На правах рукописи

Клемашев Николай Иванович

Непараметрические методы анализа статистики с помощью неоклассической модели спроса

Специальность 05.13.18 —
математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена на кафедре системного анализа факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственном университета им. М. В. Ломоносова и на факультете Управления и прикладной математики Московского физико-технического института (государственного университета).

Научный руководитель: **Шананин Александр Алексеевич**
доктор физико-математических наук,
профессор, чл.-корр. РАН,
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», факультет управления и прикладной математики,
декан факультета управления и прикладной математики

Официальные оппоненты: **Алескеров Фуад Тагиевич**
доктор технических наук, старший научный сотрудник,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет экономических наук,
руководитель департамента математики

Хачатрян Нерсес Карленович,
кандидат физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Центральный экономико-математический институт Российской академии наук, отделение теоретической экономики и математических исследований,
ведущий научный сотрудник лаборатории динамических моделей экономики и оптимизации

Ведущая организация: Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования «Европейский университет в Санкт-Петербурге»

Защита состоится ___ _________ 2018 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 002.073.04 на базе Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН) по адресу: 117312, г. Москва, проспект 60-летия Октября, 9 (конференц-зал, 1-й этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИЦ ИУ РАН по адресу: г. Москва, ул. Вавилова, д. 40 и на официальном сайте ФИЦ ИУ РАН: http://www.frccsc.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор. 2, ученому секретарю диссертационного совета Д 002.073.04.

Автореферат разослан ___ _________ 2018 г.
Телефон для справок: +7 (499) 135-51-64.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
Д 002.073.04,
д-р. техн. наук, профессор В.Н. Крутько

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

При построении экономических индексов потребительских цен и объёмов потребления мы всегда исходим из некоторой модели потребителького поведения. Статистические службы используют, как правило, индекс Ласпейреса. Для его расчёта в некоторый период времени, называемый базовым, формируется потребительская корзина, которая используется для определения индекса во всех последующих периодах. Индекс цен Ласпейреса для произвольного исследуемого периода определяется как отношение стоимости потребительской корзины в ценах исследуемого периода к стоимости такой же корзины в ценах базового периода. Этот индекс согласован с моделями экстенсивного роста, постоянство пропорций в которых обосновано теоремой о магистрали. Обстоятельный обзор различных индексов, используемых в статистике, содержится в монографии (Ершов, 2011), а также в монографиях (Аллен, 1980), (Кёвеш, 1990), (Торвей, 1993).

В настоящее время наблюдается иной тип роста, связанный не столько с количественным приростом товаров, сколько с изменением их качества, появлением новых продуктов и увеличением разнообразия товаров и услуг. Этим изменениям соответствуют другие модели экономического роста. Возникает необходимость исследования структурных сдвигов в потреблении, с учетом замещения товаров. Для этого необходима разработка панели экономических показателей, состоящей из нескольких экономических индексов, характеризующих потребление в разных сегментах. В связи с этим возникает необходимость исследования сегментации потребительского спроса.

Для того, чтобы исследовать замещение товаров, в начале XX века была предложена модель Парето, согласно которой поведение всей совокупности домашних хозяйств можно описать как действия одного репрезентативного потребителя, принимающего решение о потреблении на основе максимизации своей функции полезности при бюджетном ограничении. Модель Парето учитывает явление замещения товаров при изменении структуры цен, которое не учитывается при расчете индекса Ласпейреса, поскольку потребительская корзина фиксируется один раз для всех исследуемых периодов.

В работах Бюшгенса и Конюса был предложен подход к определению экономических индексов, основанный на модели Парето. Этот подход привёл в разработке индексов Конюса (Конюс, 1924).

Индекс Конюса существует тогда и только тогда, когда наблюдаемые цены и объёмы потребления согласуются с моделью Парето. Для каждой модели существует обратная задача, заключающаяся в восстановлении элементов модели по наблюдаемым данным. В случае с моделью Парето обратная задача заключается в восстановлении функции полезности репрезентативного потребителя по имеющимся данным о потреблении и ценах. Модель может не соответствовать моделируемому явлению. В этом случае обратная задача оказывается неразрешимой.

В работах (Antonelli, 1886) и (Volterra, 1906) было отмечено, что есть некоторые условия для того, чтобы модель Парето соответствовала наблюдениям. Эти условия были впервые сформулированы в работе (Слуцкий, 1915). Среди условий разрешимости обратной задачи для модели Парето есть условия существования интегрирующего множителя у дифференциальной формы обратных функций спроса, называемые условиями Фробениуса. Эти условия являются условиями типа равенства и нарушаются при малых возмущениях обратных функций спроса. Исследованием и интерпретацией нарушения этих условий занимался Samuelson, который заложил основы теории выявленного предпочтения в работе (Samuelson, 1938). В работе (Samuelson, 1950) он назвал возможность нарушения условий Фробениуса при малых возмущения обратных функций спроса *проблемой интегрируемости*.

Дальнейшее развитие теории выявленного предпочтения привело к разработке критериев разрешимости обратной задачи для модели Парето, которые применимы к *торговой статистике*, т.е. набору данных о потреблении и ценах для нескольких товаров за несколько последовательных временных периодов. Один из критериев разрешимости обратной задачи Парето, пригодный для применения к торговой статистике, – сильная аксиома выявленного предпочтения – сформулирован в работе (Houthakker, 1950). Первое доказательство того, что сильная аксиома выявленного предпочтения является критерием разрешимости обратной задачи Парето для обратных функций спроса, приведенное в (Houthakker, 1950), было неполным. Первое полное доказательство для обратных функций спроса было дано в работе (Stigum, 1973). В работах (De Ville, 1951), (Данилов, Сотцков, 1985) обсуждалась связь сильной аксиомы выявленного предпочтения с теоремой Каратеодори-Рашевского-Чжоу. В работе (Balk, 2005) отмечено, что если существует интегрирующий множитель для дифференциальной формы обратных функций спроса, то индекс Конюса совпадает с индексом Дивизиа. Поэтому, индексы Конюса называют также индексами Конюса-Дивизиа.

В работе (Afriat, 1963) было дано доказательство того, что сильная аксима выявленного предпочтения является критерием согласованности торговой статистики с моделью Парето. Критерии согласованности торговой статистики с моделью Парето с положительно-однородной функцией полезности получены в работах (Afriat, 1972) и (Diewert, 1973). Одним из таких критериев является однородная сильная аксиома выявленного предпочтения.

Полученные в этих работах результаты позволили проводить эмпирические исследования для построения экономических индексов Конюса-Дивизиа, основанных на функции полезности репрезентативного потребителя. Метод построения этих индексов, основанный на теории выявленного предпочтения, называется непараметрическим, поскольку не делается предположений о параметрическом виде функции полезности.

Как показано в ряде работ по исследованию статистики Швеции (Вратенков, Шананин, 1991), Нидерландов (Поспелова, Шананин, 1998) и фондовых рынков (Кондраков, Поспелова, Шананин, 2010), нарушение гипотезы о репрезентативном рациональном потребителе может быть связано со структурными изменениями, происходящими в экономике. В работе (Петров, Шананин, 1994) предложено объяснение связи нарушения гипотезы о репрезентативном протребителе с изменениями социальной структуры общества в рамках неоклассической модели потребительского спроса. Связь гипотезы о рациональном репрезентативном потребителе с функцией общественного благосостояния Бергсона обсуждалась в работе (Chipman, Moore, 1979).

Первым подходом к анализу данных, для которых не существует решения обратной задачи для модели Парето, был подход, основанный на ослаблении условий разрешимости обратной задачи и введении количественного показателя, характеризующего степень несогласованности торговой статистики с моделью Парето. Подход был предложен в (Afriat, 1973) и развивался в работах (Houtman, 1995), (Поспелова, Шананин, 1998). Этот подход привёл к разработке обобщённого непараметрического метода.

Другой подход заключается в модификации модели Парето. Можно рассматривать не одного, а нескольких репрезентативных потребителей с разными функциями полезности, совокупное поведение которых порождает наблюдаемый спрос. Эта модель учитывает наличие в обществе разных групп потребителей с разным образом жизни и разными предпочтениями. Она является более адекватным представлением потребительского поведения, если обратные функции спроса не удовлетворяют условиям согласованности с моделью Парето. Такая модель называется неоклассической моделью потребительского спроса.

В работах (Шананин, 1986), (Шананин, 1989), (Chiappori, Ekeland, 1997) установлено, что минимальное количество рациональных репрезентативных потребителей связано с классом дифференциальной формы функций спроса. В работе (Nobibon, et al., 2016) доказывается NP-полнота задачи проверки согласованности торговой статистики с неоклассической моделью потребительского спроса с двумя и более репрезентативными рациональными потребителями без требования положительной однородности функций полезности.

Поэтому актуальна проблема разработки методов анализа торговой статистики при нарушении гипотезы о рациональном репрезентативном потребителе, вызванным наличием двух и более социальных классов потребителей, при дополнительных модельных предположениях, позволяющих разработать эффективные методы анализа торговой статистики в случае нарушения гипотезы о рациональном репрезентативном потребителе.

Цель работы состоит в исследовании подходов к проблеме сегментации товарных рынков с помощью методов, основанных на теории выявленного предпочтения, а также в разработке методов анализа торговой статистики в рамках неоклассической модели потребительского спроса с несколькими репрезентативными потребителями.

Методы исследования Для достижения поставленных целей использовались методы линейного и квадратичного программирования, теории графов, теории сложности алгоритмов.

Научная новизна

В западной литературе по теории выявленного предпочтения рассматриваются как правило функции полезности общего вида с минимальными требованиями монотонности, вогнутости и непрерывности. Критерием согласованности торговой статистики с моделью Парето с такими функциями полезности является сильная аксиома. Однако, для построения положительно-однородных экономических индексов необходимо, чтобы функция полезности в модели Парето была положительно-однородной, что приводит к необходимости рассмотрения однородной сильной аксиомы. В диссертационной работе впервые проведено сравнение двух аксиом с точки зрения решения с их помощью актуальных практических задач анализа сегментированности товарных рынков и прогнозирования объемов потребления и цен. Полученные результаты позволяют говорить о том, что для решения прикладных задач следует требовать положительной однородности рационализирующей функции полезности и использовать однородную сильную аксиому.

Анализ экономических данных в рамках неоклассической модели потребительского спроса является актуальной проблемой. Однако, как следует из работ по оценке класса сложности задач проверки согласованности торговой статистики с неоклассической моделью потребительского спроса и её частными случаями, возможность разработки эффективных алгоритмов для решения этих задача маловероятна. Задача проверки согласованности торговой статистики с неоклассической моделью с двумя репрезентативными потребителями с функциями полезности общего вида является NP-полной (Nobibon, et al., 2016). Для другой модели с несколькими репрезентативными потребителями – модели временного диктатора с функциями полезности общего вида – результат аналогичен, как показано в работе (Deb, 2010). В диссертационном исследовании получен новый результат в этом же направлении исследований – доказана NP-полнота задачи проверки согласованности торговой статистики с моделью временного диктатора с положительно-однородными функциями полезности.

В работах (Deb, 2010), (Nobibon, et al., 2011), (Nobibon, et al., 2016) предлагаются различные численные методы для проверки согласованности торговой статистики с неоклассической моделью и ее частными случаями, а также с более общей моделью коллективного потребления, задача проверки согласованности торговой статистики с которой рассматривалась в (Cherchye, De Rock, Vermeulen, 2007). Эти методы основаны на эвристических соображениях, разработанных в литературе по решению NP-полных задач. В диссертационном исследовании предлагается вводить дополнительные допущения, которые формулируются в экономических терминах и позволяют эффективно исследовать экономические данные в рамках неоклассической модели. Успешность такого подхода иллюстрируется двумя примерами анализа экономических данных, проанализировать которые в рамках неоклассической модели удалось благодаря использованию дополнительных данных и ряда эвристик.

В результате исследования бюджетной статистики Великобритании удалось впервые проанализировать изменение социальной структуры общества из-за формирования нового класса наиболее состоятельных домашних хозяйств с помощью методов теории выявленного предпочтения. Анализ кризиса на фондовом рынке Китая в 2015 году является первым примером успешного анализа причин кризиса на фондовом рынке в рамках неоклассической модели потребительского спроса с учетом нарушения однородной сильной аксиомы даже при нормальном режиме функционирования фондового рынка. В результате этого анализа было показано, что кризис может интерпретироваться как результат изменения предпочтений одной группы инвесторов, которое было правильно спрогнозировано другой группой инвесторов.

Теоретическая и практическая ценность работы

Теоретическая ценность состоит в том, что показана сложность проверки согласованности торговой статистики с частным случаем модели Парето с несколькими репрезентативными потребителями, предложен подход к выделению двух социальных классов при анализе бюджетной статистики и разработана методика анализа кризисов на фондовых рынках.

Практическая ценность состоит в том, что рассмотренные в работе подходы к анализу торговой и бюджетной статистики в рамках неоклассической модели с несколькими репрезентативными потребителями могут быть реализованы в виде программного комплекса для исследования социальной структуры общества и изучения экономического поведения отдельных социальных групп при изменении цен, объёмов продаж, а также номенклатуры товаров. Такой комплекс может быть полезен в крупных сетях розничной торговли, а также в статистических службах.

Апробация работы

Результаты диссертации представлялись на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

- 26й Европейской конференции по исследованию операций (26th European conference on operational research EURO2013), Рим, 2013;

- Международных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2011», Москва, 2011, «Ломоносов-2014», Москва, 2014;

- Научной конференции «Тихоновские чтения», Москва, 2014;

- 8й Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и технологий» ЭКОМОД-2014, Москва, 2014;

- 57й научной конференции МФТИ, Долгопрудный, 2014;

- Международных конференциях «Квазилинейные уравнения, обратные задачи и их приложения» (Quasilinear equations, inverse problems and their applications), Долгопрудный, 2015, Долгопрудный, 2016, Долгопрудный, 2017;

- 8й Московской международной конференции по исследованию операций ORM2016, Москва, 2016;

- Международной конференции по анализу временных рядов (International Work-Conference on Time-Series Analysis) ITISE-2017, Гранада, 2017

- Научных семинарах в ВЦ РАН, МГУ, ГУ-ВШЭ, ИСА РАН, Европейский университет в Санкт-Петербурге.

Полученные результаты использовались в работах, проводимых в рамках проектов РНФ (№ 16-11-10246), РФФИ (№ 14-07-00075).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 14 печатных работ. В том числе 5 – в журналах, рекомендованных ВАК.

Структура и объем работы Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы и одного приложения. Основной текст работы изложен на 143 страницах, приложение занимает 36 страниц. Список литературы включает 95 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** к работе описывается история исследований по вопросам проверки согласованности обратных функций спроса и наблюдаемых экономических данных с моделью Парето и неоклассической моделью потребительского спроса с несколькими рациональными репрезентативными потребителями, обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель диссертации и научная новизна полученных результатов, а также дается краткое содержание диссертационной работы.

Первая глава посвящена математической модели потребительского спроса Парето, её обобщению на случай двух и более репрезентативных потребителей, проверке согласованности обратных функций спроса с моделью Парето, как с одним, так и несколькими репрезентативными потребителями. Также проводится оценка сложности проверки этих условий и рассматривается понятие слабой отделимости товарных групп.

В §**1.1** рассматривается классическая модель потребительского спроса В. Парето, приводятся условия согласованности обратных функций спроса с классической моделью Парето и даётся определение индексных функций Конюса-Дивизиа.

В модели Парето наблюдаемое совокупное потребление группы из m товаров представляется как результат выбора объёмов потребления рациональным репрезентативным потребителем, который принимает решение об объёмах потребления на основе решения задачи о максимизации своей функции полезности F при бюджетном ограничении, зависящем от цен P и дохода репрезентативного потребителя I:

$$F(X) \to \max_{X \in \mathbb{R}^m_+},$$
$$\langle P,\, X \rangle \leqslant I,$$

где $\mathbb{R}^m_+$ множество векторов из $\mathbb{R}^m$ с неотрицательными элементами. Множество векторов из $\mathbb{R}^m$ с положительными элементами будем обозначать через $\mathbb{R}^m_{++}$.

Задача оптимизации, которую решает рациональный репрезентативный потребитель, является прямой задачей в модели Парето. В результате решения этой задачи для всевозможных векторов цен P и доходов I мы получаем функции спроса $X = X(P, I)$. Эти функции обладают следующим свойством:

$$X(P, I) = X\left(\frac{P}{I}, 1\right).$$

Поэтому, для полного описания функций спроса достаточно рассмотреть прямую задачу для всевозможных векторов цен и единичного дохода. Таким образом, можно говорить, что функции спроса описывают зависимость потребления X от цен P.

Для описания спроса используют также обратные функции спроса $P = P(X)$, задающие зависимость цен от потребления. Обратной задачей для модели Парето является задача восстановления функции полезности репрезентативного потребителя по обратным функциям спроса. Эта задача формулируется так: по заданным обратным функциям спроса $P(X)$ найти такую функцию $F(X)$ из некоторого класса функций Φ, что для любых $X \geqslant 0$ выполнено

$$F(X) \leqslant F(Y) \quad \text{для всех } Y \in \mathbb{R}^m_+ \text{ таких, что } \langle P(X),\, Y \rangle \leqslant \langle P(X),\, X \rangle.$$

Если эта задача имеет решение то говорят, что обратные функции спроса $P(X)$ рационализируемы в классе Φ.

Рассмотрим класс функций Φ_H, состоящий из всех вогнутых, ненасыщаемых, положительно-однородных первой степени, непрерывных на множестве R^m_+ и положительных на множестве $\operatorname{int} R^m_+$ функций. Есть несколько критериев рационализируемости обратных функций спроса в классе Φ_H.

Теорема 1 ((Levin, 1997), (Поспелова, Шананин, 1998))**.** *Пусть $P(X)$ неотрицательные, непрерывные на $\mathbb{R}^m_+$ обратные функции спроса, такие что $\langle P(X),\, X \rangle > 0$ для всех $X \in \mathbb{R}^m_+$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Обратные функции спроса $P(X)$ рационализируемы в классе Φ_H.*

2. *Система линейных неравенств*

$$\lambda(Y)\,\langle P(Y),\, X \rangle \geqslant \lambda(X)\,\langle P(X),\, X \rangle \quad (X, Y \in \mathbb{R}^m_+) \tag{1}$$

имеет положительное и непрерывное на $\operatorname{int} \mathbb{R}^m_+$ решение $\lambda(X)$.

3. *Обратные функции спроса $P(X)$ удовлетворяют однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения, т.е. для любого множества $\{X^1, \dots, X^T\}$ векторов из $\mathbb{R}_+^m$ выполнено*

$$\left\langle P(X^1),\, X^2\right\rangle \left\langle P(X^2),\, X^3\right\rangle, \dots \left\langle P(X^T),\, X^1\right\rangle \geqslant \left\langle P(X^1),\, X^1\right\rangle \left\langle P(X^2),\, X^2\right\rangle \dots \left\langle P(X^T),\, X^T\right\rangle.$$

4. *Существуют функции $Q(P) \in \Phi_H$ и $F(X) \in \Phi_H$, такие что*

$$Q(P)F(X) \leqslant \langle P,\, X\rangle \qquad \forall P \in \mathbb{R}_+^m,\ X \in \mathbb{R}_+^m, \tag{2}$$

$$Q(P(X))F(X) = \langle P(X),\, X\rangle \qquad \forall X \in \mathbb{R}_+^m. \tag{3}$$

Следствие 1. *Если существуют функции $Q(P) \in \Phi_H$ и $F(X) \in \Phi_H$, удовлетворяющие (2), (3), то функция*

$$\lambda(X) = \frac{1}{Q(P(X))}$$

удовлетворяет (1).

Следствие 2. *Пусть функция $\lambda(X)$ положительна, непрерывна на $\operatorname{int}\mathbb{R}_+^m$ и удовлетворяет (1). Тогда функции $F(X)$ и $Q(P(X))$ из (2), (3) могут быть представлены в виде*

$$F(X) = \lambda(X)\left\langle P(X),\, X\right\rangle,\ Q(P(X)) = \frac{1}{\lambda(X)}.$$

Функция $F(X)$ из теоремы 1 называется индексной функцией спроса Конюса-Дивизиа. Функция $Q(P)$ из теоремы 1 называется индексной функцией цен Конюса-Дивизиа.

Для исследования структуры потребительского спроса используется понятие отделимой товарной групы. Пусть все товары разбиты на $K+1$ подгрупп. Обозначим вектор потребления товаров k-ой подгруппы через X_k. Обозначим элементы обратных функций спроса, соответствующим товарам из k-ой подгруппы через $P_k(X)$. Говорят, что подгруппы $1, \dots, K$ слабо отделимы от исходной группы товаров в классе Φ, если исходная группа товаров рационализируема, причём рационализирующая функция полезности представима в виде

$$F(X) = F_0(F_1(X_1), \dots, F_K(X_K), X_{K+1}),$$

где все функции $F_0, F_1, \dots, F_K$ из одного класса Φ.

Предложение 1 (Вратенков, Шананин, 1991)**.** *Пусть обратные функции спроса $P(X)$ рационализируемы в классе Φ_H и подгруппы $1, \dots, K$ слабо отделимы от исходной группы товаров в классе Φ_H. Тогда, индексная функция цены $Q(P)$, определяемая как преобразование Янга индексной функции спроса $F(X)$*

$$Q(P) = \inf\left\{\frac{\langle P,\, X\rangle}{F(X)} : X \geqslant 0,\ F(X) > 0\right\},$$

может быть представлена в виде

$$Q(P) = Q_0(Q_1(P_1), \ldots, Q_K(P_K), P_{K+1}),$$

где P_k – обратные функции спроса товаров k-ой подгруппы, $Q_0(q_1, \ldots, q_K, P_{K+1})$ является оптимальным значением целевой функции в задаче

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{k=1}^{K} q_k Y_k + \langle P_{K+1},\, X_{K+1}\rangle}{F_0(Y_1, \ldots, Y_K, X_{K+1})} \to \min_{Y_1,\ldots,Y_K,X_{K+1}},\\
&(Y_1, \ldots, Y_K, X_{K+1}) \in \mathbb{R}_+^{K+m_{K+1}},\\
&F_0(Y_1, \ldots, Y_K, X_{K+1}) > 0,
\end{aligned}$$

и функции $Q_k(P_k)$ являются преобразованиями Янга функций $F_k(X_k)$

$$Q_k(P_k) = \inf\left\{\frac{\langle P_k,\, X_k\rangle}{F_k(X_k)} : X_k \in \mathbb{R}_+^{m_k},\, F_k(X_k) > 0\right\} \quad k = \overline{1, K}.$$

Следствие 3. *Пусть обратные функции спроса $P_1(X), \ldots, P_K(X)$ рационализируемы в классе Φ_H. Пусть $Q_k(P_k)$ и $F_k(X_k)$ $(k = \overline{1, K})$ индексные функции цен и потребления Конюса-Дивизиа. Пусть обратные функции спроса*

$$\widetilde{\mathcal{P}}(X) = (Q_1(P_1(X)), \ldots, Q_K(P_K(X)), P_{K+1})$$

рационализируемы в классе Φ_H и $F_0(y_1, \ldots, y_K, X_{K+1})$ и $Q_0(q_1, \ldots, q_K, P_{K+1})$ индексные функции Конюса-Дивизиа. Тогда обратные функции спроса $P(X)$ рационализируемы в классе Φ_H, причём соответствующие индексные функции Конюса-Дивизиа имеют вид

$$\begin{aligned}
&F(X) = F_0(F_1(X), \ldots, F_K(X), X_{K+1}),\\
&Q(P(X)) = Q_0(Q_1(P_1(X_1)), \ldots, Q_K(P_K(X_K)), P_{K+1}(X)).
\end{aligned}$$

В §**1.2** рассматриваются критерии согласованности наблюдаемых экономических данных о ценах и потреблении с классической моделью Парето, а также непараметрический метод построения индексов Конюса-Дивизиа.

На практике нам не доступны обратные функции спроса. Известны лишь их значения для некоторых наборов цен. Конечный набор данных $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^{T}$ о ценах P^t и объёмах потребления X^t за несколько периодов времени называется торговой статистикой. Говорят, что торговая статистика рационализируема в классе функций Φ, если её можно продолжить до обратных функций спроса, рационализируемых в классе Φ.

Определение 1. *Торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^{T}$ называется рационализируемой в классе Φ, если существует функция $F \in \Phi$ такая, что для всех $t \in \{1, \ldots, T\}$*

$$F(X^t) \geqslant F(Y) \quad \text{для всех } Y \geqslant 0 \text{ таких, что } \left\langle P^t,\, Y\right\rangle \leqslant \left\langle P^t,\, X^t\right\rangle.$$

В диссертации помимо класса Φ_H рассматривается также класс Φ_G, содержащий функции, удовлетворяющие всем требованиям вхождения в класс Φ_H, кроме положительной однородности.

В работах (Afriat, 1963), (Afriat, 1967), (Varian, 1982) получены два критерия рационализируемости торговой статистики в классе Φ_G:

- Торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения, т.е. для любых t и τ, для которых существуют t_1, ..., t_k такие, что

$$\left\langle P^t,\, X^t\right\rangle \geq \left\langle P^t,\, X^{t_1}\right\rangle,\, \left\langle P^{t_1},\, X^{t_1}\right\rangle \geq \left\langle P^{t_1},\, X^{t_2}\right\rangle,\, \ldots,\, \left\langle P^{t_k},\, X^{t_k}\right\rangle \geq \left\langle P^{t_k},\, X^{\tau}\right\rangle,$$

  выполнено $\langle P^\tau,\, X^\tau\rangle \leq \left\langle P^\tau,\, X^t\right\rangle$.

- Существует решение U^t, λ^t $(t = 1, \ldots T)$ системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} &U^t \leq U^\tau + \lambda^\tau \left(\left\langle P^\tau,\, X^t\right\rangle - \langle P^\tau,\, X^\tau\rangle\right), && t, \tau = \overline{1, T}, \\ &\lambda^t > 0 && t = \overline{1, T}. \end{aligned}$$

В работах (Afriat, 1972), (Diewert, 1973), (Varian, 1983) получены два критерия рационализируемости торговой статистики в классе Φ_H:

- Торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения, т.е. для любых $t_1, \ldots, t_k$ выполнено

$$\left\langle P^{t_1},\, X^{t_2}\right\rangle \left\langle P^{t_2},\, X^{t_3}\right\rangle \ldots \left\langle P^{t_k},\, X^{t_1}\right\rangle \geqslant \left\langle P^{t_1},\, X^{t_1}\right\rangle \left\langle P^{t_2},\, X^{t_2}\right\rangle \ldots \left\langle P^{t_k},\, X^{t_k}\right\rangle.$$

- Существует положительное решение $\lambda^t > 0$ $(t = 1, \ldots T)$ системы линейных неравенств

$$\lambda^t \left\langle P^t,\, X^t\right\rangle \leq \lambda^\tau \left\langle P^\tau,\, X^t\right\rangle, \quad t, \tau = \overline{1, T}. \tag{4}$$

На основе положительного решения $\lambda^t > 0$ системы (4) рассчитываются индексы спроса $F(X_t)$ и цен $Q(P^t)$ Конюса-Дивизиа:

$$F(X^t) = \lambda^t \left\langle P^t,\, X^t\right\rangle, \quad Q(P^t) = \frac{1}{\lambda^t}. \tag{5}$$

Для определения положительного решения системы (4) используется следующая процедура. Рассчитываются индексы цен Пааше

$$C_{\tau t} = \frac{\left\langle P^t,\, X^t\right\rangle}{\left\langle P^\tau,\, X^t\right\rangle}.$$

Систему (4) можно переписать в виде

$$\lambda^t C_{\tau t} \leqslant \lambda^\tau, \qquad t, \tau = \overline{1, T}. \tag{6}$$

Далее определяются величины

$$C^*_{\tau t} = \sup\{C_{\tau t_1} C_{t_1 t_2} \ldots C_{t_k t} \mid (t_1, \ldots, t_k) \subset \{1, \ldots, T\}, k \geqslant 0\}.$$

Система 6 разрешима тогда и только тогда, когда $C^*_{tt} \leqslant 1$ для всех $t \in \{1, \ldots, T\}$. Алгоритм Варшалла-Флойда позволяет за $O(T^3)$ операций вычислить величины $C^*_{\tau t}$ или показать, что все $C^*_{\tau t}$ бесконечны. В случае, если величины $C^*_{\tau t}$ конечны, значения

$$\lambda^t = \max_{\beta = \overline{1, T}} C^*_{t\beta}$$

являются положительным решением системы (4).

В §**1.3** рассматривается один из двух подходов к анализу торговой статистики в случае, когда она нерационализируема. Он заключается в ослаблении аксиом выявленного предпочтения и введении количественной меры нарушения этих аксиом. Этот подход приводит к обобщённому непараметрическому методу расчёта индексов Конюса-Дивизиа.

Нерационализируемость торговой статистики может быть вызвана ошибками в измерениях цен и/или объёмов потребления. Для анализа торговой статистики в таких случаях вводятся обобщённые варианты сильной и однородной сильной аксиом выявленного предпочтения. Говорят, что торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω, если для любых t и τ, для которых существуют $t_1, \ldots, t_k$ такие, что

$$\left\langle P^t,\, X^t \right\rangle \geq \omega \left\langle P^t,\, X^{t_1} \right\rangle, \left\langle P^{t_1},\, X^{t_1} \right\rangle \geq \omega \left\langle P^{t_1},\, X^{t_2} \right\rangle, \ldots, \left\langle P^{t_k},\, X^{t_k} \right\rangle \geq \omega \left\langle P^{t_k},\, X^{\tau} \right\rangle,$$

выполнено $\langle P^\tau,\, X^\tau \rangle \leq \omega \left\langle P^\tau,\, X^t \right\rangle$.

Минимальное значение ω, при котором торговая статистика удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω, называется показателем нерациональности для класса Φ_G.

Предложение 2. *Следующие утверждения эквивалентны*

- *Торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω.*
- *Существует решение U^t, λ^t $(t = 1, \ldots T)$ системы линейных неравенств*

$$\begin{aligned} &U^t \leq U^\tau + \lambda^\tau \left(\omega \left\langle P^\tau,\, X^t \right\rangle - \langle P^\tau,\, X^\tau \rangle\right), && t, \tau = \overline{1, T}, \\ &\lambda^t > 0 && t = \overline{1, T}. \end{aligned}$$

Говорят, что торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω, если для любых $t_1, \ldots, t_k$ выполнено

$$\omega^k \left\langle P^{t_1},\, X^{t_2} \right\rangle \left\langle P^{t_2},\, X^{t_3} \right\rangle, \ldots \left\langle P^{t_k},\, X^{t_1} \right\rangle \geqslant \left\langle P^{t_1},\, X^{t_1} \right\rangle \left\langle P^{t_2},\, X^{t_2} \right\rangle \ldots \left\langle P^{t_k},\, X^{t_k} \right\rangle.$$

Минимальное значение ω, при котором торговая статистика удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω, называется показателем нерациональности для класса Φ_H.

В работе (Houtman, 1995) показано, что для того, чтобы торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ удовлетворяла однородной сильной аксиоме выяленного предпочтения с показателем ω, необходимо и достаточно, чтобы существовало положительное решение $\lambda^t > 0$ $(t = 1, \ldots T)$ системы линейных неравенств

$$\lambda^t \left\langle P^t,\, X^t \right\rangle \leq \omega \lambda^\tau \left\langle P^\tau,\, X^t \right\rangle, \quad t, \tau = \overline{1, T}. \tag{7}$$

Решение этой системы или доказательство её неразрешимости могут быть получены с помощью аналогичной процедуры для анализа системы (4). На основе решения этой системы определяются индексы Конюса-Дивизиа по формулам (5). Если решение λ^t получено для системы (7) с $\omega > 1$, то такой метод определения индексов Конюса-Дивизиа называется обобщённым непараметрическим.

Предложение 3. *Следующие два утверждения эквивалентны*

1. *Торговая статистика* $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ *удовлетворяет однородной сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем* ω*.*

2. *Торговая статистика* $\{(P^t, \mu^t X^t)\}_{t=1}^T$ *удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем* ω *для любых положительных* $\mu^1, \ldots, \mu^T$*.*

В §**1.4** рассматриваются задачи прогнозирования объемов потребления и цен с помощью аксиом выявленного предпочтения. Пусть есть торговая статистика $TS = \{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$, которая удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения с показателем ω. Прогнозное множество объёмов потребления $K_V^G(P; TS, \omega)$ при ценах P определяется как множество таких векторов объёмов потребления X, что торговая статистика

$$TS \cup \{(P, X)\}$$

удовлетворяет сильной аксиоме с показателем ω. Аналогично вводится определение прогнозного множества цен $K_P^G(X; TS, \omega)$ при заданных объёмах потребления X.

Аналогично вводятся определения прогнозных множеств $K_V^H(P; TS, \omega)$ и $K_P^H(X; TS, \omega)$, построенных с помощью однородной сильной аксиомы. Если рассматривается торговая статистика, удовлетворяющая однородной сильной аксиоме с показателем $\omega \geqslant 1$, то эти множества задаются системой линейных неравенств (Гребенников, Шананин, 2008):

$$K_V^H(P; TS, \omega) = \{X \in \mathbb{R}_+^m \mid \gamma_s(P, \omega) \langle P^s, X\rangle \geqslant \langle P, X\rangle \; \forall s \in \{1, \ldots, T\}\},$$
$$K_P^H(X; TS, \omega) = \{P \in \mathbb{R}_{++}^m \mid \sigma_s(X, \omega) \langle P, X^s\rangle \geqslant \langle P, X\rangle \; \forall s \in \{1, \ldots, T\}\},$$

причём величины $\gamma_s(P, \omega)$ и $\sigma_s(X, \omega)$ рассчитываются с помощью алгоритма Варшалла-Флойда за $O(T^3)$ операций.

Исследуется также задача прогнозирования с помощью набора кривых Энгеля. Кривые Энгеля задают зависимость объемов потребления от уровня дохода при постоянных ценах. Для класса Φ_H рационализируемость торговой статистики равносильна рационализируемости набора кривых Энгеля при условии, что эти кривые являются однозначными функциями. Поэтому, множества прогнозов, построенные по набору кривых Энгеля с помощью однородной сильной аксиомы совпадают с введенными ранее множествами K_V^H и K_P^H. Если использовать сильную аксиому, то множества прогнозов, построенные по набору кривых Энгеля, могут оказаться значительно меньше множеств, построенных по торговой статистике. В работе (Blundell, Browning, Crawford, 2008) предлагается алгоритм построения множеств прогнозов объемов потребления по набору кривых Энгеля с помощью сильной аксиомы. В рамках диссертационного исследования получен контрпример, опровергающий корректность предложенного алгоритма. Этот контрпример также приводится в §1.4.

В §**1.5** рассматривается второй подход к анализу торговой статистики в случае, когда она нерационализируема. Он заключается в рассмотрении неоклассической модели потребительского спроса, в которой совокупное потребление складывается из потреблений двух и более рациональных репрезентативных потребителей. Рассматривается также другое обобщение модели Парето на случай многих репрезентативных потребителей

– модель временного диктатора. Приводятся оценки сложности проверки торговой статистики на согласованность с неоклассической моделью с функциями полезности из класса Φ_G и с моделью временного диктатора с функциями полезности из классов Φ_H и Φ_G.

Нерационализируемость торговой статистики может также быть связана с тем, что в обществе присутствуют две и более групп домашних с существенно разными предпочтениями. Если торговая статистика такого общества не рационализируема, то такое общество невозможно описать с помощью одного репрезентативного потребителя. Тогда рассматривается неоклассическая модель потребительского спроса с несколькими репрезентативными потребителями. В рамках этой модели совокупное потребление X складывается из потреблений $X_1, \ldots, X_K$ нескольких репрезентативных потребителей, каждый из которых решает задачу максимизации своей функции полезности при своём бюджетном ограничении. При этом возникает задача определения наименьшего количества рациональных репрезентативных потребителей в неоклассическаой модели потребительского спроса.

Для проверки согласованности торговой статистики $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ с неоклассической моделью с K необходимо проверить возможность разделения векторов совокупного потребления X^t на потребления $X^{1,t}, \ldots, X^{K,t}$ нескольких групп домашних хозяйств так, чтобы торговые статистики каждой группы $\{(P^t, X^{1,t})\}_{t=1}^T$, …, $\{(P^t, X^{k,t})\}_{t=1}^T$ были рационализируемы.

В рамках диссертационной работы была также исследована задача проверки согласованности торговой статистики с моделью временного диктатора. Модель временного диктатора предполагает, что в каждый период времени совокупное потребление является решением задачи максимизации функции полезности одного из репрезентативных потребителей, но в разные периоды времени это может быть разный репрезентативный потребитель.

Говорят, что торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ согласуется с моделью временного диктатора с K диктаторами с функциями полезности из класса Φ, если существуют функции $F_1, F_2, \ldots, F_K$ из класса Φ такие, что каждый вектор X^t удовлетворяет условию

$$F_k(X) \leqslant F_k(X^t) \quad \forall X \in \mathbb{R}_+^m : \left\langle P^t,\, X \right\rangle \leqslant \left\langle P^t,\, X^t \right\rangle$$

для хотя бы одного k из $\{1, \ldots, K\}$.

Проверка согласованности торговой статистики с моделью временного диктатора с K диктаторами с функциями полезности из класса Φ равносильна проверке возможности разбить множество $\{1 \ldots, T\}$ на K непересекающихся подмножеств $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_K$ таких, что торговые статистики

$$\{(P^t, X^t)\}_{t \in \mathcal{T}_1}, \ldots, \{(P^t, X^t)\}_{t \in \mathcal{T}_K}$$

рационализируемы в классе Φ.

В работе (Deb, 2010) было доказано, что задача проверки согласованности торговой статистики с моделью времменного диктатора с K диктаторами с функциями полезности из класса Φ_G для $K \geqslant 2$ является NP-полной. В диссертационном исследовании был доказан аналогичный результат для класса Φ_H.

Предложение 4. *Задача проверки согласованности торговой статистики $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ с моделью временного диктатора с K диктаторами с функциями полезности из класса Φ_H при $K \geqslant 2$ является NP-полной.*

Доказательство NP-полноты состоит из двух частей. Нужно доказать, что задача может быть решена недетерминированной машиной Тьюринга за полиномиальное время. Для задачи проверки согласованности торговой статистики с моделью временного диктатора это очевидно, поскольку она сводится к перебору всевозможных разбиений множества $\{1, \ldots, T\}$ на K непересекающихся подмножеств и проверке выполнения однородной сильной аксиомы для каждой из K порождённых каждым разбиением торговых статистик, которая может быть выполнена за полиномиальное время с помощью алгоритма Варшалла-Флойда.

Вторая часть заключается в сведении за полиномиальное время какой-либо NP-полной задачи к задаче, NP-полноту которой необходимо доказать. Для этого рассматривались две вспомогательные задачи.

Задача DAP(K): Заданы ориентированный граф $G = (V, E)$ размера T и натуральное число $K \geqslant 2$. Требуется определить, существует ли разбиение множества V на $s \leqslant K$ непересекающихся множеств $V_1, \ldots, V_s$, такое, что для любого j ($j = \overline{1, s}$) подграф $G_j = (V_j, E_j)$, порождённый вершинами из V_j, не содержит циклов.

Задача WAP(K): Заданы взвешенный граф $G = (V, E)$ размера T с матрицей весов $W \in \mathbb{R}^{T \times T}$, причём $w_{tt} = 0$ для всех t ($t = \overline{1, T}$), и натуральное число $K \geqslant 2$. Требуется определить, существует ли разбиение множества V на $s \leqslant K$ непересекающихся множеств $V_1, \ldots, V_s$, такое, что для любого j ($j = \overline{1, s}$) подграф $G_j = (V_j, E_j)$, порождённый вершинами из V_j, не содержит циклов отрицательной длины.

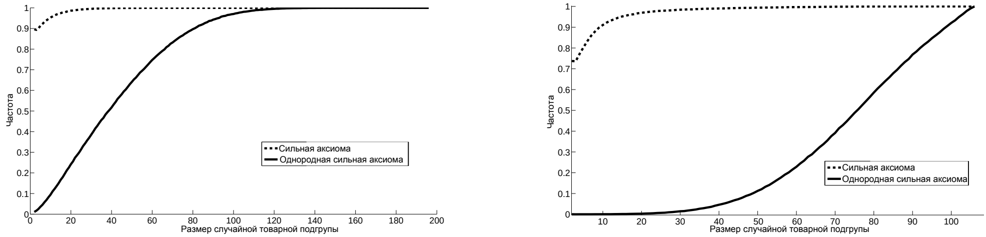
Задача DAP(K) явряется NP-полной для $K \geqslant 2$. Эта задача сводится за полиномиальное время к задаче WAP(K) для $K \geqslant 2$, что доказывает NP-полноту задачи WAP(K) для $K \geqslant 2$. Затем показано, что задача WAP(K) сводится за полиномиальное время к задаче проверки согласованности торговой статистики с моделью временного диктатора с K диктаторами с функциями полезности из класса Φ_H.

Во **второй главе** диссертации исследуется вопрос о применимости аксиом выявленного предпочтения для исследования сегментации товарных рынков и прогнозирования цен и потребления. Для этого проводился ряд численных экспериментов по сравнению сильной и однороной сильной аксиом выявленного предпочтения в вопросе их применимости для выделения содержательных товарных групп и построения прогнозов. В качестве данных для экспериментов использовались торговые статистики Венгрии (196 товаров, данные за период с 1975 по 1984) и Нидерландов (106 товаров, данные за период с 1951 по 1977).

В §**2.1** рассматривается численный экперимент для оценки вероятности того, что случайно сформированная товарная группа удовлетворяет сильной или однородной сильной аксиомам выявленного предпочтения в зависимости от размера случайной товароной группы.

Для каждого размера случайной товарной группы N генерировалось 100000 случайных товарных групп из N разных товаров. В качестве оценки вероятности выполнения аксиом выявленного предпочтения использовалось отношение количества товарных групп, торговые статистики которых удовлетворят аксиомам выявленного предпочтения, к количеству сгенерированных товарных групп. В результате численного эксперимента получились зависимости частот выполнения сильной и однородной сильной аксиом выявленного предпочтения на случайно сформированных товарных группах в зависимости от их размера, которые представлены на рисунках 1а) и 1б).

Из полученных графиков видно, что частота выполнения сильной аксиомы выяв-



а) Торговая статистика Венгрии

б) Торговая статистика Нидерландов

Рис. 1. Частота выполнения сильной и однородной сильной аксиом на случайно сформированных товарных группах.

ленного предпочтения на случайно сформированных товарных группах близка к единице. Это означает, что практически любая торговая статистика удовлетворяет сильной аксиоме. Это делает её непригодной для поиска осмысленных товарных групп, образующих независимые сегменты в структуре потребительского спроса.

Для однородной сильной аксиомы вывод противоположный. Если размер товарной группы невелик, то факт выполнения однородной сильной аксиомы для этой товарной группы является ценной информацией и позволяет быть более уверенным в том, что данная товарная группа действительно является осмысленной и представляет некоторый независимый сегмент в структуре потребительского спроса, в котором существует тесная связь между спросом и ценами на товары этой группы.

То, что при приближении размера случайно сформированных групп к количеству товаров в исходной товарной статистике частота выполнения однородной сильной аксиомы приближается к единице, объясняется тем, если вся товарная статистика удовлетворяет однородной сильной аксиоме, то исключение небольшого числа случайно выбранных товаров не приведт к существенным изменениям в матрице индексов цен Пааше, которая используется для проверки выполнения однородной сильной аксиомы. Поэтому, это не оказывает существенного влияния на выполнение однородной сильной аксиомы на случайно сформированных товарных группах.

В §**2.2** рассматривается численный экперимент для оценки мощности тестов выполнения аксиом выявленного предпочтения.

Для оценки мощности тестов на выполнение сильной и однородной сильной аксиом выявленного предпочтения использовалась следующая процедура. Пусть есть товарная группа, торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ которой рационализируема в классе Φ_H. Рассмотрим случайную торговую статистику $\widetilde{TS} = \{(\widetilde{P}^t, X^t)\}_{t=1}^T$, в которой объёмы потребления остались те же, а цены стали случайными. Распределение цен на i-ый товар таково, что логарифмы относительных цен для двух последовательных периодов

$$z_i^t = \log\left(\frac{P_i^t}{P_i^{t-1}}\right)$$

удовлетворяют случайному авторегрессионному процессу $\mathrm{AR}(p_i)$. Параметры каждого авторегрессионного процесса подбираются отдельно для каждого товара на основе фактической динамики цен.

Генерируются 20000 реализаций такой случайной товарной статистики. Мощности тестов выполнения сильной и однородной сильной аксиом выявленного предпочтения оцениваются как частоты нарушения аксиом вывленного предпочтения на сгенерированных реализациях случайной торговой статистики.

Целью данного эксперимента является проверка, насколько часто аксиомы выявленного предпочтения нарушаются при явном отсутствии связи между ценами и объёмами потребления. При этом существенным является то, что исходная торговая статистика удовлетворяет однородной сильной аксиоме, поскольку, как следует из результатов §2.1, это условие позволяет с большей надёжностью выделить осмысленных товарные группы. В качестве таких групп были выбраны товарные группы в торговой статистике Венгрии, выделенные статистической службой Венгрии и удовлетворяющие однородной сильной аксиоме. Мощность сильной аксиомы выявленного предпочтения для этих товарных групп не превосходит 0.54, причём для многих товарных групп этот показатель не превосходит 0.3. Мощность однородной сильной аксиомы для этих товарных групп лежит в интервале от 0.97 до 1, т.е. практически равна единице.

Данные результаты показывают, что сильная аксиома выявленного предпочтения часто выполняется для таких торговых статистик, в которых явно отсутствует связь между ценами и объёмами потребления, что является ещё одним аргументом против её использования для выявления содержательных товарных групп.

В §**2.3** рассматривается численный эксперимент для оценки размеров прогнозных множеств, получаемых при использовании сильной и однородной сильной аксиом выявленного предпочтения.

Для оценки размеров прогнозных множеств использовалась следующая процедура. Пусть есть товарная группа, торговая статистика $\{(P^t, X^t)\}_{t=1}^T$ которой рационализируема в классе Φ_H. Рассмотрим случайную торговую статистику $\widetilde{TS} = \{(\widetilde{P}^t, X^t)\}_{t=1}^T$, в которой объёмы потребления остаются те же, цены для первых $T-1$ периодов совпадают с фактическими, а цены в момент времени T являются случайными векторами, имеющими равномерное распределение на неотрицательной части многомерной единичной сферы. Генерируются 100 000 реализаций такой случайной торговой статистики. Размер прогнозного множества определяется как отношение количества реализаций случайной торговой статистики, удовлетворяющих сильной и однородной сильной аксиомам выявленного предпочтения, к общему количеству реализаций.

Данная процедура была применена для тех же товарных групп, что и процедура, описанная в §2.2. Размеры прогнозных множеств, построенных с помощью сильной аксиомы оказались в интерале от 0.71 до 1, причём для большинства товарных групп размер прогнозного множества равен единице, т.е. прогнозное множество цен совпадает с множеством всевозможных цен. Размеры прогнозных множеств, построенных с помощью однородной сильной аксиомы, лежат в интервале от 0.15 до 0.3.

Данные результаты показывают, что сильная аксиома выявленного предпочтения накладывает очень слабые ограничения на будущие цены, что делает её непригодной для прогнозирования цен.

В **третьей главе** рассматриваются примеры исследований экономических данных с помощью неоклассической модели потребительского спроса с двумя репрезентативными потребителями.

В §**3.1** рассматривается задача анализа бюджетной статистики Великобритании с 1975 по 1999 годы.

Бюджетная статистика представляет собой набор цен и объёмов потреблений домашних хозяйств по некоторому фиксированному набору товаров. Бюджетная статистика, использованная в рамках исследования, была получена на основе результатов опроса домашних хозяйств Family Expenditure Survey о структуре расходов домашних хозяйств. В разные годы в опросе участвовало от 6441 до 7525 домашних хозяйств. Они должны были вести учёт расходов на 68 товаров. Также были доступны цены товаров как индексы стоимости товаров в ценах 1975 года. На основе этих данных были получены объёмы потребления каждого товара.

Торговая статистика для анализа согласованности агрегированного потребления с классической моделью Парето была получена в результате суммирования объёмов потреблений всех домашних хозяйств по каждому товару и для каждого года. Полученная торговая статистика не удовлетворяет однородной сильной аксиоме, что означает непригодность классической модели Парето для описания агрегированного потребления домашних хозяйств Великобритании.

На основе бюджетной статистики для каждого года был рассчитан показатель неравенства распределения расходов – коэффициент Джини. График коэффициента Джини представлен на рисунке 2. Из графика видно, что в период с 1983 по 1989 гг. в Великобритании наблюдался резкий рост неравенства в распределении расходов. Это наблюдение позволяет выдвинуть гипотезу о том, в рассматриваемый период в Великобритании могла формироваться группа наиболее богатых домашних хозяйств, образ жизни которых сильно отличался от образа жизни остальных домашних хозяйств.

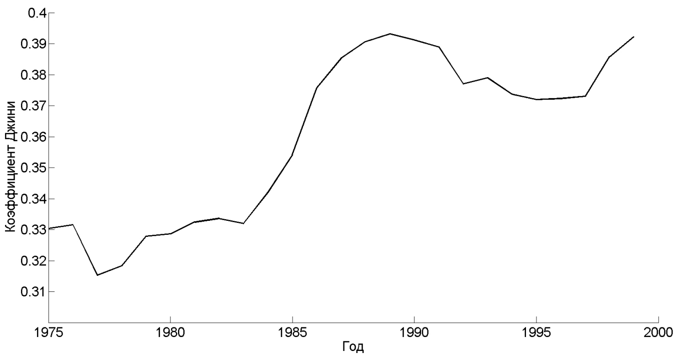


Рис. 2. Коэффициент Джини в Великобритании.

Поэтому, для проверки адекватности согласованности торговой статистики с неоклассической моделью с двумя репрезентативнми потребителями было сделано дополнительное предположение о том, что два репрезентативных потребителя соответствуют двум группам домашних хозяйств с существенно различающимися расходами. Первая (основная) группа должна включать в себя большинство домашних хозяйств, а вторая группа должна содержать небольшое количество наиболее богатых домашних хозяйств.

Для разделения агрегированного потребления на потребление двух репрезентативных потребителей все домашние хозяйства были разбиты на 100 страт по уровню дохода. Разбиение делается для каждого года. В период с 1975 по 1987 годы торговая статистика по всем товарам рационализируема в классе Φ_H. Для рационализируемости торговой статистики по всем товарам с 1975 по 1988 годы необходимо исключить 1% наиболее богатых домашних хозяйств. Для того, чтобы обеспечить рационализируемость торговой статистики по всем товарам при добавлении последующих периодов, необходимо исключать несколько страт наиболее богатых домашних хозяйств, причём со временем количество исключаемых страт не убывает. При этом оказывается возможным сделать так, чтобы объемы потребления исключаемых наиболее богатых домашних хозяйств также образовывали рационализируемую торговую статистику. Это позволяет говорить об успешном разбиении агрегированного потребления на потребления двух репрезентативных потребителей и подтверждении согласованности агрегированной торговой статистики с неоклассической моделью с двумя репрезентативными потребителями.

В результате такого итерационного процесса были получены две торговые статистики. Одна соответствует группе наиболее богатых домашних хозяйств и содержит объемы потребления некоторой доли домашних хозяйств с высокими расходами, причем эта доля со временем не убывает. Вторая статистика содержит объемы потребления всех остальных домашних хозяйств и соответствует основной группе. На рисунке 3 показано, как меняется доля домашних хозяйств, относящихся к основной группе.

Рис. 3. Доля основной группы в зависимости от года.

Для сопоставления структур потребления в двух выделенных группах, было проведено сравнение средних долей потребления по четырём товарным группам для каждой из двух групп домашних хозяйств. Для расчёта средних долей потребления использовались индексы Конюса-Дивизиа, рассчитанные с помощью обобщённого непараметрического метода. Обозначим индексы спроса на товары из товарной группы i для группы домашних хозяйств β через $\{F_i^{t,\beta}\}_{t=T_0(\beta)}^{1999}$, где $T_0(\beta)$ период, когда выделяется группа β. В качестве оценки средней доли потребления товарной группы i для группы домашних хозяйств β использовалась величина

$$s_i(\beta) = \frac{\sum_{t=T_0(\beta)}^{T} \frac{F_i^{t,\beta}}{F_0^{t,\beta}}}{\sum_{j=1}^{4} \sum_{t=T_0(\beta)}^{T} \frac{F_j^{t,\beta}}{F_0^{t,\beta}}},$$

где $\{F_0^{t,\beta}\}_{t=T_0(\beta)}^{T}$ – индексы спроса на все товары для группы домашних хозяйств β. Значения средних долей потребления представлены в табл. 1. Наибольшие различия в структурах потребления двух групп домашних хозяйств проявляются в потреблении двух товарных категорий – «Продуты питания» и «Транспорт и развлечения». У группы наиболее богатых домашних хозяйств потребление товаров из группы «Транспорт и развлечения» примерно в два раза выше, чем потребление товаров из группы «Продукты питания». Для группы всех остальных домашних хозяйств доли потребления товаров из этих двух групп почти совпадают.

Товарная группа	Основная группа	Группа наиболее богатых
Продукты питания	0.27161	0.17737
Одежда и обувь	0.12294	0.093739
Дом и связь	0.30658	0.34376
Транспорт и развлечения	0.29887	0.38513

Таблица 1. Количественные характеристики структур потребления.

В §**3.2** расссматривается приложение обощённого непараметрического метода к анализу кризиса на фондовом рынке Китая в 2014–2015 годах в рамках неоклассической модели с двумя репрезентативными потребителями.

Летом 2015 наблюдался заметный спад в ценовом индексе фондового рынка Китая, график которого представлен на рисунке 4. Этот спад характеризует начало кризиса на фондовом рынке Китая.

В рамках анализа все инвесторы разделяются на две группы – основные инвесторы и высокочастотные трейдеры. Основные инвесторы воспринимают акции как услуги по росту дохода. Они редко меняют состав своего портфеля, поскольку рассчитывают не только на рост стоимости акций, но и на дивиденды. Поэтому предполагается, что поведение основных инвесторов при постоянстве их предпочтений описывается моделью Парето. Высокочастотные трейдеры стремятся заработать на краткосрочных колебаниях стоимостей акций. Они очень часто меняют состав своего портфеля. Высокочастотные трейдеры в свою очередь разделяются на профессиональных и непрофессиональных. Особенностью фондового рынка Китая летом 2015 года является повышенная доля индивидуальных инвесторов на фондовом рынке – около 85%.

При анализе торговой статистики фондовых рынков мы наблюдаем объемы торгов всех инвесторов, куда входят торги и основных инвесторов и высокочастотных трейдеров. Из-за этого торговая статистика фондового рынка Китая не рационализируема. Для проверки справедливости такого взгляда на причины нерационализируемости торговой статистики фондового рынка Китая был проведен численный эксперимент, аналогичный описанному в §2.2.

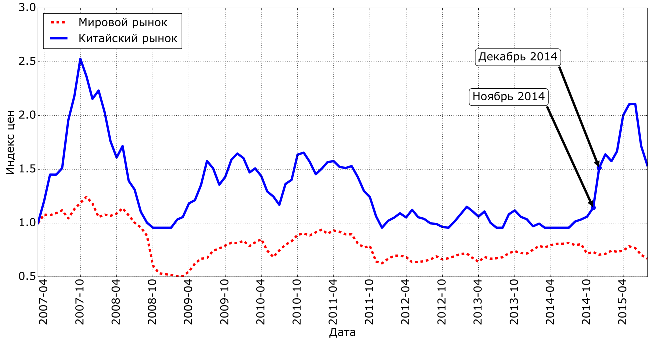


Рис. 4. Индексы цен Конюса-Дивизиа для китайского и мирового фондовых рынков.

Активность высокочастотных трейдеров зависит как от акций, так и от общего состояния фондового рынка. В периоды кризисов активность высокочастотных трейдеров возрастает и это приводит к росту показателя нерациональности. Существует некоторый уровень показателя нерациональности, характерный для нормального состояния фондового рынка Китая. На основании анализа графиков логарифма показателя нерациональности, построенных методом скользящего окна для разной ширины окна, было установлено, что нормальный уровень логарифма показателя нерациональности для фондового рынка Китая составляет 0.035. Обозначим этот уровень через Ω^*.

Для анализа был выбран период с января 2014 по август 2015. Логарифм показателя нерационалонсти за этот период равен 0.049, что превышает нормальный уровень.

Активность высокочастотных трейдеров возрастает еще и тогда, когда они прогнозируют изменение предпочтений основных инвесторов. В этом случае они начинают вести себя так, как вели бы основные инвесторы после изменения предпочтений. В таком случае, в течение некоторого периода более адекватным модельным описанием поведения инвесторов является неоклассическая модель с двумя репрезентативными потребителями.

Этот период должен приводить к росту логарифма показателя нерациональности сверх нормального уровня. Для выделения такого периода необходимо определить те месяцы, исключение которых снижает логарифм показателя нерациональности до нормального уровня.

Если логарифмировать систему (4) и ввести новые переменные $\mu^t = \log(\lambda^t)$, $c_{\tau t} = \log(C_{\tau t})$, то получается система

$$c_{\tau t} \leqslant \mu^\tau - \mu^t \quad t, \tau = \overline{1, T} \tag{8}$$

Введение показателя нерациональности можно рассматривать как регуляризацию системы (8) в равномерной метрике, которая заключается в определении невязки

$$\min_{\mu^1,\ldots,\mu^T} \max_{\{y_{\tau t} \geqslant 0 | \sum_{t=1}^T \sum_{\tau=1}^T y_{\tau t} = 1\}} y_{\tau t}(c_{\tau t} + \mu^t - \mu^\tau). \tag{9}$$

Значение невязки (9) совпадает с оптимальным значением целевой функции в следующей задаче линейного программирования

$$
\begin{aligned}
&\zeta \to \min \\
&\zeta \geqslant c_{\tau t} + \mu^t - \mu^\tau \qquad && t,\tau = \overline{1,T} \\
&\zeta \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

а также со значением логарифма показателя нерациональности торговой статистики.

Регуляризация в равномерной метрике приводит к одному регуляризующему параметру. В целях выделения периодов времени, приводящих к росту логарифма показателя нерациональности сверх нормального уровня, можно рассматривать регуляризацию в «интегральной метрике» сверх нормального уровня логарифма показателя нерациональности Ω^*, которая сводится к решению задачи линейного программирования

$$\sum_{\tau=1}^{T}\sum_{t=1}^{T}\zeta_{\tau t} \to \min \tag{10}$$

$$\zeta_{\tau t} \geqslant c_{\tau t} - \Omega^* + \mu^t - \mu^\tau, \qquad t,\tau = \overline{1,T} \tag{11}$$

$$\zeta_{\tau t} \geqslant 0. \qquad t,\tau = \overline{1,T} \tag{12}$$

Двойственной к задаче (10)–(12) является задача о максимальном потоке

$$\sum_{\tau=1}^{T}\sum_{t=1}^{T}(c_{\tau t} - \Omega^*)x_{\tau t} \to \max \tag{13}$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{\tau t} = \sum_{t=1}^{T} x_{t\tau}, \qquad \tau = \overline{1,T} \tag{14}$$

$$0 \leqslant x_{\tau t} \leqslant 1. \qquad t,\tau = \overline{1,T} \tag{15}$$

Среди ее решений есть такое решение $\{x^*_{t\tau}\}$, что $x^*_{t\tau} \in \{0,1\}$. Это решение может быть представлено в виде ориентированного графа, вершины которого соответствуют периодам времени, а рёбра соответствуют тем парам (t,τ), для которых $x^*_{t\tau} = 1$. Такое решение позволяет выделить наиболее несогласованные пары периодов.

Для анализируемой торговой статистики получается граф, представленный на рисунке 5. На графе отсутствуют обозначения направления, поскольку для каждой пары периодов (t,τ), образующей ребро в графе, пара (τ,t) также образует ребро. Поэтому, каждое из показанных ребер на самом деле соответствуют двум ребрам, имеющим противоположное направление. Видно, что граф является двудольным. Первую долю образуют периоды январь 2014, февраль 2014, март 2014. Вторую долю образуют периоды декабрь 2014, январь 2015, март 2015, апрель 2015. Для дальнейшего анализа были выбраны периоды второй доли.

По-видимому, в период с декабря 2014 по апрель 2015 более адекватным модельным описанием поведения инвесторов является неоклассическая модель с двумя репрезентативными потребителями. Один репрезентативный потребитель соответствует основным инвесторам со старыми предпочтениями. Другой соответствует высокочастотным трейдерам, которые ведут себя как основные инвесторы с изменившимися предпочтениями.

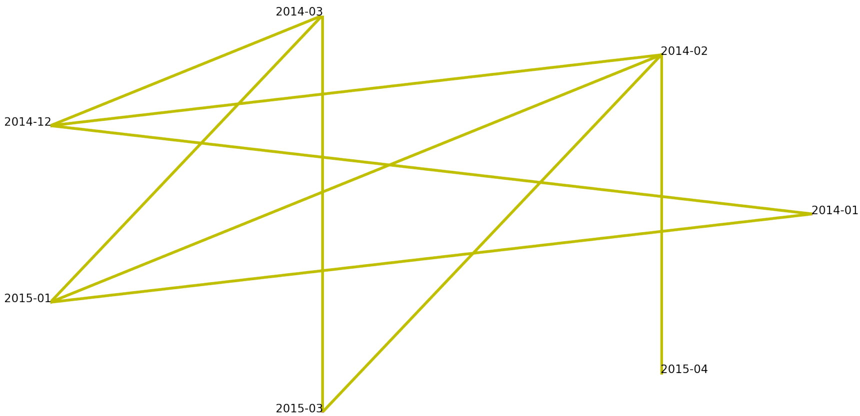


Рис. 5. Граф, построенный по решению задачи (13)–(15).

Для подтверждения такого взгляда была поставлена задача представить каждый из векторов объемов торгов X^t с декабря 2014 по апрель 2015 в виде суммы $X^{1,t} + X^{2,t}$ неотрицательных векторов $X^{1,t}$ и $X^{2,t}$ так, что пару $(P^t, X^{1,t})$ можно присоединить к торговой статистике до выделенных периодов, т.е. с января по ноябрь 2014, а пару $(P^t, X^{2,t})$ к торговой статистике после выделенных периодов, и чтобы при этом логарифмы показателей нерациональности полученных торговых статистик не превосходили нормального уровня Ω^*.

Для проверки возможности такого представления была предложена процедура, в ходе которой необходимо несколько раз решать задачу проектирования некоторого вектора X на множество прогнозов объемов торгов $K_V^H(P; TS^{\mathrm{main}}, e^{\Omega^*})$, построенное по торговой статистике TS^{main} для вектора цен P, так, чтобы остаток от проекции лежал в множестве прогнозов объемов торгов $K_V^H(P; TS^{\mathrm{aux}}, e^{\Omega^*})$, построенном по торговой статистике TS^{aux}. Формально задача ставится следующим образом:

$$\|X^t - Z\|^2 \to \min_Z \tag{16}$$

$$Z \in K_V^H(P^t; TS^{\mathrm{main}}, e^{\Omega^*}) \tag{17}$$

$$X^t - Z \in K_V^H(P^t; TS^{\mathrm{aux}}, e^{\Omega^*}) \tag{18}$$

Ограничения (17)–(18) линейные, поскольку множества

$$K_V^H(P^t; TS^{\mathrm{main}}, e^{\Omega^*}) \text{ и } K_V^H(P^t; TS^{\mathrm{aux}}, e^{\Omega^*})$$

задаются системами линейных неравенств. Поэтому задача (16)–(18) является задачей кваратичного программирования с выпуклой целевой функцией. Для её решения разработаны эффективные численные методы. В диссертационном исследовании использовалась реализация алгоритма решения задачи квадратичного программирования в библиотеке ALGLIB[1].

В результате предложенной процедуры удалось разделить векторы объемов торгов с декабря 2014 по апрель 2015 между торговыми статистиками до и после выделенных периодов так, чтобы логарифмы показателей нерациональности полученных статистик не превосходили нормального уровня Ω^*. Это подтверждает выдвинутую ранее гипотезу об изменении предпочтений основных инвесторов.

Для дальнейшего анализа кризиса была поставлена задача поиска минимального набора акций таких, что возможно изменить объёмы торгов только этих акций и только в те четыре периода времени, которые были выделены ранее, так, чтобы получить торговую статистику, логарифм показателя нерациональности которой не превосходит нормального уровня Ω^*.

Для этого была предложена процедура проверки того, что некоторый набор акций удовлетворяет указанным выше требованиям. Эта процедура сводится к последовательному решению для каждого из выделенных периодов следующей задачи частичнго проектирования вектора объёмов торгов X на множество прогнозов объёмов торгов с помощью акций из множества I:

$$\begin{aligned}
&\|X - Y\|^2 \to \min, \\
&Y \in K_V^H(P; TS, e^{\Omega^*}), \\
&Y_i = X_i \qquad\qquad\qquad\qquad (i \notin I),
\end{aligned}$$

Эта задача является задачей квадратичного программирования с выпуклой целевой функцией.

Сама процедура состоит из следующих шагов:

1) Определим начальную торговую статистику как $TS = \{(P^\tau, X^\tau)\}_{\tau \in \{1,\ldots,T\} \setminus T^*}$, где T^* – множество периодов времени, выделенных по решению задачи (13)–(15). Положим также $T^- = T^*$.

2) Если $T^- = \varnothing$, то переходим к шагу 6).

3) $t = \min\{T^-\}$ (для описка минимума используется хронологический порядок периодов времени в T^-).

4) Решаем задачу частичного проектирования вектора объёмов торгов X^t на множество прогнозов объёмов торгов $K_V^H(P^t; TS, e^{\Omega^*})$ с помощью акций из множества I. Обозначим полученное решение, если оно существует, через $\widehat{X}^t$. Если оно не существует, переходим к шагу 6).

5) Добавляем пару $(P^t, \widehat{X}^t)$ к торговой статистике TS; переопределяем значение T^- как $T^- = T^- \setminus \{t\}$; переходим к шагу 2).

6) Конец процедуры.

[1] http://www.alglib.net/

Если для какого-нибудь периода на шаге 4) не удаётся определить проекцию, то набор акций I не прошёл проверку и необходимо рассмотреть другой набор акций.

В ходе диссертационного исследования удалось выделить набор, который проходит вышеописанную процедуру проверки, и который состоит из акции одной компании. Это компания CITIC Securities, ведущий инвестиционный банк Китая. Одна компания не может быть ответственной за повышенную нерациональность торговой статистики. Данная компания является репрезентативным представителем группы всех инвестиционных банков Китая, действия с акциями которых и привели к кризису.

В **четвертой главе** приводятся описания программных реализаций алгоритмов решения задач, которые были поставлены в рамках диссертационного исследования. В §**4.1** приводится краткое описание программного комплекса «Индекс», функционал которого был расширен для решения новых задач. В §**4.2** приводится описание программной реализации алгоритмов, использованных для сравнения аксиом выявленного предпочтения. В §**4.3** приводятся описания программных реализаций алгоритмов, использованных для анализа кризиса на фондовом рынке Китая.

В §**4.4** приводится описание нового программного комплекса с открытым исходным кодом на языке программирования C++. Этот комплекс реализует основные алгоритмы, необходимые для применения обобщенного непараметрического метода и для анализа бюджетной статистики Великобритании. Исходный код доступен на сайте GitHub[2].

В **заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Приложение **П.1** содержит листинги программ, упомянутых в четвертой главе.

Основные результаты работы

1) Проанализировано, насколько важно предположение положительной однородности рационализирующей функции полезности для разработки измерительных показателей и прогнозирования. Показана высокая частота выполнения сильной аксиомы выявленного предпочтения на случайных товарных подгруппах, а также ее низкая мощность. Показано, что получаемые с помощью сильной аксиомы множества прогнозов мало отличаются от тривиальных множеств прогнозов. Для однородной сильной аксиомы получены противоположные результаты. На основе проведенного сравнения был сделан вывод о том, что для решения практических задач по прогнозированию и анализу сегментации рынков следует использовать однородную сильную аксиому. Другими словами, показана практическая значимость требования положительной однородности рационализирующей функции полезности.

2) Доказана NP-полнота задачи проверки согласованности торговой статистики с моделью временного диктатора с положительно-однородными функциями полезности.

3) Предложены эффективные методы анализа бюджетной статистики с помощью неоклассической модели потребительского спроса в период формирования группы домашних хозяйств с отличающимся от отсальных образом жизни, основанные на модельном предположении о разделении двух групп домашних хозяйств по уровням расходов. В результате анализа бюджетной статистики Великобритании

[2] https://github.com/nklemashev/phd/tree/master/uk/AxiomsPhD

в период с 1975 по 1999 удалось доказать согласованность данных о потреблении домашних хозяйств с неоклассической моделью с двумя репрезентативными потребителями, которым можно придать содержательную интерпретацию.

4) Предложены эффективные методы анализа кризиса на фондовом рынке с помощью неоклассической модели потребительского спроса, основанные на эвристических процедурах. В результате анализа торговой статистики фондового рынка Китая с января 2014 по август 2015 удалось описать кризис 2015 года как результат того, что некоторые высокочастотные трейдеры спрогнозировали изменения предпочтений основных инвесторов и начали совершать торги в соответствии с будущими предпочтениями основных инвесторов. Это привело к тому, что в течение некоторого периода поведение инвесторов описывается взаимодействием двух репрезентативных потребителей.

Публикации по теме диссертации

В изданиях из списка ВАК РФ

1. *Клемашев Н. И.* Анализ кризиса на фондовом рынке Китая с помощью неоклассической модели потребительского спроса // Труды МФТИ. — 2018. — Т. 10 № 2. — С. 99–108.

2. *Klemashev N.I., Shananin A.A., Zhang Sh.* Inverse problems in Pareto's demand theory and their applications to analysis of stock market crises // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. — 2018. — Vol. 26, no. 1. — P. 95–108 (Scopus).

3. *Klemashev N., Shananin A.* Inverse problems of demand analysis and their applications to computation of positively-homogeneous Konüs-Divisia indices and forecasting // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2016. — Vol. 24, no. 4 — P. 367–391 (Scopus).

4. *Клемашев Н. И., Шананин А. А.* Оценка сложности проверки гипотезы о временном диктаторе с положительно-однородной функцией полезности // Труды МФТИ. — 2015. — Т. 7, № 4. — С. 17–27.

5. *Клемашев Н. И., Шананин А. А.* Непараметрический метод анализа бюджетной статистики // Труды МФТИ. — 2014. — Т. 6, № 4. — С. 49–56.

В сборниках трудов конференций

6. *Клемашев Н. И.* Положительно-однородные индексы Конюса-Дивизиа как инструмент анализа взаимозаменяемости товаров // Сборник тезисов XVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «ЛОМОНОСОВ-2011». — 2011. — С. 35–36.

7. *Клемашев Н. И., Рязанов В. В., Шананин А. А.* Анализ сегментированности фондовых рынков с помощью обобщённого непараметрического метода // Труды 55-й научной конференции МФТИ, Управление и прикладная математика. — 2012. — Т. 1. — С. 39–40.

8.. Klemashev N., Shananin A. Positively-homogeneous Konus-Divisia indices and their applications // 26th European Conference on Operational Research, Abstract Book. — 2013. — P. 116.

9. *Клемашев Н. И.* Непараметрический метод анализа торговой статистики в задаче прогнозирования спроса // Сборник тезисов XXI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «ЛОМОНОСОВ-2014». — 2014. — С. 55–57.

10. *Клемашев Н. И., Шананин А. А.* Прогнозирование спроса с помощью непараметрического метода анализа торговой статистики // Тезисы докладов VIII Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и технологий» ЭКОМОД-2014. — 2014. — С. 23.

11. *Клемашев Н.И.* Обобщённый непараметрический метод обработки бюджетной статистики // Тезисы научной конференции «Тихоновские чтения». — 2014. — С. 20.

12. *Клемашев Н. И., Шананин А. А.* Оценка мощности непараметрических тестов аксиом выявленного предпочтения и обобщённый непараметрический метод обработки бюджетной статистики // Труды 57-й научной конференции МФТИ, том 1. — 2014. — С. 23–24.

13. *Klemashev N. I., Shananin A. A.* Analysis of 2015 Chinese stock market crash by means of generalized nonparametric method // VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016), Proceedings, Volume I. — 2016. — P. 99–102.

14. *Klemashev N., Shananin A.* Generalized nonparametric method for analyzing economic data inconsistent with the model of single rational representative consumer // Proceedings of International work-conference on Time Series (ITISE2017), Volume I. — 2017. — P. 117–121.

В работах из списка ВАК [1]–[5] автору принадлежат доказательства основных утверждений, проведение, интерпретация и описание численных экспериментов. Выносимые на защиту результаты диссертации, изложенные в работах [7]–[8], [10], [12]–[14] получены лично автором.