прогнозов $K_V^H(P; TS, \omega)$. Пусть задано некоторое множество акций I . Задача частичного проектирования объема торгов X на множество прогнозов $K_V^H(P; TS, \omega)$ с помощью акций из множества I ставится следующим образом:

$$\|X - Y\|^2 \rightarrow \min_Y \quad (3.2.26)$$

$$Y \in K_V^H(P; TS, \omega), \quad (3.2.27)$$

$$Y_i = X_i \quad (i \notin I). \quad (3.2.28)$$

Ограничения (3.2.28) линейные, поэтому эта задача также является задачей квадратичного программирования. Следует отметить, что задача частичного проектирования может не иметь решения.

Обозначим множество выделенных четырех периодов через T^* . Для поиска минимального числа акций, объемы торгов которых необходимо корректировать, использовалась следующая процедура

- (1) Положим $TS = \{(P^\tau, X^\tau)\}_{\tau \in \{1, \dots, T\} \setminus T^*}$, $T^- = T^*$.
- (2) Если $T^- = \emptyset$, переходим к шагу (6).
- (3) Положим $t = \min\{T^-\}$ (минимальный период времени определяется по хронологическому порядку).
- (4) Определяем проекцию \hat{P}^t вектора цен P^t на множество прогнозов $K_P^H(X^t; TS, e^{\Omega^*})$.
- (5) Добавляем пару (\hat{P}^t, X^t) к торговой статистике TS , положим $T^- = T^- \setminus \{t\}$, переходим к шагу (2).
- (6) Конец процедуры.

В результате применения описанной процедуры получают векторы проекций \widehat{P}^t цен в периоды из множества T^* . По этим проекциям рассчитывались относительные разности между фактическими ценами и их проекциями для отдельных акций

$$\frac{P_i^t - \widehat{P}_i^t}{P_i^t}. \quad (3.2.29)$$

По этим относительным разностям формировались разные наборы акций с наибольшими значениями относительных разностей (3.2.29). Целью анализа было выделение наименьшего количества акций, корректировкой объемов торгов которых в периоды из множества T^* можно было понизить логарифм показателя нерациональности до уровня ниже Ω^* . Чтобы проверить, что корректировкой объемов торгов некоторого набора акций I только в периоды из множества T^* можно понизить значение логарифма показателя нерациональности торговой статистики до уровня ниже Ω^* , применялась описанная выше процедура из шести шагов, в которой шаги (4) и (5) заменены на следующие шаги

- (4)' Определяем частичную проекцию \widehat{X}^t вектора X^t на множество прогнозов $K_V^H(P^t; TS, e^{\Omega^*})$ с помощью акций из множества I .
- (5)' Добавляем пару (P^t, \widehat{X}^t) к торговой статистике TS , положим $T^- = T^- \setminus \{t\}$, переходим к шагу (2).

Если на некоторой итерации не удастся определить проекцию вектора X^t на шаге (4)', то считает, что набор акций I не прошел проверку.

Удалось выделить 30 акций с наибольшими разностями (3.2.29), которые проходят описанную проверку. В результате перебора различных комбинаций этих акций удалось выделить одну акцию, которая проходит проверку. Это акция компании CITIC Securities, ведущего инвестиционного банка Китая. Корректировкой объемов торгов только этой акции и только в периоды из множества T^* можно получить торговую статистику, логарифм

показателя нерациональности которой не превосходит Ω^* . Скорректированные векторы объемов потребления задаются векторами \hat{X}^t , определяемыми на шаге (4)'.

Маловероятно, что причиной кризиса является одна компания. Поэтому, CITIC Securities интерпретируется как репрезентативный представитель всего сектора инвестиционных банков, действия с акциями которых спровоцировали кризис на фондовом рынке Китая.

На рисунке 3.15 представлен график дневных цен закрытия акций CITIC Securities. Жирными линиями выделены части графика, которые приходятся на выделенные четыре месяца. Анализ этого графика позволяет более детально описать кризис на фондовом рынке Китая. Цены акций CITIC Securities в послекризисный период устанавливаются на более высоком уровне, чем в докризисное время. Профессиональные трейдеры правильно прогнозируют это изменение и начинают покупать акции CITIC Securities и других инвестиционных банков. Это приводит к небольшому росту цен на эти акции. Этот рост отмечают непрофессиональные трейдеры, которые тоже начинают покупать эти акции. Их действия приводят к неадекватному росту цен. При этом, многие непрофессиональные трейдеры используют короткие продажи под залог самих акций.

Ближе к началу резкого спада цен, эти акции стоили неоправданно дорого. Профессиональные трейдеры, закупившие их по низкой цене и знающие, что их цена будет существенно ниже, начинают их распродавать. Это приводит к резкому падению цен. Непрофессиональные трейдеры, видя, что цены начали снижаться, начали распродавать свои акции, чтобы минимизировать потери. Это привело к еще большему снижению цен до уровня ниже того, который установится в послекризисном периоде.

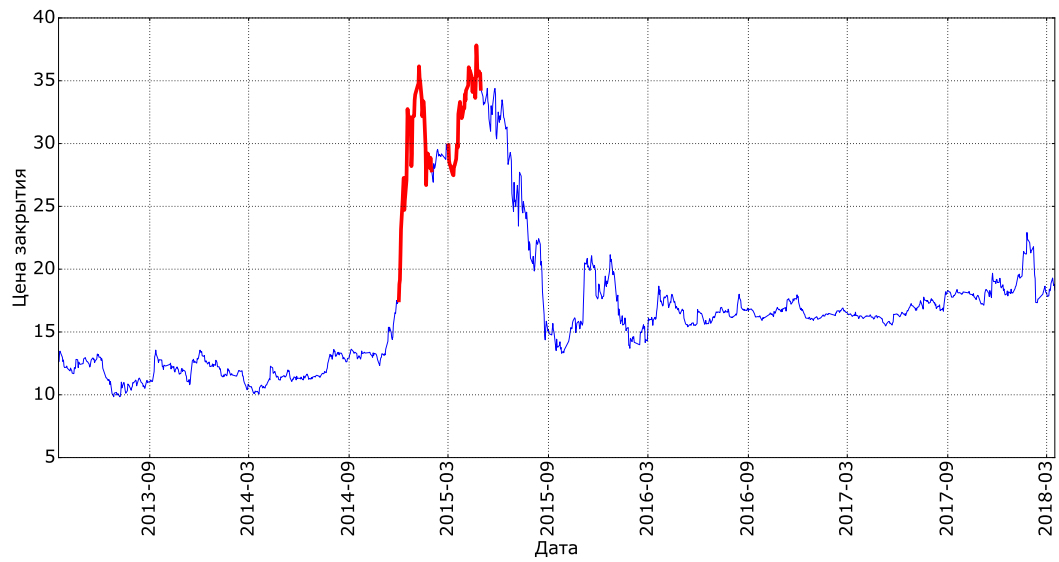


Рис. 3.15. График дневных цен закрытия акций CITIC Securities.

ГЛАВА 4

**ОБЗОР ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ И ПРОГРАММНЫХ
ИНСТРУМЕНТОВ****4.1. Система анализа торговой статистики «Индекс»**

Программный комплекс обработки торговой статистики «Индекс» был разработан И. А. Кондраковым, Л. Я. Поспеловой и А. А. Шананиным ([16]) на языке программирования C#. Комплекс реализует все алгоритмы, необходимые для анализа торговой статистики с помощью обобщенного непараметрического метода. При этом, он является не просто набором алгоритмов, а полноценным инструментом с графическим интерфейсом, поддерживающим все основные операции для анализа торговой статистики. В число таких операций, помимо проверки рационализируемости и расчёта индексов Конюса-Дивизиа, входят, среди прочего, следующие операции

- определение показателя нерациональности;
- формирование новых агрегированных товаров с индексами Конюса-Дивизиа в качестве объемов потребления и цен;
- создание новых товарных групп, состоящих как из исходных товаров, так и из агрегированных товаров;
- проверка достаточных условий делимости
- проверка выполнения однородной сильной аксиомы и достаточных условий делимости с заданным показателем ω для всех сформированных пользователем товарных групп;
- сохранение результатов анализа (рационализируемые товарные группы, новые агрегированные товары);
- преобразования данных, для устранения их дефектов (например, нулевые цены, нулевые объёмы потребления).

Графический интерфейс системы содержит визуализацию дерева экономических индексов, отражающего отношения делимости товарных групп. Также в интерфейсе можно построить графики исходных цен и объёмов потребления, а также индексов Конюса-Дивизиа товарных групп. Более подробное описание возможностей программного комплекса «Индекс» и его архитектуры можно найти в работах [14, 15, 13].

Для решения всех поставленных в диссертационном исследовании задач, кроме задач, связанных с анализом бюджетной статистики Великобритании, дорабатывался исходный код программного комплекса «Индекс». На рисунке (4.1) представлено главное окно графического интерфейса системы «Индекс». Используемые в диссертационном исследовании алгоритмы реализованы в виде методов классов `AxiomsTesterClass` и `StatToolClass` системы «Индекс». Для автоматизации вычислений в графический интерфейс системы «Индекс» были добавлены новые пункты меню¹, которые вызывают эти методы, а также готовят некоторые отчеты, по которым можно построить графики вне системы «Индекс». В итоге в графический интерфейс системы «Индекс» было добавлено два новых пункта меню – «Сравнение аксиом» и «Китай».

Программный комплекс «Индекс» был разработан для анализа торговой статистики. При анализе данных Великобритании использовалась бюджетная статистика, для обработки которой система «Индекс» не предназначена. Поэтому для поддержки этого анализа был создан новый программный комплекс `AxiomsPhD` на языке программирования C++, с помощью которого проводились все численные операции, связанные с анализом бюджетной статистики Великобритании. Более подробно этот комплекс описан в §4.4.

¹Объекты `ToolStripMenuItem` из библиотеки объектов `Windows Forms`

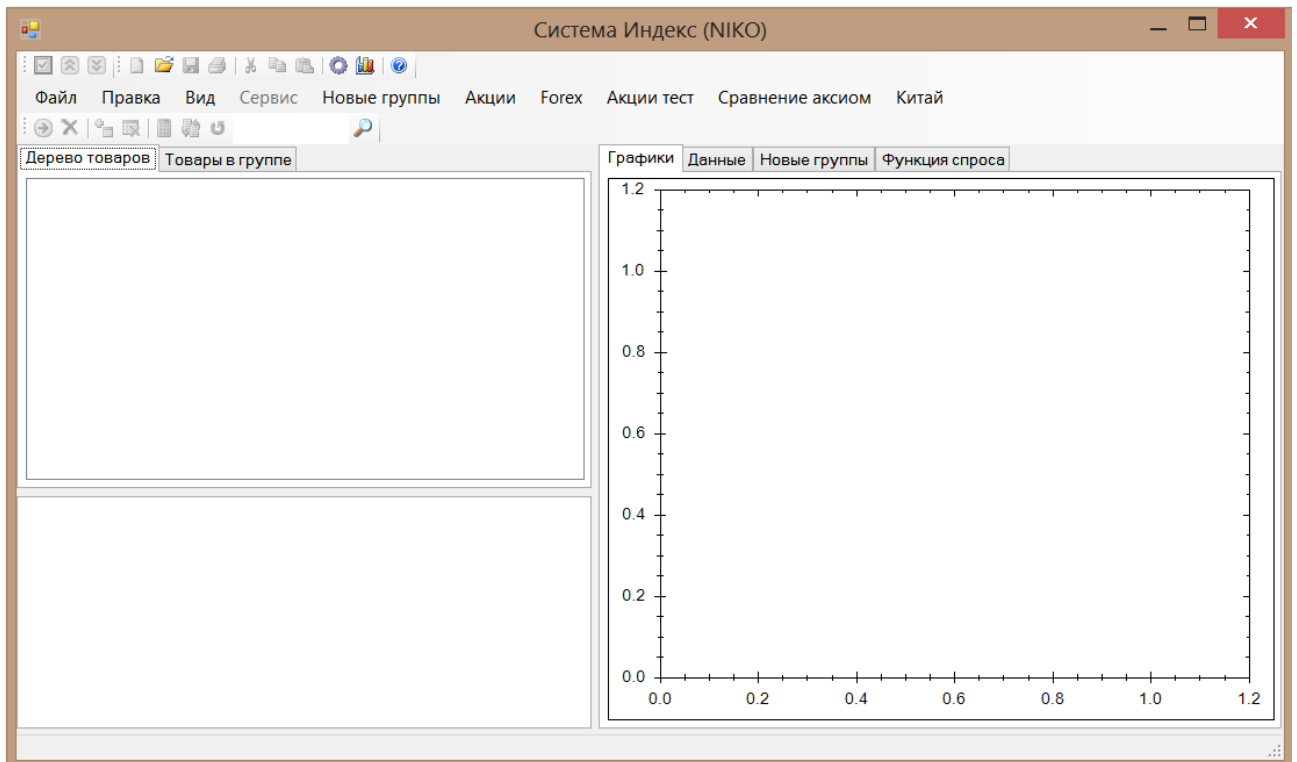


Рис. 4.1. Главное окно графического интерфейса системы «Индекс».

4.2. Сравнение аксиом выявленного предпочтения

Для проведения сравнения аксиом выявленного предпочтения в пункте меню «Сравнение аксиом» добавлены три пункта:

- 1) Случайные группы (для проведения численных экспериментов по оценке вероятности выполнения аксиом выявленного предпочтения на случайных подгруппах).
- 2) Случайные цены (для оценки мощности тестов выполнения аксиом выявленного предпочтения).
- 3) Размеры множества прогнозов (для оценки размеров множеств прогнозов).

4.2.1. Случайные группы

В пункте меню «Случайные группы» есть два пункта (см. рисунок 4.2):

- 1) Отчет по случайным группам.
- 2) Объединение отчетов.

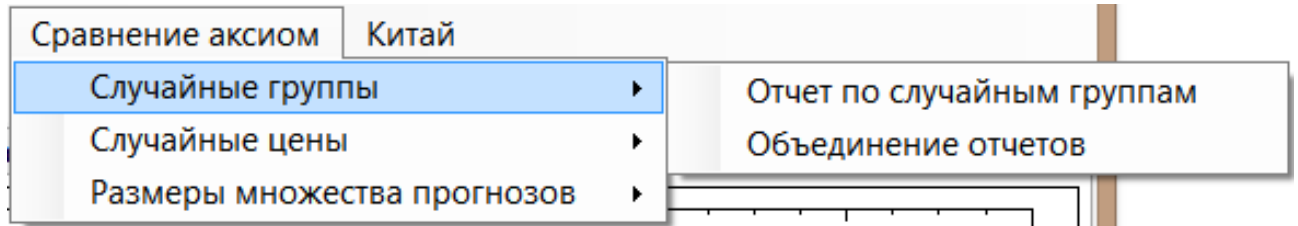


Рис. 4.2. Расширение функционала системы «Индекс» для оценки вероятности выполнения аксиом выявленного предпочтения на случайных группах.

При нажатии на пункт меню «Отчет по случайным группам» появляется форма, в которую вводятся следующие параметры

- количество случайных групп заданного размера;
- диапазон размеров случайных групп;
- путь сохранения текстового отчета.

В результате отработки формы генерируется отчет, в котором приводится состав всех сгенерированных товарных групп и их показателей нерациональности к классам Φ_G и Φ_H для всех размеров случайных групп из указанного диапазона. Функция генерирования случайной подгруппы реализована в виде метода `RandomGoods` класса `StatToolsClass`. Исходный код этой функции приведен в листинге 4.1 на стр. 144.

Поскольку процесс генерирования всех случайных групп и расчета их показателей нерациональности может оказаться очень длительным, можно запускать расчет для нескольких диапазонов размеров случайных групп и затем объединять полученные отчеты в один. Для этого используется пункт «Объединение отчетов».

Графики на рисунках 2.1 и 2.2 в разделе 2.1 построены в Matlab.

4.2.2. Случайные цены

В пункте меню «Случайные цены» есть три пункта (см. рисунок 4.3):

- 1) Экспорт цен и объемов.
- 2) Расчет показателей нерациональности.
- 3) Объединение отчетов.

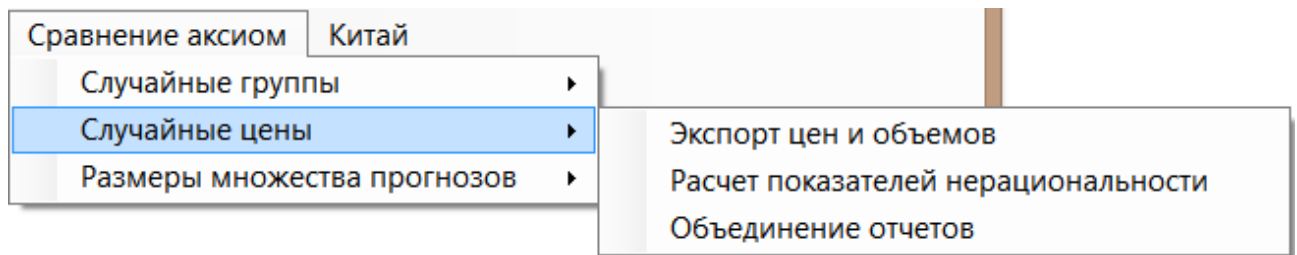


Рис. 4.3. Расширение функционала системы «Индекс» для оценки мощности тестов выполнения аксиом выявленного предпочтения.

Оценка параметров моделей авторегрессии и генерирование реализаций случайных процессов авторегрессии проводились вне системы «Индекс» – в Matlab. Поэтому необходимо выгружать данные о ценах отдельных товаров. Для этого добавлен пункт меню «Экспорт цен и объемов». При нажатии на этот пункт появляется форма, в которой нужно указать путь к директории, куда выгружаются данные о ценах и объемах потребления всех товаров выбранной в системе «Индекс» товарной группы. Для каждого товара генерируются два файла. Один с данными о ценах, второй с данными об объемах. Для оценки параметров авторегрессии необходимы данные только о ценах. Данные об объемах выгружаются для того, чтобы можно было запускать процедуру расчета показателей нерациональности для реализаций случайной торговой статистики без выбора группы в системе «Индекс», а лишь указывая путь к папке со сгенерированными ценами и исходными объемами потребления. Исходный код на Matlab для оценки параметров модели авторегрессии заданного порядка методом наименьших

квадратов приводится в листинге 4.2 на стр. 146. Фрагмент исходного кода, в котором оценивается порядок авторегрессии с помощью информационного критерия Акаике², приводится в листинге 4.3 на стр. 147.

При нажатии на пункт меню «Расчет показателей нерациональности» появляется форма, в которой нужно указать путь к файлам с исходными объемами потребления и сгенерированными в Matlab ценами. При этом, выбирать группу в системе «Индекс» не нужно. Эта форма рассчитывает показатели нерациональности для торговых статистик, сформированных из исходных объемов потребления и сгенерированных цен, и создает отчет с рассчитанными показателями.

Пункт меню «Объединение отчетов» позволяет объединить несколько отчетов в один. Он используется тогда, когда есть несколько отчетов с показателями нерациональности, которые были построены по разным реализациям случайных процессов цен.

Гистограмма на рисунке 2.3 в 2.2 построена в Matlab.

4.2.3. Размеры множества прогнозов

В пункте меню «Размеры множества прогнозов» есть три пункта (см. рисунок 4.4):

- 1) Однородная сильная аксиома.
- 2) Сильная аксиома.
- 3) Объединение отчетов.

Пункт меню «Однородная сильная аксиома» открывает форму, в которой необходимо указать количество реализаций случайной торговой статистики, которая рассматривается в численном эксперименте в разделе 2.3. Форма позволяет сгенерировать заданное количество реализаций случайной

²См, например, [64], стр. 396–397

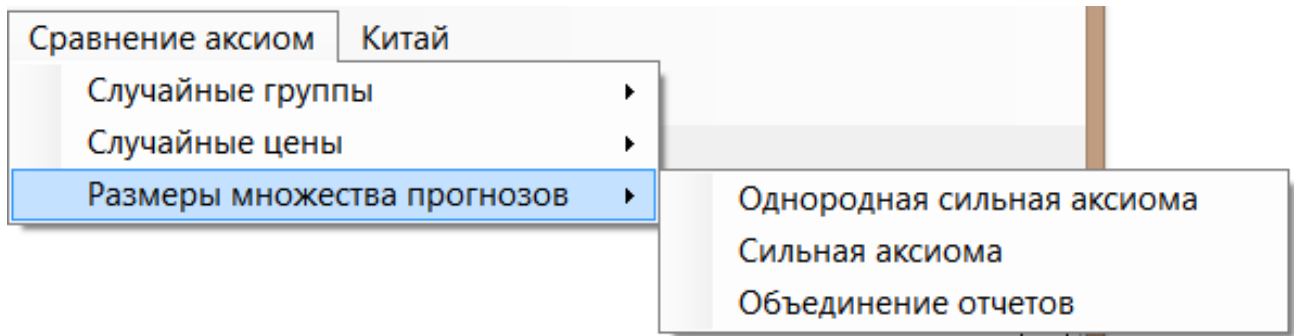


Рис. 4.4. Расширение функционала системы «Индекс» для оценки размеров множеств прогнозов.

торговой статистики и получить отчет, содержащий показатели нерациональности в классе Φ_H для сгенерированных торговых статистик. Пункт меню «Сильная аксиома» позволяет сделать то же самое для получения показателей нерациональности в классе Φ_G . Пункт меню «Объединение отчетов» позволяет объединить несколько отчетов в один.

4.3. Анализ кризиса на фондовом рынке Китая

В меню «Китай» есть несколько пунктов (см. рисунок 4.5):

- 1) Показатели нерациональности скользящим окном.
- 2) Определение пар несогласованных периодов.
- 3) Разделение на две статистики.
- 4) Последовательные проекции цен.
- 5) Последовательные частичные проекции объемов.

Пункт меню «Показатели нерациональности скользящим окном» позволяет получить временные ряды показателей нерациональности, рассчитанных методом скользящего окна. При нажатии на этот пункт появляется форма, в которой указывается ширина окна и путь сохранения отчета с показателями нерациональности.

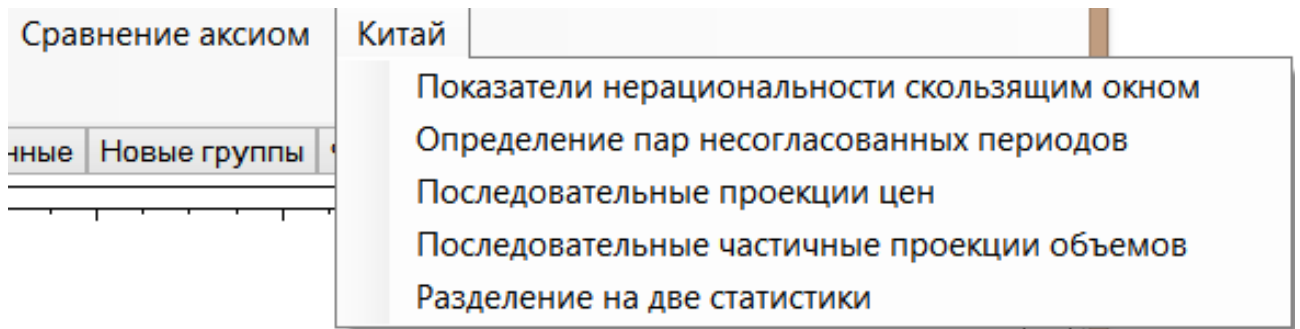


Рис. 4.5. Расширение функционала системы «Индекс» для анализа кризиса на фондовом рынке Китая.

Пункт меню «Определение пар несогласованных периодов» строит решение задачи линейного программирования (3.2.19)–(3.2.21), которая использовалась в 3.2 для поиска пар наиболее несогласованных периодов. Для решения задачи линейного программирования используется библиотека `lpsolve`³, которая использует симплекс-метод для решения задач линейного программирования⁴. Алгоритм построения и решения этой задачи по заданной торговой статистике и нормальному уровню логарифма показателя нерациональности Ω^* реализован в виде метода `harp_log_omega_period_pairs_lp_dual` класса `AxiomTesterClass` системы «Индекс». Фрагмент исходного кода класса `AxiomTesterClass` с этим методом, описанием возвращаемого им объекта и вспомогательным методом `harp_log_omega_period_pairs_lp_lfun` приводится в листинге 4.4 на стр. 148.

Пункт меню «Разделение на две статистики» реализует схему проверки возможности разделить векторы объемов торгов за несколько выделенных периодов между торговыми статистиками до и после этих периодов так, чтобы логарифмы показателей нерациональности этих статистик не превышали нормальный уровень Ω^* . Подробно эта процедура описана в

³<http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/>, документация также доступна на <http://web.mit.edu/lpsolve/doc/>

⁴<http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/LPBasics.htm>

разделе 3.2. Основная вычислительная нагрузка приходится на решение задачи (3.2.22)–(3.2.24). Эта задача является задачей квадратичного программирования. Для её решения используется библиотека ALGLIB⁵. Используется алгоритм QP-BLEIC⁶, который является разновидностью метода активного множества⁷.

Алгоритм решения этой задачи реализован в виде метода `harp_log_omega_split_volume_between_two_stats_base` класса `AxiomsTesterClass` системы «Индекс». Исходный код этого метода приводится в листинге 4.5 на стр. 157. В этом методе реализована возможность решать задачу проектирования на множество прогнозов, построенное по торговой статистике TS^{main} , только в терминах некоторого подмножества акций. Для этого необходимо задать в параметре `stocks_to_fix_inds` номера тех акций, объемы которых фиксируются, т.е. проекция на множество прогнозов, построенное по торговой статистике TS^{main} , ищется только по тем акциям, которые не вошли в список `stocks_to_fix_inds`. Эта возможность не была использована в итоговом анализе и, поэтому, не рассматривается в разделе 3.2.

Пункт меню «Последовательные проекции цен» реализует расчеты по процедуре (1)–(6), описанной в 3.2. Нормальный уровень логарифма показателя нерациональности Ω^* , а также периоды, для которых проводится эта процедура, задаются с помощью текстовых файлов. Основная вычислительная нагрузка приходится на шаг (4). Это задача проектирования вектора цен на множество прогнозов цен, которая также является задачей квадратичного программирования.

Алгоритм решения задачи проектирования вектора цен на на множество прогнозов цен реализован в виде метода `project_on_KPrices` класса

⁵www.alglib.net

⁶<http://www.alglib.net/optimization/quadraticprogramming.php#header5>

⁷См., например, [78], стр. 467–480

`AxiomsTesterClass` системы «Индекс». Исходный код этого метода приводится в листинге 4.6 на стр. 166. Следует отметить, что метод может решать задачу частичного проектирования вектора цен. Для этого необходимо в параметр `N1` передать список акций, в терминах которых решается задача проектирования. Эта задача аналогична описанной в 3.2 задаче частичного проектирования вектора объемов торгов, однако в итоге не пригодилась для анализа.

Пункт меню «Последовательные частичные проекции объемов» реализует расчеты по процедуре (1)–(6), описанной в 3.2, в которой шаги (4) и (5) заменены на (4)' и (5)'. Периоды и акции, для которых нужно решать эту задачу, передаются через текстовые файлы. Основная вычислительная нагрузка приходится на шаг (4)', в котором решается задача частичного проектирования вектора объемов торгов на множество прогнозов объемов торгов. Алгоритм решения задачи частичного проектирования реализован в виде метода `project_on_K` класса `AxiomsTesterClass` системы «Индекс». Этот метод очень похож на уже описанный метод `project_on_KPrices`, потому его исходный код не приводится.

Все графики в 3.2 нарисованы с помощью языка программирования Python.

4.4. Анализ бюджетной статистики Великобритании

Исходные данные опроса Family Expenditure Survey, которые доступны в виде онлайн-приложения к статье [44]⁸, представлены в формате данных системы GAUSS. Эти файлы были преобразованы в формат системы Stata с помощью программы Stat/Transfer. Первичная обработка проводилась с

⁸<https://www.econometricsociety.org/publications/econometrica/2008/11/01/best-nonparametric-bounds-demand-responses>

помощью системы Stata. Скрипт доступен на GitHub⁹. В первичную обработку входила выгрузка данных для построения кривых Лоренца и расчета коэффициентов Джини, а также разбиение домашних хозяйств на 100 страт.

Данные по индексам цен были предоставлены авторами [44] по личному запросу. Эти данные также доступны на GitHub¹⁰.

Численные методы для анализа бюджетной статистики Великобритании реализованы в программном комплексе AxiomsPhD, реализованном в виде проекта Visual Studio 2012 на языке программирования C++. Этот программный комплекс был задуман как упрощённая компактная версия системы «Индекс», в которой не нужно тратить время на доработку графического интерфейса и которую проще развивать для анализа новых структур данных, например бюджетной статистики. Проект вместе со всеми исходными кодами доступен на GitHub¹¹. В этом проекте не реализованы все возможности системы «Индекс», но в нем есть основные функции, необходимые для анализа бюджетной статистики Великобритании. Как описано в 3.1, все домашние хозяйства в каждом периоде разбиваются на 100 страт. В результате такого разбиения получается 100 торговых статистик с одинаковыми ценами и разными объемами потребления. Для хранения такого набора данных создан класс `dt::strata`.

Определения основных структур данных и функций приводятся в четырех заголовочных файлах:

- 1) `axioms.hpp` – основные численные методы; здесь приводятся, в частности, заголовки функций для
 - проверки однородной сильной аксиомы (функция `HARPTest`),

⁹[https://github.com/nklemashev/phd/blob/master/uk/Work with data.do](https://github.com/nklemashev/phd/blob/master/uk/Work%20with%20data.do)

¹⁰<https://github.com/nklemashev/phd/blob/master/uk/pall.csv>

¹¹<https://github.com/nklemashev/phd/tree/master/uk/AxiomsPhD>

- расчета индексов Конюса-Дивизиа (функция `HARP`),
 - поиска показателя нерациональности (функция `HARPLogIrInd`),
 - расчета матрицы индексов цен Пааше (функция `logPaascheMat`);
- 2) `dataload.hpp` – функции загрузки данных;
 - 3) `dt.hpp` – описания структур данных;
 - 4) `strfuncs.hpp` – описания функций для обработки строк; эти функции используются для загрузки данных из текстовых файлов.

Описанные в заголовочных файлах функции реализованы в нескольких файлах с исходным кодом:

- 1) `axioms.cpp` – реализации всех функций, описанных в `axioms.hpp`;
- 2) `dataload.cpp` – реализации всех функций, описанных в `dataload.hpp`;
- 3) `goods.cpp` – реализации методов класса `dt::goods`, описанного в `dt.hpp`; класс `dt::goods` реализует тип данных «массив товаров»;
- 4) `interval.cpp` – реализации методов класса `dt::interval`, описанного в `dt.hpp`; класс `dt::interval` реализует тип «числовой интервал» и используется для хранения информации о разбиении страт между несколькими группами домашних хозяйств;
- 5) `intervals.cpp` – реализации методов класса `dt::intervals`, описанного в `dt.hpp`; класс `dt::intervals` представляет собой массив из элементов `dt::interval`, который поддерживает несколько операций для последовательности интервалов (например, объединение интервалов);
- 6) `lorenzData.cpp` – реализации методов класса `dt::lorenzData`, описанного в `dt.hpp`; класс `lorenzData` является структурой для хранения данных, по которым строится кривая Лоренца; среди методов этого класса есть метод `giniIndex`, который рассчитывает коэффициент Джини;

- 7) `matrix.cpp` – реализации методов класса `dt::matrix`, описанного в `dt.hpp`; класс `dt::matrix` реализует тип «матрица»; цены и объемы потребления хранятся в виде матриц размера (количество периодов) × (количество товаров);
- 8) `strata.cpp` – реализации методов класса `dt::strata`, описанного в `dt.hpp`; класс `dt::strata` хранит один вектор цен и массив векторов объемов потребления, по одному на каждую страту домашних хозяйств;
- 9) `strfuncs.cpp` – реализации функций для обработки строк, описанных в `strfuncs.hpp`;
- 10) `tradestat.cpp` – реализации методов класса `dt::tradestat`, описанного в `dt.hpp`; класс `dt::tradestat` реализует тип данных «торговая статистика»; описание класса приводится в листинге 4.7 на стр. 176.

Основной файл проекта, который содержит функцию `main`, выполняющуюся при запуске скомпилированной программы, называется `main.cpp`. Этот файл содержит также различные функции для анализа данных Великобритании, которые вызывают реализованные алгоритмы. Среди таких функций есть функция `proportions2SequenceInf`. Она разбивает все страты домашних хозяйств на две торговые статистики согласно заданному разбиению и оценивает показатели нерациональности этих торговых статистик. Параметры разбиения передаются в виде текстового файла. Каждая строка этого файла содержит название периода, после которого приводятся описание того, как разделять объемы потребления страт домашних хозяйств в этот период, т.е. какие страты относить к одному классу, а какие к другому.

Функция `proportions2SequenceInf` загружает данные о ценах и об объемах потребления всех выделенных страт. Далее, в бесконечном цикле просходит перераспределение страт между двумя торговыми статистиками и перерасчет показателей нерациональности. Каждая итерация цикла

заканчивается формированием текстового файла с показателями нерациональности для торговых статистик. Затем, функция переходит в режим ожидания ввода от пользователя. Если пользователь вводит символ 'у', то функция делает еще одну итерацию цикла. Если пользователь вводит символ 'п', функция прерывает цикл. Такой цикл позволяет проверять различные способы разбиения страт по торговым статистикам, не загружая повторно объемы потребления страт с диска. Это ускоряет процесс перебора различных разбиений. В листинге 4.8 на стр. 177 приводится фрагмент исходного кода функции `proportions2SequenceInf`, который выполняет одну итерацию цикла.

Все графики в разделе 3.1 нарисованы с помощью *Matlab*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации была развита методология анализа статистики агрегированного потребления для случая, когда экономические данные не согласуются с моделью Парето с положительно-однородной функцией полезности. Модель Парето позволяет учитывать эффект замещения товаров при расчете экономических индексов – индексов Конюса-Дивизиа. Для применения этой модели необходимо выполнение некоторых условий. Минимальным требованием является выполнение сильной аксиомы выявленного предпочтения. Однако, эта аксиома не гарантирует положительной однородности рационализирующей функции полезности. Получающиеся в этом случае индексы потребления в общем случае не являются инвариантными по отношению к масштабам объемов потребления. Не гарантируется также выполнение финансового баланса.

Если статистика агрегированного потребления согласуется с моделью Парето с положительно-однородной функцией полезности, то существуют индексы Конюса-Дивизиа, которые сохраняют финансовый баланс. Кроме того, индексы потребления Конюса-Дивизиа инвариантны к изменению масштабов объемов потребления.

В диссертационном исследовании было проанализировано, насколько важно предположение положительной однородности рационализирующей функции полезности для разработки измерительных показателей и прогнозирования. Показана высокая частота выполнения сильной аксиомы выявленного предпочтения на случайных товарных подгруппах, а также ее низкая мощность. Показано, что получаемые с помощью сильной аксиомы множества прогнозов мало отличаются от тривиальных множеств прогнозов. Для однородной сильной аксиомы получены противоположные результаты. На основе проведенного сравнения был сделан вывод о том, что для реше-

ния практических задач по прогнозированию и анализу сегментации рынков следует использовать однородную сильную аксиому. Другими словами, показана практическая значимость требования положительной однородности рационализирующей функции полезности.

В некоторых ситуациях, анализ которых представляет интерес, однородная сильная аксиома нарушается. В диссертационном исследовании рассмотрены две такие ситуации – когда происходит изменение социальной структуры общества, растет индекс Джини и когда происходит кризис на финансовом рынке. Для анализа этих ситуаций более адекватным модельным описанием является неоклассическая модель, в которой рассматривается несколько репрезентативных потребителей с разными функциями полезности.

Универсальных эффективных алгоритмов анализа в рамках такой модели на сегодняшний день нет. Более того, если не накладывать требования положительной однородности функций полезности, то задача проверки согласованности статистики потребления с неоклассической моделью с двумя репрезентативными потребителями оказывается NP-полной. Для другой модели многих репрезентативных потребителей – модели временного диктатора – NP-полнота доказана и для положительно-однородных функций полезности, что является одним из результатов диссертационного исследования.

Тем не менее, описанные ситуации удастся анализировать. Для этого необходимо привлекать дополнительную информацию, например, бюджетную статистику, и дополнительные модельные предположения и эвристики, преодолевая тем самым сложностные ограничения, с которыми сталкиваются универсальные подходы.

В результате анализа бюджетной статистики Великобритания в период

с 1975 по 1999 удалось доказать согласованность данных о потреблении домашних хозяйств с неоклассической моделью с двумя репрезентативными потребителями, которым можно придать содержательную интерпретацию. Один репрезентативный потребитель соответствует группе наиболее богатых домашних хозяйств и начинает формироваться с 1988 года. К концу рассматриваемого периода эта группа составляет 4% от всех домашних хозяйств. При этом, расходы этой группы составляют 12% расходов всех домашних хозяйств. Другой репрезентативный потребитель соответствует всем остальным домашним хозяйствам. Сравнение структур потребления этих двух групп домашних хозяйств выявило, что основные различия наблюдаются в категориях «Продукты питания» и «Транспорт и развлечения».

Анализ кризиса на фондовом рынке Китая позволил описать кризис как результат того, что некоторые высокочастотные трейдеры спрогнозировали изменения предпочтений основных инвесторов и начали совершать торги в соответствии с будущими предпочтениями основных инвесторов. Это привело к тому, что в течение некоторого периода поведение инвесторов описывается взаимодействием двух репрезентативных потребителей. Одной из причин успешности анализа является то, что если строить множества прогнозов объёмов потребления с помощью однородной сильной аксиомы выявленного предпочтения, то эти множества являются многогранными конусами. Поэтому, задачи проектирования на эти множества являются задачами квадратичного программирования и для их решения разработаны эффективные численные методы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор приносит искреннюю благодарность своему научному руководителю Александру Алексеевичу Шананину за постановку задач, постоянное внимание к работе и ценные советы, а также к.ф.-м.н. Кондракову Ивану Александровичу за предоставление исходных кодов программного комплекса «Индекс» и за помощь в их изучении. Также автор благодарит к.т.н. Поспелову Людмилу Яковлевну за предоставление данных по товарным рынкам и консультации, а также к.ф.-м.н. Ващенко Михаила Петровича за предоставление данных по фондовым и валютным рынкам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pareto V. Manual of Political Economy. — Augustus M. Kelley, 1971. — Перевод французского издания 1927г.
2. Адамов В. Е. Факторный индексный анализ (методология и проблемы). — Москва : Статистика, 1977.
3. Бакланов Г. И. Некоторые вопросы индексного метода. — Москва : Статистика, 1972.
4. Бюшгенс С. С. Об одном классе гиперповерхностей: По поводу «идеального» индекса Ирвинга Фишера покупательной силы денег. // Математический сборник. — 1925.
5. Виноградова Н. М. Теория индексов. — Москва : Гостехиздат, 1930.
6. Вратенков С. Д., Шананин А. А. Анализ структуры потребительского спроса с помощью экономических индексов. — Москва : ВЦ РАН, 1991.
7. Гребенников В. А., Шананин А. А. Обобщённый непараметрический метод: закон спроса в задачах прогнозирования // Математическое моделирование. — 2008. — Т. 20, № 9. — С. 34–50.
8. Данилов В. И., Сотсков А. И. Рациональный выбор и выпуклые предпочтения // Известия АН. Серия техническая кибернетика. — 1985. — Т. 2. — С. 14–23.
9. Ершов Э. Б. Ситуационная теория индексов цен и количеств. — Москва : РИОР, 2011.
10. Зоркальцев В. И. Индексы цен и инфляционные процессы. — Новосибирск : Наука, 1996.
11. Казинец Л. С. Теория индексов. — Москва : Госстатиздат, 1963.
12. Ковалевский Г. В. Индексный метод в экономике. — Москва : Финансы и статистика, 1989.

13. Кондраков И. А. Программный комплекс анализа торговой статистики на основе обобщенного непараметрического метода "индекс-// Системы управления и информационные технологии. — 2011. — Т. 1.1, № 43. — С. 198–203.
14. Разработка технологии и инструмента исследования потребительского рынка с помощью обобщенного непараметрического метода / И. А. Кондраков, Л. Я. Поспелова, Ю. А. Усанов, А. А. Шананин. — М.: ВЦ РАН, 2007.
15. Технологии анализа рынков на основе обобщенного непараметрического метода / И. А. Кондраков, Л. Я. Поспелова, Ю. А. Усанов, А. А. Шананин. — М.: ВЦ РАН, 2010.
16. Кондраков И. А., Поспелова Л. Я., Шананин А. А. Программа исследования и сегментации потребительских рынков. — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008615547. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 19 ноября 2008 г., Москва, реестр программ для ЭВМ. — 2008.
17. Кондраков И. А., Поспелова Л. Я., Шананин А. А. Обобщенный непараметрический метод. применение к анализу товарных рынков // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2, № 3. — С. 32–45.
18. Кондраков И. А., Шананин А. А. Идемпотентные аналоги теорем о неотрицательных матрицах и их приложения к анализу экономической информации // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51, № 2. — С. 188–205.
19. Конюс А. А. Проблема истинного индекса стоимости жизни // Экономический бюллетень Конъюнктурного института. — 1924. — Т. 9-10, № 9-10. — С. 64–72.
20. Костюхин В. Н. Индексы. — Москва : МФИ, 1960.
21. Кёвеш П. Теория индексов и практика экономического анализа. — Москва : Финансы и статистика, 1990.

22. Перегудов В. Н. Теоретические вопросы индексного анализа. — Москва : Госстатиздат, 1960.
23. Петров А. А., Шананин А. А. Условия интегрируемости, распределения доходов и социальная структура общества // Математическое моделирование. — 1994. — Т. 6, № 8. — С. 105–125.
24. Плошко Б. Г. Индексы. — Л. : ЛГУ, 1958.
25. Поспелова Л. Я., Шананин А. А. Анализ торговой статистики Нидерландов 1951-1977 гг. с помощью обобщённого непараметрического метода. — Москва : ВЦ РАН, 1998.
26. Поспелова Л. Я., Шананин А. А. Показатели нерациональности потребительского поведения и обобщённый непараметрический метод // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, № 4. — С. 105–116.
27. Саложенко А. А. Некоторые вопросы сложности алгоритмов: Учебное пособие. — Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2001.
28. Слуцкий Е. Е. Экономические и статистические произведения: Избранное. — М.: Эксмо, 2010.
29. Суслов И. М. Теория статистических показателей. — Москва : Статистика, 1975.
30. Торвей Р. Индексы потребительских цен. — М.: Финансы и статистика, 1993.
31. Фишер И. Построение индексов: Пер. с англ. — М.: ЦСУ СССР, 1928.
32. Шананин А. А. Агрегирование конечных продуктов и проблема интегрируемости функций спроса. — М.: ВЦ АН СССР, 1986.
33. Шананин А. А. Об агрегации функций спроса // Экономика и математические методы. — 1989. — Т. 35, № 6. — С. 1095–1105.
34. Шананин А. А. Непараметрические методы анализа структуры потребительского спроса // Математическое моделирование. — 1993. — Т. 5, № 9. — С. 3–17.

35. Шананин А. А. Проблема интегрируемости и обобщённый непараметрический метод анализа потребительского спроса // Труды МФТИ. — 2009. — Т. 1, № 4. — С. 84–98.
36. Afriat S. N. The system of inequalities $a_{rs} \geq x_s - x_r$ // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. — 1963. — Vol. 59, no. 1. — P. 125–133.
37. Afriat S. N. The construction of utility functions from expenditure data // *International economic review*. — 1967. — Vol. 8, no. 7. — P. 67–77.
38. Afriat S. N. The theory of international comparison of real income and prices // *International Comparisons of Prices and Output* / Ed. by J. D. Daly. — New York: National Bureau of Economic Research, 1972. — P. 11–84.
39. Afriat S. N. On a system of inequalities in demand analysis: an extension of the classical method // *International economic review*. — 1973. — Vol. 14, no. 2. — P. 460–472.
40. Allen R. G. D. *Index Numbers in Theory and Practice*. — Palgrave Macmillan, 1975.
41. Antonelli G. B. *Sulla teoria matematica della economia politica*. — Pisa: nella Tipografia del Folchetto, 1886.
42. Arrow K. Rational choice functions and orderings // *Economica* (new series). — 1959. — Vol. 26, no. 102. — P. 121–127.
43. Balk B. M. Divisia price and quantity indices: 80 years after // *Statistica Neerlandica*. — 2005. — Vol. 59. — P. 119–158.
44. Blundell R., Browning M., Crawford I. Best nonparametric bounds on demand responses // *Econometrica*. — 2008. — Vol. 76. — P. 1227–1262.
45. Bronars S. G. The power of nonparametric tests // *Econometrica*. — 1987. — Vol. 55. — P. 693–698.

46. Cherchye L., De Rock B., Vermeulen F. The collective model of household consumption: A nonparametric characterization // *Econometrica*. — 2007. — Vol. 75, no. 2. — P. 553–574.
47. Revealed preference tests for weak separability: An integer programming approach / L. Cherchye, T. Demuynck, B. De Rock, P. Hjerstrand // *Journal of Econometrics*. — 2015. — Vol. 186. — P. 129–141.
48. Chiappori P. A., Ekeland I. A convex darboux theorem // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Serie 4*. — 1997. — Vol. 25, no. 1-2. — P. 287–297.
49. Chiappori P. A., Ekeland I. Aggregation and market demand: An exterior differential calculus viewpoint // *Econometrica*. — 1999.
50. Preferences, Utility and Demand / J. S. Chipman, L. Hurwicz, M. K. Richter, H. F. Sonnenschein. — Harcourt Brace Janovich, 1971.
51. Chipman J. S., Moore J. C. On social welfare functions and the aggregation of preferences // *Journal of economic theory*. — 1979. — Vol. 21, no. 1. — P. 111–139.
52. Sitting closer to friends than enemies, revisited / M. Cygan, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk, J. O. Wojtaszczyk // *Mathematical Foundations of Computer Science* / Ed. by B. Rovan, V. Sassone, P. Wildmayer. — Springer, 2012. — P. 296–307.
53. De Ville J. The existence conditions of a total utility function // *The review of economic studies*. — 1951. — Vol. 19, no. 2. — P. 123–128.
54. Deb R. An efficient nonparametric test of the collective household model. — 2010. — August. — online; accessed: https://www.economics.utoronto.ca/debrahul/files/Collective_Model.pdf.
55. Diewert W. E. Afriat and revealed preference theory // *The Review of Economic Studies*. — 1973. — Vol. 40. — P. 419–425.

56. Divisia F. L' indice monétaire et la theorie de la monnaie // *Revue d' Economie Politique*. — 1925. — Vol. 39. — P. 842–861, 980–1008, 1121–1151.
57. Echenique F., Lee S., Shum M. The money pump as a measure of revealed preference violations // *Journal of Political Economy*. — 2011. — Vol. 119. — P. 1201–1223.
58. Ekeland I., Galichon A. The housing problem and revealed preference theory: duality and an application // *Economic Theory*. — 2013. — Vol. 54. — P. 425–441.
59. Famulari M. A household-based, nonparametric test of demand theory // *Review of Economics and Statistics*. — 1995. — Vol. 77. — P. 372–383.
60. Gale D. A note on revealed preference // *Economica*. — 1960. — Vol. 27, no. 108. — P. 347–358.
61. Garey M., Johnson D. *Computers and Intractability – A Guide to the Theory of NP-completeness*. — Freeman, 1979.
62. Georgesku-Roegen N. The pure theory of consumer's behavior // *The quaterly journal of economics*. — 1936. — Vol. L, no. 4. — P. 545–593.
63. Gross J. Testing data for consistency with revealed preference // *The Review of Economics and Statistics*. — 1995. — Vol. 77. — P. 701–710.
64. Hayashi F. *Econometrics*. — Princeton University Press, 2000.
65. Hicks J., Allen R. G. D. A reconsideration of the theory of value. part 2 // *Economica, new series*. — 1934. — Vol. 1, no. 2. — P. 196–219.
66. Hicks J., Allen R. G. D. A reconsideration of the theory of value. part 1 // *Economica, new series*. — 1934. — Vol. 1, no. 1. — P. 52–76.
67. Houthakker H. S. Revealed preference and the utility function // *Economica (new series)*. — 1950. — Vol. 17, no. 66. — P. 159–174.
68. Houtman M. *Nonparametric consumer and producer analysis : Ph.D. thesis / M. Houtman ; University of Limburg. — Maastricht, Netherlands, 1995.*

69. Hurwicz L. On the problem of integrability of demand functions // Preferences, utility and demand / Ed. by J. Chipman, L. Hurwicz, M. Richter, H. Sonnenschein. — Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 1971. — P. 174–214.
70. Hurwicz L., Uzawa H. On the integrability of demand functions // Preferences, utility and demand / Ed. by J. Chipman, L. Hurwicz, M. Richter, H. Sonnenschein. — Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 1971. — P. 117–139.
71. Kozponti Statistikal Hivantal. A lakosság jövedelme és fogyasztása. — Budapest: Kozponti Statistikal Hivantal, 1985.
72. Levin V. L. Reduced cost functions and their applications // Journal of Mathematical Economics. — 1997. — Vol. 28, no. 2. — P. 155–186.
73. Netherlands. Centraal Bureau voor de Statistiek. Hoofdafdeling Statistische Methoden. Private Consumption Expenditure and Price Index Numbers for Netherlands 1951-1977. — Netherlands Bureau of Statistics, 1981.
74. Newman P. A supplementary note on complete ordering and revealed preference // *Economica*. — 1960. — Vol. 27(3), no. 74. — P. 202–205.
75. Newman P. Complete ordering and revealed preference // *Economica*. — 1960. — Vol. 27(2), no. 73. — P. 65–77.
76. Heuristics for deciding collectively rational consumption behavior / F. T. Nobibon, L. Cherchye, B. De Rock et al. // *Computational Economics*. — 2011. — Vol. 38, no. 2. — P. 173–204.
77. Revealed preference tests of collectively rational consumption behavior: Formulations and algorithms / F. T. Nobibon, L. Cherchye, Y. Crama et al. // *Operations Research*. — 2016. — Vol. 64, no. 6. — P. 1197–1216.
78. Nocedal J., Wright S. J. Numerical Optimization (2nd ed.). — Berlin, New York: Springer-Verlag, 2006.
79. Pareto V. Ophelimity in nonclosed cycles // Preferences, utility and demand / Ed. by J. Chipman, L. Hurwicz, M. Richter, H. Sonnenschein. — Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 1971. — P. 370–385.

80. Richter M. K. Revealed preference theory // *Econometrica*. — 1966. — Vol. 34. — P. 635–645.
81. Rose H. Consistency of preference: The two-commodity case. // *Review of Economic Studies*. — 1958. — Vol. 25. — P. 124–125.
82. Samuelson P. A note on the pure theory of customer's behavior // *Economica* (new series). — 1938. — Vol. 7, no. 17. — P. 61–71.
83. Samuelson P. Consumption theory in terms of revealed preference // *Economica*. — 1948. — Vol. 15. — P. 243–253.
84. Samuelson P. The problem of integrability in utility theory // *Economica* (new series). — 1950. — Vol. 17, no. 68. — P. 355–385.
85. Shafer W. The nontransitive consumer // *Econometrica*. — 1974. — Vol. 42, no. 5. — P. 913–919.
86. Shen S., Goh B. China stock market freezing up as sell-off gathers pace. — URL: <https://www.reuters.com/article/us-china-stocks/china-stock-market-freezing-up-as-sell-off-gathers-pace-idUSKCN0PI04Q20150708>. — 2015.
87. Slutsky E. Sulla teoria del bilancio del consumatore // *Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica*. — 1915. — Vol. 51. — P. 1–26.
88. The money pump as a measure of revealed preference violations: A comment / B. Smeulders, L. Cherchye, B. De Rock, F. C. R. Spieksma // *Journal of Political Economy*. — 2013. — Vol. 121. — P. 1248–1258.
89. Stigum B. Revealed preference: a proof of houthakker's theorem // *Econometrica*. — 1973. — Vol. 41, no. 3. — P. 411–423.
90. Uzawa H. Preference and rational choice in the theory of consumption // *Mathematical Models in Social Science* / Ed. by K.J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes. — Stanford University Press, 1960. — P. 129–148.
91. Varian H. The nonparametric approach to demand analysis // *Econometrica*. — 1982. — Vol. 50, no. 4. — P. 945–973.

92. Varian H. Non-parametric tests of consumer behavior // *Review of Economic Studies*. — 1983. — Vol. 50, no. 1. — P. 99–110.
93. Varian H. Goodness-of-fit in optimizing models // *Journal of Econometrics*. — 1990. — Vol. 46. — P. 125–140.
94. Volterra V. L'economia matematica ed il nuove manuale del prof. pareto // *Giornale degli Economisti*. — 1906. — Vol. 32. — P. 296–301.
95. Whitney G. A., Swofford J. L. Nonparametric tests of utility maximization and weak separability for consumption, leisure and money // *The Review of Economic Statistics*. — 1987. — Vol. 69. — P. 458–464.

ПРИЛОЖЕНИЕ

П.1. Листинги программ

В данном приложении приводятся листинги исходных текстов программ, упомянутых в четвертой главе.

Листинг 4.1. Исходный код функции для генерирования случайных групп

```
public TradeStatContainer.ClassGoods RandomGoods(
    TradeStatContainer.ClassGoods sourceGoods ,
    int N)
{
    TradeStatContainer.ClassGoods returnGoods = new
        ↪ TradeStatContainer.ClassGoods ();
    TradeStatContainer.ClassGood tempGood, sourceGood;
    int numberOfSourceGoods = sourceGoods.Count;

    List<int> indices = new List<int>(numberOfSourceGoods)
        ↪ ;
    int i, j, ind;
    for (i = 0; i < numberOfSourceGoods; i++)
    {
        indices.Add(i);
    }
    if (N <= numberOfSourceGoods / 2)
    {
        List<int> retIndices = new List<int>(N);
        for (j = 0; j < N; j++)
        {
```



```

    ind = Convert.ToInt32(Math.Floor(Rand.
        ↪ NextDouble() * indices.Count)); // Rand
        ↪ — объект класса Random
    retIndices.Add(indices[ind]);
    indices.RemoveAt(ind);
}
indices.Clear();
indices = retIndices;
}
else
{
    for (j = N; j < numberOfSourceGoods; j++)
    {
        ind = Convert.ToInt32(Math.Floor(Rand.
            ↪ NextDouble() * indices.Count));
        indices.RemoveAt(ind);
    }
}
int T = sourceGoods[0].Prices.Count;
for (i = 0; i < indices.Count; i++)
{
    tempGood = new TradeStatContainer.ClassGood(
        ↪ sourceGoods[0].OwnerTSC);
    sourceGood = sourceGoods[indices[i]];
    tempGood.Prices = new List<double>(T);
    tempGood.Volumes = new List<double>(T);
    for (j = 0; j < T; j++)
    {

```

```

        tempGood.Prices.Add(sourceGood.Prices[j]);
        tempGood.Volumes.Add(sourceGood.Volumes[j]);
    }
    tempGood.Name = String.Copy(sourceGood.Name);
    tempGood.OwnerGroupID = indices[i] + 1;
    returnGoods.Add(tempGood);
}
return returnGoods;
}

```

Листинг 4.2. Исходный код функции для оценки параметров модели авторегрессии заданного порядка

```

function [beta, errs, sigma2, logL] = FitAR(z, p)

Y = z(p+1:end);
T = numel(Y);
X = ones(T, p+1)*NaN;
X(:,1) = ones(T,1);
for j=1:p
    X(:,j+1) = z(p+1-j:end-j);
end
if (det(X'*X)<1e-20)
    logL = NaN;
    beta = NaN;
    errs = NaN;
    sigma2 = NaN;
else
    beta = (X'*X)\(X'*Y);
    SSR = (Y-X*beta)'*(Y-X*beta);

```

```

logL = -T/2*log(2*pi/T) - T/2 - T/2*log(SSR);
sigma2 = SSR/(T-p-1);
aVar = sigma2*inv(X'*X);
errs = diag(aVar);
% Check stationarity
AR = cell(p - 1, 1);
for j=1:p
    AR{j} = beta(j + 1);
end
try
    arima('AR', AR, 'Constant', beta(1));
catch err
    if (strcmp(err.identifier, 'econ:arima:
        ↪ validateModel:UnstableAR'))
        logL = Inf;
        beta = Inf;
        errs = Inf;
        sigma2 = Inf;
    else
        rethrow(err);
    end
end
end
end

```

Листинг 4.3. Исходный код функции для оценки порядка авторегрессии

```

P = arMin:arMax;
pns = arMax + 1;
troubleGood = zeros(numel(P),1);

```

```

logL = zeros(arMax-arMin+1,1);
numPars = zeros(arMax-arMin+1,1);
for j=1:numel(P)
    [~,~,~,logL(j)] = FitAR(z,P(j));
    if (isnan(logL(j)))
        troubleGood(j) = 1;
    end
    if (isinf(logL(j)))
        pns = j - 1;
        break;
    end
    numPars(j) = P(j)+1;
end
AIC = aicbic(logL(1:pns),numPars(1:pns));
[~,I] = min(AIC);
pOpt = P(I(1)); % Оценка порядка авторегрессии

```

Листинг 4.4. Исходный код метода для поиска пар наиболее несогласованных периодов

```

public class HLOPPL_ret
{
    public Double[] lambdas;
    public Double[,] omegas;
    public Double[,] c;

    public HLOPPL_ret(int T, bool with_c = false)
    {
        lambdas = new Double[T];
        omegas = new Double[T, T];
    }
}

```

```

        if (with_c)
        {
            c = new Double[T, T];
        }
        else
        {
            c = null;
        }
    }
}

private int harp_log_omega_period_pairs_lp_ifun(int t, int
    ↪ tau, int T)
{
    if (tau == t)
    {
        throw new Error(-1, "Ifun:_t_and_tau_arguments_
            ↪ should_be_different.");
    }
    if (tau < t)
    {
        return T + t * (T - 1) + tau;
    }
    else
    {
        return T + t * (T - 1) + tau - 1;
    }
}

```

```

public HLOPPL_ret harp_log_omega_period_pairs_lp_dual(
    ↪ TradeStatContainer.ClassGoods goods, double big_omega
    ↪ = 0.0)
{
    int T = goods[0].Prices.Count;
    HLOPPL_ret fun_ret = null;
    int nVars = T * (T - 1);
    double[,] C = LogPaascheMat(goods);
    int t, tau, i, j;
    bool lpInit = lpsolve55IntPtr.lpsolve.Init("D:\\Work_
        ↪ on_PhD\\CSharpIndex_(NIKO)\\CSharpIndex\\lpsolve.
        ↪ cs_x64\\");

    for (t = 0; t < T; t++)
    {
        for (tau = 0; tau < T; tau++)
        {
            C[t, tau] -= big_omega;
        }
    }

    lpsolve55IntPtr.lpsolve.lpsolve_return sol;
    int[] colno = new int[nVars]; // For indices of
        ↪ variables
    double[] row = new double[nVars]; // For coefficients
        ↪ specifying the constraints.
    int ret = 0;

```

```

// Making LP model with no constraints and nVars
    ↪ variables
IntPtr lp = lpsolve55IntPtr.lpsolve.make_lp(0, nVars);
if (lp.ToInt64() == 0)
{
    ret = 1;
}

// Name the variables
//  $\{x_i\}_{i=0}^{T * (T - 1) - 1}$ 
//  $x_{t\tau} = x_{I(t, \tau)}$ ,  $t, \tau = 0..T-1$ ,  $t \neq \tau$ 
    ↪ tau
//  $I(t, \tau) = t(T - 1) + \tau$ , if  $\tau < t$ 
//  $I(t, \tau) = t(T - 1) + \tau - 1$ , if  $\tau > t$ 
if (ret == 0)
{
    for (t = 0; t < T; t++)
    {
        for (tau = 0; tau < T; tau++)
        {
            if (t == tau)
            {
                continue;
            }
            i = harp_log_omega_period_pairs_lp_ifun(t,
                ↪ tau, T) - T;
            lpsolve55IntPtr.lpsolve.set_col_name(lp, i
                ↪ + 1, "x_" + (t + 1).ToString() + ")");

```

```

        ↪ _{" +
            (tau + 1).ToString() + "}");
    }
}

// Adding constraints
if (ret == 0)
{
    lpsolve55IntPtr.lpsolve.set_add_rowmode(lp, true);
    // sum_{\substack{\tau = 1 \\ \tau \neq t}}^T x_{\tau}
    ↪ t} = \sum_{\substack{\tau = 1 \\ \tau \neq t}}^T
    ↪ x_{t \tau} \quad (t = \overline{1, T})
    for (t = 0; t < T; t++)
    {
        j = 0;
        for (tau = 0; tau < T; tau++)
        {
            if (t == tau)
            {
                continue;
            }
            i = harp_log_omega_period_pairs_lp_ifun(t,
                ↪ tau, T) - T;
            colno[j] = i + 1;
            row[j] = -1.0;
            j++;
            i = harp_log_omega_period_pairs_lp_ifun(

```



```

        ↪ tau, t, T) - T;
    colno[j] = i + 1;
    row[j] = 1.0;
    j++;
}
if (lpsolve55IntPtr.lpsolve.add_constraintex(
    ↪ lp, 2 * (T - 1), row, colno,
    lpsolve55IntPtr.lpsolve.
        ↪ lpsolve_constr_types.EQ, 0) ==
    ↪ false)
{
    ret = 3;
}
}

// x_{t\tau} \in [0, 1]
for (t = 0; t < T; t++)
{
    for (tau = 0; tau < T; tau++)
    {
        if (tau == t)
        {
            continue;
        }
        i = harp_log_omega_period_pairs_lp_ifun(t,
            ↪ tau, T) - T;
        colno[0] = i + 1;
        row[0] = 1.0;

```

```

if (lpsolve55IntPtr.lpsolve .
    ↪ add_constraintex(lp, 1, row, colno,
        lpsolve55IntPtr.lpsolve .
            ↪ lpsolve_constr_types.GE, 0) ==
            ↪ false)
{
    ret = 3;
}
if (lpsolve55IntPtr.lpsolve .
    ↪ add_constraintex(lp, 1, row, colno,
        lpsolve55IntPtr.lpsolve .
            ↪ lpsolve_constr_types.LE, 1.0) ==
            ↪ false)
{
    ret = 3;
}
}
}
// That's it for constraints
lpsolve55IntPtr.lpsolve.set_add_rowmode(lp, false)
    ↪ ;
}

// Set the objective function.
if (ret == 0)
{
    // Objective:  $\sum_{t=0}^{T-1} \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \neq t \}^{T-1} x_{t\tau} \rightarrow \max$ 
    ↪  $\tau \neq t \}^{T-1} x_{t\tau} \rightarrow \max$ 
}

```

```

for (t = 0; t < T; t++)
{
    for (tau = 0; tau < T; tau++)
    {
        if (t == tau)
        {
            continue;
        }
        i = harp_log_omega_period_pairs_lp_ifun(t ,
            ↪ tau, T) - T;
        colno[i] = i + 1;
        row[i] = C[t, tau];
    }
}
if (lpsolve55IntPtr.lpsolve.set_obj_fnex(lp, nVars
    ↪ ,
    row, colno) == false)
{
    ret = 4;
}
}

if (ret == 0)
{
    // Set goal to maximizing the obj. function
    lpsolve55IntPtr.lpsolve.set_maxim(lp);
    // Solve the problem
    sol = lpsolve55IntPtr.lpsolve.solve(lp);
}

```

```

// Analyze the resulting solution
if (sol == lpsolve55IntPtr.lpsolve.lpsolve_return.
    ↪ OPTIMAL)
{
    fun_ret = new HLOPPL_ret(T);
    lpsolve55IntPtr.lpsolve.get_variables(lp, row)
        ↪ ;

    for (t = 0; t < T; t++)
    {
        fun_ret.lambdas[t] = 0.0;
        for (tau = 0; tau < T; tau++)
        {
            if (t == tau)
            {
                fun_ret.omegas[t, t] = 0.0;
            }
            else
            {
                i =
                    ↪ harp_log_omega_period_pairs_lp_If
                    ↪ (t, tau, T) - T;
                fun_ret.omegas[t, tau] = row[i];
            }
        }
    }
}
}
}

```

```

    if (lp.ToInt64() != 0)
    {
        lpsolve55IntPtr.lpsolve.delete_lp(lp);
    }

    return fun_ret;
}

```

Листинг 4.5. Исходный код метода для решения задачи (3.2.23)–(3.2.24)

```

public double []
    ↪ harp_log_omega_split_volume_between_two_stats_base(
        TradeStatContainer.ClassGoods ts_main,
        TradeStatContainer.ClassGoods ts_aux,
        List<double> P,
        List<double> X,
        List<int> stocks_to_fix_inds = null,
        double big_omega = 0.035,
        double eps = 0.0
    )
/*
* This method solves general problem for splitting the
    ↪ volume X between two trade statistics.
*
* Input:
* ts_main — Trade statistics, on which we project the
    ↪ volumes X
* ts_aux — Trade statistict to which we add the
    ↪ difference between X and its projection on ts_main

```

```

* P — price vector for the period, the volumes at which
  ↪ we project
* X — the volumes to project
* stocks_to_fix_inds — indices of stocks to fix
* big_omega —  $\Omega$  in the original paper. Notice,
  ↪ that this is the logarithm of the irrationality
  ↪ index
*/
{
    List<double> gammas_main =
        ↪ get_gammas_for_volumes_forecasting_cone(ts_main,
        ↪ P, Math.Exp(big_omega));
    List<double> gammas_aux =
        ↪ get_gammas_for_volumes_forecasting_cone(ts_aux, P
        ↪ , Math.Exp(big_omega));
    int i, j, t, tau;
    int N_vars = ts_main.Count;
    int T_main = ts_main[0].Volumes.Count;
    int T_aux = ts_aux[0].Volumes.Count;
    double rhs;
    List<int> stock_to_optimize_inds;

    if (stocks_to_fix_inds == null)
    {
        stocks_to_fix_inds = new List<int>(0);
    }

    N_vars -= stocks_to_fix_inds.Count;

```

```

stock_to_optimize_inds = new List<int>(N_vars);
for (i = 0; i < ts_main.Count; i++)
{
    if (stocks_to_fix_inds.IndexOf(i) < 0)
    {
        stock_to_optimize_inds.Add(i);
    }
}

// ***
// Solving QP
// ***

alglib.minqpstate state;
alglib.minqpreport rep;

// Create solver
alglib.minqpcreate(N_vars, out state);

// Set quadratic term
double[,] A = new double[N_vars, N_vars];
for (i = 0; i < N_vars; i++)
{
    for (j = 0; j < N_vars; j++)
    {
        if (i == j)
        {
            A[i, j] = 2.0;
        }
    }
}

```

```

        }
        else
        {
            A[i, j] = 0.0;
        }
    }
}
alglib.minqpsetquadraticterm(state, A);

// Set linear term
double[] b = new double[N_vars];
for (i = 0; i < N_vars; i++)
{
    b[i] = -2.0 * X[stock_to_optimize_inds[i]];
}
alglib.minqpsetlinearterm(state, b);

// Set linear constraints
int n_lines = T_main + T_aux + 2 * N_vars;
double[,] C = new double[n_lines, N_vars + 1];
int[] CT = new int[n_lines];

// prX belongs to KV(TS_main)
for (t = 0; t < T_main; t++)
{
    for (i = 0; i < N_vars; i++)
    {
        C[t, i] = gammas_main[t] * ts_main[

```



```

        ↪ stock_to_optimize_inds[i]].Prices[t] - P[
        ↪ stock_to_optimize_inds[i]];
    }
    rhs = 0.0;
    for (i = 0; i < stocks_to_fix_inds.Count; i++)
    {
        rhs += (P[stocks_to_fix_inds[i]] - gammas_main
        ↪ [t] * ts_main[stocks_to_fix_inds[i]].
        ↪ Prices[t]) * X[stocks_to_fix_inds[i]];
    }
    C[t, N_vars] = rhs + eps;
    CT[t] = 1; /* Means that lhs >= rhs */
}

// X - prX belongs to KV(ts_aux)
for (t = 0; t < T_aux; t++)
{
    // t-th constraint
    for (i = 0; i < N_vars; i++)
    {
        C[T_main + t, i] = gammas_aux[t] * ts_aux[
        ↪ stock_to_optimize_inds[i]].Prices[t] - P[
        ↪ stock_to_optimize_inds[i]];
    }
    rhs = 0.0;
    for (i = 0; i < N_vars; i++)
    {
        rhs += (gammas_aux[t] * ts_aux[

```

```

        ↪ stock_to_optimize_inds[i]].Prices[t] - P[
        ↪ stock_to_optimize_inds[i]]) * X[
        ↪ stock_to_optimize_inds[i]];
    }
    for (i = 0; i < stocks_to_fix_inds.Count; i++)
    {
        rhs += (P[stocks_to_fix_inds[i]] - gammas_aux[
        ↪ t] * ts_aux[stocks_to_fix_inds[i]].Prices
        ↪ [t]) * X[stocks_to_fix_inds[i]];
    }
    C[T_main + t, N_vars] = rhs - 0.01;
    CT[T_main + t] = -1; /* Means that lhs <= rhs */
}

/* prX >= 0 */
for (i = 0; i < N_vars; i++)
{
    for (j = 0; j < N_vars; j++)
    {
        if (i == j)
        {
            C[T_main + T_aux + i, j] = 1.0;
        }
        else
        {
            C[T_main + T_aux + i, j] = 0.0;
        }
    }
}

```

```

C[T_main + T_aux + i , N_vars] = 0.0 - eps; // eps;
CT[T_main + T_aux + i] = 1; /* Means that lhs >=
    ↪ rhs */
}

/* prX <= X */
for (i = 0; i < N_vars; i++)
{
    for (j = 0; j < N_vars; j++)
    {
        if (i == j)
        {
            C[T_main + T_aux + N_vars + i , j] = 1.0;
        }
        else
        {
            C[T_main + T_aux + N_vars + i , j] = 0.0;
        }
    }
    C[T_main + T_aux + N_vars + i , N_vars] = X[
        ↪ stock_to_optimize_inds[i]] - eps;
    CT[T_main + T_aux + N_vars + i] = -1; /* Means
        ↪ that lhs <= rhs */
}

alglib.minqpsetlc(state , C, CT);

/* Set initial point */
double [] x0 = new double[N_vars];

```

```

for (i = 0; i < N_vars; i++)
{
    x0[i] = X[stock_to_optimize_inds[i]] * 0.5;
}
alglib.minqpsetstartingpoint(state, x0);

// Solve with BLEIC-based QP solver
alglib.minqpsetalgorithmeic(state, 0.0, 0.0, 0.0, 0);
alglib.minqpoptimize(state);
double[] x_star, x_star_ret;
alglib.minqpresults(state, out x_star, out rep);

if (rep.terminationtype > 0)
{
    x_star_ret = new double[ts_main.Count];
    for (i = 0; i < ts_main.Count; i++)
    {
        j = stock_to_optimize_inds.IndexOf(i);
        if (j < 0)
        {
            x_star_ret[i] = X[i];
        }
        else
        {
            x_star_ret[i] = x_star[j];
        }
    }
    return x_star_ret;
}

```

```

}
else
{
    if (rep.terminationtype == -5)
    {
        throw new Error(-5, this.class_name + "::
            ↪ project_on_K:_Failed_to_find_optimum_in_
            ↪ the_QP_problem."
            + "_Inappropriate_solver_was_used.");
    }
    else if (rep.terminationtype == -4)
    {
        throw new Error(-4, this.class_name + "::
            ↪ project_on_K:_Failed_to_find_optimum_in_
            ↪ the_QP_problem."
            + "_Unbounded_problem.");
    }
    else if (rep.terminationtype == -3)
    {
        throw new Error(-3, this.class_name + "::
            ↪ project_on_K:_Failed_to_find_optimum_in_
            ↪ the_QP_problem."
            + "_Inconsistent_constraints.");
    }
    else
    {
        throw new Error(rep.terminationtype, this.
            ↪ class_name + "::project_on_K:_Failed_to_

```

```

        ↪ find_optimum_in_the_QP_problem."
        + "_Undefined_failure.");
    }
}
}
}

```

Листинг 4.6. Исходный код метода для решения задачи проекции вектора цен на множество прогнозов цен

```

public double [] project_on_KPprices(List<double> P, List<
    ↪ double> X, TradeStatContainer.ClassGoods goods,
    double omega, double [,] C_star, bool le_constr = false
    ↪ , List<int> N1 = null)
{
    /*
    * Project P on prices forecasting cone at X built for
    ↪ omega and goods.
    *
    * P — price to project
    * X — demand at which one constructs the forecasting
    ↪ cone
    * goods — trade statistics from which one constructs
    ↪ the forecasting cone
    * omega — the HARP irrationality index (NOT ITS
    ↪ LOGARITHM)
    * C_star — C^* matrix for the goods
    * N1 — set of indices for partial projection; if
    ↪ null, then do full projection
    * le_constr — add the constraints which guarantee
    ↪ that pr(X) <= X.

```

```

*/

List<double> gammas = new List<double>();
List<double> PXts = new List<double>(); // List of <P^
    ↪ t, X^t>
List<double> PXTs = new List<double>(); // List of <P^
    ↪ t, X>
double omega2 = omega * omega;
int t, tau, i, j, N, T, N_vars;
double sum1, sum2, next_val;
double [] rhs;
List<int> var_stock_inds;

T = goods [0]. Prices .Count;
N = goods .Count;

// ***
// Compute dot products
// ***
for (t = 0; t < T; t++)
{
    sum1 = 0.0;
    sum2 = 0.0;
    for (i = 0; i < N; i++)
    {
        sum1 += goods [i]. Prices [t] * goods [i]. Volumes [
            ↪ t];
        sum2 += goods [i]. Prices [t] * X [i];
    }
}

```

```

    }
    PXts.Add(sum1);
    PXTs.Add(sum2);
}

// ***
// Compute gamma
// ***

// Initialize
for (t = 0; t < T; t++)
{
    gammas.Add(PXTs[0] / C_star[t, 0]);
}

// Compute
for (tau = 1; tau < T; tau++)
{
    for (t = 0; t < T; t++)
    {
        next_val = PXTs[tau] / C_star[t, tau];
        if (next_val < gammas[t])
        {
            gammas[t] = next_val;
        }
    }
}
for (t = 0; t < T; t++)

```



```

{
    gammas[t] *= omega2 / PXts[t];
}

// Prepare values for constraints
rhs = new double[T];
if (N1 == null)
{
    var_stock_inds = new List<int>(N);
    for (i = 0; i < N; i++)
    {
        var_stock_inds.Add(i);
    }
    for (t = 0; t < T; t++)
    {
        rhs[t] = 0.0;
    }
}
else
{
    var_stock_inds = N1;
    for (t = 0; t < T; t++)
    {
        sum1 = 0.0;
        for (i = 0; i < N; i++)
        {
            if (var_stock_inds.IndexOf(i) >= 0)
            {

```

```

        continue;
    }
    else
    {
        sum1 += (X[i] - gammas[t] * goods[i].
            ↪ Volumes[t]) * P[i];
    }
}
rhs[t] = sum1;
}
}
N_vars = var_stock_inds.Count;

// ***
// Solving QP
// ***

alglib.minqpstate state;
alglib.minqpreport rep;

// Create solver
alglib.minqpcreate(N_vars, out state);

// Set quadratic term
double[,] A = new double[N_vars, N_vars];
for (i = 0; i < N_vars; i++)
{
    for (j = 0; j < N_vars; j++)

```

```

    {
        if (i == j)
        {
            A[i, j] = 2.0;
        }
        else
        {
            A[i, j] = 0.0;
        }
    }
}
alglib.minqpsetquadraticterm(state, A);

// Set linear term
double[] b = new double[N_vars];
for (i = 0; i < N_vars; i++)
{
    b[i] = -2.0 * P[var_stock_inds[i]];
}
alglib.minqpsetlinearterm(state, b);

// Set linear constraints
int n_lines = T + N_vars;
if (le_constr)
{
    n_lines += N_vars;
}
double[,] C = new double[n_lines, N_vars + 1];

```

```

int [] CT = new int [n_lines];
// Linear inequalities
for (t = 0; t < T; t++)
{
    // t-th constraint
    for (i = 0; i < N_vars; i++)
    {
        C[t, i] = gammas[t] * goods[var_stock_inds[i
        ↪ ]].Volumes[t] - X[var_stock_inds[i]];
    }
    C[t, N_vars] = rhs[t];
    CT[t] = 1;
}
// Variables nonnegativity
for (j = 0; j < N_vars; j++)
{
    for (i = 0; i < N_vars; i++)
    {
        if (i == j)
        {
            C[T + j, i] = 1.0;
        }
        else
        {
            C[T + j, i] = 0.0;
        }
    }
    C[T + j, N_vars] = 0.0;
}

```

```

        CT[T + j] = 1;
    }
    // pr(P) <= P constraints
    if (le_constr)
    {
        for (j = 0; j < N_vars; j++)
        {
            for (i = 0; i < N_vars; i++)
            {
                if (i == j)
                {
                    C[T + N_vars + j, i] = 1.0;
                }
                else
                {
                    C[T + N_vars + j, i] = 0.0;
                }
            }
            C[T + N_vars + j, N_vars] = P[j];
            CT[T + N_vars + j] = -1;
        }
    }
    alglib.minqpsetlc(state, C, CT);

    // Solve with BLEIC-based QP solver
    alglib.minqpsetalgableic(state, 0.0, 0.0, 0.0, 0);
    alglib.minqpoptimize(state);
    double [] p_star, p_star_ret;

```

```

alglib.minqresults(state, out p_star, out rep);

if (rep.terminationtype > 0)
{
    if (N == N_vars)
    {
        return p_star;
    }
    else
    {
        p_star_ret = new double[N];
        for (i = 0; i < N; i++)
        {
            j = var_stock_inds.IndexOf(i);
            if (j >= 0)
            {
                p_star_ret[i] = p_star[j];
            }
            else
            {
                p_star_ret[i] = P[i];
            }
        }
        return p_star_ret;
    }
}
else
{

```

```

if (rep.terminationtype == -5)
{
    throw new Error(-5, this.class_name + "::
        ↪ project_on_K:_Failed_to_find_optimum_in_
        ↪ the_QP_problem."
        + "_Inappropriate_solver_was_used.");
}
else if (rep.terminationtype == -4)
{
    throw new Error(-4, this.class_name + "::
        ↪ project_on_K:_Failed_to_find_optimum_in_
        ↪ the_QP_problem."
        + "_Unbounded_problem.");
}
else if (rep.terminationtype == -3)
{
    throw new Error(-3, this.class_name + "::
        ↪ project_on_K:_Failed_to_find_optimum_in_
        ↪ the_QP_problem."
        + "_Inconsistent_constraints.");
}
else
{
    throw new Error(rep.terminationtype, this.
        ↪ class_name + "::project_on_K:_Failed_to_
        ↪ find_optimum_in_the_QP_problem."
        + "_Undefined_failure.");
}

```

```

    }
}

```

Листинг 4.7. Описание класса `dt::tradestat`

```

struct tradestat {
    matrix P, X;
    std::vector<std::string> times;
    std::string name;
    std::vector<std::string> gNames;
    matrix logPM;

    tradestat() : P(0), X(0), gNames(0), times(0),
        ↪ name(""), logPM(0) {
    }

    tradestat(const std::vector<goods*>& gds, std::
        ↪ vector<std::string> inTimes, std::string
        ↪ inName = "");

    tradestat(const matrix& inP, const matrix& inX,
        ↪ const std::vector<std::string>& inTimes,
        ↪ const std::vector<std::string>& inNames,
        ↪ const std::string& inName = "");

    tradestat select(const intervals& gInts, const
        ↪ intervals& tInts, const std::string& inName =
        ↪ ""); // Select goods (gInts) and periods (
        ↪ tInts)

    tradestat selectGoods(const intervals& gInts,
        ↪ const std::string& inName = "");

    tradestat selectTimes(const intervals& tInts,
        ↪ const std::string& inName = "");

```



```
};
```

Листинг 4.8. Одна итерация разбиения страт между социальными классами внутри функции `proportions2SequenceInf`

```
report.open(path + "Proportions_2_sequence_PhD\\report.txt
    ↪ ");
// Split strata into two classes
splits = dataload::loadClassSplitDataNew2(path + "
    ↪ Proportions_2_sequence_PhD\\Splits.txt"); // Load
    ↪ split scheme
tradestats = strats.getClasses(splits); // Split strata
    ↪ into two classes according to the split scheme

// Get omegas
for (i = 0; i < tradestats.size(); i++) {
    std::cout << "Class_" << i + 1 << std::endl;
    report << "Class_" << i + 1 << std::endl;

    // Compute irrationality indices
    lOmega = axioms::HARPLogIrInd(tradestats[i].P,
        ↪ tradestats[i].X, llb, lrb);
    if (lOmega < llb) {
        lOmega = llb;
    }
    std::cout << "Omega_for_all_goods_=" << std::exp(
        ↪ lOmega) << std::endl;
    report << "Omega_for_all_goods_=" << std::exp(
        ↪ lOmega) << std::endl;
```

```

std::cout << std::endl;
report << std::endl;

// Save Konus–Divisia indices
reportF.open(path + "Proportions_2_sequence_PhD\\F
    ↪ " + std::to_string(i + 1) + ".txt");
reportQ.open(path + "Proportions_2_sequence_PhD\\Q
    ↪ " + std::to_string(i + 1) + ".txt");
// Head
reportF << tradestats[i].times[0];
reportQ << tradestats[i].times[0];
for (t = 1; t < tradestats[i].times.size(); t++) {
    reportF << '_' << tradestats[i].times[t];
    reportQ << '_' << tradestats[i].times[t];
}
reportF << std::endl;
reportQ << std::endl;
// Body
indAll = axioms::HARP(tradestats[i].P, tradestats[
    ↪ i].X, lOmega);
reportF << indAll.x[0];
reportQ << indAll.p[0];
for (t = 1; t < tradestats[i].times.size(); t++) {
    reportF << '_' << indAll.x[t];
    reportQ << '_' << indAll.p[t];
}
reportF << std::endl;
reportQ << std::endl;

```

```
        // Close files
        reportF.close();
        reportQ.close();
    }
    report.close();
    std::cout << "OK" << std::endl;
```