

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Смирнов Сергей Николаевич

**Гарантированный детерминистский подход
к математическому моделированию финансовых рынков**

Научная специальность 1.2.2

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2022

Прежде всего, нужно заметить, что само различие между прикладной и чистой математикой чрезвычайно условно. Вопросы, которые, казалось бы, принадлежат к чистой математике и не имеют применений, очень часто совершенно неожиданно оказываются важными для разных приложений. С другой стороны, занимаясь прикладной математикой, ученый почти неизбежно наталкивается на смежные вопросы, решаящиеся теми же методами, привлекающие его своей логической красотой, но, собственно говоря, непосредственных приложений уже не получающие. Вероятно, в практической работе математика нужно проявлять должную широту. Несомненно, что математики должны, это их долг, заниматься всеми теми вопросами, которые настоятельно навязываются вопросами практики. Если смежные вопросы, пусть сразу применений не имеющие, являются привлекательными хотя бы в силу красоты и естественности возникающих задач, ими, конечно, тоже нужно заниматься.

А. Н. Колмогоров

Ясно, что сколько бы ни было точно математическое решение, оно не может быть точнее тех приближенных предпосылок, на коих оно основано. Об этом часто забывают, делают в начале какое-нибудь грубое приближенное предположение или допущение, часто даже не оговорив таковое, а затем придадут полученной формуле гораздо большее доверие, нежели она заслуживает, и это потому, что ее вывод сложный.

А. Н. Крылов

*The sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work — that is correctly to describe phenomena from a reasonably wide area. Furthermore, it must satisfy certain esthetic criteria — that is, in relation to how much it describes, it must be rather simple.*¹

John von Neumann

¹Науки не пытаются объяснить, они почти даже не пытаются интерпретировать, они в основном создают модели. Под моделью подразумевается математическая конструкция, которая, с добавлением определенных словесных интерпретаций, описывает наблюдаемые явления. Обоснование такой математической конструкции заключается исключительно в том, что она должна работать — то есть корректно описывать явления из достаточно обширной области. Кроме того, она должна удовлетворять определенным эстетическим критериям — то есть должна быть довольно простой по отношению к тому, насколько значительно ею описываемое. (Джон фон Нейман)

Оглавление

Оглавление	3
Введение	6
Глава 1. Модель рынка, торговые ограничения и уравнения Беллмана–Айзекса	22
1.1. Описание детерминистской модели рынка: динамика цен и торговые ограничения	22
1.2. Гарантированная оценка американского опциона — постановка задачи	33
Глава 2. Свойства «безарбитражности» рынка	45
2.1. Арбитраж и безарбитражность рынка	45
2.2. Арбитражная возможность и гарантированный арбитраж	49
2.3. Отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью	61
2.4. Структурная устойчивость модели и грубая (робастная) форма безарбитражности	64
Глава 3. Свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса	74
3.1. Общие условия полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса	74
3.2. Условия гладкости решений уравнений Беллмана–Айзекса, связывающие неопределенность движения цен и торговые ограничения посредством «безарбитражности»	84
Глава 4. Модуль непрерывности и свойства липшицевости решений уравнений Беллмана–Айзекса	92
4.1. Вспомогательные результаты	92
4.2. Оценка модуля непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса	100
Глава 5. Смешанные стратегии и игровое равновесие	109
5.1. Смешанные стратегии «рынка»	109

5.2.	Равновесие в смешанных стратегиях «рынка»	113
5.3.	Равновесие при отсутствии торговых ограничений	127
Глава 6.	Реалистичность модели рынка и ее критерий	135
6.1.	Реалистичность модели рынка	135
6.2.	Свойства феллеровских переходных ядер	137
6.3.	Вспомогательные результаты	139
6.4.	Существование феллеровских переходных ядер с носителями мер, заданными многозначным отображением	142
6.5.	Существование переходных ядер с сильно феллеровским свойством в строгом смысле в случае структурной устойчивости модели	146
Глава 7.	Наиболее неблагоприятные сценарии поведения рынка и проблема моментов	149
7.1.	Двухэтапный метод решения уравнений Беллмана	149
7.2.	Конечные носители смешанных стратегий в антагонистической игре	152
7.3.	Общая проблема моментов	161
7.4.	Измеримость в общей проблеме моментов	175
7.5.	Применение результатов общей проблемы моментов	180
7.6.	Случай отсутствия торговых ограничений	185
Глава 8.	Свойства оптимальных стратегий «рынка» и их носителей	188
8.1.	Свойства гладкости оптимальных смешанных стратегий «рынка» и их носителей	188
8.2.	Существование переходного ядра для оптимальных смешанных стратегий	195
8.3.	Свойства носителей для случая единственной оптимальной стратегии рынка, сосредоточенной не более чем в $n + 1$ точке	199
8.4.	Выпуклость решений уравнений Беллмана	203
8.5.	Возможное вырождение оптимальных смешанных стратегий рынка при нарушении структурной устойчивости как причина разрывности цены суперхеджирования	224
Глава 9.	Соотношение детерминистской и вероятностной постановки при отсутствии торговых ограничений	235
9.1.	Конструктивный способ построения параметрического семейства эквивалентных мер с заданным барицентром, как параметром	235
9.2.	Связь «детерминистского» и «вероятностного» подходов к суперрепликации	239
9.3.	Сохранение структурной устойчивости для близких вероятностных моделей	251

Глава 10. Численное решение на основе аппроксимирующей модели с оценкой точности	258
10.1. Порог структурной устойчивости	259
10.2. Чувствительность к малым возмущениям компактов, описывающих неопределенность движения цен	271
10.3. «Хрупкость» модели при отсутствии структурной устойчивости	286
10.4. Выбор численных методов	291
10.5. Алгоритм численного анализа и вычислительный эксперимент	297
Глава 11. Бинарные опционы	314
11.1. Общие результаты для моделей специального вида	314
11.2. Бинарный опцион европейского типа	318
11.3. Алгоритм численного решения	338
Глава 12. Гарантированный детерминистский подход к маржированию на срочном рынке	342
12.1. Управление рисками центрального контрагента	342
12.2. Роль системы маржирования в риск-менеджменте центрального контрагента	345
12.3. Описание системы маржирования, основанной на детерминистском гарантированном подходе	349
12.4. Математическая модель маржирования с фьючерсной коррекцией	352
12.5. Свойства решений уравнений Беллмана—Айзекса, полезные при численном решении	361
12.6. Расчеты на модельных примерах, демонстрирующие эффективность системы маржирования с фьючерсной коррекцией	364
Заключение	370
Обозначения	377
Список литературы	381

Введение

Актуальность и степень разработанности темы

Математические модели ценообразования и хеджирования производных финансовых инструментов впервые появились в 1973 году в основополагающих работах Блэка и Шоулса [102], а также Мертона [194]. Они были основаны на модели финансового рынка Башелье–Самуэльсона [84; 216] с непрерывным временем. Эта модель является одним из примеров моделей полного рынка. Для непрерывного времени условие полноты рынка является естественным благодаря тому, что при помощи абсолютно непрерывной замены меры можно перейти к единственной эквивалентной мартингальной мере. Однако, для моделей с дискретным временем, представляющих основной интерес в рамках данной работы, полнота рынка выглядит ограничительным требованием. Для модели рынка с одним безрисковым и несколькими рисковыми активами, в случае отсутствия торговых ограничений, условные распределения приращений дисконтированных цен должны быть (почти наверное) сосредоточены в конечном числе точек, не превосходящем общее число активов, что было установлено в работе Жакода и Ширияева [177].

Для моделей рынка, не являющихся полными, одним из наиболее важных способов хеджирования обусловленных обязательств по проданному опциону является суперхеджирование, также известное как суперрепликация. Задача суперхеджирования была впервые решена при помощи техники опционального разложения рядом авторов: Эль Каруи и Кенез [181] для диффузионной динамики цен базового актива, Крамковым [186] в общей семимартингальной постановке, Фельмером и Кабановым [150] для случая дискретного времени. Современное изложение вероятностного подхода для случая дискретного времени представлено в монографии Фельмера и Шида [151]. В этой же книге, в главе 8, приведены различные постановки задачи эффективного хеджирования, для которых решение сводится к суперхеджированию опциона с модифицированной функцией выплат.

Изначальной мотивацией для появления настоящей работы стало выступление Д. О. Крамкова на семинаре в МИАН в середине 90-х годов, посвященное применению опционального разложения к решению задачи суперхеджирования. В этом докладе были отмечены затруднения в численном решении задачи нахождения существенной точной верхней грани по множеству эквивалентных мартингальных мер для условного математического ожидания функции

выплат. В связи с этим у автора возникла идея оценивания опционов при помощи подхода, альтернативного традиционному вероятностному и имеющего более конструктивный характер.

Ряд авторов статей и монографий по математическим финансам квалифицирует модели рынка, не относящиеся к вероятностным, как формализацию неопределенности по Найту². Такое название, однако, представляется нам некорректным, поскольку Найт в главе 8 своей книги [184] говорит о неопределенности, не поддающейся количественному измерению (в отличие от риска). В данной работе мы используем термин «гарантированный детерминистский подход». Одной из первых публикаций по тематике гарантированного детерминистского подхода, является статья Колокольцова [185], опубликованная в 1998 году. Насколько нам известно, это первая работа, в которой явно формулируется данный подход к ценообразованию и хеджированию обусловленных обязательств по опционам для неполных рынков³. Неявно, но фактически некоторый математический инструментарий для гарантированного детерминистского подхода⁴ еще в 1994 году был представлен в разделах 1.1.6 и 1.2.4 книги Дана и Жанблан–Пике [127].

Тема нашей работы тесно связана с результатами В. Н. Колокольцова, представленными в главах 11–14 книги [95], посвященной интервальным моделям рынка. Отметим, что эти результаты получены в предположении отсутствия торговых ограничений. В работе Колокольцова, в частности, содержится независимо открытая им игровая интерпретация риск-нейтральных вероятностей (при отсутствии торговых ограничений). В главах 13 и 14 книги рассматриваются модели рынка, с интервальными ограничениями на логарифмы цен (т. е. в рамках модели вектор логарифмов приращений цен лежит в параллелепипеде), хотя теория, представленная в главе 12 книги, позволяет, в принципе, изучать более общие компактнозначные ограничения на цены, как в нашей работе. В этой работе, посвященной теоретико-игровому подходу, тем не менее, не используются собственно теоретико-игровые методы. Возможно, это связано с тем, что рассматривается только случай отсутствия торговых ограничений. Теоретико-игровые методы были с самого начала положены в основу нашей работы, что позволило исследовать вопросы игрового равновесия в смешанных стратегиях при торговых ограничениях, а также роль условий безарбитражности⁵ касательно существования игрового равновесия и «гладкости» решений. Эти вопросы не затрагиваются в работе Колокольцова, а также не обсуждается связь детер-

²«Knightian uncertainty»

³Формально первой работой можно считать классическую статью Кокса, Росса и Рубинштейна [125], однако в ней рассматривается модель полного рынка. Несмотря на используемый в ней вероятностный подход, для конечного пространства элементарных событий оба подхода дают одинаковый результат.

⁴С использованием которого может быть получен результат первой части вышеупомянутой статьи Колокольцова 1998 года, для случая одного рискового актива и выпуклой функции выплат по европейскому опциону.

⁵Неологизм, означающий отсутствие арбитража в некотором смысле, который может быть формализован различными способами. Термин предложен А. Н. Ширяевым в [69], стр. 531.

минированного и стохастического подходов, в то время как решения для этих подходов, вообще говоря, могут отличаться. Модель из глав 13 и 14 книги отвечает достаточно регулярному поведению многозначных отображений, а именно липшицевости, так что детерминистическая модель Колокольцова, как правило, приводит к совпадению результатов суперхеджирования со стохастическим подходом, когда рассматриваются носители условных распределений приращений цен при известной предыстории цен. Ответ на вопрос о совпадении, тем не менее, в общем случае зависит еще и от «гладкости» функций выплат, что может приводить к несовпадению результатов двух подходов.

Отметим, что наш подход близок по духу к игровой постановке, предложенной в 2004 г. в работе Хаметова и Чалова [65], а также в статьях Зверева и Хаметова [18—20]. Результаты подобного типа можно найти в исследованиях Карассюс и соавторов [112; 116], правда все эти работы относятся к традиционному вероятностному подходу.

В последние несколько лет возрос интерес к новому направлению моделирования неопределенности на рынке, называемому робастным⁶, что отражает грубость моделей, или же «свободным от модели»⁷. Второе название менее удачно на наш взгляд. Формально гарантированный детерминистский подход может считаться робастным, что свидетельствует об актуальности данной тематики. Однако наш подход отличается своей экономической интерпретацией. Работы, относящиеся к робастному подходу, могут быть условно разделены на два направления: квазидостоверный⁸ и потраекторный⁹ подходы. Обычно в этих работах в портфеле различают две категории финансовых инструментов: первая — торговая, состоящая из инструментов, торгуемых динамически (базовые активы), и вторая — статическая, основанная на стратегии покупки с последующим удержанием¹⁰. При этом, как правило, используются европейские опционы на покупку и продажу с фиксированным временем до исполнения. Идея изучения такого сорта портфелей принадлежит Хобсону [169]. Связь потраекторного подхода с квазидостоверным изучается в работе Обой и Висела [204]. Квазидостоверный подход вводит класс вероятностных мер, описывающих возможные сценарии поведения рынка. С математической точки зрения, в отличие от традиционного вероятностного подхода, этот класс может содержать взаимно сингулярные меры, что создает серьезные осложнения в математическом плане. Для модели с дискретным временем эта идея была введена в работе Бушара и Нутса [105]. Выбор того или иного класса вероятностных мер порождает широкий диапазон спецификаций динамики рынка. Такой подход был использован для описания неопределенности рынка в ряде работ Байрактара и соавторов [86; 88]. Потраекторный подход к описанию неопределенности в моделировании рынка задается посредством конкретных рыночных сценариев (без использова-

⁶“Robust”.

⁷“Model-independent”.

⁸“Quasi-sure”.

⁹“Pathwise”.

¹⁰“Buy-and-hold strategies”.

ния вероятностных мер). Общая теория потраекторного подхода для модели с дискретным временем была построена в работе Бурзони и соавторов [109] на основе более ранних разработок [108; 110]. В статье Аксамит и соавторов [73] продолжены исследования Бушара и Бурзони. Для дискретного времени и получены общие результаты, касающиеся дуальности для ценообразования для американских опционов. При этом удалось добиться выполнения принципа динамического программирования путем фиктивного расширения рынка¹¹, на котором все финансовые инструменты торгуются динамически.

Работы Колокольцова и наше исследование формально могут быть отнесены к потраекторному направлению, однако отличаются постановкой, в которой используются «локальные по времени» ограничения на возможные траектории. Это приводит к более простой экономической интерпретации и удобному использованию на практике. Статическая часть портфеля финансовых инструментов в этих моделях не рассматриваются.

Общепринятых численных методов, адаптированных к решению задачи суперхеджирования (а, тем более, в гарантированной детерминистской постановке), на сегодняшний день в литературе не представлено.¹² Однако, в последнее время возникает интерес к данной проблеме. Например, в [97] предлагается нейросетевой алгоритм для численного решения задачи в вероятностной постановке; авторы используют аппроксимацию квантильной ценой хеджирования, которая сходится к цене суперхеджирования.

Цели и задачи исследования

Цель настоящего исследования — разработать теоретические положения, касающиеся гарантированного детерминистского подхода к математическому моделированию финансовых задач, в рамках модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен, с дискретным временем и наличием торговых ограничений. На основе разработанных теоретических положений провести анализ качественных свойств моделей и предложить методы численного решения следующих задач:

- основная задача в данной работе: суперхеджирования опционов;
- маржирования, т. е. определения адекватных требований к уровню обеспечения портфелей с целью (частичного) покрытия обязательств участников клиринга на срочном рынке.

¹¹Насколько нам известно, идея фиктивного расширения рынка принадлежит А. В. Мельникову, см. [30] (в этой работе данный метод называется пополнением рынка).

¹²В используемых на практике методах численного решения общей задачи ценообразования и хеджирования производных финансовых инструментов, являющейся одной из важнейших для вычислительных финансов (computational finance), преобладают конечно-разностные методы, см., например, книгу Даффи [140] и методы Монте-Карло, см., например, книгу Глассермана [156].

Для достижения поставленной цели в данной работе определен следующий круг задач, касающихся развития качественных и приближенных аналитических методов исследования соответствующих математических моделей и выбора адекватных постановке задачи эффективных вычислительных методов.

- Описать и обосновать модель финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен для рискованных активов с дисконтированием относительно безрискового актива и с торговыми ограничениями на операции с рискованными активами. На основе гарантированного подхода, с учетом торговых ограничений на стратегии хеджирования, получить уравнения Беллмана–Айзекса для целевой функции — минимального уровня средств, необходимых для гарантированного покрытия обусловленного обязательства по проданному американскому опциону, выплаты по которому зависят от предыстории цен;
- Изучить различные формализации свойства безарбитражности рынка, их релевантность, взаимосвязь в рамках модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен. В том числе, исследовать структурную устойчивость модели;
- Получить достаточные условия для свойств «гладкости» решений уравнений Беллмана–Айзекса, таких как полунепрерывность и непрерывность, в терминах описания неопределенности эволюции цен и торговых ограничений. Оценить модули непрерывности, в том числе константы липшицевости, для решений уравнений Беллмана–Айзекса при надлежащих предположениях относительно описания неопределенности эволюции цен и торговых ограничений;
- На основе теоретико-игровой интерпретации модели ввести смешанные стратегии рынка, приводящие к эквивалентной формулировке задачи. Изучить условия игрового равновесия в динамической антагонистической игре хеджера и рынка, в частности, равновесие при отсутствии торговых ограничений;
- Найти критерий реалистичности модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен, заключающийся в наличии смешанных стратегий, непрерывно (для слабой топологии на пространстве мер) зависящих от предыстории цен;
- Охарактеризовать наиболее неблагоприятные сценарии поведения рынка в смешанных стратегиях и установить связь этой задачи с классической проблемой моментов Чебышёва–Маркова. Изучить свойства «гладкости» оптимальных смешанных стратегий рынка и их носителей при надлежащих предположениях относительно описания неопределенности эволюции цен и торговых ограничений;

- Установить соотношение между гарантированной детерминистской и традиционной вероятностной постановкой задачи суперхеджирования при отсутствии торговых ограничений;
- Исследовать чувствительность модели к возмущениям динамики цен при заданных торговых ограничениях. Найти порог структурной устойчивости.
- Предложить численные методы для задачи суперхеджирования, учитывающие специфику постановки и допускающие гарантированную оценку точности решения;
- Создать комплекс программ, реализующий разработанные численные методы решения задачи суперхеджирования и провести вычислительный эксперимент;
- В качестве практического примера применения гарантированного детерминистского подхода построить способ маржирования¹³, получить уравнения Беллмана–Айзекса для депозитной маржи, продемонстрировать ее эффективность и применимость на практике, для чего создать программную реализацию нахождения численного решения и провести вычислительный эксперимент;
- Изучить поведение решений уравнений Беллмана–Айзекса для разрывной функции выплат, на примере европейского бинарного опциона.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования является математическая модель финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен и дискретным временем, в которой цены активов эволюционируют детерминистским образом в условиях неопределенности, описываемой при помощи априорной информации о возможных приращениях цен, а именно, предполагается, что они лежат в заданных компактах, зависящих от предыстории цен. При этом операции на рынке производятся в соответствии с заданными торговыми ограничениями.

Основным предметом исследования является задача суперхеджирования, или суперрепликации, в рамках математической модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен при наличии торговых ограничений, т. е. способа определения минимального уровня средств, необходимых (при выборе надлежащей стратегии хеджирования) для гарантированного покрытия обусловленного обязательства по проданному опциону, выплаты по которому зависят от предыстории цен. Кроме того, предметом исследования выступают задача маржирования портфеля из производных финансовых

¹³Т. е. метод определения требований к обеспечению, или к депозитной марже, на срочном рынке.

инструментов на срочном рынке в рамках модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен.

Научная новизна

В настоящей работе используется альтернативный (к традиционному вероятностному) подход к постановке задачи суперхеджирования — гарантированный детерминистский (теоретико-игровой) подход, предложенный В. Н. Колокольцовым [95; 185], а также независимо от него автором данной работы в 1996–1997 учебном году и с тех пор и по настоящее время используемый в курсе лекций «Элементы финансовой математики», читаемого для студентов старших курсов кафедры системного анализа факультета ВМК МГУ. На этой основе была также подготовлена публикация Захарова и Муссы [17] и диссертация Муссы [33].

Идея гарантированного детерминистского подхода и некоторые из упомянутых ниже результатов были использованы при разработке нового подхода к организации торгов срочными инструментами — биржевыми фьючерсами и опционами. Были разработаны правила клиринга с оригинальной процедурой урегулирования ситуации с дефицитом маржи и системой портфельного маржирования, обеспечивающими эффективную и устойчивую работу в условиях низкой ликвидности рынка. В 2004 г. был получен соответствующий патент РФ на изобретение [55].

Уравнения Беллмана–Айзекса, получаемые при гарантированном детерминистском подходе непосредственно из экономического смысла задачи, являются основой для дальнейших исследований, в частности, для изучения различных свойств «гладкости» решений, связанных со свойствами полунепрерывности, непрерывности или липшицевости функций выплат, многозначных отображений, описывающих неопределенность движения цен на рынке, а также многозначных отображений, описывающих торговые ограничения.

Важной отличительной чертой нашего подхода является введение смешанных стратегий рынка в динамической игре «хеджер»–«рынок». Благодаря этому, в нашей работе уравнения Беллмана для задачи суперхеджирования получают при игровом равновесии из уравнений Беллмана–Айзекса, изначально фигурирующих в постановке задачи. Такая постановка позволяет, в частности, применить доказанную нами при общих предположениях теорему о конечных носителях смешанных стратегий в антагонистической игре [230]. Кроме того, предлагаемая нами постановка задачи позволяет также установить связь с проблемой моментов Чебышёва–Маркова и предложить двухэтапный оптимизационный метод решения, использующий вогнутую оболочку функции Беллмана, что позволяет использовать специальные численные методы. Новым элементом в задаче суперхеджирования является анализ наиболее неблагоприятных сценариев поведения рынка в смешанных стратегиях, естественно возникающих при гарантированном детерминистском подходе благодаря теоретико-игровой интерпретации. Показано, что при весьма общих условиях оптимальные сме-

шанные стратегии рынка можно искать в классе вероятностей мер, для которых условные распределения приращения дисконтированных цен сосредоточены в конечном числе точек, не превосходящем общее число активов на рынке¹⁴. Изучены свойства «гладкости» оптимальных смешанных стратегий рынка и их носителей при надлежащих предположениях относительно описания неопределенности эволюции цен и торговых ограничений.

Мы считаем важным для приложений включить в модель экономически оправданные предположения о характере рынка. Одно из принципиальных соображений состоит в том, что поскольку описание неопределенности на рынке не может быть точным на практике¹⁵, то фундаментальные экономические свойства, такие как безарбитражность рынка (в том или ином смысле), не должны нарушаться при малых возмущениях модели рынка. Это послужило серьезной мотивацией, чтобы ввести новое понятие — структурной устойчивости модели (принцип грубости в отношении для безарбитражности рынка). Мы установили для этого свойства критерии геометрического характера. Оказывается, что именно условия такого типа играют важную роль для установления свойства непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса. В модели с торговыми ограничениями, релевантным условием безарбитражности является грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. Для стохастических моделей в случае отсутствия торговых ограничений получены оценки близости в различных метриках, гарантирующее сохранение грубого условия отсутствия арбитражных возможностей.

Исследовано соотношение детерминированного и стохастического подходов в предположении отсутствия торговых ограничений¹⁶. При весьма общих предположениях величина премии, взимаемой продавцом опциона, оказывается при гарантированном подходе не меньше, чем при вероятностном. Получены достаточные условия для их совпадения — структурная устойчивость и непрерывность многозначных отображений, описывающих неопределенность эволюции цен и функций выплат по опциону. Показано, что структурная устойчивость является существенным условием.

Нами также введено новое понятие — порог структурной устойчивости модели, показывающий максимальное возмущение¹⁷ компактов, описывающих неопределенную динамику цен, при котором структурная устойчивость модели гарантированно сохраняется. Получено выражение для этой величины, изучены соответствующие свойства.

Выражение для порога структурной устойчивости модели, а также оценки модуля непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса позволяют

¹⁴Где задан один безрисковый и остальные — рискованные активы.

¹⁵В частности, в рамках робастного подхода для случая непрерывного времени, рядом авторов изучались модели с неопределенной волатильностью (“volatility uncertainty”), см., например, [132], [240], [202].

¹⁶Как мы уже отмечали выше, решения задачи суперхеджирования для этих подходов могут отличаться.

¹⁷В метрике Помпею–Хаусдорфа.

получить оценки их чувствительности по отношению к равномерно малым возмущениям компактов, описывающих динамику цен исходной модели. Это принципиально важный результат для оценки погрешности численного решения при аппроксимации компактов, описывающих неопределенную динамику цен.

Другое наше принципиальное соображение касается реалистичности модели. Реалистичными стохастическими сценариями поведения рынка мы считаем вероятностные распределения стохастического процесса с дискретным временем, описывающего эволюцию цен, для которых условные распределения текущей цены непрерывно (в слабой топологии) зависят от предыстории цен. Другими словами, переходные ядра, отвечающие условным распределениям цены в текущий момент времени при известной предыстории цен, обладают феллеровским свойством. Будем называть модель финансового рынка с неопределенной эволюцией цен реалистичной, если существуют смешанные стратегии рынка, такие что условные распределения цены в текущий момент времени при известной предыстории цен имеют носители, которые совпадают с заданными компактами, описывающие неопределенность движения цен, а соответствующие переходные ядра обладают феллеровским свойством. В статье [222] нами получены (при достаточно общих предположениях о топологических пространствах) результаты о необходимых и о достаточных условиях существования феллеровских переходных ядер с носителями, определяемыми многозначным отображением с замкнутыми значениями. Для случая, когда фазовое пространство является конечномерным евклидовым, что имеет место в случае рассматриваемой финансовой модели, соответствующим критерием будет полунепрерывность снизу указанного выше многозначного отображения, ставящего в соответствие начальному состоянию топологические носители вероятностных мер переходного ядра.

Особенность постановки задачи при гарантированном детерминистском подходе естественным образом приводит к инновационным принципам построения соответствующих численных методов. Основной идеей является замена исходной модели на близкую к ней, но устроенную проще — компакты, где лежат приращения цен, содержат конечное число точек на фиксированной решетке. В связи с предложенным в нашей работе двухэтапным оптимизационным методом решения уравнений Беллмана возникает необходимость выбора подходящих численных алгоритмов построения вогнутой оболочки функции, а также максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве.

Методология диссертационного исследования

Математически постановка проблемы суперхеджирования в рамках модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен представляет собой задачу управления в условиях неопределенности (с дискретным временем). Гарантированный подход для общего случая задачи управления в условиях неопределенности был сформулирован А. Б. Куржанским в его основополагающей книге [25]. Этот подход, применительно к нашей задаче,

является более конструктивным по сравнению с традиционным вероятностным подходом и позволяет естественным образом строить численное решение что и являлось основной мотивацией работы.

Теоретико-игровая интерпретация задачи позволяет непосредственно использовать результаты как классической теории антагонистических игр, в частности результаты Кнезера [183] об игровом равновесии и результаты Бержа [92] о свойствах гладкости целевой функции для оптимальных стратегий, так и новые результаты, касающиеся свойств носителей оптимальных смешанных стратегий, опубликованных автором в работе [230].

Модель финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюции цен приводит к необходимости использования методов теории многозначных отображений. Неопределенность эволюции цен описывается при помощи априорной информации о поведении приращений цен, задаваемой в виде компактнозначных отображений: приращения цен лежат в компактах, зависящих от предыстории цен. Торговые ограничения при этом также задаются в виде выпуклозначных отображений, что отражает возможную зависимость от предыстории цен. В работе используются как классическая теория многозначных отображений, так и новые результаты, например, из недавней работы Жуковского [258], а также из статьи автора [222] о специальной проблеме существования непрерывных селекторов, полученные с целью нахождения критерия реалистичности модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен.

Применение методов теории многозначных отображений эффективно в сочетании с методами выпуклого анализа. Последний используется в связи с изучением различных формализаций безарбитражности рынка и геометрических критериев, при нахождении выражения для порога структурной устойчивости модели, а также при разработки методов численного решения задачи суперхеджирования в гарантированной детерминистской постановке.

Возможность использования вероятностных методов возникает при интерпретации наиболее неблагоприятных сценариев поведения рынка в смешанных стратегиях. Особенно элегантную форму эта интерпретация имеет в случае предположения об отсутствии торговых ограничений: вероятностные меры, отвечающие таким смешанным стратегиям, обязаны быть риск-нейтральными¹⁸. При этом, при достаточно общих условиях регулярности, оптимальные смешанные стратегии приводят к модели полного рынка, что позволяет применять многие хорошо известные результаты, справедливые для таких рынков. Кроме того, вероятностное описание требуется при анализе соотношения между детерминистской и традиционной вероятностной постановкой задачи суперхеджирования и при исследовании вопроса сохранения структурной устойчивости для близких вероятностных моделей.

При численном построении вогнутой оболочки функции Беллмана применяются методы вычислительной геометрии построения выпуклой оболочки конеч-

¹⁸Такие меры также называют мартингалными, — в этом случае стохастический процесс дисконтированных цен является мартингалом.

ных множеств¹⁹, причем с практической точки зрения разумно ориентироваться на алгоритмы, эффективные для малых размерностей задачи.

Положения, выносимые на защиту

- 1) Новые математические методы моделирования финансового рынка, основанные на теоретико-игровой интерпретации — гарантированный подход в рамках модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен позволяет получать уравнения Беллмана–Айзекса для целевой функции, соответствующие экономическому смыслу задачи для ряда прикладных финансовых задач, таких как суперхеджирование обусловленного обязательства по проданному опциону с учетом торговых ограничений, а также маржирование портфеля из фьючерсов и опционов на срочном рынке.
- 2) Качественные и аналитические методы исследования соответствующих математических моделей, основанные на теоретико-игровой интерпретации и гарантированном подходе к задаче суперхеджирования, что позволяет естественным образом ввести смешанные стратегии рынка в динамической антагонистической игре хеджера и рынка с конечным горизонтом, исследовать игровое равновесие и изучать качественные свойства оптимальных смешанных стратегий рынка, поведение их топологических носителей.
- 3) Новое понятие — реалистичность модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен, заключающееся в наличии смешанных стратегий, непрерывно (в слабой топологии) зависящих от предистории цен, являющееся естественным с экономической точки зрения требованием к модели. Получен критерий реалистичности.
- 4) Новое понятие — структурная устойчивость модели (принцип грубости для безарбитражности рынка²⁰), являющееся естественным требованием к модели финансового рынка, формализующей неопределенность эволюции цен. Получены критерии геометрического характера структурной устойчивости модели, а также условия сохранения структурной устойчивости модели для близких, в различных вероятностных метриках, вероятностных моделей при отсутствии торговых ограничений. Установлено, что структурная устойчивость модели играет ключевую роль для выполнения свойства непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса, а также для возможности равномерной аппроксимации динамики цен при численном решении.

¹⁹См., например, книгу [161].

²⁰Адекватной формализацией соответствующего понятия безарбитражности является грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью.

- 5) Существование наиболее неблагоприятных (оптимальных) смешанных стратегий рынка в классе вероятностных мер, для которых число точек носителя условного распределения приращения цен не превосходит общее количество активов²¹, что установлено при весьма общих условиях.
- 6) Достаточные условия совпадения решений задачи суперхеджирования при отсутствии торговых ограничений для гарантированной детерминистской и вероятностной моделей при отсутствии торговых ограничений. При весьма общих предположениях установлено, что величина премии, взимаемой продавцом опциона, для гарантированного подхода не меньше, чем для вероятностного.
- 7) Эффективные вычислительные методы решения задачи суперхеджирования, гарантирующие заданную точность вычисления премии по опциону. Обосновано, что для численного решения этих задач разумно добиваться получения гарантированного численного результата, но не оптимального, а субоптимального — как компромисса между точностью и алгоритмической сложностью решения задач. Найдено выражение для порога структурной устойчивости модели, представляющего собой при заданной предыстории цен максимальное возмущение²² компактов, которые описывают динамику цен, гарантирующее сохранение структурной устойчивости модели²³. Опираясь на результаты о пороге структурной устойчивости, для широкого класса моделей получены оценки чувствительности решений уравнений Беллмана–Айзекса по отношению к равномерно малым возмущениям компактов, описывающих динамику цен исходной модели. В качестве аппроксимации динамики рынка для численного решения задачи суперхеджирования выбираются компакты, состоящие из конечного числа точек, лежащих на выбранной (достаточно плотной) решетке.
- 8) Комплекс программ, реализующих разработанные численные методы решения задачи суперхеджирования. Проведены вычислительные эксперименты для различных моделей рынка и опционов, подтверждающие работоспособность комплекса программ.
- 9) Построение математической модели для проблемы маржирования, вычислительные методы решения задачи и комплекс программ, реализующих

²¹При отсутствии торговых ограничений и фиксированных в начальный момент времени ценах модель можно задать при помощи вероятностной меры на конечном числе траекторий, причем процесс цен является мартингалом и наиболее неблагоприятные смешанные стратегии рынка порождают полную модель рынка. Это позволяет использовать известные результаты стохастической финансовой математики для определения премии и хеджирующей стратегии.

²²В метрике Помпею–Хаусдорфа.

²³Т. е. сохранение грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью.

эти методы. Проведены вычислительные эксперименты, в том числе с использованием имитационного моделирования, подтверждающие работоспособность комплекса программ.

Теоретическая и практическая значимость

Развиваемый в нашей работе гарантированный детерминистский подход формально может быть отнесен к новому направлению моделирования неопределенности на рынке, называемому робастным, однако отличается от него интерпретацией и спецификой постановки задачи, позволяющей получать уравнения Беллмана–Айзека для целевой функции непосредственно из экономического смысла задачи. Такой подход оказывается применимым к достаточно широкому кругу финансовых задач, не только к суперхеджированию и маржированию, представленным в настоящей работе. Например, гарантированный детерминистский подход применим для решения задачи управления портфелем финансовых инструментов, в частности, для задачи инвестирования с учетом транзакционных издержек [1] и удобен для построения релевантных численных методов [2].

Отметим, что техника многих работ относящихся к «робастному» направлению, например, статья Аксамит [73], подразумевает использование аналитических множеств и их свойств, в духе монографии Бертсекаса и Шрива [5], а также абстрактных теорем об измеримых селекторах, что носит ярко выраженный неконструктивный характер. В этом плане наш подход с одной стороны, позволяет получать ряд содержательных теоретических результатов вообще без требования измеримости. Это касается уравнений Беллмана–Айзека, а также игрового равновесия и свойства дуальности относительно класса вероятностных мер, сосредоточенных в конечном множестве точек. С другой стороны, в целом наш подход позволяет упростить математическую сторону дела (по крайней мере, в отношении формулировок результатов) и допускает прозрачную экономическую интерпретацию. Кроме того, исходная постановка задачи суперхеджирования для гарантированного детерминистского подхода даже не требует выполнения каких-либо условий безарбитражности. Однако, для построения содержательных моделей условия такого сорта, разумеется, необходимы и нами найдены формализации безарбитражности, релевантные развиваемому подходу.

Для случая отсутствия торговых ограничений наш подход позволяет объяснить причину появления в проблеме ценообразования риск-нейтральной (мартигальной) вероятности, поэтому представляется более естественным и понятным для экономистов и тем самым представляет определенную прикладную и дидактическую ценность²⁴.

²⁴В нашей работе [235] демонстрируется значимость интерпретации используемых концепций и предположений в финансовом моделировании, связанных с риск-нейтральным оцениванием.

Поскольку гарантированный детерминистский метод носит более конструктивный характер по сравнению с традиционным вероятностным, он позволяет целенаправленно формулировать требования к свойствам численных алгоритмов, релевантных для решения заданного класса задач, анализировать их точность с использованием оценок чувствительности уравнений Беллмана–Айзека к малым возмущениям в описании неопределенности на рынке.

Комплекс программ, созданный для решения задачи суперхеджирования, может быть использован для научных исследований и для обучения студентов.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты, полученные автором по теме диссертации, включая идею использования теоретико-игрового подхода для «детерминистского» описания рынка, впервые докладывались в 2001 г. на семинаре франко-российского центра имени А. М. Ляпунова при МГУ, организованным академиком А. Б. Куржанским, в котором, в частности, участвовал Пьер Бернар²⁵. На этом семинаре была представлена теорема об игровом равновесии и интерпретация риска нейтральных мер как наиболее неблагоприятных (для хеджера) стратегий рынка без торговых ограничений при гарантированной оценке обусловленного обязательства по опциону²⁶. В дальнейшем основные результаты работы были представлены на следующих международных и российских конференциях и семинарах:

- семинар департамента риск-менеджмента Чикагской товарной биржи, Chicago Mercantile Exchange (CME) — Chicago, 2002;
- семинар по математическим финансам в университете Альберта (University of Alberta) — Edmonton, 2006;
- симпозиум “2006 Stochastic Modeling Symposium”, Canadian Institute of Actuaries — Toronto, 2006;
- семинар по риск-менеджменту под руководством Didier Sornette, ETH — Zürich, 2010;
- Первый Российский экономический конгресс — Москва, 2009;
- семинар «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании» под руководством В. И. Аркина и Э. Л. Пресмана, ЦЭМИ — Москва, 2009 и 2011;
- семинар «Математическая экономика» под руководством В. И. Данилова и В. М. Полтеровича, ЦЭМИ — Москва, 2011;

²⁵В 2013 г. Пьер Бернар и еще шесть авторов опубликовали книгу [95], в которой имеются результаты, близкие к нашим, независимо полученные В. Н. Колокольцовым.

²⁶Эти результаты были опубликованы лишь в 2020 году, в статье [223].

- семинар факультета экономики Болонского университета (“Workshop in Quantitative Finance”) — Bologna, 2012;
- семинар «Прикладные задачи системного анализа» под руководством А. Б. Куржанского (МГУ) — Москва, 2015;
- международная конференция по теории вероятностей и математической статистике, посвященной 100-летию Гванджи Мания — Тбилиси, 2018;
- ежегодная научная конференция «Тихоновские чтения», МГУ (совместный доклад с Н. А. Андреевым, см. [1]) — Москва, 2018;
- семинар Института математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук — Петрозаводск, 2018;
- семинар «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании» под руководством В. И. Аркина, Т. А. Белкиной и Э. Л. Пресмана, ЦЭМИ — Москва, 2018;
- семинар «Математическое моделирование экономических систем» под руководством И. Г. Пospelова, ВЦ ФИЦ ИУ РАН — Москва, 2019;
- научная конференция «Ломоносовские чтения–2020», МГУ (совместный доклад с Н. А. Андреевым, см. [2]) — Москва, 2020 ;
- научная конференция «Ломоносовские чтения–2021», МГУ (совместный доклад с Н. А. Андреевым, см. [54]) — Москва, 2021;
- XXXVI Международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей (пленарный доклад) — Петрозаводск, 2021;
- десятая международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения X» — Ростов-на-Дону, 2021;
- семинар факультета прикладной математики – процессов управления СПбГУ, под руководством Л. А. Петросяна, Санкт-Петербург, 2022;
- ежегодная научная конференция «Тихоновские чтения», МГУ (совместный доклад с Д. М. Сотниковым и А. Ю. Заночкиным) — Москва, 2022.

Личный вклад

В диссертацию включены положения и результаты, полученные либо лично автором, либо при его определяющем участии. Личный вклад автора состоит в постановке задач, касающихся предмета исследования, их формализации,

во введении новых понятий, в доказательстве результатов о качественном поведении моделей, в нахождении способов численного анализа моделей и концепции построения комплекса программ, реализующих разработанные численные методы.

Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причём вклад соискателя был определяющим в следующих работах. В публикации [75] (1,4 п. л., вклад автора 1 п. л.) соискателю принадлежат принципиальные соображения, касающиеся выбора численных методов и анализ свойств специально подобранных модельных примеров для расчетов. Выбор алгоритмов и конструкции соответствующего комплекса программ проводился совместно. Соавтору Н. А. Андрееву принадлежат детализация алгоритмов, программная реализация и проведение численного эксперимента. В публикации [57] (0,6 п. л., вклад автора 0,5 п. л.) соискателю принадлежат идеология построения системы маржирования на срочном рынке, опирающаяся на гарантированный детерминистский подход, постановка задачи в рамках модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией фьючерсных цен и основные уравнения. Соавтору И. В. Полиматиди принадлежит доказательство свойства субаддитивности депозитной маржи. В статье [56] (0,8 п. л., вклад автора 0,6 п. л.), продолжающей исследования, начатые в [57], автор предложил преобразование уравнений Беллмана–Айзека к виду, удобному для расчетов и оценок константы Липшица целевой функции, необходимые для оценки численной ошибки. Численные алгоритмы разрабатывались совместно, их реализация и компьютерные эксперименты проводились соавторами В.А. Кузнецовым и В.А. Сливинским. В публикации [238] (1,1 п. л., вклад автора 1 п. л.) соискателю принадлежат теоретические результаты, постановка задачи и алгоритм численного решения. Соавтору А. Ю. Заночкину принадлежат реализация алгоритма и расчеты. В изобретении [55] (3,2 п. л., вклад автора 2 п. л.) соискателю принадлежат идея построения архитектуры системы маржирования, конструктивные особенности, опирающиеся на гарантированный детерминистский подход, постановка задачи расчета обеспечения в рамках модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией фьючерсных цен. Соавторам А. В. Захарову, И. В. Полиматиди и А. Н. Балабушкину принадлежат технические детали конструкции, а также А. В. Захарову и И. В. Полиматиди принадлежат программная реализация конкретной системы и расчеты на модельных примерах и реальных данных.

Объём и структура работы

Диссертация состоит из введения, 12 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 400 страниц, включая 13 рисунков. Результаты диссертации опубликованы в 1 изобретении и 21 статье, опубликованной в рецензируемых изданиях; из них 13 статей опубликованы в изданиях, цитируемых в базах данных Scopus и WoS.

Глава 1. Модель рынка, торговые ограничения и уравнения Беллмана–Айзекса

В данной главе вводится гарантированная детерминистская постановка для задачи суперхеджирования (суперрепликации) с дискретным временем, альтернативная традиционному вероятностному подходу, основанному на использовании референтной меры. При детерминистском подходе референтная мера не используется, а задача состоит в гарантированном покрытии обусловленного обязательства по опциону при всех допустимых сценариях. Эти сценарии задаются при помощи априорно заданных компактов, зависящих от предыстории цен: приращения цен в каждый момент времени должны лежать в соответствующих компактах.

Изложение фокусируется на обсуждении экономического смысла модели без претензии на максимально возможную общность; этой целью обусловлен характер ряда предположений. Предполагается отсутствие транзакционных издержек, рассматривается рынок как без торговых ограничений, так и с торговыми ограничениями. Изначально постановка задачи носит теоретико-игровой характер, что позволяет, исходя из экономической интерпретации задачи, легко вывести соответствующие уравнения Беллмана–Айзекса для резервов в текущий момент времени, необходимых для гарантированного покрытия текущих и будущих обусловленных обязательств по проданному американскому опциону. Приводится ряд содержательных с экономической точки зрения примеров моделей.

Основные результаты опубликованы в [44] (английская версия [225]).

1.1 Описание детерминистской модели рынка: динамика цен и торговые ограничения

В данном разделе главы мы построим математическую модель финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен с дискретным временем, в которой цены активов эволюционируют детерминистским образом в условиях неопределенности, описываемой при помощи априорной информации о возможных приращениях цен. Основное внимание при этом мы уделим

предположениям, экономический смысл которых зачастую игнорируется в работах по финансовой математике.

В отличие от классической механики, в которой модель строится в непрерывном времени, а затем ее аппроксимируют в дискретном времени с целью численного решения, в моделях финансового рынка, наиболее приближенных к реальности, дело обстоит как раз наоборот. В конечном итоге, все модели, которые применяются к рыночным данным, а также реальные проблемы ценообразования финансовых инструментов, дискретны. На рынке нет непрерывных цен: даже если тики идут с миллисекундной частотой, все равно придется в очередной раз выполнять операцию хеджирования при получении новой ценовой информации. Таким образом, модели финансового рынка с дискретным временем естественно интерпретировать как первичные, поскольку они лучше отражают реальность. Модели ценообразования в непрерывном времени хоть и удобны с математической точки зрения и чаще допускают явные формулы решений, следует интерпретировать как вторичные, описывающие асимптотическое (при надлежащей нормировке) поведение рынка и операций на нем¹. Это отнюдь не означает, что модели с непрерывным временем неприменимы на практике. Модельные риски возникают в любом случае, однако в случае непрерывного времени требуют более внимательного отношения к анализу предположений, лежащих в основе модели, при ее валидации. Эти соображения предопределили выбор автора в пользу моделей рынка с дискретным временем.

Везде далее рассматривается модель рынка с дискретным временем и конечным временным горизонтом, где время t пробегает множество возможных значений $\llbracket 0, N \rrbracket = \{0, 1, \dots, N\}$ (здесь и далее мы используем обозначение $\llbracket t, s \rrbracket = \{t, t + 1, \dots, s\}$, где $t \leq s$). Предполагается, что операции проводятся на рынке из $n + 1$ активов (или, в более общем случае, финансовых инструментов), где $n \geq 1$, таких что на интервале $\llbracket 0, N \rrbracket$ по ним не производятся выплаты (дивиденды или купоны). Рыночную цену² единицы i -го актива в момент вре-

¹Так, например, от классической модели Кокса–Росса–Рубинштейна [125] (называемой также биномиальной) с дискретным временем и единственной риск-нейтральной вероятностью (модель полного рынка) можно перейти к модели с непрерывным временем на фиксированном замкнутом отрезке, располагая временные точки дискретной модели равномерно на этом отрезке и соединяя точки логарифмов (дисконтированных) цен ломаными. При соответствующей нормировке ломаных и неограниченном увеличении горизонта, по теореме Донскера (см., например, [99, гл. 2, § 10]) имеет место слабая сходимост распределений ломаных к распределению броуновского движения — вероятностной мере на пространстве непрерывных функций на отрезке. Поэтому биномиальная модель рынка приближается к риск-нейтральной модели Башелье–Самуэльсона с непрерывным временем, а асимптотическое ценообразование опционов соответствует модели Блэка–Шоулса (для обоснования еще требуется проверка равномерной интегрируемости функций выплат по опционам). Это хорошо известный теоретический факт, усвоенный также и практиками. Например, одна из крупнейших торговых площадок, Eurex Exchange, — международная биржа, которая обеспечивает торговлю производными финансовыми инструментами в Европе, устанавливает ежедневные расчетные цены для опционов на акции на основе биномиальной модели. Отметим, что модель Кокса–Росса–Рубинштейна полностью вписывается в развиваемый автором гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию.

²Само понятие рыночной цены неоднозначно — для разных целей она может быть определена как цена закрытия, текущая цена или же цена, определенная регулятором рынка как

мени t обозначим X_t^i , $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$; при этом, эти цены будем интерпретировать как «неопределенные» величины³ — значение X_t^i становится известным только к моменту времени t .

В модели будет сделано следующее предположение.

Предположение 1.1.1 (AI). *Наблюдаемая информация⁴ к моменту времени t представляет из себя цены $n + 1$ активов в моменты времени $\llbracket 0, t \rrbracket$.*

Хотя такое предположение характерно для конкретных моделей в финансовой математике, обычно не отмечается, что оно неявно вписывается в концепцию «слабой» информационной эффективности рынка по Фама⁵. В действительности, для хеджирования может быть полезна иная дополнительная информация, если она позволяет предсказывать характер изменения цен или их волатильности (это соответствует «средней» информационной эффективности рынка⁶), — например, новостная.

Примем также следующее предположение⁷.

Предположение 1.1.2 (RA). *Актив с нулевым индексом⁸ предполагается безрисковым : его цена становится известной на шаг ранее.*

Другими словами, наблюдаемая информация о ценах активов в моменты $\llbracket 0, t - 1 \rrbracket$ достаточна для определения X_t^0 для $t \geq 1$.

Договоримся использовать в обозначениях конвенцию, аналогичную используемой в теории вероятностей: будем обозначать неопределенные величины (например X_t^i) заглавными буквами, а их значения — строчными.

Обозначим $\hat{X}_t = (X_t^0, X_t^1, \dots, X_t^n)$ — вектор цен в момент времени t .

Предположение 1.1.3 (NNP). *Цены принимают неотрицательные значения:*

$$X_t^i \geq 0, \quad i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

«рыночная» (см., например, информацию о ценовых показателях на сайте Московской Биржи).

³Предполагается, что некоторая (неполная) информация о поведении цен имеется; это будет формализовано в предположении (UD) далее. При этом неопределенные величины можно будет считать случайными, когда будут введены смешанные стратегии.

⁴Это означает не только доступность этой информации, но и то, что именно эта информация будет использоваться при описании ограничений на приращения цен, торговых ограничений и стратегий хеджирования.

⁵См., например, обзор в [4].

⁶Англ. “semi-strong efficiency”.

⁷Предположение о наличии безрискового актива является стандартным в финансовой теории, хотя на практике, в особенности после глобального финансового кризиса, признается его отсутствие. Теория может быть построена и без предположения (RA), но ценой технического усложнения, в частности, в связи с необходимостью рассмотрения арбитража первого и второго рода.

⁸При отсутствии торговых ограничений наличие хотя бы двух безрисковых активов, ведущих себя по-разному, привело бы к арбитражным возможностям — это стандартное экономическое рассуждение для обоснования существования единственного безрискового актива в модели рынка.

Это требование, казалось бы, очевидно — отрицательные цены активов лишены экономического смысла⁹. Однако, при предположении (NNP) нулевые цены *в модели* могут приводить к арбитражным возможностям, если впоследствии могут принимать положительные значения. Поэтому при построении «неопределенной» динамики цен разумно потребовать от модели выполнения более сильного свойства.

Предположение 1.1.4 (PP). *Цены принимают положительные значения:*

$$X_t^i > 0, \quad i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

Обычным предположением в финансовой математике, безо всяких комментариев, является следующее неявное предположение.

Предположение 1.1.5 (PC). *Цены могут принимать произвольные вещественные значения, удовлетворяющие условию (NNP), или же более сильному требованию (PP).*

На первый взгляд, предположение (PC) может показаться совершенно невинным, но на практике, а также в исследованиях по микроструктуре финансового рынка, дискретность цен и размер тика может играть существенную роль¹⁰.

Структура портфеля в момент времени $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$ будет задаваться вектором $\hat{H}_t = (H_t^0, H_t^1, \dots, H_t^n)$, где H_t^i — количество единиц i -го актива в портфеле в момент времени t , причем значение H_t становится известным на шаг ранее¹¹ в момент $t - 1$. Другими словами, если известна предыстория цен $\hat{X}_0 = \hat{x}_0, \dots, \hat{X}_{t-1} = \hat{x}_{t-1}$, то $\hat{H}_t = \hat{H}_t(\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{t-1}) = \hat{H}_t(\cdot)$. Здесь и везде

⁹Еще Самуэльсон в [216] отмечал, что цены финансовых инструментов не должны быть отрицательными, критикуя модель Башелье [84] и предлагая использовать геометрическое броуновское движение для описания цен, вместо броуновского. Однако, беспрецедентный случай произошел 20 апреля 2020 года, когда фьючерсные цены на нефть WTI (бенчмарк для цен на сырую нефть в США) упали до отрицательного уровня. Предложение топлива было намного выше спроса вследствие коронавирусной пандемии. Из-за перепроизводства резервуары для хранения для WTI были настолько полными, что в случае если фьючерсные контракты были бы доведены до поставки, было бы трудно найти место для этой нефти. Поскольку майский контракт истек 21 апреля, участники рынка с длинными позициями не хотели брать на себя поставку нефти (которая была никому не нужна в этот период времени) и нести расходы на хранение, и предпочли, заключая офсетные сделки, зафиксировать столь большие убытки, что цены стали отрицательными. С 22 апреля 2020 г. Чикагская товарная биржа (CME) перешла на модель Башелье ценообразования опционов на фьючерсы для ряда энергоносителей, чтобы учесть возможность отрицательных цен.

¹⁰Например, в 2005 году в Комиссией по Ценным Бумагам и Биржам США (SEC) было введено Правило 612 SEC (“Sub-Penny Rule”), которое, в частности, гласит, что минимально изменение цен акций стоимостью более \$1.00 должно составлять \$0.01, а для акций стоимостью менее \$1.00 — \$0.0001. Отметим, однако, что правило касается только котировок, а не торговли.

Европейцы пошли дальше, чем американцы, и в 2016 году законодательно установили режимы для размера тика в зависимости от активности рынка, действующие с начала 2018 года. Более подробную информацию можно получить из документа: *Final Report – Amendment to Commission Delegated Regulation (EU) 2017/588 (RTS 11), 12 December 2018, ESMA 70-156-834*. С 1 ноября 2018 года Московская биржа использует аналогичную практику.

¹¹Используя вероятностную терминологию, можно сказать, что процесс \hat{H} (так же как и цена безрискового актива X_0) является предсказуемым относительно фильтрации, порожден-

далее будем обозначать точкой (\cdot) текущую переменную — в данном случае, известную предысторию цен.

Разумеется, \hat{H}_t может в реальности принимать целые значения, однако можно считать, что торговые операции ориентированы на «лоты» фиксированного объема, поэтому единица актива является дробной величиной лота. Везде далее, если не оговорено противное, мы принимаем упрощающее предположение о «бесконечной дробимости» активов, неявно предполагая, что позиции \hat{H}_t достаточно большие.

Предположение 1.1.6 (AD). *Активы являются «бесконечно дробимыми»:*

$$H_t^i \in \mathbb{R}, \quad i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

Торговые ограничения будем задавать при помощи множеств $\hat{D}_t \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, которые, так же как и \hat{H}_t , становятся известными на шаг ранее: $\hat{D}_t = \hat{D}_t(\cdot)$. Таким образом, *допустимой структурой портфеля* в момент времени t считается $\hat{H}_t \in \hat{D}_t(\hat{X}_0, \dots, \hat{X}_{t-1})$.

Сделаем важное предположение о характере торговых ограничений.

Предположение 1.1.7 (R). *Всегда допустимо вкладывать все средства в безрисковый актив:*

$$\{\hat{h}_t \in \hat{D}_t(\cdot) : h_t^1 = h_t^2 = \dots = h_t^n = 0\} \neq \emptyset, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

Далее, весьма существенное упрощение модели дает следующее часто используемое в финансовых моделях предположение.

Предположение 1.1.8 (ТС). *Транзакционные издержки (прямые или косвенные) отсутствуют.*

В частности, с предположением (ТС) связано (обычно принимаемое по умолчанию) соглашение, что стоимость портфеля в момент времени t задается величиной, которую можно назвать «бухгалтерской стоимостью»¹²:

$$V_t = \hat{H}_t \hat{X}_t, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket. \quad (\text{L})$$

Здесь и далее мы используем обозначение для скалярного произведения вида $\langle h, x \rangle$. Однако, иногда бывает удобней использовать обозначения вида hx вместо $\langle h, x \rangle$. В частности, в формуле (L) имеем $\hat{H}_t \in \mathbb{R}^{n+1}$ и $\hat{X}_t \in \mathbb{R}^{n+1}$, а

$$\hat{H}_t \hat{X}_t = \langle \hat{H}_t, \hat{X}_t \rangle = \sum_{i=0}^n H_t^i X_t^i.$$

ной процессом цен активов. Вероятностный способ описания зависимостей через измеримость относительно σ -алгебр, порожденных случайными элементами, математически более элегантен, однако мы последовательно придерживаемся детерминистского способа описания, через функциональную зависимость. Во всяком случае, логического противоречия здесь нет: случайная величина η измерима относительно σ -алгебры \mathcal{F}_ξ , порожденной случайным элементом ξ со значениями в измеримом пространстве (E, \mathcal{E}) , если и только если она представима в виде измеримой функции φ от ξ , т. е. $\eta = \varphi \circ \xi$, см., например, [68, гл. II, § 4, теорема 3].

¹² Англ. “book value”.

Несмотря на кажущуюся самоочевидность, формула (L) отражает свойство аддитивности стоимости портфеля: если портфель разделить на два подпортфеля, его стоимость равна сумме стоимостей подпортфелей. С экономической точки зрения, однако, стоимость торгового портфеля есть его ликвидационная стоимость, и с учетом ограниченной ликвидности рынка аддитивность, вообще говоря, нарушается, поскольку игнорируются косвенные издержки. Тем самым, (L) является неявным предположением о высокой ликвидности рынка.

Стандартным¹³ является предположение о самофинансируемости портфеля: если при перестройке портфеля в момент $t - 1$ новая структура портфеля \hat{H}_t создается без притока или оттока капитала, с использованием средств в размере стоимости портфеля V_{t-1} и по ценам \hat{X}_{t-1} , сложившимся в момент времени $t - 1$, учитывая (ТС), это бюджетное ограничение имеет вид¹⁴:

$$\hat{H}_t \hat{X}_{t-1} = \hat{H}_{t-1} \hat{X}_{t-1}, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.1.1)$$

Напомним, что при перестройке портфеля \hat{H}_t выбирается с использованием информации, доступной в момент $t - 1$, причем $\hat{H}_t \in \hat{D}_t(\cdot)$.

С учетом (L), очевидно, (1.1.1) равносильно

$$\Delta V_t = \hat{H}_t \Delta \hat{X}_t, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.1.2)$$

Здесь и далее Δ означает разность назад, то есть $\Delta V_t = V_t - V_{t-1}$.

Далее, следуя стандартной процедуре, можно перейти к дисконтированным ценам, понизив размерность задачи на единицу. Это означает, что безрисковый актив выбирается в качестве “numéraire”, то есть дисконтированная стоимость портфеля выражается в «единицах» безрискового актива¹⁵

$$\tilde{V}_t = \frac{1}{X_t^0} V_t = \hat{H}_t \left(\frac{1}{X_t^0} \hat{X}_t \right) = \hat{H}_t \tilde{X}_t, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

где $\tilde{X}_t = (\tilde{X}_t^0, \tilde{X}_t^1, \dots, \tilde{X}_t^n)^T$ и $\tilde{X}_t^i = \frac{1}{X_t^0} X_t^i$, при этом вид условий (L), (1.1.1) и (1.1.2) в дисконтированных ценах \tilde{X}_t сохраняется:

$$\tilde{V}_t = \hat{H}_t \tilde{X}_t, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket; \quad (L')$$

$$\hat{H}_t \tilde{X}_{t-1} = \hat{H}_{t-1} \tilde{X}_{t-1}, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket; \quad (1.1.1')$$

$$\Delta \tilde{V}_t = \hat{H}_t \Delta \tilde{X}_t, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.1.2')$$

Дисконтированный безрисковый актив при этом имеет цену, тождественно равную единице, а приращения цен безрискового актива равны нулю, $\Delta \tilde{X}_t^0 = 0$

¹³Вполне оправданным с экономической точки зрения, если речь идет о хеджировании обусловленного обязательства по внебиржевому опциону.

¹⁴Таким образом, (1.1.1), так же как и (L), опирается на предположение (ТС) об отсутствии прямых или косвенных транзакционных издержек.

¹⁵Если все цены X_t^i выражены в единой валюте (что мы и будем предполагать), то дисконтированные цены являются безразмерными величинами. Отметим, что $X_t^0 \neq 0$ благодаря предположению 1.1.4.

для всех $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Поэтому достаточно рассмотреть n «рисковых» активов, при этом $H_{t+1}^1, \dots, H_{t+1}^n$ выбираются на шаге t (на шаг вперед) произвольно, а вложение в безрисковый актив H_{t+1}^0 определяется из условия самофинансирования:

$$H_{t+1}^0 = \tilde{V}_t - \sum_{i=1}^n H_{t+1}^i \tilde{X}_t^i, \quad t \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket; \quad (1.1.3)$$

при этом $\hat{H}_{t+1} = (H_{t+1}^0, \dots, H_{t+1}^n) \in \hat{D}_{t+1}(\cdot)$.

Таким образом, не ограничивая общности, сделать следующее упрощающее предположение.

Предположение 1.1.9 (RN). *Цена безрискового актива принимается тождественно равной единице:*

$$X_t^0 \equiv 1, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

Далее мы и будем полагать, что $X_t^0 \equiv 1$, что позволит везде опускать знак «тильда» сверху, перейдя к дисконтированным ценам. Концентрируя теперь внимание на рисковых активах (в количестве n), будем использовать обозначения¹⁶

$$\begin{aligned} X_t &= (X_t^1, \dots, X_t^n), \\ H_t &= (H_t^1, \dots, H_t^n). \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Будем также обозначать через $\bar{X}_t = (X_0, \dots, X_t)$ предысторию дисконтированных цен до момента t включительно.

Предположение 1.1.10 (SF). *Стратегия хеджирования является самофинансируемой, что в условиях конвенции (RN) означает равенство¹⁷*

$$H_t^0 = V_{t-1} - H_t X_{t-1}, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

Кроме того, конвенция (RN) и обозначения (1.1.4) позволяют переписать формулу (1.1.2') в виде:

$$\Delta V_t = H_t \Delta X_t. \quad (1.1.5)$$

Если известна траектория цен $\bar{X}_t = \bar{x}_t$, то, используя обозначения¹⁸

$$V_t = v_t(\bar{x}_t),$$

торговые ограничения $D_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$ на рисковые активы, с учетом $X_t^0 \equiv 1$, имеют следующий вид:

$$D_t(\cdot) = \left\{ h = (h^1, \dots, h^n) : (v_{t-1}(\cdot) - h x_{t-1}, h^1, \dots, h^n) \in \hat{D}_t(\cdot) \right\}, \quad (1.1.6)$$

¹⁶Обозначения \hat{X}_t , \hat{H}_t и \hat{D}_t использовались для $n+1$ активов, включая безрисковый.

¹⁷Здесь и далее используется скалярное произведение в \mathbb{R}^n .

¹⁸Выбранные обозначения для неопределенных величин допускают некоторую аналогию с условным математическим ожиданием случайных величин; для случайной величины Y найдется измеримая функция φ , такая что $\mathbb{E}^{\mathcal{F}^X} Y = \mathbb{E}(Y|X) = \varphi(X)$ п. н., и $\mathbb{E}(Y|X = x) = \varphi(x)$ (последнее равенство также определено с точностью до почти всюду, относительно меры P_X — распределения X).

где $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Отметим, что $D_t(\cdot)$ будет выпуклым, если таковым было $\hat{D}_t(\cdot)$. При этом в выражение (1.1.3) для D_t , торговых ограничений в момент t , вообще говоря, входит стоимость портфеля $V_{t-1} = v_{t-1}$ в предыдущий момент времени $t - 1$.

Мы сделаем упрощающее предположение¹⁹ о том, что любые позиции по безрисковому активу (как длинные, так и короткие) допустимы и не оказывают влияния на ограничения по рисковому активам.

Предположение 1.1.11 (Г). *Торговые ограничения \hat{D}_t представимы в виде*

$$\hat{D}_t(\cdot) = \mathbb{R} \times D_t(\cdot), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

Замечание 1.1.1. В случае, когда выполнено предположение (Г), предположение (R) принимает более простой вид:

$$0 \in D_t(\cdot), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.1.7)$$

Условие выпуклости торговых ограничений имеет определенный экономический смысл, связанный с возможностями диверсификации портфеля. Пусть H'_t и H''_t — допустимые в момент времени t структуры портфеля вложений в рисковые активы: $H'_t, H''_t \in D_t(\cdot)$. Интерпретируя это как фонды с данными структурами портфелей, выпуклость множества $D_t(\cdot)$ означает, что для любого $q \in [0, 1]$ также допустимо сформировать портфель, доля $q' = q$ которого вложена в фонд H'_t , а доля $q'' = 1 - q$ вложена в фонд H''_t — тем самым, $qH'_t + (1 - q)H''_t \in D_t(\cdot)$.

Предположение 1.1.12 (D). *Множество $D_t(\cdot)$ — выпукло, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.*

Определение 1.1.1. *Будем говорить, что торговые ограничения отсутствуют, если*

$$D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.1.8)$$

Отметим, что предположение об отсутствии торговых ограничений является весьма распространенным в работах по математическим финансам.

Основное предположение о динамике цен X_t , которое мы делаем в этой работе, состоит в том, что мы задаем априорно известные зависящие от предыстории цен ограничения на возможные значения приращений цен.

Предположение 1.1.13 (UD). *К моменту времени $t - 1$, где $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, с использованием доступной к этому моменту предыстории цен $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1}$ известно, что приращения вектора цен ΔX_t лежат в априорно заданном непустом множестве $K_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n$.*

¹⁹Постановка задачи без этого упрощающего предположения возможна и обсуждается в конце раздела 1.2 данной главы.

При этом будем по умолчанию считать, что многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ и $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, заданы для любых траекторий цен из предыстории, т. е. для любого $\bar{x}_{t-1} \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^t$. Будем считать, что $X_0 \in K_0$, где K_0 — некоторое множество. В ряде случаев, однако, удобно считать, что $X_0 = x_0$ задано, — это равносильно предположению, что K_0 содержит единственную точку. В действительности, часть траекторий будет нереализуемой, если фиксировать начальную цену X_0 или K_0 . В зависимости от решаемой задачи, бывает полезным рассматривать только «возможные траектории».

При описании неопределенности движения цен на рынке посредством предположения (UD) для построения *содержательной* теории важнейшим дополнительным условием является следующее предположение.

Предположение 1.1.14 (C). *Множества $K_0, K_1(\bar{x}_0), \dots, K_N(\bar{x}_{N-1})$ являются компактными.*

Предположение (UD) в совокупности с предположением (C) отвечает «детерминистской» постановке задачи, в отличие от «вероятностной» постановки, где задается референтная вероятностная мера.

При этом «вероятностным» аналогом рассматриваемой «детерминистской» задачи является динамика цен с такой референтной мерой, для которой $K_t(\cdot)$ является носителем²⁰ условного распределения²¹ приращений дисконтированных цен ΔX_t при заданной предыстории $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1}$ к моменту $t - 1$.

Предположение (C) о компактности является существенным для того, чтобы задача суперрепликации носила содержательный характер, поскольку в случае неограниченных носителей условных распределений приращений цен при заданной предыстории следует, как правило, ожидать вырожденных результатов хеджирования, типа описанных в работе [112]. Собственно по этой причине авторы работы [116] предполагают ограниченность приращений в задаче суперрепликации (в «вероятностной» постановке и одномерном случае, т. е. с одним рисковым активом).

Предположение (UD) можно переписать в виде аддитивного представления процесса цен X_t для заданного процесса неопределенных величин Y_t :

$$X_t = X_{t-1} + Y_t, \quad Y_t \in K_t(\cdot), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.1.9)$$

Аддитивное представление (1.1.9) удобно в особенности для анализа условий безарбитражности²². Для ряда прикладных моделей удобно также использовать мультипликативное представление:

$$X_t^i = M_t^i X_{t-1}^i, \quad M_t = (M_t^1, \dots, M_t^n) \in C_t(\cdot), \quad (1.1.10)$$

²⁰Здесь и далее под термином «носитель» имеется в виду топологический носитель — наименьшее замкнутое множество полной меры; совпадает с множеством точек роста распределения, то есть таких точек, каждая окрестность которой имеет положительную вероятность.

²¹Речь идет о регулярных условных распределениях, которые определены с точностью до почти наверняка относительно референтной вероятностной меры.

²²Вопросы, связанные с безарбитражностью рынка, будут обсуждаться в главе 2.

где $C_t(\cdot)$ — компактное подмножество \mathbb{R}^n , а неопределенные величины M_t^i называем мультипликативными факторами. Цены рискованных активов в каждый момент времени $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$ должны быть положительными, что равносильно положительности цен в начальный момент времени и условию

$$C_t(\cdot) \subseteq (0, \infty)^n.$$

Для $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $\Lambda(m)$ диагональную матрицу

$$\Lambda(m)_{ij} = \begin{cases} m_i, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

тогда (1.1.10) можно записать в матричном виде:

$$X_t = \Lambda(M_t)X_{t-1}. \quad (1.1.10')$$

Аддитивное представление связано с мультипликативным с помощью соотношений

$$Y_t = (\Lambda(M_t) - I)X_{t-1},$$

где I — единичная матрица, и

$$K_t(\bar{x}_{t-1}) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = (\Lambda(m) - I)x_{t-1}, m \in C_t(\bar{x}_{t-1})\}.$$

Пользуясь некоторой аналогией между неопределенными и случайными величинами, введем следующие определения.

Определение 1.1.2. Будем говорить, что динамика цен относится к марковскому типу, если $K_t(\cdot)$ зависят только от значения цен в предыдущий момент времени и представимы в виде $K_t(\bar{x}_{t-1}) = K_t^*(x_{t-1})$.

Аналогично, торговые ограничения относятся к марковскому типу, если имеет место представление $D_t(\bar{x}_{t-1}) = D_t^*(x_{t-1})$.

Определение 1.1.3. Динамику цену, относящуюся к марковскому типу, назовем однородной по времени, если $K_t^*(\cdot)$ не зависит от времени t .

Аналогично, назовем торговые ограничения марковского типа однородными по времени, если $D_t^*(\cdot)$ не зависит от времени t .

Определение 1.1.4. Будем говорить, что динамика цен относится к мультипликативно-независимому типу, если в мультипликативном представлении (1.1.10) отображение $C_t(\cdot)$ не зависит от предыстории цен и представимо в виде $C_t(\bar{x}_{t-1}) = C_t^*$.

Аналогично, торговые ограничения отнесем к независимому типу, если $D_t(\cdot)$ не зависит от предыстории цен и представимо в виде $D_t(\bar{x}_{t-1}) = D_t^*$.

Отметим теперь, что модели рынка, рассматриваемые В. Н. Колокольцовым в [95, гл. 13–14], относятся к марковскому мультипликативно-независимому

и однородному по времени типу. При этом множество C^* выбирается в виде параллелепипеда²³, а торговые ограничения отсутствуют, т. е. $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$.

Замечание 1.1.2. «Вероятностный» подход с референтной мерой, заданной на конечном пространстве элементарных событий совпадает с «детерминистским» (множество нулевой вероятности будет пустым). В нашей постановке этот случай возникает, в частности, когда вектор начальных цен, x_0 фиксирован, а все множества $K_t(\bar{x}_{t-1}) = K_t(\cdot)$ имеют конечное число элементов; кстати, модель Кокса–Росса–Рубинштейна как раз вписывается в эту схему и возникает в ряде естественных моделей при «детерминистском» подходе.

В заключении параграфа отметим, что зависимость торговых ограничений от времени и предыстории цен может возникать вследствие требований регулятора, ограничивающего леверидж, или требований риск-менеджмента, ограничивающих рыночный риск портфеля. Приведем несколько вариантов торговых ограничений.

Пример 1.1.1. Классический случай «отсутствия торговых ограничений»:

$$\hat{D}_t \equiv \mathbb{R}^{n+1}.$$

Пример 1.1.2. Случай, когда торговые ограничения не зависят от времени и предыстории:

$$\hat{D}_t \equiv \mathbb{R} \times D,$$

где $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — постоянные торговые ограничения на рисковые активы.

Пример 1.1.3. Частный случай примера 1.1.2 — запрет коротких позиций по рисковым активам:

$$\hat{D}_t \equiv \mathbb{R} \times [0, \infty)^n.$$

Пример 1.1.4. Предположим, что риск-менеджмент компании устанавливает лимиты на портфель подразделения, хеджирующего обусловленные обязательства по проданным опционам. Эти лимиты рассчитываются на основе показателя потенциальных потерь портфеля Value-at-Risk (VaR), исходя из предположений модели Башелье, при которых процесс, описывающий динамику цен, является многомерным броуновским движением. В этом случае VaR портфеля с заданным уровнем значимости и горизонтом в один шаг²⁴ будет пропорционален среднеквадратичному отклонению стоимости портфеля. Допустим, что оценка V_t ковариационной матрицы для приращений ΔX_t рекуррентно рассчитывается с использованием экспоненциально взвешенных скользящих средних, что является распространенной практикой. Будем также считать, что начальные значения для эмпирического среднего M_0 и эмпирической ковариационной матрицы V_0 заданы — например, определены по предшествующим рассматриваемому

²³До определенной степени, выбор параллелепипеда в качестве C^* можно было бы охарактеризовать как координатную независимость мультипликативных факторов, во всяком случае, когда речь идет о выполнении условий «безарбитражности» по координатам.

²⁴Это может быть, например, один день.

периоду историческим данным. Тогда для $t \geq 1$ имеют место соотношения²⁵:

$$\begin{aligned} M_t &= \varkappa \Delta X_{t-1} + (1 - \varkappa)M_{t-1}, \\ B_t &= \varkappa(\Delta X_{t-1} - M_t) \otimes (\Delta X_{t-1} - M_t) + (1 - \varkappa)B_{t-1}, \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

где $x \otimes y$ обозначает матрицу с элементами $(x \otimes y)_{ij} = x_i y_j$, а $\varkappa \in (0, 1)$ обозначает параметр экспоненциального взвешивания.

В этом случае $B_t = B_t(\bar{x}_{t-1}) = B_t(\cdot)$, и торговые ограничения имеют вид:

$$D_t(\cdot) \equiv \left\{ H_t : \gamma \sqrt{\langle H_t, B_t(\cdot) H_t \rangle} \leq L \right\}, \quad (1.1.12)$$

где L — устанавливаемый риск-менеджментом лимит, а γ — квантиль стандартного нормального распределения, соответствующий заданному уровню значимости VaR. Таким образом, в случае невырожденности²⁶ матрицы B_t множества $D_t(\cdot)$ представляют из себя компактные множества — эллипсоиды, зависящие от предыстории цен в силу определения параметров B_t посредством соотношений (1.1.11).

Пример 1.1.5. Пример ситуации, когда предположение (Т) не выполняется²⁷.

В случае маржинальной торговли устанавливается критический уровень маржи²⁸ $\mu \in (0, 1)$, который надлежит поддерживать, чтобы брокер не потребовал внесения дополнительного обеспечения²⁹: стоимость портфеля должна превышать 100 μ % стоимости его длинных позиций.³⁰ Тем самым при реструктуризации портфеля в момент $t - 1$ необходимо удовлетворить требованию

$$V_{t-1} \geq \mu \langle H_t^\oplus, X_{t-1} \rangle,$$

где

$$(z_0, \dots, z_n)^\oplus \equiv (z_0^+, \dots, z_n^+), \quad z^+ \equiv 0 \vee z,$$

а знак \vee обозначает бинарную операцию взятия максимума; мы будем также использовать знак \wedge для обозначения минимума.

1.2 Гарантированная оценка американского опциона — постановка задачи

В этом разделе мы покажем, как гарантированный детерминистский подход применяется для решения основной задачи, рассматриваемой в настоящей

²⁵В формулах (1.1.11) мы интерпретируем ΔX_t и M_t в матричной форме, как векторы-столбцы.

²⁶Невырожденность матрицы B_t можно считать случаем «общего положения». Однако, если для некоторого \bar{x}_{t-1} матрица $B_t(\bar{x}_{t-1})$ вырождена, то множество $D_t(\bar{x}_{t-1})$ не является компактным и накладывает на торговые стратегии эллипсоидальные ограничения на собственном подпространстве $B_t(\bar{x}_{t-1})\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$.

²⁷Постановка задачи для этого примера обсуждается в конце раздела 1.2 данной главы.

²⁸Англ. “maintenance margin”.

²⁹Англ. “margin call”.

³⁰На практике не исключено, что маржинальная торговля возможна только по части позиций.

работе — задачи суперхеджирования (суперрепликации) в рамках модели финансового рынка при наличии торговых ограничений с неопределенной детерминистской эволюцией цен, а именно, предполагается, что приращения дисконтированных цен лежат в заданных компактах, зависящих от предыстории цен. Решение этой задачи подразумевает определение минимального уровня средств, необходимых, при выборе надлежащей стратегии хеджирования, для гарантированного покрытия обусловленного обязательства по проданному опциону, выплаты по которому зависят от предыстории цен; соответствующая целевая функция удовлетворяет уравнениям Беллмана–Айзекса. При этом мы считаем важным показать, какие предположения относительно рынка и торговых ограничений используются в доказательстве (которое является достаточно простым и стандартным), а какие — нет.

Рассмотрим опцион американского типа³¹ с потенциальными выплатами G_t в момент времени $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Предположение 1.2.1 (A). *Выплаты по опциону американского типа неотрицательны:*

$$G_t \geq 0, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

В начальный момент, при $t = 0$, обычно не предполагается производить какие-либо выплаты по обусловленному обязательству; для удобства можно формально положить $G_0 = -\infty$.

Для американского опциона момент выплаты (исполнения контракта) определяется контрагентом — покупателем опциона. Здесь $G_t = g_t(\bar{X}_t)$, то есть значение G_t определяется по наблюдаемой вплоть до момента t траектории цен рискованных активов. Неотрицательные функции g_t будем называть функциями выплат. Везде далее будем предполагать, что X_t — дисконтированные цены активов. Тем самым, цены X_t — безразмерные величины, измеряются в количестве безрискового актива или, что равносильно, цена безрискового актива постоянна и равна единице — безразмерной величине.

Обозначим V_t — стоимость в момент t портфеля, который формирует продавец опциона, получивший в начальный момент премию V_0 и использующий самофинансируемую стратегию $H = (H_1, \dots, H_N)$ с целью хеджирования обусловленного обязательства по проданному опциону.

Поскольку контрагент может выбрать момент исполнения контракта произвольным образом, гарантированный хедж обусловленного обязательства по опциону (гарантированное покрытие потенциальных выплат) равносильно тому, что стоимость портфеля V_t удовлетворяет требованию:

$$V_t \geq G_t, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (SH)$$

Определение 1.2.1. *Стратегию H будем называть суперхеджирующей, если стоимость портфеля V_t удовлетворяет условию (SH).*

³¹В действительности, как мы увидим далее, эта постановка при определенных условиях «безарбитражности» покрывает случаи выплат в отдельные моменты времени, включая опционы европейского и бермудского типов.

Определение 1.2.2. Назовем траекторию \bar{x}_t цен активов на временном интервале $\llbracket 0, t \rrbracket$, где $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$, возможной, если

$$x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(\bar{x}_0), \dots, \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1}).$$

Обозначим B_t — множество возможных траекторий цен активов на $\llbracket 0, t \rrbracket$:

$$B_t = \{\bar{x}_t : x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(\bar{x}_0), \dots, \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})\}, \quad (1.2.1)$$

и сделаем предположение о равномерной ограниченности функций $g_t(\cdot)$.

Предположение 1.2.2 (В). Найдутся константы $C_t \geq 0$ такие, что для каждого $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ и всех возможных траекторий $\bar{x}_t \in B_t$ выполнено:

$$g_t(\bar{x}_t) \leq C_t.$$

Далее везде будем выбирать константу C_t минимально возможной:

$$C_t = \sup_{\bar{x}_t \in B_t} |g_t(\bar{x}_t)|, \quad (1.2.2)$$

и обозначим

$$C = \bigvee_{t=1}^N C_t. \quad (1.2.3)$$

При достаточно слабых требованиях к «гладкости» функций g_t , а также к «гладкости» зависимости $K_t(\cdot)$ от предыстории³², предположение об ограниченности функций выплат (В) выполняется и поэтому не выглядит обременительно. Предположение (В) позволяет сделать вывод о том, что при достаточно большой премии множество стратегий H , удовлетворяющих условию мажорирования (SH), непусто: достаточно выбрать $V_0 \geq C$ и $H_t \equiv 0$ для $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, то есть взять у контрагента достаточную премию, не меньшую чем C , вложить в безрисковый актив, что возможно благодаря предположению (R), и больше не перестраивать портфель.

Естественно поставить вопрос о минимальных требованиях к премии, позволяющей покрывать обязательства в любой момент времени, то есть когда выполняется условие мажорирования (SH). Удобно, однако, рассматривать подобную величину, определенную не только в начальный, а в любой момент времени, что мы сформулируем следующим образом.

Определение (VF). Гарантированная оценка стоимости хеджирования V_t^* в момент времени $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$ есть точная нижняя грань стоимости V_t портфеля в момент времени t , гарантирующей исполнение текущих и будущих обязательств, касающихся потенциальных выплат при исполнении опциона, для стратегий суперхеджирования. При этом V_0^* является величиной (начальной) премии.

³²Достаточно полунепрерывности сверху функций $g_t(\cdot)$ и полунепрерывности сверху в смысле многозначных отображений $K_t(\cdot)$, что будет показано в главе 3.

С экономической точки зрения, V_t^* можно интерпретировать как «минимальный» уровень резервов на момент времени t , необходимый для полного покрытия обязательств по проданному опциону, т. е. для суперхеджирования.

Принцип оптимальности в динамическом программировании был введен Беллманом в начале 1950-х годов и в оригинале ([90, стр. 83]) сформулирован следующим образом.

An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.³³

Для конкретных классов прикладных задач этот принцип допускает ту или иную формализацию. Применимость этого принципа чаще всего связана со свойствами целевой функции (также называемой функцией цены), представляющей собой функционал от траектории системы на заданном интервале времени, который подлежит глобальной оптимизации. В нашем случае применимость принципа оптимальности динамического программирования напрямую связана с экономической интерпретацией задачи, а также с формальным определением функции цены, где оптимизация носит локальный (по времени) характер. Простые рассуждения, основанные на обратной индукции, позволяют получить основные уравнения, которые мы будем везде далее называть уравнениями Беллмана–Айзека. Это название связано с игровой интерпретацией гарантированного подхода, состоящего в выборе наилучшей стратегии (хеджирования обусловленного обязательства по опциону) при наихудшем сценарии (движения цен на рынке).

При известных ценах $\bar{X}_t = \bar{x}_t$ обозначим $v_t^*(\bar{x}_t)$ — значение V_t^* , а $g_t(\bar{x}_t)$ — значение G_t (при этом $V_t^* = v_t^*(\bar{X}_t)$ и $G_t = g_t(\bar{X}_t)$). Мы будем называть $v_t^*(\cdot)$ *целевой функцией*. Имеет место следующий результат.

Теорема 1.2.1. Пусть для модели рынка с дискретным временем и конечным горизонтом выполняются:

- предположение (ТС) об отсутствии транзакционных издержек³⁴;
- предположение (AI) о наблюдаемой информации в виде предыстории цен;
- предположение (NNP) о неотрицательности цен;
- предположение (RA) о наличии одного безрискового актива;
- предположение (RN) о выборе безрискового *numéraire* (дисконтирование цен);

³³ «Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что независимо от начального состояния и начального решения последующие решения должны составлять оптимальную стратегию в отношении состояния, возникающего в результате первого решения».

³⁴ Как следствие, формула (L) имеет место.

- предположение (R) о допустимости вложения всех средств в безрисковый актив;
- предположение (T) о виде торговых ограничений (не затрагивающих безрисковый актив);
- предположение (SF) о самофинансируемости;
- предположение (UD) об априорной информации, описывающей неопределенность движения цен;
- предположение (A) о неотрицательности функции выплат по опциону американского типа;
- условие (SH) гарантированного покрытия обусловленных обязательств по опциону (условие суперхеджирования);
- предположение (B) об ограниченности функций выплат на множестве возможных траекторий.

Тогда для функции цен, определенной (VF) и принимающей значения³⁵ в $\overline{\mathbb{R}}$, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} v_t^*(\bar{x}_t) &\leq C, & t \in \llbracket 0, N \rrbracket, \\ v_t^*(\bar{x}_t) &\geq 0, & t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \end{aligned}$$

и выполнены следующие рекуррентные соотношения³⁶:

$$\begin{aligned} v_N^*(\bar{x}_N) &= g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy], \end{aligned} \quad (\text{BI})$$

где $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1})$ описывает предысторию по отношению к настоящему моменту $t = N, \dots, 1$. При этом можно формально считать $g_0(\cdot) \equiv -\infty$ (обязательств по выплатам в начальный момент времени отсутствуют).

Многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функции $x \mapsto g_t(x)$, предполагаются заданными для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, так что функции $x \mapsto v_t^*(x)$ задаются уравнениями (BI) для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$.

Доказательство. Установим сначала неравенство

$$v_t^*(\cdot) \leq C. \quad (1.2.4)$$

³⁵Обозначая через $\overline{\mathbb{R}}$ аффинно расширенную числовую прямую $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [\infty, \infty]$, в которой окрестности точек $-\infty$ и $+\infty$ имеют вид $[-\infty, x)$ и $(x, +\infty]$ соответственно, где $x \in \mathbb{R}$. Принимается также конвенция $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ для $a \in (-\infty, +\infty)$, и $b + (-\infty) = (-\infty) + b = -\infty$ для $b \in [-\infty, +\infty)$.

³⁶Напомним, что знак \vee обозначает максимум, а hy — скалярное произведение вектора h на вектор y .

Для этого используем возможность (R) вложения всех средств в безрисковый актив (в предположении (T) о виде торговых ограничений). Достаточно выбрать $H_t \equiv 0$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, тогда по формуле³⁷ (1.1.5) стоимость хеджирующего портфеля V_t со временем не изменяется, т.е. $V_t \equiv V_0$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, а для начального капитала $V_0 = C$ стратегия $H_t \equiv 0$ оказывается суперхеджирующей: из условия ограниченности функций выплат (B) следует $G_t \leq C = V_t$, и по определению (VF) имеем $V_t^* \leq V_t \equiv C$, таким образом неравенство (1.2.4) имеет место.

С другой стороны, поскольку задача состоит в суперхеджировании американского опциона, то из (VF), с учетом (A) и (SH), получаем

$$v_t^*(\cdot) \geq 0, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

Очевидно, для $t = N$

$$v_N^*(\cdot) = G_N(\cdot).$$

Рассмотрим случай $t < N$ и в рассуждениях ниже будем опираться на принцип оптимальности Беллмана, сопоставляя ε -оптимальные стратегии суперхеджирования на интервалах³⁸ $\llbracket t, N \rrbracket$ и $\llbracket t-1, N \rrbracket$, где $t \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. Пусть известна история цен $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1}$, а $H_s = h_s(\bar{x}_{s-1})$ — самофинансируемая стратегия суперхеджирования для $s \in \llbracket t-1, N \rrbracket$ (тогда на интервале $\llbracket t, N \rrbracket$ это тоже самофинансируемая стратегия суперхеджирования) с соответствующей стоимостью хеджирующего портфеля V_s . Тогда для любого допустимого сценария $y = \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})$ движения цен на шаге t имеем

$$v_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) + h_t(\bar{x}_{t-1})y = v_t(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) \geq v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y),$$

поэтому

$$\begin{aligned} v_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) &\geq \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - h_t(\bar{x}_{t-1})y] \geq \\ &\geq \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \end{aligned}$$

Следовательно, по определению (VF),

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) \geq \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy].$$

Кроме того, из (SH) вытекает

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) \geq g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}).$$

Таким образом,

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) \geq g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \quad (1.2.5)$$

³⁷Опирающейся на предположение (TC) об отсутствии транзакционных издержек.

³⁸Здесь имеются в виду интервалы на множестве целых неотрицательных чисел.

По определению (VF) для фиксированной предыстории цен \bar{x}_t и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется суперхеджирующая стратегия $h_{t+1}^{(\varepsilon)}(\bar{x}_t), \dots, h_N^{(\varepsilon)}(\bar{x}_{N-1})$ на интервале $\llbracket t, N \rrbracket$ такая, что стоимость $v_t^{(\varepsilon)}(\bar{x}_t)$ соответствующего хеджирующего портфеля в момент времени t удовлетворяет неравенству

$$v_t^{(\varepsilon)}(\bar{x}_t) \leq v_t^*(\bar{x}_t) + \varepsilon.$$

Далее, для фиксированной ранее предыстории цен \bar{x}_t и произвольного $\delta > 0$ выберем стратегию $h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1})$ на шаге t такую, что

$$\begin{aligned} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1})y] &\leq \\ &\leq \delta + \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Если снабдить хеджера к моменту времени $t - 1$ капиталом в размере

$$v_{t-1}^{\varepsilon, \delta}(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \left\{ \varepsilon + \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1})y] \right\},$$

то стратегия $h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1}), h_{t+1}^{(\varepsilon)}(\bar{x}_t), \dots, h_N^{(\varepsilon)}(\bar{x}_{N-1})$ будет суперхеджирующей на интервале $\llbracket t - 1, N \rrbracket$, поскольку

$$v_{t-1}^{\varepsilon, \delta}(\bar{x}_{t-1}) + h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1})\Delta x_t \geq v_t^*(\bar{x}_t) + \varepsilon \geq v^\varepsilon(\bar{x}_t)$$

для любого возможного сценария приращения цен $\Delta x_t \in K_t(\bar{x}_t)$. В то же время, из (1.2.6) следует

$$\begin{aligned} v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &\leq v_{t-1}^{\delta, \varepsilon}(\bar{x}_{t-1}) \leq \\ &\leq \varepsilon + \delta + g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \\ &\vee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ получаем неравенства, противоположные к (1.2.5), а значит и равенства вида (VI) для $t \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, фигурирующие в утверждении теоремы. \square

Замечание 1.2.1. В теореме 1.2.1 не использовались:

- предположение (C) о компактности множеств $K_t(\cdot)$, описывающих неопределенность движения цен в предположения (UD);
- предположение (D) о выпуклости множеств $D_t(\cdot)$, описывающих торговые ограничения;
- предположение (PC) о непрерывности шкалы цен;
- предположение (AD) о бесконечной дробимости активов.

Эти предположения, однако, будут играть роль в дальнейшем для изучения свойств уравнений (BI); особо важным для содержательной теории, как уже отмечалось ранее, является предположение (C).

Вместе с тем, отметим, что если (PC) в целом приемлемо как приближение к реальности, то (AD) может быть неадекватным для малых портфелей, а задачу более естественно ставить как решение (BI) с целочисленной оптимизацией³⁹ в отношении суперхеджирующей стратегии $h \in D_t(\cdot)$.

Замечание 1.2.2. В действительности, в доказательстве теоремы 1.2.1 не использовалось предположение (PP) о положительности цен, однако для дисконтирования и для возможности сделать предположение (RN) требовалось, чтобы цена безрискового актива не обращалась бы в нуль: $X_t^0 \neq 0$.

Определение 1.2.3. *Допустимая стратегия суперхеджирования*

$$h_N^* = (h_1^*(\bar{x}_0), \dots, h_N^* = h_N^*(\bar{x}_{N-1})),$$

т. е. удовлетворяющая торговым ограничениям:

$$h_t^*(\bar{x}_{t-1}) \in D_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

будет называться оптимальной, если в уравнениях (BI) точная нижняя грань по h достигается при $h = h_t^(\bar{x}_{t-1})$.*

Замечание 1.2.3. Для справедливости уравнений (BI) не требуется никаких предположений типа «безарбитражности» рынка.⁴⁰ Однако свойства такого сорта, разумеется, имеют принципиальное значение для изучения свойств уравнений (BI) и хеджирующих стратегий, что будет отражено в главах 2 и 3. В частности, некоторое естественное предположение «безарбитражности» рынка в совокупности с замкнутостью множеств $D_t(\bar{x}_{t-1})$ достаточно для существования оптимальной стратегии суперхеджирования (см. следствие 3.2.1).

Замечание 1.2.4. Отметим, что требования измеримости не фигурируют в формулировке теоремы 1.2.1. Однако «свойства гладкости» решений уравнений (BI) представляют прикладной интерес и зависят от «свойств гладкости» многозначных отображений $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функций выплат $g_t(\cdot)$; этот вопрос будет исследован в главе 3.

Замечание 1.2.5. Формально, уравнения (BI) можно использовать и для функции цены европейского опциона, положив $g_0(\cdot) = \dots = g_{N-1}(\cdot) \equiv -\infty$, а

³⁹Именно посредством решения задачи целочисленной оптимизации определялась стратегия проведения центральным контрагентом балансирующих сделок для дефолтера с дефицитом обеспечения в уже упомянутом изобретении [55]. Задача суперхеджирования с целочисленными торговыми ограничениями (когда количество каждого актива является целым числом) изучалась в [154].

⁴⁰Судя по всему, возможность построения модели рынка и формализации задачи суперхеджирования без использования предположений безарбитражности рынка представляется неочевидной. Этот факт, например, был независимо обнаружен авторами статьи [113] (где рассматривается вероятностная модель рынка) спустя несколько лет после нашей публикации [44].

$g_N(\cdot) = g(\cdot)$, где $g(\cdot) \geq 0$ — функция выплат в терминальный момент времени (момент исполнения опциона).

Аналогично, можно использовать уравнения (VI) для функции цен бермудского опциона, полагая $g_s \equiv -\infty$ для тех моментов времени s , в которые выплаты не предусмотрены.

При этом, вообще говоря, неравенство $v_t^*(\cdot) \geq 0$ более не будет выполняться без дополнительных предположений, а неравенство $v_t^*(\cdot) \leq C$ сохраняется.

Замечание 1.2.6. Чтобы оправдать название соотношений (VI) как «уравнений Беллмана–Айзека», заметим, что $g_{t-1}(\cdot)$ можно перенести под знак минимакса⁴¹:

$$v_{t-1}^*(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [g_{t-1}(\cdot) \vee (v_t^*(\cdot, x_{t-1} + y) - hy)], \quad t = N, \dots, 1.$$

Это вытекает из того, что для любой неубывающей полунепрерывной сверху функции $\varphi: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\varphi\left(\inf_{h \in A} f(h)\right) = \inf_{h \in A} \varphi(f(h)),$$

которое можно применить в нашем случае к непрерывной неубывающей функции $\varphi(u) = g \vee u$ и использовать тождество

$$g \vee \sup_{y \in B} f(y) = \sup_{y \in B} [g \vee f(y)].$$

Замечание 1.2.7. При детерминистском подходе уравнения Беллмана–Айзека получаются из экономического смысла чрезвычайно легко, а доказательство носит стандартный и элементарный характер. Вероятностный же аналог этих уравнений, напротив, требует математически продвинутых результатов, таких как опциональное разложение (см., например, [151]).

Замечание 1.2.8. Условия ограниченности функции выплат и допустимости вложения всех средств в безрисковый актив при выводе уравнений (VI) используются только лишь для того, чтобы показать существование суперхеджирующей стратегии. От предположений (B) и (R) в формулировке теоремы 1.2.1 можно отказаться, заменив их на менее конструктивное предположение о существовании допустимой суперхеджирующей стратегии $h_t(\bar{x}_{t-1}) \in D_t(\bar{x}_{t-1})$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, обеспечивающей конечность функции $v_t^*(\cdot)$, $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Например, для опциона “call” такой стратегией будет “buy and hold”⁴², если торговые ограничения позволяют занимать сколь угодно большие длинные позиции по рисковому активу.

⁴¹ Впрочем, с точки зрения аналитического исследования уравнений (VI) вряд ли этот «перенос» может быть полезным.

⁴² Это стратегия покупки базового (рискового) актива в начальный момент и удержания позиции до экспирации опциона.

Предложение 1.2.1. Если динамика цен и торговые ограничения относятся к марковскому типу⁴³, а функции выплат зависят только от текущей цены, т.е. для $t = 1, \dots, N$ представимы в виде

$$g_t(x_0, \dots, x_t) = g_t^*(x_t), \quad (1.2.7)$$

то решения уравнений Беллмана–Айзека также зависят только от текущей цены, т.е. для $t = 1, \dots, N$ представимы в виде

$$v_t^*(x_0, \dots, x_t) = v_t^*(x_t). \quad (1.2.8)$$

Доказательство. Непосредственно проверяется по индукции — это вытекает из вида уравнений Беллмана–Айзека (VI). \square

Исходя из аддитивного представления (1.1.9), для удобства обозначений мы можем сделать «аддитивную» замену в последней переменной функций v_t^* , полагая

$$w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = w_t(x_1, \dots, x_{t-1}, y) = v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y), \quad (T)$$

поскольку зачастую удобно анализировать правую часть уравнения Беллмана–Айзека (VI) в терминах функций w_t для $t \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$:

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy], \quad t = N, \dots, 1. \quad (1.2.9)$$

Хорошо известно, что в теории динамического программирования с дискретным временем возникает абстрактная проблема, связанная с тем, что проекция (в более общем случае, непрерывный образ) борелевского множества не является, вообще говоря, борелевским множеством, а лишь аналитическим. Эта проблематика и соответствующая теория изложены, например, в книге [5, §§ 7.6–7.7 и приложение Б].⁴⁴

С нашей точки зрения, для прикладных задач это не представляет большого интереса, поскольку наличие «проблем» с измеримостью в основном связано с использованием аксиомы выбора. Эта аксиома приводит к «патологическим» примерам (в частности, относящимся к существованию неизмеримых по Лебегу множеств). Однако, это «существование» носит неконструктивный характер. При замене аксиомы выбора на альтернативные аксиомы, сохраняющие счетную аксиому выбора (а, значит, и традиционный математический анализ) эти «патологические» примеры исчезают. Например, это имеет место для аксиомы зависимого выбора⁴⁵, см. [239]. Аналогичная ситуация имеет место для

⁴³См. определение 1.1.2.

⁴⁴Одно из предложенных решений проблемы – использование универсальной измеримости. Однако, для того чтобы аналитические множества были бы универсально измеримы, требуется дополнительное предположение в виде некоторой аксиомы из дескриптивной теории множеств.

⁴⁵Такая замена аксиомы не приводит к противоречию в рамках аксиоматики Цермело–Френкеля.

аксиомы детерминированности, см. [201]. Поэтому вопрос о «существовании патологических примеров» скорее философский, чем математический. А в конкретных прикладных задачах постановка, разумеется, задается конструктивно.

В этом плане, изучение свойств «гладкости» решений, таких как полунепрерывность, непрерывность или липшицевость, является полезным для приложений, чему будут посвящены несколько следующих глав.

В то же время, возможны такие постановки задачи, когда вопрос об измеримости вообще не имеет значения, в частности, для определенной формулировки игрового равновесия, что также будет отражено в последующих главах.

В заключение обсудим, как постановка задачи динамического программирования (1.2.9) может быть модифицирована в случае торговых ограничений на безрисковый актив, а также для примера 1.1.5, в случае маржинальной торговли. Речь идет о возможности понижения размерности задачи с $n + 1$ до n , однако в этом случае уравнения Беллмана–Айзека приобретают модифицированную форму, по сравнению с (1.2.9).

Исходя из соотношения (1.1.6), для учета торговых ограничений на безрисковый актив надо использовать соотношение:

$$(v_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) - hx_{t-1}, h) \in \hat{D}_t(\bar{x}_{t-1}); \quad (1.2.10)$$

будем при этом считать $\hat{D}_t(\cdot)$ выпуклыми множествами $t = 1, \dots, N$. Ограничения на рисковые активы, в соответствии с (1.1.6) мы обозначили

$$D_t(\cdot) = \{h \in \mathbb{R}^n : (v_{t-1}(\cdot) - hx_{t-1}, h) \in \hat{D}_t(\cdot)\},$$

Обозначим⁴⁶ для $h \in \mathbb{R}^n, t \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$A_t(h, \cdot) = \{h^0 \in \mathbb{R} : (h^0, h) \in \hat{D}_t(\cdot)\} \subseteq \mathbb{R},$$

$$\alpha_t(h, \cdot) = \inf A_t(h, \cdot),$$

$$\beta_t(h, \cdot) = \sup A_t(h, \cdot),$$

$$E_t(\cdot) = \{h \in \mathbb{R}^n : A_t(h, \cdot) \neq \emptyset\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Отметим, что функция $h \mapsto \alpha_t(h, \cdot)$ является выпуклой, а $h \mapsto \beta_t(h, \cdot)$ — вогнутой, см. [40, теорема 5.3]. Множество $E_t(\cdot)$ является выпуклым и $0 \in E_t(\cdot)$ в силу предположения (R) в форме (1.1.7).

Рекуррентные уравнения соответствующей задачи динамического программирования, с использованием обозначений (T), могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} v_N^*(\bar{x}_N) &= g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \\ &\vee \inf_{h \in E_t(\bar{x}_{t-1})} \left\{ \left[\sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy) \vee \right. \right. \\ &\quad \left. \vee (hx_{t-1} + \alpha_t(h, \bar{x}_{t-1})) \right] \wedge \\ &\quad \left. \wedge (hx_{t-1} + \beta_t(h, \bar{x}_{t-1})) \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

⁴⁶Принимаем конвенцию $\inf \emptyset \equiv +\infty, \sup \emptyset \equiv -\infty$.

С экономической точки зрения, однако, естественные ограничения возникают на заемные средства⁴⁷, а ограничения сверху на вложения в безрисковый актив не имеют смысла. Поэтому для приложений разумно считать, что $\beta_t(h, \bar{x}_{t-1}) = +\infty$, а $\alpha_t(h, \bar{x}_{t-1}) \leq 0$, что позволяет упростить (??).

Что касается примера 1.1.5 с маржинальной торговлей, то условие (1.2.10) в данном случае принимает вид:

$$v_{t-1} \geq \mu h^\oplus x_{t-1}, \quad \mu \in [0, 1).$$

Поэтому рекуррентные уравнения для соответствующей задачи динамического программирования в данном будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} v_N^*(\bar{x}_N) &= g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \\ &\vee \inf_{h \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy) \vee \mu h^\oplus x_{t-1} \right\}. \end{aligned}$$

Если одновременно с торговыми ограничениями, свойственными маржинальной торговле, наложить ограничения на заимствования безрискового актива посредством задания выпуклой по h функции $\alpha_t(h, \bar{x}_{t-1}) \leq 0$, то можно записать, с использованием обозначений (Г), соответствующие уравнения Беллмана–Айзека с дополнительными ограничениями $h \in D_t(\cdot)$ в виде

$$\begin{aligned} v_N^*(\bar{x}_N) &= g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \\ &\vee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \left\{ \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy) \vee \mu h^\oplus x_{t-1} \vee \right. \\ &\left. \vee (hx_{t-1} + \alpha_t(h, \bar{x}_{t-1})) \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Замечание 1.2.9. Уравнения (1.2.9) являются частным случаем (1.2.12) при

$$\mu = 0, \quad \alpha_t \equiv -\infty.$$

Замечание 1.2.10. Выражение в фигурных скобках, которое минимизируется по h в формуле (1.2.12), является выпуклой функцией от h .

⁴⁷Кредитор может устанавливать лимит, например, заемные средства не должны превышать определенной доли $\gamma \in (0, 1)$ от собственного капитала заемщика, $\alpha_t(h, \cdot) = -\gamma v_{t-1}(\cdot)$.

Глава 2. Свойства «безарбитражности» рынка

В настоящей главе изучаются несколько понятий, формализующих «безарбитражность» рынка в контексте детерминистского подхода, учитывающего торговые ограничения, и рассматриваются их свойства.

Вводится новое и важное для теории и приложений понятие структурной устойчивости модели, которое заключается в «грубости» свойств «безарбитражности» рынка — в сохранении этого качественного свойства при малых возмущениях динамики рыночных цен. Структурная устойчивость модели существенно используется в главах 3, 4, 6, 8, 9 и 10.

Получены геометрические критерии введенных свойств «безарбитражности» рынка.

Основные результаты главы опубликованы в [46] (английская версия [226]) и [50] (английская версия [231]).

2.1 Арбитраж и безарбитражность рынка

Для начала мы процитируем известного финансового инженера Эмануила Дермана:

Научные модели — это башня метафор, построенных на основе фундаментальных неметафорических качественных свойств и законов. ... Что касается финансовых моделей и теорий, финансовая теория — это тоже башня метафор, но на практике быстро познается печальная правда о том, что в ней нет фундаментальных законов, аналогичных законам Ньютона или Максвелла.¹

С этим можно частично согласиться, однако, все же имеются фундаментальные принципы, которым должны удовлетворять финансовые модели. Важнейшим

¹“Scientific models are a tower of metaphors built atop the fundamental nonmetaphorical qualities and the laws. . . . What about financial models and theories? Financial theory is a tower of metaphors too, but, as practitioners soon learn, the sad truth is that there are no fundamental laws analogous to Newton’s or Maxwell’s.” *Metaphors and Their Limits*, published September 30, 2008, by Emanuel Derman.

принципом является требование «безарбитражности» рынка, которое по своей значимости в финансовой инженерии сродни значимости в физике фундаментального принципа сохранения энергии в замкнутых системах. Не следует искать “Perpetuum Mobile”, по крайней мере в рамках физической теории, точно также не стоит использовать финансовую модель, которая будет мотивировать к извлечению прибыли посредством арбитража, на практике, скорее всего, неосуществимого, поскольку никакая модель не может учесть всех нюансов реального мира. Основное отличие фундаментальных принципов в физике и в финансовой теории состоит в том, что в физических моделях принцип сохранения энергии обычно формализуется легко и однозначно, в то время как финансовая теория оперирует более расплывчатыми понятиями, а формализация принципа «безарбитражности» рынка неоднозначна, и совсем неочевидно, какая из возможных формализаций лучше соответствует реальности.

Само понятие арбитража, чрезвычайно важное для описания поведения финансовых рынков, является изначально противоречивым. В качестве типичного образца приведем определение из Investopedia:

Arbitrage occurs when a security is purchased in one market and simultaneously sold in another market at a higher price, thus considered to be risk-free profit for the trader. Arbitrage provides a mechanism to ensure prices do not deviate substantially from fair value for long periods of time. With advancements in technology, it has become extremely difficult to profit from pricing errors in the market. Many traders have computerized trading systems set to monitor fluctuations in similar financial instruments. Any inefficient pricing setups are usually acted upon quickly, and the opportunity is often eliminated in a matter of seconds. Arbitrage is a necessary force in the financial marketplace.²

С одной стороны, и это наиболее существенная характеристика арбитража, речь идет о совершении сделок, приносящих прибыль без риска. С другой стороны, необходимо учитывать, что различные участники рынка имеют неодинаковые возможности в отношении доступа к информации и доступа к рынку. Здесь играет роль не только время реакции на информацию, но и скорость исполнения сделок. При этом следует учитывать, что действия участников рынка по реализации «арбитража» торгуемых на рынке активов, разумеется, оказывают влияние на рыночную стоимость этих активов, приводя не просто к выравниванию цен, но и к возможности возникновения в течении короткого промежутка

²«Арбитраж возникает, когда ценная бумага приобретается на одном рынке и одновременно продается на другом рынке по более высокой цене, что считается безрисковой прибылью для трейдера. Арбитраж создает механизм для того, чтобы цены не отличались существенно от справедливой стоимости в течение длительных периодов времени. Благодаря достижениям в области технологий стало чрезвычайно сложно получить прибыль из-за неадекватного ценообразования на рынке. Многие трейдеры имеют компьютеризированные торговые системы, предназначенные для мониторинга колебаний аналогичных финансовых инструментов. Неэффективные конфигурации цен обычно быстро приводят рынок в действие, и возможность часто устраняется в считанные секунды. Арбитраж является необходимой силой на финансовом рынке.» URL: <https://www.investopedia.com/terms/a/arbitrage.asp>.

времени ценовой ситуации, противоположной изначальной. Это связано с некоторой инерцией рынка, — следствием неодновременности действий участников рынка, вызванной различием доступа к рынку. Таким образом, в действительности у участников рынка всегда имеется риск, а «безрисковость» могла бы быть только у участника рынка, который «всегда первый» — с этим и связано развитие высокочастотной торговли, где речь идет уже о малых долях секунды на исполнение сделок.

Другая возможность возникновения арбитража на реальных финансовых рынках связана с определенными эпизодами некорректных цен, которые можно объяснить с помощью поведенческой интерпретации, см. [59]³.

Несмотря на описанную выше противоречивость, понятие «безарбитражности» рынка, как отмечалось выше, является исключительно важным для построения корректных моделей рынка. Если *в рамках модели* возможен «арбитраж» с неограниченной прибылью⁴, то очевидно, что постановка задачи оптимального хеджирования обусловленных обязательств по опционам, а также и постановка задачи оптимального портфельного инвестирования, теряет смысл, поскольку такая модель рынка будет поощрять лишь торговые стратегии получения неограниченной безрисковой прибыли посредством арбитража. Подчеркнем еще раз, что формализация понятия «арбитража» и «безарбитражности» рынка оказывается сложной проблемой и порождает множество различных математических определений, причем далеко не всегда ясно, использование какого из определений приведет к более корректной модели, лучше соответствующей реальности. Наиболее нетривиальная ситуация возникает при построении моделей рынка с непрерывным временем; мы ограничимся здесь ссылками на некоторые фундаментальные работы теории арбитража, начиная с основополагающей работы Росса (1978) [214]. Так, математически точная формулировка условий безарбитражности предложена в работе Харрисона и Крепса (1979) [163]; взаимосвязь между безарбитражностью и мартингальными мерами найдена в работе Харрисона и Плиски (1981) [164]; Крепс (1981) [188] адаптирует понятие безарбитражности к бесконечному количеству активов; Делбан (1992) [129], а также Делбан и Шахермаейер (1994) [130] применяют результаты Крепса для получения условий существования мартингальных мер, а Делбан и Шахермаейер (1998) [131] находят максимально общие условия такого типа; Дана, Ван и Маньен (1999) [128] устанавливают связь безарбитражности с равновесием на рынке.

Весьма естественная, на наш взгляд, формализация концепции безарбитражности для случая непрерывного времени — “No Generalised Arbitrage” (NGA), была предложена Черным (2007) [117]. Согласно его версии фундаментальной теоремы ценообразования активов, модель рынка с конечным горизонтом удовлетворяет условию NGA тогда и только тогда, когда существует эквивалентная

³ Автор признателен профессору А. А. Васину за указание на эту книгу.

⁴ В случае отсутствия торговых ограничений «арбитраж» всегда ассоциируется с неограниченной прибылью, причем для реализации арбитража в этом случае не требуется начального капитала.

(по отношению к референтной мере) вероятностная мера, в отношении которой процесс дисконтированных цен является настоящим⁵ мартингалом; модель с бесконечным горизонтом удовлетворяет условию **NGA** тогда и только тогда, когда существует эквивалентная мера, в отношении которой процесс дисконтированных цен является равномерно интегрируемым мартингалом. Отметим, что этот подход основан на элементарных (или простых) торговых стратегиях, которые ближе к реальности, чем более общие стратегии «непрерывной торговли».

В условиях «детерминистской» модели рынка с дискретным временем понятие безарбитражности также может быть формализовано разными способами. Соответствующие формулировки отличаются от «вероятностных» определений, хотя и близки к ним по смыслу. Определение детерминистской арбитражной возможности восходит к работе Мертона (1973) [194] и формулируется при помощи термина «доминантный актив (портфель)». Приведем соответствующую цитату⁶:

Definition: Security (portfolio) A is dominant over security (portfolio) B, if on some known date in the future, the return on A will exceed the return on B for some possible states of the world⁷, and will be at least as large as on B, in all possible states of the world. Note that in perfect markets with no transactions costs and the ability to borrow and short-sell without restriction, the existence of a dominated security⁸ would be equivalent to the existence of an arbitrage situation.

При наличии безрискового актива естественно сравнивать доход портфеля с доходом от безрискового актива, а наличие арбитражной возможности равносильно тому, что безрисковый актив будет либо доминируемым, либо доминантным (см. предложение 2.2.4 далее, в разделе 2.2).

В рамках робастного подхода к моделированию финансовых рынков возникают различные способы формализации безарбитражности; взаимосвязь их анализируется в [204].

⁵ А не локальным мартингалом, т. е. математическое ожидание процесса в каждый момент времени конечно.

⁶ «Определение: актив (портфель) А доминирует над активом (портфелем) В, если на какую-то известную дату в будущем доход от А будет строго превышать доход от В для некоторых возможных состояний мира и будет, по крайней мере, не меньше, чем от В, для всех возможных состояний мира. Отметим, что на совершенных рынках без транзакционных издержек и с возможностью заимствовать и коротко продавать без ограничений, существование доминируемого актива будет эквивалентно существованию арбитражной возможности».

⁷ В рамках предложенной в [188] модели, «состояниями мира» можно считать, например, возможные траектории цен рассматриваемых активов.

⁸ Здесь, по-видимому, Мертон имел в виду доминируемые портфели, а не только активы.

2.2 Арбитражная возможность и гарантированный арбитраж

В данном разделе мы обсудим некоторые формализации «безарбитражности» в рамках модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен при наличии торговых ограничений. Везде далее предполагается выполненным условие самофинансируемости и, если не оговорено противное, множества $K_t(\cdot)$ компактны.

Определение 2.2.1. *Под арбитражной возможностью на шаге $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ при заданной предыстории цен $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$ будем понимать следующее свойство:*

1° *Найдется допустимая на шаге t стратегия $h^* = h^*(\bar{x}_{t-1}) \in D_t(\bar{x}_{t-1})$, такая что $h^*y \geq 0$ для всех $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$.*

2° *Найдется $y^* = y^*(\bar{x}_{t-1}) \in K_t(\bar{x}_{t-1})$, такое что $h^*y^* > 0$.*

Будем говорить, что на шаге $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ при заданной предыстории цен $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$ отсутствуют арбитражные возможности, если хотя бы один из пунктов 1° или 2° нарушается.

Замечание 2.2.1. В «вероятностной» постановке условие 1° выполняется почти наверное, а условие 2° заменяется на более сильное, указывающее на «реалистичность» арбитражной возможности, а именно, предполагающее положительную (референтную) вероятность события $H_t^* \Delta X_t > 0$, где $H_t^* = h_t^*(X_0, \dots, X_{t-1})$. Однако для «вероятностного» аналога задачи, т. е. когда $K_t(\cdot)$ являются (топологическими) носителями регулярного условного распределения ΔX_t при известной предыстории цен и при дополнительных технических предположениях, из условий определения 2.2.1 вытекает, что событие $H^* \Delta X > 0$ имеет положительную (референтную) вероятность.

Действительно, обозначим $P_{\Delta X_t | \bar{x}_{t-1} = \cdot}$ соответствующие условные распределения и предположим, что существуют измеримые селекторы⁹ $h^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$ и $y^*(\cdot) \in K_t(\cdot)$ со свойствами 1° и 2°; это можно¹⁰ обеспечить надлежшими свойствами многозначных отображений $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ и $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$. Условие 2° означает, что открытое полупространство $S(\cdot) = \{y : h^*(\cdot)y > 0\}$ пересекается с $K_t(\bar{x}_{t-1})$, так что

$$P_{\Delta X_t | \bar{x}_{t-1} = \cdot}(S(\cdot)) > 0,$$

⁹К сожалению, терминология в многозначном анализе на русском языке расходится. Так авторы [21] и [8] используют термин «сечение», авторы [39] предпочитают говорить о «селекции»; у авторов [7] «ветвь» признается синонимом термина «селектор», а в [36] для многозначных отображений «ветвь» относится к многозначным отображениям, в том время как «селектор» понимается как функция выбора (в смысле теории множеств) для класса множеств.

¹⁰Например, используя свойства полунепрерывности сверху или снизу, или же измеримости многозначных отображений, см. [36, § 15 и § 20].

а значит, и для безусловной (референтной) вероятности имеем

$$\mathbb{P}(H_t \Delta X_t > 0) > 0.$$

Отметим, что для критериев безарбитражности в терминах носителей $K_t(\cdot)$ при «вероятностном» подходе серьезные усилия приходится предпринимать для «борьбы» с проблемой измеримости, в том числе используются те или иные неконструктивные результаты, касающиеся измеримых селекторов (см., например, [43], [177], [105]). В то же время, «детерминистский» подход, позволяет хотя бы частично обойти эти проблемы.

Определение NDAO.¹¹ Будем говорить, что выполняется пошаговое условие отсутствия арбитражных возможностей, если на каждом шаге $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ при любой предыстории цен $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$ арбитражные возможности (в смысле определения 2.2.1) отсутствуют.

Определение 2.2.2. Под многошаговой арбитражной возможностью на интервале $\llbracket 0, N \rrbracket$, будем понимать следующее свойство:

1° Существует такая допустимая стратегия

$$\mathbf{h}_N^* = (h_1^* = h_1^*(\bar{x}_0), \dots, h_N^* = h_N^*(\bar{x}_{N-1})),$$

$$h_t^* \in D_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

что для любой возможной траектории цен $\bar{x}_N \in B_N$ выполнено:

$$\sum_{s=1}^N h_s^* \Delta x_s \geq 0;$$

2° Найдется возможная траектория цен $\bar{x}_N^* \in B_N$, такая что

$$\sum_{s=1}^N h_s^* \Delta x_s^* > 0.$$

Определение 2.2.3. Будем говорить, что выполняется условие отсутствия многошаговых арбитражных возможностей, если многошаговые арбитражные возможности на интервале $\llbracket 0, N \rrbracket$ отсутствуют в смысле определения 2.2.2.

Предложение 2.2.1. Условие NDAO, т. е. пошаговое условие отсутствия арбитражных возможностей, и условие отсутствия многошаговых арбитражных возможностей эквивалентны.

¹¹От “No Deterministic Arbitrage Opportunity”.

Доказательство. Наличие арбитражной возможности, на шаге $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ при некоторой предыстории цен $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$ влечет наличие многошаговых арбитражных возможностей в моменты $\llbracket 0, N \rrbracket$: достаточно положить $h_s = 0$ для $s \neq t$, а также положить $h_t(x) = h^*(x)$ при $x = \bar{x}_{t-1}$ и $h_t(x) = 0$ при $x \neq \bar{x}_{t-1}$. Рассматривая соответствующие определения безарбитражности, получаем, что отсутствие гарантированного многошагового арбитража на интервале $\llbracket 0, N \rrbracket$ влечет отсутствие гарантированного одношагового арбитража на любом шаге $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Чтобы проверить справедливость обратной импликации, нам будет удобно воспользоваться эквивалентной формулировкой для многошаговой арбитражной возможности на интервале $\llbracket 0, N \rrbracket$, которая имеет следующий вид: найдется такая допустимая стратегия

$$\mathbf{h}_N^* = (h_1^* = h_1^*(\bar{x}_0), \dots, h_N^* = h_N^*(\bar{x}_{N-1})),$$

такая что

$$h_t^* \in D_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

что выполняются два неравенства¹²:

$$I_N(\mathbf{h}_N^*) = \inf_{y_1 \in K_1(\bar{x}_0)} \dots \inf_{y_N \in K_N(\bar{x}_{N-1})} \sum_{s=1}^N h_s^* y_s \geq 0$$

и

$$S_N(\mathbf{h}_N^*) = \sup_{y_1 \in K_1(\bar{x}_0)} \dots \sup_{y_N \in K_N(\bar{x}_{N-1})} \sum_{s=1}^N h_s^* y_s > 0$$

Для горизонта $N = 1$ требуемое утверждение выполняется тривиальным образом. Предположим, что для горизонта $N = T$, где $T \geq 1$, установлено, что из пошагового условия отсутствия арбитражных возможностей следует отсутствие многошаговых арбитражных возможностей. Проверим, что аналогичное свойство будет выполнено и для горизонта $N = T + 1$. Пусть пошагового условия отсутствия арбитражных возможностей выполнено на интервале $\llbracket 0, T + 1 \rrbracket$; тогда оно выполнено и на интервале $\llbracket 0, T \rrbracket$, и по индуктивному предположению на интервале $\llbracket 0, T \rrbracket$ отсутствуют многошаговые арбитражные возможности.

Допустим, что существует многошаговая арбитражная возможность на интервале $\llbracket 0, T + 1 \rrbracket$, тогда существует допустимая стратегия \mathbf{h}_{T+1}^* , такая что

$$\begin{aligned} I_{T+1}(\mathbf{h}_{T+1}^*) &= \inf_{y_1 \in K_1(\bar{x}_0)} \dots \inf_{y_T \in K_T(\bar{x}_{T-1})} \sum_{s=1}^T h_s^* y_s + \inf_{y_{T+1} \in K_{T+1}(\bar{x}_T)} h_{T+1}^* y_{T+1} = \\ &= I_T(\mathbf{h}_T^*) + \inf_{y_{T+1} \in K_{T+1}(\bar{x}_T)} h_{T+1}^* y_{T+1} = I_T(\mathbf{h}_T^*) + i_{T+1}(h_{T+1}^*) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

и одновременно

$$S_{T+1}(\mathbf{h}_{T+1}^*) = S_T(\mathbf{h}_T^*) + \sup_{y_{T+1} \in K_{T+1}(\bar{x}_T)} h_{T+1}^* y_{T+1} = S_T(\mathbf{h}_T^*) + s_{T+1}(h_{T+1}^*) > 0. \quad (2.2.2)$$

¹²В силу компактности $K_t(\cdot)$ точные верхние и нижние грани достигаются и конечны.

Вместе с тем, поскольку на интервале $\llbracket 0, T \rrbracket$ отсутствуют многошаговые арбитражные возможности, то для любой допустимой стратегии \mathbf{h}_T выполняется хотя бы одно из неравенств: $I_T(\mathbf{h}_T) < 0$ или $S_T(\mathbf{h}_T) \leq 0$. Из одношагового условия отсутствия арбитражных возможностей в момент времени $T + 1$ вытекает, что для любого $h_{T+1} \in D_t(\bar{x}_{T+1})$ выполняется хотя бы одно из неравенств: $i_{T+1}(h_{T+1}) < 0$ или $s_{T+1}(h_{T+1}^*) \leq 0$. Рассмотрим четыре варианта для допустимой стратегии \mathbf{h}_{T+1} задаваемой парой \mathbf{h}_T и h_{T+1} :

1) выполнены неравенства $I_T(\mathbf{h}_T) < 0$ и $i_{T+1}(h_{T+1}) < 0$ — тогда неравенство (2.2.1) не может выполняться;

2) выполнены неравенства $I_T(\mathbf{h}_T) < 0$ и $s_{T+1}(h_{T+1}^*) \leq 0$ — тогда

$$i_{T+1}(h_{T+1}) \leq s_{T+1}(h_{T+1}^*) \leq 0$$

и неравенство (2.2.1) не может выполняться;

3) выполнены неравенства $S_T(\mathbf{h}_T) \leq 0$ и $i_{T+1}(h_{T+1}) < 0$ — тогда

$$I_T(\mathbf{h}_T) \leq S_T(\mathbf{h}_T) \leq 0$$

и неравенство (2.2.1) не может выполняться;

4) выполнены неравенства $S_T(\mathbf{h}_T) \leq 0$ и $s_{T+1}(h_{T+1}) \leq 0$ — тогда неравенство (2.2.2) не может выполняться.

Таким образом, мы пришли к противоречию, а значит многошаговые арбитражные возможности не могут существовать при выполнении пошагового условия отсутствия арбитражных возможностей. \square

Для гарантированного детерминистского подхода релевантными оказываются условия безарбитражности, которые являются весьма слабыми, — слабее чем NDAO и чем соответствующие вероятностные понятия безарбитражности, которые анализируются, например, в [43]. Тем самым, наш подход работает при большей общности постановки задачи.

Определение 2.2.4. *Под гарантированным арбитражем¹³ на шаге $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ при заданной предыстории цен $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$ будем понимать выполнение сле-*

¹³Устойчивый термин не сложился; мы предпочли термин “sure arbitrage”, как наиболее точно выражающий смысл понятия. Например, в книге [207], посвященной моделям с дискретным временем и конечным числом «состояний мира» (приращения цен в этом случае принимают конечное число значений), наличие “dominant strategy” (термин отличается от значения из работы [194]) равносильно наличию гарантированного арбитража. Эта терминология была предложена нами в конце 90-х годов; в «робастном» подходе, интенсивно развиваемом последние годы, арбитражная возможность из определения 2.2.1 соответствует термину “One Point Arbitrage” и в нашей постановке задачи также соответствует термину “quasi-sure arbitrage” из [105]; гарантированный арбитраж из определения 2.2.4 соответствует термину “Strong Arbitrage” из [109]. Подробный анализ соотношения различных определений «безарбитражности» для робастного подхода к моделированию финансового рынка с дискретным временем приведен в [204].

дующего условия: найдется допустимая на шаге t стратегия $h^* = h^*(\bar{x}_{t-1}) \in D_t(\bar{x}_{t-1})$, такая что¹⁴ $h^*y > 0$ для всех $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$.

Будем говорить, что на шаге $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ при заданной предыстории цен $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$ отсутствуют гарантированный арбитраж, если для любой допустимой на шаге t стратегии $h \in D_t(\bar{x}_{t-1})$ найдется приращение цен $y^* = y^*(\bar{x}_{t-1}) \in K_t(\bar{x}_{t-1})$, такое что $hy^* \leq 0$.

Определение NDSA.¹⁵ Будем говорить, что выполняется пошаговое условие отсутствия гарантированного арбитража, если на каждом шаге $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ при любой предыстории цен $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$ гарантированный арбитраж отсутствует в смысле определения 2.2.4.

Условие NDSA, безусловно, весьма слабое требование «безарбитражности» рынка; тем не менее, именно такая форма «безарбитражности» рынка является вполне релевантной для детерминистской постановки с торговыми ограничениями¹⁶ и при анализе игрового равновесия в игре «рынок» - «хеджер»¹⁷. Как правило, применение условия NDSA дает некоторые нестрогие неравенства. Приведем пример экономического характера, подтверждающий этот тезис.

Пример 2.2.1. Цена v_t , по которой на рынке в момент времени t можно продать американский опцион, не должна быть больше, чем значение v_t^* , определяемое уравнениями (BI) — из соображений отсутствия гарантированного арбитража, т. к. если $v_t > v_t^*$, то продав опцион за v_t , получим средства $v_t^* + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < v_t - v_t^*$, достаточные для суперхеджирования. Таким образом, применение условия NDSA приводит к неравенству $v_t \leq v_t^*$.

Определение 2.2.5. Под гарантированным многошаговым арбитражем на интервале $\llbracket 0, N \rrbracket$, будем понимать существование такой допустимой стратегии

$$h_N^* = (h_1^*(\bar{x}_0), \dots, h_N^*(\bar{x}_{N-1})),$$

удовлетворяющей торговым ограничениям:

$$h_t^* \in D_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

что для любой возможной траектории цен $\bar{x}_N \in B_N$

$$\sum_{s=1}^N h_s^* \Delta x_s > 0.$$

Определение 2.2.6. Будем говорить, что выполняется условие отсутствия гарантированного многошагового арбитража, если гарантированный многошаговый арбитраж на интервале $\llbracket 0, N \rrbracket$ в смысле определения 2.2.5 отсутствуют.

¹⁴Для компактных множеств $K_t(\cdot)$ стратегии h^* удовлетворяет свойству $\min_{y \in K_t(\cdot)} h^*y > 0$.

¹⁵От “No Deterministic Sure Arbitrage”.

¹⁶На самом деле, релевантными также будут и более слабые условия «безарбитражности», рассмотренные далее в этой главе, в разделах 2.3 и 2.4.

¹⁷Это понятие будет введено в главе 5.

Предложение 2.2.2. *Условие NDAO, т. е. пошаговое условие отсутствия арбитражных возможностей влечет пошаговое условие отсутствия гарантированного арбитража NDSA, которое, в свою очередь, влечет отсутствие гарантированного многошагового арбитража.*

Доказательство. Первая импликация вытекает из того, что гарантированный арбитраж на шаге $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ при заданной предыстории цен $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$ является арбитражной возможностью на шаге $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ при заданной предыстории цен $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$.

Что касается второй импликации, то для горизонта $N = 1$ это выполняется тривиально. Предположим, что для горизонта $N = T$, где $T \geq 1$, установлено, что из пошагового условия отсутствия гарантированного арбитража следует отсутствие гарантированного многошагового арбитража. Проверим, что аналогичное свойство будет выполнено и для горизонта $N = T + 1$. Пусть пошаговое условие отсутствия арбитражных возможностей выполнено на интервале $\llbracket 0, T + 1 \rrbracket$; тогда оно выполнено и на интервале $\llbracket 0, T \rrbracket$ и по индуктивному предположению на интервале $\llbracket 0, T \rrbracket$ отсутствуют многошаговые арбитражные возможности. Тогда для любой допустимой стратегии h_T на интервале $\llbracket 0, T \rrbracket$, найдется возможная траектория цен $\bar{x}_T^* \in B_T$, такая что

$$\sum_{s=1}^T h_s \Delta x_s^* \leq 0.$$

Для любой предыстории, в частности для найденной $\bar{x}_T^* \in B_T$, а также для любого $h_{T+1} \in D_{T+1}(\bar{x}_T^*)$ найдется приращение цен $y_{T+1} = y_{T+1}(\bar{x}_T^*) \in K_{T+1}(\bar{x}_T^*)$, такое что $h_{T+1} y_{T+1} \leq 0$. Так что достаточно положить $x_{T+1}^* = x_T^* + y_{T+1}(x_T^*)$. \square

В статье [113], посвященной анализу модели с дискретным временем без торговых ограничений заявленной целью является определение цены суперхеджирования без использования предположения о безарбитражности финансового рынка (об этом уже упоминалось в главе 1). Авторы этой статьи пишут следующее:

If 0 does not belong to the convex hull of the conditional support of the price increment, then the superhedging cost is equal to $-\infty$. To exclude this unrealistic possibility we postulate the condition of Absence of Instantaneous Profit (AIP). So AIP condition is indeed the minimal requirement in order to get a financial market where pricing is possible. The AIP is very weak : if the initial information is trivial, a one period instantaneous profit is a strategy starting from 0 and leading to a terminal wealth larger than some strictly positive constant¹⁸.

¹⁸«Если 0 не принадлежит выпуклой оболочке носителя условного распределения приращений цен, то цена суперхеджирования равняется $-\infty$. Чтобы исключить эту нереалистичную возможность, мы постулируем условие отсутствия мгновенной прибыли (AIP). Таким образом,

Отметим, что условие “AIP condition” (понимаемое в [113] почти всюду) в нашем контексте¹⁹ эквивалентно условию NDSA. Экономическая интерпретация обращения цены суперхеджирования в $-\infty$ при невыполнении условию NDSA заключается в том, что не накладывается никаких ограничений на величину резервов, необходимых для покрытия обусловленного обязательства (в том числе, и на величину задолженности, когда величина требуемых резервов отрицательна), поскольку гарантированный арбитраж позволяет заработать неограниченно большую прибыль.

Для удобства будем далее использовать обозначение

$$K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot)), \quad (2.2.3)$$

где $\text{conv}(A)$ обозначает выпуклую оболочку множества A .

Замечание 2.2.2. Наличие арбитражной возможности или же гарантированного арбитража для исходной модели динамики цен, описываемой компактами $K_t(\cdot)$ и для заглубленной модели с априорными ограничениями на приращения цен в виде компактов $K_t^*(\cdot)$, которую можно назвать моделью, «заглубленную посредством овыпукления», суть одно и то же, причем «арбитраж» реализуется при помощи одной и той же «арбитражной» стратегии²⁰ $h^* \in D_t(\cdot)$.

Действительно, если имеется арбитражная возможность $h^* \in D_t(\cdot)$ или же гарантированный арбитраж для «заглубленной посредством овыпукления» модели (т. е. когда $\Delta X_t \in K_t^*(\cdot)$), тогда то же самое имеет место для исходной модели ($\Delta X_t \in K_t(\cdot)$). Для гарантированного арбитража это утверждение непосредственно вытекает из определения 2.2.4. Если h^* — арбитражная возможность, условие 1° определения 2.2.1 очевидно выполняется с тем же h^* для исходной модели. Что касается условия 2° то, поскольку найдется $y^* \in K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$ такой, что $h^* y^* > 0$, y^* представим в виде выпуклой комбинации конечного²¹ числа точек y_1, \dots, y_m из $K_t(\cdot)$. Иными словами, для некоторых чисел $p_i > 0$ $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, таких что $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, имеем $y^* = \sum_{i=1}^m p_i y_i$. Напомним, что $h^* y_i \geq 0$. С учетом вышеизложенного получим

$$h^* y^* = \sum_{i=1}^m p_i h^* y_i > 0,$$

отсюда следует, что для некоторого i имеет место $h^* y_i > 0$, т. е. условие 2° выполнено для $y_i \in K_t(\cdot)$.

условие AIP, на самом деле, представляет собой минимальное требование к финансовому рынку, чтобы ценообразование было возможным. Условие AIP является весьма слабым: при отсутствии начальной информации однопериодный мгновенный арбитраж есть стратегия, стартующая с 0 и приводящая к терминальному капиталу, большему, чем некоторая строго положительная константа.»

¹⁹Напомним, что мы предполагаем компактность множеств $K_t(\cdot)$; см. замечание 2.2.5 далее в этой главе.

²⁰Торговые ограничения для этих двух моделей предполагаются одинаковыми.

²¹По теореме Каратеодори их можно выбрать в количестве не более чем $n + 1$, так как $K_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Обратно, если имеется арбитражная возможность или же гарантированный арбитраж для исходной модели, то, поскольку для арбитражной стратегии h^* в исходной системе замкнутое полупространство $\{y : h^*y \geq 0\}$ или открытое полупространство $\{y : h^*y > 0\}$ выпуклы, эти множества содержат вместе с $K_t(\cdot)$ и его выпуклую оболочку $K_t^*(\cdot)$.

Приведенные выше рассуждения позволяют объяснить, почему в геометрических критериях безарбитражности, сформулированных ниже, всегда присутствует $\text{conv}(K_t(\cdot))$.

Обозначим

$$D^\circ = \{y : hy \leq 0, \forall h \in D\} \quad (2.2.4)$$

полярный²² к D конус. Если $y \in D_t^\circ(\cdot)$, то это «абсолютно неблагоприятный сценарий», не приносящий прибыль на шаге времени t ни при каких допустимых стратегиях. Очевидно, конус $D_t^\circ(\cdot)$ является замкнутым и выпуклым.

Рассмотрим следующее геометрическое условие:

$$\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^\circ(\cdot) \neq \emptyset. \quad (2.2.5)$$

Условие (2.2.5) можно интерпретировать также следующим образом: для «заглубленной посредством овыпукления» системы имеются «абсолютно неблагоприятные сценарии».

Мы уже отмечали ранее, во введении, что для нашей постановки задачи естественно использовать теоретико-игровые методы. Подтверждением этому может служить следующий результат²³, устанавливающий, в частности, эквивалентность условий NDSA и (2.2.5) и сформулированный в терминах величины $\pi_t(\cdot)$ — значения «игры», определяемой заданными²⁴ $K_t^*(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$, экономический смысл которой — максимальная прибыль от гарантированного арбитража, если таковой имеется, и нулевая прибыль в случае отсутствия такового.

Предложение 2.2.3.

1° *Имеет место равенство*

$$\pi_t(\cdot) = \sup_{h \in D_t(\cdot)} \min_{y \in K_t^*(\cdot)} hy = \min_{y \in K_t^*(\cdot)} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy. \quad (2.2.6)$$

2° *Величина $\pi_t(\cdot)$ всегда неотрицательна (возможно равна $+\infty$), причем она равна нулю, если выполнено NDSA, и положительна, если существует гарантированный арбитраж.*

3° *Условие NDSA равносильно условию (2.2.5).*

²²Строго говоря, корректно говорить о полярном к D конусе, если D — конус, но мы позволим себе некоторую вольность речи.

²³Заметим, что условие компактности $D_t(\cdot)$ не требуется, достаточно компактности $K_t(\cdot)$.

²⁴Здесь используется обозначение (2.2.3).

Доказательство. Равенство в пункте 1° является непосредственным следствием классической теоремы Кнезера [183]. Величина $\pi_t(\cdot)$ неотрицательна, т. к. $0 \in D_t(\cdot)$ и потому $\sup_{h \in D_t(\cdot)} hy \geq 0$ для всех y . Допустим, что условие (2.2.5) не выполняется:

$$\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^\circ(\cdot) = \emptyset.$$

Тогда для любого $y \in \text{conv}(K_t(\cdot))$ выполняется $\sup_{h \in D_t(\cdot)} hy > 0$, поскольку $y \notin D_t^\circ(\cdot)$.

Минимум полунепрерывной снизу выпуклой функции $y \mapsto \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy$ достигается²⁵ в некоторой точке компакта $K_t^*(\cdot)$, так что

$$\min_{y \in K_t^*(\cdot)} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy > 0.$$

И, в силу установленного в пункте 1° равенства, получаем

$$\pi_t(\cdot) = \sup_{h \in D_t(\cdot)} \min_{y \in K_t^*(\cdot)} hy = \min_{y \in K_t^*(\cdot)} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy > 0.$$

Поэтому найдется $h^* \in D_t(\cdot)$ такой что

$$\min_{y \in K_t^*(\cdot)} h^*y > 0.$$

Но это означает, что h^* реализует гарантированный арбитраж. Тем самым установлено утверждение 3°.

Пусть теперь выполняется (2.2.5), тогда найдется точка $y^* \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^\circ(\cdot)$. Поскольку $y^* \in D_t^\circ(\cdot)$, то $\sup_{h \in D_t(\cdot)} hy^* \leq 0$, и поскольку $0 \in D_t(\cdot)$, то $\sup_{h \in D_t(\cdot)} hy \geq 0$ для всех y , так что $\sup_{h \in D_t(\cdot)} hy^* = 0$. Тем самым в точке $y^* \in K_t(\cdot)$ достигается минимум функции $y \mapsto \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy$, равный нулю, т. е. $\pi_t(\cdot) = 0$. Так как

$$\pi_t(\cdot) = \sup_{h \in D_t(\cdot)} \min_{y \in K_t^*(\cdot)} hy = 0,$$

то для любого $h \in D_t(\cdot)$ имеет место

$$\min_{y \in K_t^*(\cdot)} hy \leq 0.$$

Таким образом, не может существовать стратегия гарантированного арбитража $h^* \in D_t(\cdot)$, т. е. такая, что $h^*y > 0$ для всех $y \in K_t^*(\cdot)$. \square

Замечание 2.2.3. Достаточность условия (2.2.5) для выполнения NDSA может быть доказана непосредственно, без использования величины $\pi_t(\cdot)$. Это следует, с учетом замечания 2.2.2, из того, что найдется точка $y^* = K_t^*(\cdot)$, такая что $hy^* \leq 0$ для всех $h \in D_t(\cdot)$.

²⁵Функция $y \mapsto \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy = \sigma_{D_t(\cdot)}(y)$ может принимать значение $+\infty$, в случае неограниченного $D_t(\cdot)$. Здесь $\sigma_D(\cdot)$ — опорная функция множества D , т. е. $\sigma_D(y) = \sup\{hy : h \in D\}$.

Что касается условия NDAO, геометрические критерии, типа (2.2.5), оказываются значительно деликатнее, даже для случая конечных $K_t(\cdot)$, см. [42; 43]. Однако при детерминированной постановке для анализа игрового равновесия важно именно²⁶ условие NDSA, а не NDAO. Поэтому, чтобы не загромождать изложение техническими деталями, мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением NDAO только для частного, но наиболее часто рассматриваемого в работах по финансовой математике, случая отсутствия торговых ограничений, т. е. случая

$$D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n.$$

Случай отсутствия торговых ограничений NDAO равносильен следующему утверждению²⁷, непосредственно вытекающему из определения:

Предложение 2.2.4. *Для каждого $h \in \mathbb{R}^n$ верна альтернатива:*

- либо²⁸ $hy = 0$ для всех $y \in K_t(\cdot)$;
- либо найдутся $y_1, y_2 \in K_t(\cdot)$ такие, что $hy_1 > 0$ и $hy_2 < 0$.

В случае отсутствия торговых ограничений нетрудно получить критерий для NDAO в геометрической форме, аналогичный результатам [177]²⁹.

Предложение 2.2.5. *В случае отсутствия торговых ограничений, NDAO равносильно следующему утверждению:*

- а) либо $K_t(\cdot) = \{0\}$;
- б) либо $K_t(\cdot)$ содержит не менее двух точек, и точка 0 содержится в относительной внутренней выпуклой оболочке (по отношению к аффинной оболочке) выпуклой оболочки $\text{conv}(K_t(\cdot))$ компакта $K_t(\cdot)$ для любого $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Достаточность альтернативы а) и б) очевидна в силу предложения 2.2.4. Чтобы установить необходимость этой альтернативы, предположим, что точка 0 не содержится в относительной внутренней выпуклой оболочке компакта $K_t(\cdot)$. Тогда либо 0 не принадлежит выпуклой оболочке — в этом случае существует гарантированный арбитраж в силу строгой отделимости точки 0 и $K_t(\cdot)$ гиперплоскостью, либо точка 0 находится на границе выпуклой оболочки компакта $K_t(\cdot)$ — тогда выполняется 1° определения 2.2.1, поскольку существует опорная гиперплоскость в нуле. Если $K_t(\cdot)$ содержит одну точку, то эта точка, стало быть, должна быть точкой 0. Если в $K_t(\cdot)$ имеется по крайней мере две

²⁶Это, с экономической точки зрения, связано с тем, что условие NDSA является критерием существования линейного правила ценообразования, см. [207, утверждение 19] (в этой книге пространство «состояний мира» предполагается конечным).

²⁷На самом деле, это условие означает, что (в терминах Мертона) безрисковый актив не является ни доминантным, ни доминируемым.

²⁸Это возможно в вырожденном случае, когда $K_t(\cdot)$ содержится в аффинном многообразии меньшей чем n размерности.

²⁹См. также [69].

точки, то в $K_t(\cdot)$ имеется точка, отличная от нуля; опорную плоскость к точке 0 всегда можно выбрать так, чтобы эта точка лежала в «положительной» полуплоскости, то есть выполняется 2° определения 2.2.1.

Замечание 2.2.4. С формальной математической точки зрения можно было бы не выделять случай а), поскольку относительная внутренность множества $\{0\}$ совпадает с этим множеством, однако используемая формулировка выигрывает в наглядности. Альтернативу а) и б) можно записать в виде одного условия:

$$0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (2.2.7)$$

где $\text{ri}(A)$ обозначает относительную внутренность A .

Этот критерий мы считаем уместным называть геометрическим критерием Жакода–Ширяева отсутствия арбитражных возможностей NDAO (при отсутствии торговых ограничений), см. [177]. Для сравнения: при отсутствии торговых ограничений геометрический критерий условия NDSA сводится, с учетом пункта 3° предложения 2.2.3, к соотношению:

$$0 \in \text{conv}(K_t(\cdot)), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.2.8)$$

Замечание 2.2.5. Отметим, что геометрический критерий условия AIP, представленный в [113, пункт 1 предложения 2.11] как раз совпадает с условием (2.2.8) (понимаемым почти наверное в [113]), где $K_t(\cdot)$ есть (топологический) носитель условного распределения приращений (дисконтированных) цен. Однако, в отличие от нашего случая, когда предполагается компактность множеств $K_t(\cdot)$ и потому $\text{conv}(K_t(\cdot))$ компактно, а значит замкнуто, в [113] предположения о компактности носителей не делается. Хорошо известно, что выпуклая оболочка замкнутого множества, вообще говоря, не является замкнутой. По этой причине [113, предложение 2.11] содержит ошибочное утверждение: из пункта 2 не следует пункт 1, можно лишь утверждать, что $0 \in \text{cl}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, где $\text{cl}(A)$ — замыкание множества A (это вытекает, например, из [40, следствие 13.1.1]³⁰).

В качестве простого контрпримера можно привести одношаговую модель динамики цен с двумя рисковыми активами³¹, полагая $K_0 \subseteq (2, +\infty) \times (1, +\infty) \subseteq \mathbb{R}^2$ и $K_1(\cdot) = \{(y_1, y_2) : y_2 = y_1 + 1, y_1 \in [-2, +\infty)\} \cup \{(-1, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (на самом деле, здесь нет зависимости от начальной цены).

В рамках гарантированного детерминистского подхода для функции выплат w (которая обычно является неотрицательной), утверждение³² «если 0 не принадлежит выпуклой оболочке носителя условного распределения приращений цен, то цена суперхеджирования равна $-\infty$ » является неверным для данного примера, поскольку цена суперхеджирования равна

$$\inf_{h \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in K_1(x_0)} [w(x_0, y) - hy],$$

³⁰Конкретно, здесь требуется частный случай этого утверждения, а именно, опорная функция множества неотрицательна тогда и только тогда, когда точка 0 принадлежит замыканию этого множества.

³¹Параметры модели выбраны таким образом, чтобы обеспечить положительность цен.

³²Мы уже приводили выше это утверждение из [113].

и

$$\sup_{y \in K_1(x_0)} [w(x_0, y) - hy] \geq \sup_{y \in K_1(x_0)} -hy = \sigma_{-K_1(x_0)}(h) = \sigma_{\text{cl}(\text{conv}(-K_1(x_0)))}(h) \geq 0,$$

так как $0 \in \text{cl}(\text{conv}(-K_1(x_0)))$.

Определение 2.2.7. Пусть дана модель с заданным описанием неопределенности движения цен $K_t(\cdot)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ и торговыми ограничениями $D_t(\cdot)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, а также дана модель с теми же торговыми ограничениями и более грубым описанием неопределенности движения цен $K'_t(\cdot)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, т. е. таким, что $K_t(\cdot) \subseteq K'_t(\cdot)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Будем говорить, что для безарбитражности (понимаемой в определенном смысле) выполнен принцип неопределенности, или же выполнено свойство монотонности, если из выполнения условия безарбитражности, для первой модели следует выполнение условия безарбитражности для второй модели.

Свойство монотонности безарбитражности является естественным с экономической точки зрения благодаря принятой нами интерпретации³³ модели динамики цен в рамках детерминистского подхода — как описание неопределенности движения цен. Поэтому, если нет возможности извлечения арбитражной прибыли в рамках исходной модели, то нет оснований считать, что такая возможность появится в рамках более грубой модели, с меньшей информацией, касающейся возможного движения цен.

Свойство монотонности безарбитражности выполняется для NDSA, что следует непосредственно из определения, однако выполнения свойства монотонности для NDAO требуются дополнительные предположения.

Теорема 2.2.1. В случае отсутствия торговых ограничений свойство монотонности безарбитражности для NDAO будет выполняться если и только если $K_t(\cdot)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ будут полноразмерными, т. е.

$$\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \neq \emptyset, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.2.9)$$

Доказательство. Пусть выполнено условие NDAO, что эквивалентно геометрическому условию (2.2.7), но для некоторого момента $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ и некоторой предыстории цен $\bar{x}_{t-1}^* \in B_{t-1}$ множество $\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}^*))$ имеет пустую внутренность, что в данном случае равносильно тому, что $K_t(\bar{x}_{t-1}^*)$ содержится в линейном подпространстве $L \subseteq \mathbb{R}^n$ размерности меньше чем n . Добавим к $K_t(\bar{x}_{t-1}^*)$ одну точку y , не лежащую в L и положим $K'_t(\bar{x}_{t-1}^*) = K_t(\bar{x}_{t-1}^*) \cup \{y\}$, а для остальных моментов времени $s \neq t$ и остальных предысторий к моменту t , т. е. для $\bar{x}_{t-1} \neq \bar{x}_{t-1}^*$, положим $K'_s(\bar{x}_{s-1}) = K_s(\bar{x}_{s-1})$. При такой конструкции получим, что для модели с динамикой рынка $K'_s(\bar{x}_{s-1})$ не выполняется

³³В интерпретации, принятой в традиционной вероятностной модели динамики рынка, множество возможных траекторий цен фиксировано (с точностью до множества нулевой меры), что задается классом эквивалентных вероятностных мер.

условие NDAO,³⁴ поскольку $0 \notin \text{ri}(\text{conv}(K'_t(\bar{x}_{t-1}^*)))$ (см. замечание 2.2.4). Тем самым, принцип неопределенности для NDAO нарушается.

Если же (2.2.9) имеет место, тогда, очевидно, для NDAO принцип неопределенности будет выполняться. \square

Замечание 2.2.6. Таким образом, монотонный вариант условия отсутствия арбитражных возможностей имеет вид

$$0 \in \text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.2.10)$$

Как мы увидим далее, в разделе 2.4, условие (2.2.9) равносильно структурной устойчивости, а (2.2.10) — геометрический критерий робастного (грубого) условия отсутствия арбитражных возможностей, RNDAO.

Пример 2.2.2. В случае отсутствия торговых ограничений, вышеприведенные критерии «безарбитражности» можно проиллюстрировать на простейшем примере — модели для случая одного «рискового» актива (при $n = 1$), которую мы будем называть одномерной мультипликативной моделью. Цену единственного «рискового» актива будем записывать без верхнего индекса: X_t . Динамика цены этого актива задается в виде мультипликативного представления вида:

$$X_t = M_t X_{t-1}, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

где $X_0 > 0$. Априорно известно, что $M_t \in [\alpha, \beta]$, $\beta > \alpha > 0$, так что модель является однородной по времени, со свойством мультипликативной независимости, см. раздел 1.2 главы 1; здесь $K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = [x_{t-1}(\alpha - 1), x_{t-1}(\beta - 1)]$.

Условие «безарбитражности» NDAO равносильно условию $1 \in (\alpha, \beta)$, то есть через один период в будущем возможно как повышение, так и понижение цены рискованного актива; другими словами, доходность на периоде t рискованного актива $R_t = M_t - 1$ может быть как положительной, так и отрицательной. Если $\alpha = 1$ или $\beta = 1$, имеется арбитражная возможность, но выполнено условие «безарбитражности» NDSA, т. е. отсутствие гарантированного арбитража. Если же $\alpha > 1$ или $\beta < 1$, то имеет место гарантированный арбитраж: чтобы его реализовать, достаточно занять длинную позицию по рискованному активу³⁵ при $\alpha > 1$ и короткую позицию — при $\beta < 1$.

2.3 Отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью

В случае гарантированного арбитража (т. е. когда $\pi_t(\cdot) > 0$, в соответствии с предложением 2.2.3) будем различать два случая:

³⁴Отметим, что при этом выполняется NDSA.

³⁵Финансируя эту длинную позицию за счет короткой позиции по безрисковому активу, при отсутствии торговых ограничений арбитраж возможен без начального капитала.

Определение SAUP. ³⁶ Будем говорить о гарантированном арбитраже с неограниченной прибылью в момент t , если $\pi_t(\cdot) = +\infty$.

Определение SABP. ³⁷ Будем говорить о гарантированном арбитраже с ограниченной прибылью в момент t , если $0 < \pi_t(\cdot) < +\infty$.

Отметим, что в отсутствии торговых ограничений при наличии гарантированного арбитража имеют место неограниченные прибыли, т. е. SAUP. В этом случае $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$, где $\text{bar}(A)$ обозначает барьерный конус множества A :

$$\text{bar}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \sigma_A(y) < +\infty\}.$$

Определение NDSAUP. Будем говорить, что выполняется условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью, если арбитраж SAUP невозможен, т. е. $\pi_t(\cdot) < +\infty$ для любого $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Данное условие будем обозначать **NDSAUP**³⁸.

Достаточным условием для выполнения условия NDSAUP является вид торговых ограничений, когда множества $D_t(\cdot)$ компактны, поскольку в этом случае выпуклая функция $y \mapsto \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy = \sigma_{D_t(\cdot)}(y)$ принимает конечные значения; в этом случае $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \mathbb{R}^n$.

Теорема 2.3.1. Условие NDSAUP выполняется тогда и только тогда, когда

$$\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.3.1)$$

Доказательство. Предположим, что не выполняется условие (2.3.1); ясно, что в этом случае множество $D_t(\cdot)$ является неограниченным. Обозначим $\bar{D}_t(\cdot)$ замыкание множества $D_t(\cdot)$:

$$\bar{D}_t(\cdot) = \text{cl}(D_t(\cdot)).$$

Опорные функции выпуклого множества в \mathbb{R}^n и его замыкания совпадают, так что $\sigma_{\bar{D}_t(\cdot)} = \sigma_{D_t(\cdot)}$ и $\text{bar}(\bar{D}_t(\cdot)) = \text{bar}(D_t(\cdot))$, поэтому имеем

$$\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(\bar{D}_t(\cdot)) = \emptyset.$$

В силу компактности $\text{conv}(K_t(\cdot))$, можно строго отделить гиперплоскостью, проходящей через начало координат, выпуклое множество $\text{conv}(K_t(\cdot))$ и конус $\text{bar}(\bar{D}_t(\cdot))$: найдется $h_t^*(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} h_t^*(\cdot)y = \varepsilon_t(\cdot) > 0$$

³⁶От “Sure Arbitrage with Unbounded Profit”.

³⁷От “Sure Arbitrage with Bounded Profit”.

³⁸От “No Deterministic Sure Arbitrage with Unbounded Profit”.

и

$$h_t^*(\cdot)y < 0 \text{ для } y \in \text{bar}(\bar{D}_t(\cdot)), \quad (2.3.2)$$

см. [40, следствие 11.4.2 и теорему 11.7].

Заметим, что для замкнутого непустого выпуклого множества A полярный к $\text{bar}(A)$ конус $(\text{bar}(A))^\circ$ совпадает с рецессивным конусом³⁹ O^+A , см. [40, следствие 14.2.1]. Тем самым, (2.3.2) означает, что $h_t^*(\cdot) \in O^+\bar{D}_t(\cdot)$, а поскольку $0 \in D_t(\cdot) \subseteq \bar{D}_t(\cdot)$, то по следствию 8.2 из [40] $\alpha h_t^*(\cdot) \in \bar{D}_t(\cdot)$ для всех $\alpha \geq 0$, в том числе $h_t^*(\cdot) \in \bar{D}_t(\cdot)$. Далее,

$$\begin{aligned} \pi_t(\cdot) &= \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy = \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} \sup_{h \in \bar{D}_t(\cdot)} hy \geq \sup_{h \in \bar{D}_t(\cdot)} \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} hy \geq \\ &\geq \sup_{\alpha \geq 0} \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} \alpha h_t^*(\cdot)y = \sup_{\alpha \geq 0} \alpha \varepsilon_t(\cdot) = +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае, если не выполнено (2.3.1), то $\pi_t(\cdot) = +\infty$, а следовательно NDSAUP не выполняется.

Если же (2.3.1) выполняется, то найдется $y_t^*(\cdot) \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))$, поэтому

$$\pi_t(\cdot) = \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy \leq \sup_{h \in D_t(\cdot)} h y_t^*(\cdot) = \sigma_{D_t(\cdot)}(y^*) < +\infty,$$

поскольку $y^* \in \text{bar}(D_t(\cdot))$. \square

Обсудим теперь вопрос, может ли иметь смысл хеджирование в случае, когда выполнено условие NDSAUP, но существует гарантированный арбитраж SABP. В соответствии с теоремой 2.3.1 это случай, когда выполняется⁴⁰ условие (2.3.1) и, в соответствии с предложением 2.2.3, $0 < \pi_t(\cdot) < \infty$.

Если рассматривать задачу с одним рисковым активом, когда $K_t(\cdot)$ — выпуклый компакт, который в одномерном случае представляет собой замкнутый интервал вида $[\bar{a}_t(\cdot), \bar{b}_t(\cdot)]$, $\bar{a}_t(\cdot) < \bar{b}_t(\cdot)$, а $0 \notin [\bar{a}_t(\cdot), \bar{b}_t(\cdot)]$, то ответ на этот вопрос будет отрицательным. Дело в том, что функция $h \mapsto \sup_{y \in K_t(\cdot)} [v_t(\cdot, x_{t-1} + y) - hy]$ будет строго монотонной, причем

- 1° возрастающей, если $\bar{b}_t(\cdot) < 0$, а гарантированный арбитраж реализуется путем формирования короткой позиции по рисковому активу, т. е. $h < 0$;
- 2° убывающей, если $\bar{a}_t(\cdot) > 0$, а гарантированный арбитраж реализуется путем формирования длинной позиции по рисковому активу, т. е. $h > 0$.

Обозначим $\bar{c}_t(\cdot) = \inf D_t(\cdot)$, $\bar{d}_t(\cdot) = \sup D_t(\cdot)$. Напомним, что $D_t(\cdot)$ — выпуклое множество, так что оно является интервалом, причем $0 \in D_t(\cdot)$. Таким

³⁹См. [40, § 8 гл. II]. Рецессивный конус для непустого выпуклого множества A может быть определен как конус $O^+A = \{y : A + y \subseteq A\}$. Если A при этом замкнуто, то и конус O^+A тоже замкнут.

⁴⁰В частности, это выполнено, когда $D_t(\cdot)$ компактны.

образом, $-\infty \leq \bar{c}_t(\cdot) \leq 0 \leq \bar{d}_t(\cdot) \leq +\infty$. Чтобы обеспечить NDSAUP и наличие SABP, нужно потребовать, чтобы в случае 1° выполнялось $-\infty < \bar{c}_t(\cdot) < 0$; а в случае 2° выполнялось $0 < \bar{d}_t(\cdot) < +\infty$. Таким образом, для минимизации рассматриваемой функции по h нужно в случае 1° выбирать минимально возможное h , а именно $h \rightarrow \bar{c}_t(\cdot)$, если $c_t(\cdot) \notin D_t(\cdot)$, и $h = \bar{c}_t(\cdot)$, если $c_t(\cdot) \in D_t(\cdot)$, а в случае 2° наоборот, максимально возможное h , т. е. $h \rightarrow \bar{d}_t(\cdot)$, если $\bar{d}_t(\cdot) \notin D_t(\cdot)$, и $h = \bar{d}_t(\cdot)$, если $\bar{d}_t(\cdot) \in D_t(\cdot)$, что соответствует извлечению максимально возможной арбитражной прибыли.

В двумерном случае, однако, для компактных торговых ограничений можно дать положительный ответ на поставленный вопрос, но соответствующий пример мы приведем в главе 5, когда будут введены смешанные стратегии «рынка». Тем самым, условие безарбитражности, еще более слабое, чем NDSA, а именно NDSAUP, имеет экономический смысл — по крайней мере, для опционов типа “rainbow” (на несколько базовых активов).

Замечание 2.3.1. В случае, когда торговые ограничения задаются выпуклыми конусами $D_t(\cdot)$, в частности, если отсутствуют торговые ограничения, условие NDSAUP влечет условие отсутствия гарантированного арбитража NDSA, т. е. для конических торговых ограничений NDSAUP равносильно NDSA. Барьерный конус для $D_t(\cdot)$ совпадает с полярным конусом для $D_t(\cdot)$, т. е.

$$\text{bar} (D_t(\cdot)) = D_t^{\circ}(\cdot),$$

так что это непосредственно вытекает из геометрических критериев (2.3.1) и (2.2.5) и имеет простую экономическую интерпретацию: гарантированный арбитраж в этом случае всегда может приносить неограниченную прибыль.

2.4 Структурная устойчивость модели и грубая (робастная) форма безарбитражности

Структурная устойчивость является фундаментальным свойством модели, означающим, что качественное поведение модели не меняется при небольших (в определенном смысле) ее возмущениях. С экономической точки зрения качественное поведение модели финансового рынка определяется отсутствием «арбитража» в некотором смысле. Таким образом, для корректности финансового моделирования имеет смысл опираться на принцип грубости⁴¹, который обеспечивает структурную устойчивость модели.

Идея устойчивости свойства отсутствия арбитража при некотором возмущении модели присутствует в литературе; мы ограничиваемся упоминанием лишь нескольких статей. Начнем с [217], где было введено «устойчивое условие отсутствия арбитража» в случае пропорциональных транзакционных издержек. Экономический смысл этого понятия заключается в том, что у брокера все еще

⁴¹ Термин «грубость» заимствован из теории динамических систем, по аналогии с термином из известной работы А. А. Андропова и Л. С. Понтрягина [3].

есть возможность предложить некоторую скидку при указании цен покупки и продажи без создания возможности арбитража. Имеются также ad hoc определения устойчивости свойства «безарбитражности» — в рамках конкретной модели. Так, например, в [87], где в модели рассматривается случай с неторгуемыми (статическими) опционами, которые котируются с разницей между ценой покупки и продажи. При этой постановке задачи устойчивость свойства отсутствия арбитража оказывается эквивалентной отсутствию арбитража при дополнительном предположении, что совокупность «хеджирующих» опционов с ненулевым спредом не являются «избыточной», что означает, что эти опционы не могут быть точно реплицированы другими опционами и рисковыми активами. Для рынка без транзакционных издержек простой, но интересный результат представлен в [205], где показано, что при условии, когда совокупность рискованных активов не является «избыточной», что равносильно структурной устойчивости в том смысле, который будет определен ниже в этом параграфе, для одношаговой модели свойство «безарбитражности» сохраняется при достаточно малом возмущении начальной вероятности в метрике, отвечающей норме полной вариации. Иногда подобные свойства используются неявно, как в [170], рассматривается непрерывная временная модель финансового рынка с рисковыми активами и (статическими) опционами на них, которые не являются торгуемыми, за исключением начального момента времени, а также K европейскими опционами, где $K \geq 0$, которые постоянно торгуются. Общие результаты двойственности в статье используют предположение 3.1 относительно этих K опционов (когда $K \geq 1$), требующее, чтобы их цены не находились «на границе области без арбитража», т. е. чтобы откалиброванные мартингалные меры существовали бы при сколь угодно малых возмущениях начальной цены. Таким образом, *в зависимости от контекста структурная устойчивость может быть формализована по-разному.*

Нами предлагается *формализация структурной устойчивости в рамках гарантированного детерминированного подхода.* Структурная устойчивость модели оказывается важной для таких свойств, как непрерывность решений уравнений Беллмана–Айзека (VI), а также для возможности такой аппроксимации динамики цен, которая гарантирует равномерную близость решений уравнений Беллмана–Айзека, что необходимо для численного решения.

Обычно торговые ограничения, описываемые многозначными отображениями $D_t(\cdot)$, известны точно. В противоположность этому задание компактов $K_t(\cdot)$, описывающих неопределенность движения цен, носит приближительный характер. Поэтому для рассматриваемой модели принцип грубости заключается в том, что ключевые свойства модели должны сохраниться при достаточно малых возмущениях множеств $K_t(\cdot)$. Исходя из этого соображения, применительно к тому или иному свойству «безарбитражности» рынка в рамках детерминистского подхода, принцип грубости может быть формализован следующим образом:

Определение 2.4.1. Робастное⁴² (или грубое) условие «безарбитражности» означает сохранение этого свойства для заданной предьстории цен при достаточно малых в смысле метрики Помпею–Хаусдорфа⁴³ возмущениях компактов $K_t(\cdot)$, описывающих неопределенность движения цен.

Определение RNDSAUP.⁴⁴ Грубое условие NDSAUP, т. е. робастное условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью будем обозначать **RNDSAUP**.

Определение RNDAO.⁴⁵ Грубое условие NDAO, т. е. робастное условие отсутствия арбитражных возможностей будем обозначать **RNDAO**.

Непосредственно из определения вытекает, что RNDSAUP, влечет NDSAUP, а RNDAO влечет NDAO.

Лемма 2.4.1. Пусть N — ограниченное выпуклое множество, содержащее шар $B_\varepsilon(y)$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке y . Тогда, если N' — выпуклое множество, такое что расстояние Помпею–Хаусдорфа $h_\rho(N', N) \leq \delta < \varepsilon$, то

$$B_{\varepsilon-\delta}(y) \subseteq N'.$$

Доказательство. Поскольку $B_\varepsilon(y) \subseteq N$, то для соответствующих опорных функций имеет место неравенство⁴⁶

$$\sigma_N(h) \geq \sigma_{B_\varepsilon(y)}(h) = \varepsilon \|h\|_2 + \langle h, y \rangle.$$

Нетрудно видеть, что множество N' ограничено и по [36, предложение 9.11] справедливо неравенство

$$|\sigma_{N'}(h) - \sigma_N(h)| \leq \|h\|_2 h_\rho(N', N) \leq \delta \|h\|_2.$$

Поэтому

$$\sigma_{N'}(h) \geq (\varepsilon - \delta) \|h\|_2 + \langle h, y \rangle = \sigma_{B_{\varepsilon-\delta}(y)}(h);$$

по [36, предложение 9.5], с учетом выпуклости N' , получаем $B_{\varepsilon-\delta}(y) \subseteq N'$, что и требовалось доказать. \square

Определение 2.4.2. Множество A будем называть полноразмерным, если его выпуклая оболочка $\text{conv}(A)$ телесна⁴⁷, т. е. если $\text{int}(\text{conv}(A)) \neq \emptyset$.

⁴²Калька с английского “robust”; используется, например, в математической статистике.

⁴³Расстояние Помпею–Хаусдорфа h_ρ , отвечающее метрике ρ (в данном случае ρ — евклидова метрика в \mathbb{R}^n : $\rho(x^1, x^2) = \|x^1 - x^2\|_2$, где $\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$), определяется для непустых множеств как $h_\rho(A_1, A_2) = \max(\sup\{\rho(x, A_2), x \in A_1\}, \sup\{\rho(x, A_1), x \in A_2\})$, где $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y), y \in A\}$. Это расстояние может принимать значение $+\infty$; на классе всех непустых замкнутых ограниченных множеств метрического пространства h_ρ является метрикой, см. [36, теорема 5.1].

⁴⁴От “Robust No Deterministic Sure Arbitrage with Unbounded Profit”.

⁴⁵От «Robust No Deterministic Arbitrage Opportunity».

⁴⁶Здесь $\langle h, y \rangle$ — скалярное произведение.

⁴⁷Это равносильно тому, что для $A \subseteq \mathbb{R}^n$ аффинная оболочка $\text{aff}(A)$ совпадает со всем пространством \mathbb{R}^n .

Теорема 2.4.1. *Имеют место два соотношения:*

1) Условие RNDSAUP равносильно условию

$$0 \in \text{int}\{z : z + \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}. \quad (2.4.1)$$

2) Условия RNDSAUP и полноразмерности компактов $K_t(\cdot)$

$$\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \neq \emptyset, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (2.4.2)$$

равносильны условию:

$$\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.4.3)$$

Доказательство. Фиксируем время t и предысторию цен \bar{x}_{t-1} .

1) Для доказательства того, что RNDSAUP влечет (2.4.1), рассмотрим сдвиги вида $K_t^{(z)}(\cdot) = z + K_t(\cdot)$. Очевидно,

$$\text{conv}\left(K_t^{(z)}(\cdot)\right) = z + \text{conv}(K_t(\cdot)). \quad (2.4.4)$$

По [36, лемма 5.3]

$$\begin{aligned} h_\rho(K_t^{(z)}(\cdot), K_t(\cdot)) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\rho(x, K_t^{(z)}(\cdot)) - \rho(x, K_t(\cdot))| = \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\rho(x - z, K_t(\cdot)) - \rho(x, K_t(\cdot))| \leq \rho(x - z, x) = \\ &= \|(x - z) - x\|_2 = \|z\|_2, \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

где в последнем неравенстве использована [36, лемма 5.1]. По определению грубости, если рассматривать $K_t^{(z)}(\cdot)$ как «возмущенную» динамику рынка, условие NDSAUP должно выполняться, с учетом (2.4.5), для $\|z\|_2 < \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ (зависящем от \bar{x}_{t-1}). Учитывая уравнение (2.4.4) и теорему 2.3.1, получаем

$$\left[z + \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))\right] \cap \text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1})) \neq \emptyset$$

для любого $z \in B_\varepsilon(0)$, так что условие (2.4.1) выполняется.

Обратно, предположим, что условие RNDSAUP не выполняются. Рассмотрим монотонно убывающую последовательность чисел $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Тогда, в соответствии со сделанным предположением, найдется последовательность компактов K_n , таких, что $h_\rho(K_n, K_t(\bar{x}_{t-1})) \leq \varepsilon_n$ и

$$C_n \cap B = \emptyset,$$

где $C_n = \text{conv}(K_n)$, $B = \text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))$. Обозначив $C = \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))$ имеем

$$h_\rho(C_n, C) \leq h_\rho(K_n, K_t(\bar{x}_{t-1})) \leq \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad (2.4.6)$$

где использована [36, формула (5.12), предложения 5.2]. По [26, теорема 3.1] выпуклые множества C^n и B для каждого $n = 1, 2, \dots$ можно отделить гиперплоскостью $H_n = \{y : h_n y = \alpha_n\}$, для некоторых $\alpha_n \in \mathbb{R}$ и $h_n \in S_1(0) = \{z \in \mathbb{R} : \|z\| = 1\}$. Таким образом, имеют место неравенства:

$$\max_{y \in K_n} \langle h_n, y \rangle \leq \alpha_n \leq \inf_{y \in B} \langle h_n, y \rangle.$$

Разделяющую C^n и B гиперплоскость можно выбрать в виде H'_n так, чтобы она была опорной к C^n , выбирая точку $y_n \in C_n$, для которой достигается максимум,

$$\langle h_n, y_n \rangle = \max_{y \in K_n} \langle h_n, y \rangle = \max_{y \in C_n} \langle h_n, y \rangle = \sigma_{C_n}(h_n),$$

и полагая

$$H'_n = \{y : \langle h_n, y - y_n \rangle \leq 0\}.$$

Заметим, что в силу (2.4.6), с учетом компактности C , по [36, предложение 5.1], последовательность K_n равномерно ограничена. Поэтому можно выделить подпоследовательности, такие что $h_{n_k} \rightarrow h^* \in S_1(0)$, с учетом компактности сферы $S_1(0)$, и $y_{n_k} \rightarrow y^* \in C$, с использованием [36, предложение 5.4] и сходимости (2.4.6). Далее, поскольку в соответствии с [36, предложение 9.12]

$$\sup_{h \in S_1(0)} |\sigma_{C_n}(h) - \sigma_C(h)| = h_p(C_n, C) \leq \varepsilon_n,$$

то используя [36, предложение 9.11], получаем

$$\begin{aligned} |\sigma_n(h_n) - \sigma_C(h^*)| &\leq |\sigma_{C_n}(h_n) - \sigma_C(h_n)| + |\sigma_C(h_n) - \sigma_C(h^*)| \\ &\leq \varepsilon_n - \|C\| \|h_n - h^*\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Переходим к пределу

$$\sigma_C(h^*) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \sigma_{C_n}(h_n) \leq \limsup_{n_k \rightarrow \infty} \left[\inf_{y \in B} \langle h_n, y \rangle \right] \leq \inf_{y \in B} \langle h^*, y \rangle; \quad (2.4.7)$$

последнее из неравенств в (2.4.7) имеет место, поскольку функция $h \mapsto \inf_{y \in B} \langle h, y \rangle$ является полунепрерывной сверху. Выберем теперь в качестве сдвига $z_\delta = -\delta h^*$ для произвольного малого $\delta > 0$. Тогда

$$\sigma_{z_\delta + C}(h^*) = \sigma_C(h^*) + \langle z_\delta, h^* \rangle = \sigma_C(h^*) - \delta,$$

и применяя неравенство (2.4.7) имеем

$$\sigma_{z_\delta + C}(h^*) < \inf_{y \in B} \langle h^*, y \rangle - \delta,$$

а учитывая, что

$$z_\delta + C = z_\delta + \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t_1})) = \text{conv}(z_\delta + K_t(\bar{x}_{t-1})),$$

получаем: для любого $\delta > 0$

$$\text{conv}(z_\delta + K_t(\bar{x}_{t-1})) \cap \text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1})) = \emptyset,$$

т. е. (2.4.1) не выполняется;

2) Если выполняется условие (2.4.3), тогда найдется

$$y \in \text{int}(\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))) \cap \text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1})),$$

а поскольку $y \in \text{int}(\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})))$, то для некоторого $\varepsilon > 0$, зависящего от \bar{x}_{t-1} , шар $B_\varepsilon(y)$ содержится в $\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))$. Пусть $K'_t(\cdot)$ — «возмущенная» динамика рынка и $h_\rho(K_t(\bar{x}_{t-1}), K'_t(\bar{x}_{t-1})) = \delta < \varepsilon$. Тогда, с учетом [36, предложения 9.11 и 9.12],

$$h_\rho(\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})), \text{conv}(K'_t(\bar{x}_{t-1}))) \leq \delta.$$

Используя лемму 2.4.1, получаем $B_{\varepsilon-\delta}(y) \subseteq \text{conv}(K'_t(\bar{x}_{t-1}))$, так что $y \in \text{conv}(K'_t(\bar{x}_{t-1})) \cap \text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))$, и по теореме 2.3.1 условие NDSAUP выполняется для «возмущенной» динамики рынка. Таким образом, условие RNDSAUP выполняется. Полноразмерность компактов $K_t(\cdot)$ очевидна.

Обратно, пусть выполнено условие RNDSAUP и компакты $K_t(\cdot)$ полноразмерны. Если бы относительная внутренность $\text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot)))$ выпуклого конуса $\text{bar}(D_t(\cdot))$ не пересекалась с $\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) = \text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, то по [40, теорема 11.3] выпуклые множества $\text{conv}(K_t(\cdot))$ и $\text{bar}(D_t(\cdot))$ можно было бы разделить⁴⁸. Поэтому, выбирая вектор нормали z разделяющей гиперплоскости, направленной в сторону⁴⁹ $\text{conv}(K_t(\cdot))$, сколь угодно малой длины $\|z\|$, получаем, что

$$z + \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) = \emptyset,$$

что противоречит условию RNDSAUP в соответствии с доказанным пунктом 1) данной теоремы, т. к. (2.4.1) не выполняется. Таким образом, выполняется даже более сильное геометрическое свойство, чем (2.4.3), а именно

$$\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot))) \neq \emptyset.$$

□

Предложение 2.4.1. *В случае отсутствия торговых ограничений, RNDAO равносильно одновременному выполнению NDAO и (2.4.2). Эти два условия равносильны одному условию*

$$0 \in \text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.4.8)$$

⁴⁸В силу полноразмерности $K_t(\cdot)$ множество $\text{conv}(K_t(\cdot))$ не может содержаться в разделяющей гиперплоскости.

⁴⁹Т. е. $\langle z, y \rangle \geq 0$ для $y \in \text{conv}(K_t(\cdot))$.

Доказательство. В случае отсутствия торговых ограничений, т. е. когда $D_t(\cdot) = \mathbb{R}^n$, имеем $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$. С учетом замечания 2.3.1, в этом случае условия RNDAO и RNDSAUP эквивалентны.

В свою очередь, условие RNDSAUP, по пункту 1) теоремы 2.4.1, равносильно условию (2.4.1), которое в случае отсутствия торговых ограничений влечет (2.4.2). Действительно, по условию (2.4.1) имеем

$$B_\delta(0) \subseteq \{z : 0 \in z + \text{conv}(K_t(\cdot))\}$$

для некоторого $\delta > 0$, где δ зависит от предыстории цен, откуда $B_\delta(0) \subseteq \text{conv}(K_t(\cdot))$, т. е. выполняется (2.4.2). Таким образом, RNDAO влечет NDAO и (2.4.2).

Обратно, по предложению 2.2.5 и замечанию 2.2.4 при отсутствии торговых ограничений условие NDAO равносильно (2.2.7), т. е.

$$0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) = \text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))),$$

где равенство выполняется в силу условия (2.4.2). В соответствии с пунктом 2) теоремы 2.4.1, из выполнения условия (2.4.3) следует выполнение условия RNDSAUP, а как мы отмечали ранее, при отсутствии торговых ограничений оно равносильно условию RNDAO. \square

Замечание 2.4.1. Геометрический критерий RNDAO, задаваемый соотношениями (2.4.8), можно было бы назвать усиленным условием Жакода-Ширяева.

Отметим, что в одномерном случае — для модели с одним рисковым активом (при отсутствии торговых ограничений) усиленное условие Жакода-Ширяева (2.4.8) и «обычное» условие Жакода-Ширяева (2.2.7) совпадают, так что в этом случае RNDAO совпадает с NDAO. Поэтому в задаче суперхеджирования негативный эффект от нарушения структурной устойчивости может проявиться только для опционов Rainbow (для нескольких рисковых активов), см. пример в разделе 8.5.

Более полно геометрическую картину раскрывает альтернативный (геометрический) критерий для условия RNDSAUP.

Будем использовать обозначения:

$\text{aff}(A)$ — аффинная оболочка множества A ;

$L_1 \oplus L_2$ — прямая сумма линейных пространств \mathbb{R}^n ;

$\dim(L)$ — размерность линейного пространства \mathbb{R}^n ;

$\text{li}(A)$ — линейное пространство, параллельное⁵⁰ $\text{aff}(E)$.

Определение 2.4.3. Будем говорить, что выпуклые множества E_1 и E_2 пересекаются трансверсально,⁵¹ если

$$\text{а) } E_1 \cap E_2 \neq \emptyset,$$

⁵⁰Если $y \in \text{aff}(E)$, то $-y + \text{aff}(E) = \text{li}(E)$.

⁵¹Аффинные оболочки этих множеств, рассматриваемые как гладкие подмногообразия \mathbb{R}^n , пересекаются трансверсально, см., например, [15, часть II, Глава 1, § 10].

$$\text{б) } \text{li}(E_1) + \text{li}(E_2) = \mathbb{R}^n.$$

Замечание 2.4.2. Отметим следующее:

- 1) Условие б) равносильно условию на размерность суммы $\text{li}(E_1) + \text{li}(E_2)$:

$$\dim(\text{li}(E_1) + \text{li}(E_2)) = n.$$

Поскольку для размерностей линейных подпространств L_1 и L_2 пространства \mathbb{R}^n имеет место равенство

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2),$$

то условие б) трансверсального пересечения можно записать в терминах размерностей:

$$\dim(\text{li}(E_1)) + \dim(\text{li}(E_2)) - \dim(\text{li}(E_1) \cap \text{li}(E_2)) = n. \quad (2.4.9)$$

Из равенства (2.4.9), в частности, следует, что для трансверсальности пересечения необходимо

$$\dim(\text{li}(E_1)) + \dim(\text{li}(E_2)) \geq n;$$

- 2) Если $\dim(\text{li}(E_i)) = n$ для $i = 1$ или $i = 2$, то условие (2.4.9) выполняется;
 3) Если $\dim(\text{li}(E_2)) = 0$, то (2.4.9) становится равносильным равенству $\dim(\text{li}(E_1)) = n$.

Теорема 2.4.2. *Условие RNDSAUP равносильно тому, что $\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$ и $\text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot)))$ пересекаются трансверсально, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.*

Доказательство. Фиксируем момент времени t предысторию цен \bar{x}_{t-1} . Обозначим

$$E_1 = \text{ri}(\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))), \quad E_2 = \text{ri}(\text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))), \\ A_i = \text{aff}(E_i), \quad L_i = \text{li}(E_i), \quad i = 1, 2.$$

Пусть выполнено условие RNDSAUP. Допустим, что $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Тогда по [40, теорема 11.3] непустые выпуклые подмножества \mathbb{R}^n можно собственно отделить⁵² некоторой гиперплоскостью тогда и только тогда, когда их относительные внутренности не пересекаются. В нашем случае, найдется гиперплоскость H , собственно разделяющая $\text{conv}(K_t(\cdot))$ и $\text{bar}(D_t(\cdot))$. При этом, поскольку $\text{bar}(D_t(\cdot))$ — конус, то по [40, теорема 11.7] можно считать, что H проходит через точку 0. Выберем вектор $z \neq 0$ нормали к гиперплоскости H так, чтобы

⁵²По терминологии из [40] гиперплоскость H отделяет множества C_1 и C_2 , если они лежат в противоположных замкнутых полупространствах порожденных H . Гиперплоскость H собственно отделяет C_1 и C_2 , если хотя бы одно из множеств C_1 и C_2 не содержится целиком в H .

$\langle z, y \rangle \leq 0$ для всех $y \in \text{bar}(D_t(\cdot))$. Тогда для сколь угодно малого по норме вектора z сдвиг $z + \text{conv}(K_t(\cdot)) = \text{conv}(z + K_t(\cdot))$ не пересекается с $\text{bar}(D_t(\cdot))$, что противоречит геометрическому критерию (2.4.1) для RNDSAUP. Тем самым, $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$.

Допустим теперь, что

$$\dim(L_1 + L_2) < n.$$

Пусть L_0 — дополнительное подпространство⁵³ к $L_1 + L_2$, т. е. $\mathbb{R}^n = L_0 \oplus (L_1 + L_2)$. Согласно условию 2.4.1, эквивалентному условию RNDSAUP, найдется $\varepsilon > 0$, такое что при $\|z\| < \varepsilon$ множество $[z + \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})) \cap \bar{D}_t(\bar{x}_{t-1})]$ непусто. Выберем $z \in L_0$, такое что $\|z\| < \varepsilon$ и $z \neq 0$, и рассмотрим произвольную точку

$$x^* \in [z + \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})) \cap \bar{D}_t(\bar{x}_{t-1})] \subseteq (z + A_1) \cap A_2.$$

Поскольку $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, то найдется точка $x \in E_1 \cap E_2 \subseteq A_1 \cap A_2$. Отсюда $x^* - x \in L_2$ и $z \in (x^* - x) + L_1 \subseteq L_1 + L_2$. Однако $z \in L_0$ и $z \in L_1 + L_2$ возможно лишь в случае $z = 0$, что противоречит выбору z , так что $\dim(L_1 + L_2) = n$. Таким образом, множества E_1 и E_2 пересекаются трансверсально.

Обратно, пусть множества E_1 и E_2 пересекаются трансверсально. Выберем $x \in E_1 \cap E_2$. По определению относительной внутренней найдутся такие числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что если $z_i \in A_i$, $\|z_i\| < \delta_i$ то $z_i + x \in E_i$, $i = 1, 2$. Обозначим L'_2 подпространство, дополнительное к подпространству $L_1 \cap L_2$ в пространстве L_2 , т. е. $L_2 = L'_2 \oplus (L_1 \cap L_2)$. Тогда $L_1 \oplus L'_2 = \mathbb{R}^n$ в силу предположения б) о трансверсальности пересечения. Обозначим P_1 и P_2 проекторы на пространства L_1 и L'_2 соответственно. Тогда $z \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представимо в виде $z = P_1 z + P_2 z$. В силу конечномерности пространства линейные операторы P_1 и P_2 непрерывны, поэтому найдется $\varepsilon > 0$ такое что при $\|z\| < \varepsilon$ будут выполняться неравенства $\|P_i z\| < \delta_i$, $i = 1, 2$. Выбор чисел $\varepsilon > 0$, $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ влечет $-P_1 z + x \in E_1$ и $P_2 z + x \in E_2$. Полагая $y = P_2 z + x$, имеем $y \in P_1 z + P_2 z + E_1 = z + E_1$ и $y \in E_2$, так что $(z + E_1) \cap E_2 \neq \emptyset$, а значит условие (2.4.1) выполняется. \square

Следствие 2.4.1. Если⁵⁴ $\text{int}(\text{bar}(D_t(\cdot))) \neq \emptyset$, то условие RNDSAUP равносильно

$$\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{int}(\text{bar}(D_t(\cdot))) \neq \emptyset.$$

Действительно, в этом случае $\dim(\text{li}(\text{bar}(D_t(\cdot)))) = n$ и условие б) определения трансверсального пересечения выполняется. Получаем

$$\text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot))) = \text{int}(\text{bar}(D_t(\cdot))).$$

Следствие 2.4.2. Если $\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \neq \emptyset$, то условие RNDSAUP равносильно

$$\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot))) \neq \emptyset. \quad (2.4.10)$$

⁵³См., например, [67, глава 1, § 5].

⁵⁴Это выполняются, например, при запрете коротких позиций.

Действительно, в этом случае $\dim(\text{li}(\text{conv}(K_t(\cdot)))) = n$ и условие б) определения трансверсального пересечения выполняется. Получаем

$$\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) = \text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))).$$

Следствие 2.4.3. *В случае отсутствия торговых ограничений, т. е. $D_t(\cdot) = \mathbb{R}^n$, имеем $\text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot))) = \text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$. С учетом пункта 3) замечания 2.4.2 получаем, что условие RNSAUP равносильно условию (2.4.8).*

Замечание 2.4.3. Если

$$\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot))) \neq \emptyset,$$

то по [40, теорема 6.5]

$$\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot))) = \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))).$$

Замечание 2.4.4. Поскольку любое открытое множество, имеющее общие точки с некоторым выпуклым множеством, имеет их и с его относительной внутренностью, см. [40, следствие 6.3.2.], то свойство (2.4.10) равносильно свойству (2.4.3). Поэтому из следствия 2.4.2, в частности, вытекает пункт 2) теоремы 2.4.1.

Глава 3. Свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса

В данной главе изучаются свойства «гладкости» решений системы уравнений Беллмана–Айзекса при надлежащих предположениях относительно гладкости динамики рыночных цен и торговых ограничений. В частности, установлены достаточные условия для компактности множества возможных траекторий, для ограниченности сверху решений уравнений Беллмана–Айзекса (что было использовано в главе 1, в теореме 1.2.1), а также для их полунепрерывности сверху, что важно для существования игрового равновесия в смешанных стратегиях «рынка», см. главу 5.

Основным результатом главы является теорема 3.2.2 о непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса, опирающаяся на условие структурной устойчивости модели.

Результаты главы опубликованы в [47] (английская версия [232]).

3.1 Общие условия полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса

Свойства «гладкости» решений уравнений Беллмана–Айзекса (VI) определяются соответствующими свойствами «гладкости» функций выплат $g_t(\cdot)$, а также многозначных отображений $K_t(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$, задающих соответственно априорную информацию о приращениях цен и торговые ограничения. Собственно, именно гарантированный детерминистский подход создает стимул для изучения этой «гладкости»¹.

Для удобства читателя приведем необходимые определения и обозначения.

¹Требования к «гладкости» (в определенном смысле) многозначного отображения $K_t(\cdot)$ возникают также из соображений «реалистичности» модели — понятия, введенного в главе 6.

Обозначим $e_\rho(A, B)$ — отклонение Помпею множества A от множества B , т. е.

$$e_\rho(A, B) = \sup\{\rho(x, B), x \in A\},$$

где $\rho(x, B) = \inf\{\rho(x, x'), x' \in B\}$. Расстояние Помпею–Хаусдорфа может быть представлено в следующей форме:

$$h_\rho(A, B) = e_\rho(A, B) \vee e_\rho(B, A).$$

Здесь и далее будем обозначать $\mathcal{N}(Y)$ класс всех непустых подмножеств Y , а $\mathcal{K}(Y)$ — класс всех непустых компактных подмножеств топологического пространства Y .

Определение 3.1.1. *Полунепрерывность сверху (снизу) в смысле Помпею–Хаусдорфа, иными словами (кратко), h -полунепрерывность сверху (снизу) многозначного отображения $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ в точке $x_0 \in X$, определяется для топологического пространства X и метрического пространства Y с метрикой ρ , как непрерывность в точке x_0 числовой функции $x \mapsto e_\rho(F(x), F(x_0))$ (соответственно $x \mapsto e_\rho(F(x_0), F(x))$). Многозначное отображение h -полунепрерывно сверху (снизу), если оно полунепрерывно сверху (снизу) во всех точках из области определения.*

Определение 3.1.2. *Полунепрерывность² сверху (снизу) многозначного отображения F хаусдорфовых топологических пространств определяется как открытость множества $\{x \in X : F(x) \subseteq G\}$, для любого открытого $G \subseteq Y$ (соответственно, как открытость множеств $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ для любого открытого $G \subseteq Y$).*

Замечание 3.1.1. В общем случае многозначного отображения полунепрерывность сверху для метрического пространства Y влечет h -полунепрерывность сверху, см. [171, глава 1, предложение 2.61].

Замечание 3.1.2. Для компактозначных отображений полунепрерывность снизу и полунепрерывность сверху равносильны h -полунепрерывности снизу и сверху соответственно, см. [171, глава 1, теорема 2.68].

Замечание 3.1.3. Если $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ является h -непрерывным многозначным отображением, принимающим замкнутые значения, то его график $\{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ замкнут (в топологии произведения пространств), см. [171, глава 1, предложение 2.63].

Замечание 3.1.4. Образ³ $F(K) = \bigcup_{x \in K} F(x)$ компакта $K \subseteq X$ для компактозначного полунепрерывного отображения $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ является компактным, см. [171, глава 1, следствие 2.20].

²Такую полунепрерывность также называют полунепрерывностью в смысле Висториса.

³Здесь образ понимается в смысле многозначного отображения.

Очевидно, свойство полунепрерывности (сверху или снизу) для многозначных отображений $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ и $\bar{x}_{t-1} \mapsto x_{t-1} + K_t(\bar{x}_{t-1})$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ равносильны, так же как и для функций v_t^* и w_t , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Установим теперь достаточные условия «регулярного поведения» множества возможных траекторий для динамики цен, задаваемых посредством компактного множества K_0 начальных состояний цен и компактозначными⁴ отображениями $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. С этой целью сделаем следующее дополнительное предположение:

Предположение 3.1.1 (USC-PH). Для $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ многозначные отображения

$$(x_0, \dots, x_{t-1}) \mapsto K_t(x_0, \dots, x_{t-1})$$

из $(\mathbb{R}^n)^t$ в $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ являются h -полунепрерывными сверху.

Предложение 3.1.1. Пусть выполнено условие 3.1.1. Тогда

- 1° множества B_t , $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$, описываемые соотношениями (1.2.1), компактны;
- 2° кроме того, если функции потенциальных выплат g_t , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, фигурирующие в уравнении (VI), полунепрерывны сверху, то выполнено условие равномерной ограниченности 1.2.2.

Доказательство. Утверждение 1° легко проверяется по индукции. Действительно, это утверждение верно для $t = 0$, т.к. $B_0 = K_0$ компактно. Теперь пусть утверждение выполнено для $t \in \llbracket 0, s - 1 \rrbracket$, где $s \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$, тогда, учитывая (1.2.1), множество

$$B_s = \{(\bar{x}_{s-1}, x_s) : \bar{x}_{s-1} \in B_{s-1}, x_s = x_{s-1} + K_s(\bar{x}_{s-1})\}$$

является графиком компактозначного отображения $F_s : B_{s-1} \mapsto \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, где $F_s(\bar{x}_{s-1}) = x_{s-1} + K_s(\bar{x}_{s-1})$, полунепрерывного сверху в смысле Помпею–Хаусдорфа, а множество B_{s-1} компактно.

В соответствии с замечанием 3.1.3 множество B_s замкнуто. По замечанию 3.1.2 отображение F полунепрерывно сверху, а по замечанию 3.1.4 образ $F(B_s)$ компактен. Поскольку замкнутое множество B_s содержится в компакте $B_{s-1} \times F(B_s)$, множество B_s компактно.

Утверждение 2° непосредственно вытекает из утверждения 1°, поскольку полунепрерывные функции g_t ограничены сверху (и достигают максимума) на компактных множествах B_t для $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. \square

Нам потребуются классические результаты — три теоремы Бержа [92; 93], а также [171]. Для удобства читателя приводим их формулировки. Предположим, что X и Y — хаусдорфовы топологические пространства.

⁴В соответствии с предположением 1.1.14 из главы 1.

Теорема 3.1.1 (Берж). Если числовая функция $g : X \times T \mapsto [-\infty, +\infty]$ полунепрерывна сверху, многозначное отображение $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ полунепрерывно снизу, тогда функция $g_* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, задаваемая посредством

$$g_*(x) = \inf_{y \in F(x)} g(x, y), \quad (3.1.1)$$

полунепрерывна сверху.

Теорема 3.1.2 (Берж). Если числовая функция $g : X \times T \mapsto [-\infty, +\infty]$ полунепрерывна сверху, компактнозначное отображение $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ полунепрерывно сверху⁵, тогда функция $g^* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, задаваемая посредством

$$g^*(x) = \sup_{y \in F(x)} g(x, y), \quad (3.1.2)$$

полунепрерывна сверху.

Замечание 3.1.5. Поскольку

$$-\inf_{y \in F(x)} [-g(x, y)] = \sup_{y \in F(x)} g(x, y), \quad (3.1.3)$$

то теоремы 3.1.1 и 3.1.2 могут быть сформулированы иначе⁶:

- 1° Теорема 3.1.1 может быть переформулирована следующим образом:
Для полунепрерывной снизу функции $g : X \times Y \mapsto [-\infty, +\infty]$ и полунепрерывного снизу многозначного отображения $F(x)$, функция $g^* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, задаваемая посредством (3.1.2), полунепрерывна снизу.
- 2° Теорема 3.1.2 может быть переформулирована следующим образом:
Для полунепрерывной снизу функции $g : X \times Y \mapsto [-\infty, +\infty]$ и полунепрерывного сверху компактнозначного отображения $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$, функция $g_* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, задаваемая посредством (3.1.1), полунепрерывна снизу.

Утверждение, аналогичное теореме 3.1.1, можно также получить, ослабляя требования к функции g , но усиливая требования к многозначной функции F .

Предложение 3.1.2. Если для любого $y \in Y$ функции $x \mapsto g_y(x) = g(x, y) \in [-\infty, +\infty]$, $x \in X$, полунепрерывны сверху, для любого $y \in Y$ множества $\{x \in X : y \in F(x)\}$ открыты, тогда функция $g_* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$, определяемая (3.1.1), полунепрерывна сверху.

⁵Отметим, что в книге [92] в определении полунепрерывности сверху, в дополнение к тому, что множество $\{x \in X : F(x) \subseteq G\}$ открыто для любого открытого $G \subseteq Y$, входит компактнозначность F .

⁶Теорема 3.1.1 в данной формулировке — это [171, глава 1, предложение 3.1], а теорема 3.1.2 — [171, глава 1, предложение 3.3].

Доказательство. Положим

$$\varphi_y(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in F(x), \\ +\infty, & \text{если } y \notin F(x). \end{cases}$$

Тогда

$$g_*(x) = \inf_{y \in Y} [g_y(x) + \varphi_y(x)],$$

при этом функция $\varphi_y(\cdot)$ — полунепрерывна сверху, а потому и функция $g_y(\cdot) + \varphi_y(\cdot)$ полунепрерывна сверху. Поскольку точная нижняя грань полунепрерывных сверху функций полунепрерывна сверху, то функция $g_*(\cdot)$ полунепрерывна сверху. \square

Замечание 3.1.6. С использованием тождества (3.1.3) предложение 3.1.2 может быть сформулировано эквивалентным образом:

Если для любого $y \in Y$ функции $x \mapsto g_y(x) = g(x, y) \in [-\infty, +\infty]$ полунепрерывны снизу, а множества $\{x \in X : y \in F(x)\}$ открыты, тогда функция g^ , определяемая (3.1.2), полунепрерывна снизу.*

Замечание 3.1.7. В предложении 3.1.2 и замечании 3.1.6 достигается максимум и минимум соответственно для каждого $x \in X$ и некоторого значения $y^*(x) \in F(x)$.

Замечание 3.1.8. Если для любого $y \in Y$ множества $\{x \in X : y \in F(x)\}$ открыты, то многозначная функция F полунепрерывна снизу, поскольку для открытого $G \subseteq Y$ множества $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\} = \bigcup_{y \in G} \{x : y \in F(x)\}$ будут открыты, как объединение открытых множеств.

Замечание 3.1.9. Открытость множеств $\{x \in X : y \in F(x)\}$, вообще говоря, не следует из полунепрерывности снизу (или же сверху) отображения F . В случае, когда Y -метрическое пространство с метрикой ρ , из [171, предложения 2.26, 2.61 и 2.64] известно, что для любого $y \in Y$ функции $x \mapsto \rho(y, F(x))$ полунепрерывны сверху (или же, соответственно, снизу). Если F принимает замкнутые значения, т. е. множество $F(x)$ — замкнутое для любого $x \in X$, то про множество $\{x \in X : y \in F(x)\} = \{x \in X : \rho(y, F(x)) = 0\}$ можно лишь утверждать, что оно замкнуто (или же, соответственно, является множеством типа⁷ G_δ).

Замечание 3.1.10. Из полунепрерывности сверху (снизу) числовой функции $g(x, y)$ по совокупности аргументов вытекает полунепрерывность сверху (снизу) функций одной переменной $x \mapsto g_y(x) = g(x, y)$: если g полунепрерывна сверху, то рассматривая направленность (x_α, y_α) , где $x_\alpha \equiv x$, $y_\alpha \rightarrow y^*$, замечаем, что $(x_\alpha, y_\alpha) \rightarrow (x, y^*)$ и, значит,

$$\limsup_{\alpha} g_x(y_\alpha) = \limsup_{\alpha} g(x_\alpha, y_\alpha) \leq g(x, y^*) = g_x(y^*).$$

⁷Т. е. представимы в виде счетного пересечения открытых множеств.

Аналогично доказывается утверждение и для полунепрерывности снизу. Впрочем, это также следует из уже доказанного, выбирая $g = -f$, где f полунепрерывна снизу.

Достаточные условия для непрерывности функции g^* , определяемой посредством (3.1.2), дает следующая теорема⁸:

Теорема 3.1.3 (Берж). Пусть функция $g : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна, $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ — непрерывное⁹ многозначное отображение. Тогда функция $g^* : Y \mapsto \mathbb{R}$, определяемая посредством (3.1.2), непрерывна, а многозначное отображение $M : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$, где $M(x) = \{y \in F(x) : g(x, y) = g^*(x)\}$ ¹⁰ является полунепрерывным сверху.

Из приведенных выше результатов легко получаются условия полунепрерывности для решения v_t^* основных уравнений (VI). Используя обозначения (T) из раздела 1.2 главы 1, введем функцию¹¹

$$\bar{x}_{t-1} \mapsto \rho_t(\bar{x}_{t-1}) = \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy]. \quad (3.1.4)$$

Теорема 3.1.4. Пусть выполняется условие 3.1.1 h -полунепрерывности сверху многозначных отображений $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Если для $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ также выполняются условия:

- 1° многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу;
- 2° числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ полунепрерывны сверху;

то функции $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$, определяемые соотношениями (VI), полунепрерывны сверху, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Доказательство. Пусть выполнены условия 1° и 2°. Проведем доказательство полунепрерывности сверху функций v_s по индукции. Для $s = N$ утверждения теоремы, очевидно, выполнены, т. к. $v_N^* = g_N$. Пусть теперь это верно для $s = N, \dots, t$, покажем, что это верно и для $s = t-1$, где $N \geq t > 1$. По индуктивному предположению функция $(\bar{x}_{t-1}, y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y)$ полунепрерывна сверху. С использованием предположения 3.1.1 и теоремы 3.1.2 получаем, что функция

$$(\bar{x}_{t-1}, h) \mapsto \varphi(x, h) = \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy], \quad (3.1.5)$$

полунепрерывна сверху, поскольку функция $((\bar{x}_{t-1}, h), y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy$ полунепрерывна сверху по совокупности переменных. Применяя к функции,

⁸Этот результат часто называют “Berge’s maximum theorem”; [171, глава 1, теорема 3.4].

⁹Одновременно полунепрерывное сверху и снизу многозначное отображение.

¹⁰Т. е. $M(x)$ — множество максимизаторов, тех $y \in Y$, для которых достигается максимум в (3.1.2) для заданного $x \in X$.

¹¹Отметим, что $\rho_t(\cdot)$ может принимать значение $-\infty$ и равномерно ограничена сверху благодаря неравенству (3.2.10).

определяемой посредством (3.1.5), теорему 3.1.1, получим, что функция ρ_t , задаваемая (3.1.4), полунепрерывна сверху, а, следовательно, полунепрерывна сверху функция

$$\bar{x}_{t-1} \mapsto v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \rho_t(\bar{x}_{t-1}). \quad (3.1.6)$$

□

Лемма 3.1.1. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, а многозначное отображение $F : X \mapsto 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \{\emptyset\}$ принимает выпуклые значения. Тогда

- 1° полунепрерывность снизу отображения $F(\cdot)$ равносильна полунепрерывности снизу многозначного отображения $x \mapsto \text{ri}(F(x))$;
- 2° если, кроме того, $\text{int}(F(x)) \neq \emptyset$ для всех $x \in X$, то полунепрерывность снизу $F(\cdot)$ равносильна полунепрерывности снизу $x \mapsto \text{int}(F(x))$.

Доказательство.

- 1° Поскольку¹²

$$\text{ri}(F(x)) \subseteq F(x) \subseteq \text{cl}(F(x)) \quad (3.1.7)$$

и, в силу выпуклости $F(x)$, по [40, теореме 6.3] имеем:

$$\text{cl}(\text{ri}(F(x))) = \text{cl}(F(x)). \quad (3.1.8)$$

По [171, предложение 2.38], многозначное отображение $x \mapsto F(x)$ полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда полунепрерывно снизу отображение $x \mapsto \text{cl}(F(x))$, так что из (3.1.7) и (3.1.8) вытекает требуемое утверждение.

- 2° В случае $\text{int}(F(x)) \neq \emptyset$ выполняется

$$\text{ri}(F(x)) = \text{int}(F(x)). \quad (3.1.9)$$

□

Замечание 3.1.11. Невырожденность торговых ограничений, под которыми мы понимаем телесность выпуклого множества $D_t(\cdot)$, т. е. $\text{int}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$, является вполне естественным предположением для финансовых моделей. В этом случае, в силу выпуклости $D_t(\cdot)$, применима лемма 3.1.1, так что $D_t(\cdot)$ можно считать, не ограничивая общности, открытыми, когда речь идет о сохранении полунепрерывности снизу $D_t(\cdot)$, при отсутствии иных требований.

¹²Здесь $\text{cl}(A)$ — замыкание A .

Замечание 3.1.12. С другой стороны, свойство полунепрерывности снизу многозначного отображения $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ равносильно полунепрерывности снизу многозначного отображения $\bar{F} : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$, где $\bar{F}(x) = \text{cl}(F(x))$ ¹³. В ряде случаев удобно для полунепрерывных снизу $D_t(\cdot)$ считать, не ограничивая общности, что множества $D_t(\cdot)$ замкнуты¹⁴, при отсутствии других требований.

Замечание 3.1.13. В теореме 3.1.4 можно считать, не ограничивая общности, что множества $D_t(\cdot)$ замкнуты, поскольку значения $v_t^*(\cdot)$ не изменяются при замыкании $D_t(\cdot)$. Действительно, обозначая $\bar{D}_t(\cdot) = \text{cl}(D_t(\cdot))$, имеем неравенство

$$\inf_{h \in \bar{D}_t(x)} \varphi(x, h) \leq \inf_{h \in D_t(x)} \varphi(x, h), \quad (3.1.10)$$

где функция φ задается формулой (3.1.5). Для любого $h \in \bar{D}_t(x)$ найдется последовательность $h^n \in D_t(x)$, такая что $h^n \rightarrow h$. В силу полунепрерывности сверху функции φ , установленной в ходе доказательства теоремы 3.1.4:

$$\varphi(x, h) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(x, h^n) \geq \inf_{h \in \bar{D}_t(x)} \varphi(x, h),$$

так что в (3.1.10) имеет место равенство.

С другой стороны, применяя к $F(\cdot) = D_t(\cdot)$ соотношения (3.1.7) и (3.1.8), получаем, что значение v_t^* не изменится, если $D_t(\cdot)$ заменить на $D_t^*(\cdot) = \text{ri}(D_t(\cdot))$, а в случае невырожденности, с учетом (3.1.9), можно, не ограничивая общности, считать $D_t(\cdot)$ открытыми.

Замечание 3.1.14. Для ряда моделей торговые ограничения постоянны во времени и не зависят от предыстории, т. е. $D_t(\cdot) \equiv D$ ¹⁵. В этом случае множество $\{x \in (\mathbb{R}^n)^{t-1} : h \in D_t(\cdot)\}$ либо пусто (если $h \notin D$), либо совпадает со всем пространством $(\mathbb{R}^n)^{t-1}$ (если $h \in D$), так что множество одновременно открыто, а значит, применимы предложение 3.1.2 и замечание 3.1.6, и замкнуто, а многозначные отображения $x \mapsto D_t(\cdot)$ непрерывны.

Замечание 3.1.15. Обозначим $\tilde{K}_t = K_t(B_{t-1})$ — образ B_{t-1} для многозначного отображения K_t , где B_t задается посредством (1.2.1). Отметим, что, при условии 3.1.1, функция, задаваемая (3.1.5), ограничена благодаря компактности \tilde{K}_t , по предложению 3.1.1, равномерно по $\bar{x}_{t-1} \in \tilde{K}_t$ для любого h , поскольку $C \geq w_t \geq 0$ для любого $y \in K_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \tilde{K}_t$

$$\begin{aligned} C - hy &\geq w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy \geq -hy, \\ \max_{y \in -\tilde{K}_t} hy &\geq -hy \geq \min_{y \in -\tilde{K}_t} hy = -\max_{y \in \tilde{K}_t} hy, \end{aligned}$$

откуда¹⁶

$$C + \sigma_{-\tilde{K}_t}(h) \geq \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] \geq -\sigma_{\tilde{K}_t}(h), \quad (3.1.11)$$

¹³[171, глава 1, предложение 2.38].

¹⁴Невырожденность при этом не требуется.

¹⁵Такой случай возникает, например, при запрете коротких позиций по рисковому активу, т. е. когда $D = [0, \infty)^n$.

¹⁶Опорная функция компакта принимает конечные значения.

где $\sigma_A(h)$ — опорная функция множества A .

Замечание 3.1.16. В силу полунепрерывности сверху функции $y \mapsto w_t(\cdot, y) - hy$ в условиях теоремы 3.1.4 точная верхняя грань по y достигается для некоторого значения $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$.

Замечание 3.1.17. Отметим, что для $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$ функция (3.1.5) является выпуклой по переменной h , принимает конечные значения с оценкой (3.1.11) и, в частности, непрерывна по h , см. [40, следствие 10.1.1].

Замечание 3.1.18. Определяемая посредством (3.1.4) функция $\rho_t(\cdot)$ может принимать значения $-\infty$. В то же время, поскольку $0 \in D_t(x)$, функция $\rho_t(\cdot)$ ограничена сверху: $\rho_t(\cdot) \leq C$.

Для того, чтобы обеспечить свойство полунепрерывности снизу функций Беллмана–Айзекса, определяемых уравнениями (VI), потребуется сделать дополнительное предположение, касающиеся торговых ограничений:

Предположение 3.1.2 (С-Т). Множество $D_t(\bar{x}_{t-1})$ компактно для любого \bar{x}_{t-1} , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Теорема 3.1.5. Пусть выполнено условие (С-Т), компактозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны сверху, $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу, числовые функции $\bar{x}_{t-1} \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу для $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Тогда функции $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$, определяемые соотношениями (VI), полунепрерывны снизу для $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Доказательство. Проведем доказательство по индукции: для $s = N$ утверждение справедливо, поскольку $v_N^* = g_N$. Пусть это выполнено для $s = N, \dots, t$, покажем, что выполняется и для $s = t - 1$ ($t > 1$). Поскольку функция $((\bar{x}_{t-1}, h), y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy$ полунепрерывна снизу (по совокупности переменных), к функции φ , задаваемой посредством уравнения (3.1.5), применим пункт 1° замечания 3.1.5, из чего следует полунепрерывность снизу функции φ . Далее, к функции $\rho_t(\cdot)$, задаваемой (3.1.4), применим пункт 2° замечания 3.1.5, так что эта функция также полунепрерывна снизу, а из (3.1.6) следует полунепрерывность снизу функции $v_{t-1}^*(\cdot)$. \square

Теорема 3.1.6. Пусть выполнено условие (С-Т), компактозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ и $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ непрерывны¹⁷, числовые функции $\bar{x}_{t-1} \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1})$ непрерывны. Тогда

- 1° функции $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$, задаваемые соотношениями (VI), непрерывны;
- 2° многозначные отображения $(\bar{x}_{t-1}, h) \mapsto M_t(\bar{x}_{t-1}, h)$, где $M_t(\bar{x}_{t-1}, h) — множество максимизаторов $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$, для которых достигается максимум функции (3.1.5), и многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto$$

¹⁷Непрерывность многозначного отображения означает одновременно полунепрерывность сверху и снизу. Для компактозначных отображений это равносильно непрерывности в метрике Помпею–Хаусдорфа.

$N_t(\bar{x}_{t-1})$, где $N_t(\bar{x}_{t-1})$ множество минимизаторов $h \in D_t(\bar{x}_{t-1})$, для которых достигается минимум в (3.1.4), являются полунепрерывными сверху, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из теорем 3.1.4 и 3.1.5, а также из теоремы Берга 3.1.3. \square

Замечание 3.1.19. Если Y — метрическое пространство¹⁸, то при замыкании сохраняется свойство полунепрерывности сверху многозначного отображения¹⁹. Поэтому, если $D_t(\cdot)$ заменить на $\bar{D}_t(\cdot) = \text{cl}(D_t(\cdot))$, то теорема 3.1.6 сохраняет силу с учетом замечания 3.1.12 о сохранении значения функции $v_t^*(\cdot)$.

Замечание 3.1.20. На самом деле, приведенные выше результаты дают также условия полунепрерывности или же непрерывности в более общем случае, а именно, для описанной в конце раздела 1.2 главы 1 модели²⁰, если одновременно с торговыми ограничениями, свойственными маржинальной торговле, наложить ограничения на заимствования безрискового актива посредством задания выпуклой по h функции²¹ $\alpha_t(h, \bar{x}_{t-1}) \leq 0$, с дополнительными ограничениями $h \in D_t(\cdot)$, соответствующие уравнения Беллмана–Айзекса имеют вид:

$$v_N^*(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N),$$

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \left[\sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy) \bigvee \mu h^{\oplus} \bar{x}_{t-1} \bigvee \bigvee (h\bar{x}_{t-1} + \alpha_t(h, \bar{x}_{t-1})) \right].$$

Для применимости теоремы 3.1.4 необходимо потребовать полунепрерывности сверху функции $x \mapsto \alpha_t(h, x)$, $x \in B_{t-1}$, для применимости теоремы 3.1.5 — полунепрерывность снизу α_t по совокупности переменных, а для теоремы 3.1.6 — нужна непрерывность α_t по совокупности переменных.

Замечание 3.1.21. Отметим, что все приведенные выше результаты имеют общий характер и никак не связаны с предположениями типа безарбитражности. Чтобы обеспечить свойства полунепрерывности снизу и непрерывности функций Беллмана–Айзекса w_t в случае, когда (С-Т) не выполняется, т. е. когда D_t неограничены, требуются дополнительные условия, связывающие поведение многозначных отображений $K_t(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$. Ниже будут приведены соответствующие условия и доказательства, которые носят более технический характер, чем представленные выше.

¹⁸В действительности, достаточно нормальности топологического пространства Y .

¹⁹[171, предложение 2.40].

²⁰Задаваемой формулами (1.2.10) и (??).

²¹ α_t — максимально допустимый долг (например, лимит банковского кредита), взятый с отрицательным знаком.

3.2 Условия гладкости решений уравнений Беллмана–Айзекса, связывающие неопределенность движения цен и торговые ограничения посредством «безарбитражности»

В разделе 2.4 главы 2 было введено понятие грубости «безарбитражности» и доказано (теорема 2.4.1), что грубое условие отсутствия гарантированного арбитража RNDSAUP равносильно геометрическому критерию (2.4.1); для удобства напомним, что это условие имеет вид

$$0 \in \text{int} \{z : z + K_t^*(\cdot) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}. \quad (3.2.1)$$

Это условие и его усиление играют важную роль в доказательстве результатов этого раздела, сформулированных ниже. Отметим также, что в доказательстве этих результатов существенно будет использоваться условие ограниченности 1.2.2 из раздела 1.2 главы 1 для функций выплат g_t , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Предложение 3.2.1. Пусть для $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, многозначные отображения $D_t(\cdot)$ принимают замкнутые значения и выполнено условие 1.2.2. Тогда множество

$$D_t^a(\cdot) = \left\{ h \in D_t(\cdot) : \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \leq a \right\}$$

компактно²² для любого $a \in \mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда выполняется условие RNDSAUP.

Доказательство. Обозначим

$$T_t(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : (z + K_t^*(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}. \quad (3.2.2)$$

Условие (3.2.1), равносильное RNDSAUP, можно записать в виде

$$0 \in \text{int}(T_t(\cdot)). \quad (3.2.3)$$

Поскольку $w_t \geq 0$, а также, благодаря (3.1.1), и $w_t \leq C$, то имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-hy] &= \sup_{y \in K_t(\cdot)} [-hy] \leq \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \\ &\leq C + \sup_{y \in K_t(\cdot)} [-hy] = C + \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-hy]. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\hat{D}_t^b(\cdot) = \left\{ h \in D_t(\cdot) : \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-hy] \leq b \right\} = \left\{ h \in D_t(\cdot) : \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h) \leq b \right\}, \quad (3.2.4)$$

²²Пустое множество считаем компактным.

получаем $\hat{D}_t^{a-C}(\cdot) \subseteq D_t^a(\cdot) \subseteq \hat{D}_t^a$, так что $D_t^a(\cdot)$ компактно для всех $a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\hat{D}_t^a(\cdot)$ компактны для всех $a \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим функцию

$$h \mapsto f_{t,\cdot}(h) = \chi_{D_t(\cdot)}(h) + \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy), \quad (3.2.5)$$

где

$$\chi_D(h) = \begin{cases} 0, & \text{если } h \in D; \\ +\infty, & \text{если } h \notin D. \end{cases}$$

Функция, задаваемая посредством (3.2.5), является замкнутой²³ собственной²⁴ выпуклой функцией, поскольку это же относится к первому слагаемому в (3.2.5), а второе слагаемое в (3.2.5) представляет собой всюду конечную выпуклую функцию, а значит, непрерывную всюду²⁵. В соответствии со [40, следствие 14.2.2] для того, чтобы множество

$$\{h \in \mathbb{R}^n : f_{t,\cdot}(h) \leq a\} = \hat{D}_t^a(\cdot)$$

было ограниченным (а значит, компактным в силу полунепрерывности функции, задаваемой посредством (3.2.5)) для любого $a \in \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы 0 являлся внутренней точкой множества

$$T_t'(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : f_{t,\cdot}^*(z) < \infty\},$$

где $z \mapsto f_{t,\cdot}^*(z)$ — сопряженная (по Фенхелю–Лежандру) функция к функции $h \mapsto f_{t,\cdot}(h)$, т. е.

$$T_t'(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : \sup_{h \in \mathbb{R}^n} [hz - f_{t,\cdot}(h)] < \infty\}.$$

При этом, используя классическую теорему о минимаксе Кнезера [183], получаем

$$\begin{aligned} \sup_{h \in \mathbb{R}^n} \{hz - [\chi_{D_t(\cdot)}(h) + \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy)]\} &= \sup_{h \in D_t(\cdot)} [hz + \inf_{y \in K_t^*(\cdot)} (hy)] = \\ &= \sup_{h \in D_t(\cdot)} \inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} (hy) = \inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sup_{h \in D_t(\cdot)} (hy) = \inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sigma_D(y). \end{aligned}$$

Если $(z + K_t^*(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) = \emptyset$, то $\sigma_D(y) = \infty$ для всех $y \in z + K_t^*(\cdot)$ и $\inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sigma_D(y) = +\infty$.

Если же $(z + K_t^*(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$, то $\inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sigma_D(y) < \infty$. Таким образом,

$$T_t'(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : z + K_t^*(\cdot) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\},$$

т. е. $T_t'(\cdot) = T_t(\cdot)$, откуда и следует требуемое утверждение. \square

²³Полунепрерывной снизу (терминология из [40]).

²⁴Т. е. принимает конечные значения на непустом выпуклом множестве, а вне него равна $+\infty$.

²⁵[40, следствие 10.1.1].

Замечание 3.2.1. Отметим, что в ходе доказательства предложения 3.2.1 установлено, что условие (3.2.1) и замкнутость множеств $D_t(\cdot)$ достаточны для компактности множеств $\hat{D}_t^a(\cdot)$.

Замечание 3.2.2. Нетрудно убедиться, что множество $T_t(\cdot)$, задаваемое посредством (3.2.2), является выпуклым.

Замечание 3.2.3. Для случая отсутствия торговых ограничений, т. е. когда $D_t(\cdot) = \mathbb{R}^n$, барьерный конус $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$ и условие (3.2.3) равносильно робастному условию отсутствия арбитражных возможностей RNDAO, которое, в соответствии с предложением 2.4.1 из главы 2, равносильно одновременному выполнению условия отсутствия арбитражных возможностей NDAO и полноразмерности (2.4.2) компактов $K_t(\cdot)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, эквивалентное условию 2.4.8, т. е. $0 \in \text{int}(K_t^*(\cdot))$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$

Далее будем предполагать, что $D_t(\cdot)$ — замкнутые множества в силу замечания 3.1.13 и замечания 3.1.19. Это не является ограничением для справедливости теорем 3.1.4 и 3.1.6.

Лемма 3.2.1. Пусть $D_t(\cdot)$ — замкнутые множества и выполняется RNDSAUP, тогда для $a \geq C$ функция $\rho_t(\cdot)$, задаваемая (3.1.4), может быть представлена в виде

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in \hat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]; \quad (3.2.6)$$

таким образом, $D_t(\cdot)$ можно заменить на компактное выпуклое множество $\hat{D}_t^a(\cdot)$, причем $0 \in \hat{D}_t^a(\cdot)$. В частности, полунепрерывная снизу (и выпуклая) функция $h \mapsto \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]$ достигает минимального значения $\rho_t(\cdot)$ в некоторой точке $h^*(\cdot) \in \hat{D}_t^C$.

Доказательство. Если $h_0 \notin \hat{D}_t^a(\cdot)$, где $a \geq C$, то для такого h_0 , поскольку $0 \in D_t(\cdot)$, имеем:

$$\begin{aligned} \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - h_0 y] &\geq \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-h_0 y] > a \geq C \geq \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]|_{h=0} \geq \\ &\geq \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy], \end{aligned}$$

откуда и следует (3.2.6). □

Следствие 3.2.1. Условие структурной устойчивости модели рынка — грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью, RNDSAUP, и замкнутость множеств $D_t(\cdot)$ влекут существование оптимальной стратегии суперхеджирования.

Замечание 3.2.4. Оптимальная стратегия суперхеджирования $h_t^*(\bar{x}_t)$ при условиях следствия 3.2.1, вообще говоря, является неединственной, а множество таких стратегий при заданном t является замкнутым выпуклым подмножеством $D_t(\bar{x}_t)$.

Будем говорить, что многозначное отображение $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ локально предкомпактно, если для любой точки $x_0 \in X$ найдется окрестность V_{x_0} , такая что ее образ $F(V_{x_0}) = \bigcup_{x \in V_{x_0}} F(x)$ предкомпактен²⁶. Если при этом X — компактно, то, очевидно, образ $F(x)$ предкомпактен²⁷.

Лемма 3.2.2. Пусть выполняется следующее условие: для каждой точки x_0 из B_{t-1} найдется окрестность $V(x_0)$, такая что $\check{K}_t(x_0) = \bigcap_{x \in V(x_0)} K_t^*(x) \neq \emptyset$, и более того²⁸:

$$0 \in \text{int} \left(\left\{ z : z + \check{K}_t(x_0) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset \right\} \right). \quad (3.2.7)$$

Тогда многозначное отображение $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$, $x \in B_{t-1}$, локально предкомпактно.

Доказательство. Для $x \in V(x_0)$ с учетом (3.2.4) имеем

$$\hat{D}_t^b(x) \subseteq \check{D}_t^b(x_0) = \{h \in D_t(x_0) : \sigma_{\check{K}_t(x_0)}(-h) \leq b\}.$$

Повторяя рассуждения из предложения 3.2.1 с заменой $K_t^*(x)$ на $\check{K}_t(x)$, получаем, что множества $\check{D}_t^b(x_0)$, $x_0 \in B_{t-1}$, компактны для всех $b \in \mathbb{R}$, если и только если выполняется (3.2.7). Тем самым получаем локальную предкомпактность для многозначного отображения $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$, $x \in B_{t-1}$ при выполнении (3.2.7). \square

Лемма 3.2.3. Пусть многозначные отображения $x \mapsto D_t(x)$ замкнуты²⁹, многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ полунепрерывны снизу, B_t предкомпакты, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Тогда многозначные отображения $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ замкнуты.

Доказательство. Поскольку $B_t = K_t(B_{t-1}) = \bigcup_{x \in B_{t-1}} K_t(x)$ по условию предкомпактно, то многозначное отображение $x \mapsto K_t(x)$ равномерно ограничено на B_{t-1} , а поэтому и выпуклые оболочки $K_t^*(x) = \text{conv}(K_t(x))$ равномерно ограничены на B_{t-1} :

$$\sup_{x \in B_{t-1}} \sup_{y \in K_t^*(x)} \|y\| = A < \infty. \quad (3.2.8)$$

Из полунепрерывности снизу $K_t(\cdot)$ следует полунепрерывность снизу $K_t^*(\cdot)$ по [171, глава 1, предложение 2.24 (a)]. Рассмотрим последовательности x^n и

²⁶Иными словами, в терминологии [36], это отображение компактно ограничено во всех точках из X ; в [171] также отображение называется “locally compact” (что, на наш взгляд, неудачно, поскольку этот термин уже относится к топологическим пространствам).

²⁷Достаточно выделить конечное подпокрытие из покрытия V_x , $x \in X$, и заметить, что конечное объединение компактов является компактным.

²⁸Разумеется, из (3.2.7) следует $\check{K}_t(x_0) \neq \emptyset$. Можно интерпретировать $\check{K}_t(\cdot)$ как новую динамику рынка с сокращенной неопределенностью по сравнению с $K_t^*(\cdot)$; при этом $\check{K}_t(\cdot)$ — выпуклые компакты.

²⁹Многозначное отображение $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ называется замкнутым, если для направленных x_α и y_α , таких что $x_\alpha \rightarrow x$, $y_\alpha \in F(x_\alpha)$ и $y_\alpha \rightarrow y$, имеет место $y \in F(x)$. Иными словами, график отображения F замкнут.

$h^n, n = 1, 2, \dots$, такие что $x^n \in B_{t-1}$, $x^n \rightarrow x^0$ и $h^n \in \widehat{D}_t^b(x^n)$, $h^n \rightarrow h^0$. Из [36, предложение 9.10]³⁰, с учетом (3.2.8), получаем:

$$bxs \geq \sigma_{K_t^*(x^n)}(-h^n) \geq \sigma_{K_t^*(x^0)}(-h^0) - A\|h^n - h^0\|.$$

Отсюда

$$b \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_{K_t^*(x^n)}(-h^n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_{K_t^*(x^n)}(-h^0) \geq \sigma_{K_t^*(x^0)}(-h^0),$$

поскольку функция $x \mapsto \sigma_{K_t^*(x)}(h)$ полунепрерывна снизу для любого h^{31} . Кроме того, поскольку по условию многозначное отображение $x \mapsto D_t(x)$ замкнуто, то $h^0 \in D_t(x^0)$. Таким образом

$$h^0 \in \{h \in D_t(x^0) : \sigma_{K_t^*(x^0)}(-h) \leq b\} = \widehat{D}_t^b(x^0).$$

□

Теорема 3.2.1. Пусть $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ полунепрерывны снизу, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ замкнуты, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу, а также выполняется условие (3.2.7) и множества V_t предкомпактны. Тогда функции $(\bar{x}_{t-1}, y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y)$, определяемые соотношениями (В1), полунепрерывны снизу.

Доказательство. Используя лемму 3.2.2 и 3.2.3, локально предкомпактное и замкнутое отображение³² $x \mapsto \widehat{D}_t^b(x)$ полунепрерывно сверху по [171, глава 1, предложение 2.23]. Применяя теперь лемму 3.2.1 и теорему 3.1.5, где $D_t(\cdot)$ заменяется на $\widehat{D}_t^a(\cdot)$ для некоторого $a \geq C$, получаем требуемое утверждение. □

Замечание 3.2.5. Отметим, что при доказательстве теоремы 3.2.1 помимо прочего установлена полунепрерывность сверху компактозначного отображения $x \mapsto \widehat{D}_t^b(x)$, при выполнении условий теоремы 3.2.1, касающихся $K_t(\cdot)$, $D_t(\cdot)$ и V_t .

Предложение 3.2.2. Пусть многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ полунепрерывны снизу, и для всех x выполняется условие (2.4.3)³³:

$$\text{int}(K_t^*(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset. \quad (3.2.9)$$

³⁰Это результат из [36], касающийся свойства Липшица (с константой A) для опорных функций.

³¹Подробнее об этом в [171, глава 1, предложение 2.35].

³²Замкнутое отображение принимает замкнутые значения, см. [171, глава 1, замечание 2.12].

³³Это условие фигурирует в теореме 2.4.1 и влечет полноразмерность компактов $K_t(\cdot)$, т. е. $\text{int}(K_t^*(\cdot)) \neq \emptyset$.

1° Тогда найдутся окрестности $V(x)$ точек x , такие что для $\check{K}_t(x) = \bigcap_{x' \in V(x)} K_t^*(x')$ выполняется условие³⁴

$$\text{int}(\check{K}_t(x)) \cap \text{bar}(D_t(x)) \neq \emptyset. \quad (3.2.10)$$

2° Выполняется условие (3.2.7).

Доказательство.

1° Фиксируем t и x . В соответствии с (3.2.9) найдутся такие $r > 0$ и $y \in \text{bar}(D_t(x))$, что $B_r(y) \subseteq K_t^*(x)$. В соответствии с [171, глава 1, предложением 2.42, пункт (а)] полунепрерывность снизу $K_t(\cdot)$ влечет аналогичное свойство для $K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$. По [171, глава 1, лемме 2.51] для любого заданного $\varepsilon \in (0, r)$ найдется окрестность $V(x)$ точки x , такая что для любого $x' \in V(x)$ выполняется $B_\varepsilon(y) \subseteq K_t^*(x')$. Следовательно, полагая $\check{K}_t(x) = \bigcap_{x' \in V(x)} K_t^*(x')$, получаем $B_\varepsilon(y) \subseteq \check{K}_t(x)$. Поэтому $\text{int}(\check{K}_t(x)) \cap \text{bar}(D_t(x)) \neq \emptyset$;

2° Рассмотрим «новую» динамику рынка с неопределенностью движения цен, описываемой компактами $\check{K}_t(\cdot)$, являющимися выпуклыми, как пересечение выпуклых компактов. Для такого рынка выполнено (3.2.10), поэтому применим пункт 2) теоремы 2.4.1, а значит для «новой» модели выполняется условие RNDSAUP. Применим теперь пункт 1) теоремы 2.4.1, в соответствии с которым для «новой» динамики рынка выполняется условие (3.2.7). □

Зафиксируем $a \geq C \geq 0$, где константа C задается соотношением (1.2.3) из главы 1. Можно, не ограничивая общности, считать³⁵, что $C > 0$, т. к. в противном случае $g_t(\cdot) \equiv 0$, что не представляет интереса с точки зрения экономической интерпретации.

Предложение 3.2.3. Пусть компактозначные отображения $K_t(\cdot)$ непрерывны, $D_t(\cdot)$ полунепрерывны снизу и замкнуты³⁶ на V_{t-1} , и выполняется условие (3.2.1). Обозначим

$$E_t^a(x) = \{h \in \mathbb{R}^n : \sigma_{K_t^*(x)}(h) \leq a\}, \quad (3.2.11)$$

³⁴Компакты $\check{K}_t(\cdot)$ в условиях предложения 3.2.2 тоже будут полноразмерными.

³⁵Впрочем, для того что бы обеспечить $a > 0$ (что требуется в доказательстве предложения 3.2.3), можно просто потребовать $a > C$.

³⁶В терминологии книги [36], слабо непрерывное отображение $x \mapsto D_t(\cdot)$ одновременно слабо полунепрерывно сверху и снизу. При этом слабая полунепрерывность сверху равносильна замкнутости (см. [36, Теорема 14.7]), а слабая полунепрерывность снизу совпадает с «обычной» полунепрерывностью снизу (см. [36, Замечание 14.1]).

тогда многозначное отображение

$$x \mapsto \hat{D}_t^a(x) = D_t(x) \cap E_t^a(x), \quad x \in B_{t-1} \quad (3.2.12)$$

является непрерывным.

Доказательство. Покажем полунепрерывность снизу для $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$. Фиксируем $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ и начнем с того, что установим полунепрерывность снизу для $E_t^a(\cdot)$. По [171, глава 1, предложение 2.6, пункт е)], достаточно проверить, что для сходящейся последовательности $x_n \rightarrow x_0$ из B_{t-1} нижний предел по Куратовскому $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_t^a(x_n)$ содержит $E_t^a(x_0)$. Поскольку

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_t^a(x_n) = \{x : \rho(x, E_t^a(x_n)) \rightarrow 0\},$$

см. [171, глава 1, замечание 1.43], то для произвольного $h_0 \in E_t^a(x_0)$ нужно показать существование последовательности $h_n \in E_t^a(x_n)$, такой что $h_n \rightarrow h_0$. Обозначим,

$$r_n = h_\rho(K_t^*(x_n), K_t^*(x_0)) \leq h_\rho(K_t(x_n), K_t(x_0)) \rightarrow 0,$$

по [36, неравенство 5.12]. Здесь мы воспользуемся тем, что для компактозначных отображений (а $K_t^*(\cdot)$ — компактозначно) непрерывность совпадает с h -непрерывностью, по [171, глава 1, теорема 2.68]. Положим $h_n = \alpha_n h_0$, где $\alpha_n = \frac{a}{a+r_n\|h_0\|} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. С использованием [36, предложение 9.11] получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{K_t^*(x_n)}(h_n) &\leq \sigma_{K_t^*(x_0)}(h_n) + r_n\|h_n\| = \alpha_n \sigma_{K_t^*(x_0)}(h_0) + r_n \alpha_n \|h_0\| \leq \\ &\leq \alpha_n a + \alpha_n r_n \|h_0\| = a, \end{aligned}$$

т. е. $h_n \in E_t^a(x_n)$, $h_n \rightarrow h_0 \in E_t^a(x_0)$ и полунепрерывность снизу $E_t^a(\cdot)$ установлена.

Заметим, что $a > 0$ по сделанному выше предположению и что множество $\frac{1}{a}E_t^a(x) = \{h : \sigma_{K_t^*(x)}(h) \leq 1\}$ является полярным по Минковскому для $K_t^*(\cdot)$, в силу [26, формула (70) и теорема 12.2]. По [26, теорема 6.6, пункт а)], точка 0 является внутренней точкой полярного к $K_t^*(x)$ множества, поскольку оно ограничено³⁷. Поэтому $0 \in \text{int}(E_t^a(x))$ для всех $x \in B_{t-1}$. Далее, $0 \in D_t(\cdot) \cap \text{int}(E_t^a(\cdot)) \neq \emptyset$, множества $D_t(\cdot)$ и $E_t^a(\cdot)$ выпуклые, следовательно применимо [171, глава 1, предложение 2.54], в соответствии с которым многозначное отображение $\hat{D}_t^a(\cdot) = D_t(\cdot) \cap E_t^a(\cdot)$ полунепрерывно снизу.

В соответствии с леммой 3.2.3 многозначное отображение $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ является замкнутым. По замечанию 3.2.1, с учетом того, что замкнутые многозначные отображения принимают замкнутые значения [171, глава 1, замечание 2.12], множества $D_t(\cdot)$ замкнуты, а $\hat{D}_t^a(\cdot)$ компактны в соответствии с замечанием 3.2.1. Поскольку множества $\hat{D}_t^a(\cdot)$ выпуклы, то применима [171, глава 1,

³⁷В силу компактности, по [26, теорема 2.6].

теорема 2.102], в соответствии с которой многозначное отображение с аргументом из метрического пространства и принимающее значения в виде линейно связных компактных подмножеств конечномерного евклидова пространства, полунепрерывное снизу и замкнутое, является непрерывным. \square

Теорема 3.2.2. Пусть для $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ числовые функции $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ непрерывны, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ непрерывны, выполняется условие RNDSAUP, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ полунепрерывны снизу и замкнуты. Тогда выполняются утверждения 1° и 2° теоремы 3.1.6.

Доказательство. Фиксируем $a > C$ и вместо $D_t(\cdot)$ в формулах (VI) выбираем $\hat{D}_t^a(\cdot)$, пользуясь леммой 3.2.1. По предложению 3.2.3 компактнозначное отображение $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ непрерывно, так что непосредственно применима теорема 3.1.6. \square

Глава 4. Модуль непрерывности и свойства липшицевости решений уравнений Беллмана—Айзекса

В настоящей главе приводится усиление теоремы 3.2.2 о непрерывности решений уравнений Беллмана—Айзекса, опирающейся на условие структурной устойчивости модели. Найдено конструктивное доказательство, которое одновременно позволяет оценить модуль непрерывности (равномерно) непрерывных решений (В1), в том числе, для случая липшицевых решений этих уравнений.

Эти результаты используются при оценке погрешности аппроксимации динамики рыночных цен, что важно при численном решении уравнений Беллмана—Айзекса, см. главу 10.

Результаты главы опубликованы в [234] и [228].

4.1 Вспомогательные результаты

Следующее элементарное утверждение будет многократно использоваться далее, поэтому для удобства выделим его в отдельную лемму.

Лемма 4.1.1. *Для числовых функций f и g*

$$\left| \sup_A f - \sup_A g \right| \leq \sup_A |f - g|, \quad (4.1.1)$$

$$\left| \inf_A f - \inf_A g \right| \leq \sup_A |f - g|. \quad (4.1.2)$$

Доказательство.

Обозначим $\gamma = \sup_A |f - g|$. Тогда для всех $x \in X$

$$g(x) - \gamma \leq f(x) \leq g(x) + \gamma,$$

откуда

$$\sup_A g - \gamma \leq \sup_A f \leq \sup_A g + \gamma.$$

т. е. имеет место неравенство (4.1.1). Аналогично получается (4.1.2); впрочем, (4.1.2) получается из (4.1.1), если выбрать обе функции со знаком минус. \square

В частности, из леммы 4.1.1 получаем следствие

$$\begin{aligned} \left| \bigvee_{i=1}^n y_i - \bigvee_{i=1}^n y'_i \right| &\leq \bigvee_{i=1}^n |y_i - y'_i| = \|y - y'\|_\infty, \\ \left| \bigwedge_{i=1}^n y_i - \bigwedge_{i=1}^n y'_i \right| &\leq \bigvee_{i=1}^n |y_i - y'_i| = \|y - y'\|_\infty, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

где $y, y' \in \mathbb{R}^n$.

Пусть (X, ρ) и (Y, d) — метрические пространства, $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$. Для функции $f : X \mapsto Y$ и для $\delta \in [0, \infty)$ обозначим

$$\omega_f^E(\delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in E \\ \rho(x_1, x_2) \leq \delta}} d(f(x_1), f(x_2)), \quad (4.1.4)$$

модуль непрерывности функции f на множестве E . Если $E = X$, то будем опускать верхний индекс у модуля непрерывности, т. е. $\omega_f^X(\delta) = \omega_f(\delta)$. Равномерная непрерывность функции f на E означает $\omega_f^E(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Любой модуль непрерывности $\omega_f^E = \omega$, где $\omega : [0, \infty) \mapsto [0, \infty]$, удовлетворяет очевидным свойствам

- 1° $\omega(0) = 0$;
- 2° ω — монотонно неубывающая функция.

В частности, из 1° и 2° следует неотрицательность ω .

Лемма 4.1.2. Пусть T — топологическое пространство, функция $u : T \mapsto [0, \infty)$ полунепрерывна снизу,

$$F(z) = \{x \in T : u(x) \leq z\}$$

задает многозначное отображение¹, $F : [0, \infty) \mapsto 2^T$, такое что $F(0) \neq \emptyset$, функция $\varphi : T \mapsto \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху.

Тогда :

- 1) F принимает непустые замкнутые значения и график F замкнут, а если T — компактно, то многозначное отображение F полунепрерывно сверху;
- 2) если T — компактно, то функция $z \mapsto \sup\{\varphi(x), x \in F(z)\}$, $z \in A$, где A — замкнутое подмножество множества неотрицательных чисел, является монотонно неубывающей непрерывной справа.

Доказательство.

¹Здесь 2^T — класс всех подмножеств T .

- 1) Замкнутость множества $F(z)$, $z \in A$ вытекает из полунепрерывности снизу функции u . Пусть направленности $z_\alpha \rightarrow z$, $x_\alpha \in F(z_\alpha)$ и $x_\alpha \rightarrow x$; поскольку $x_\alpha \in F(z_\alpha)$ равносильно $u(x_\alpha) \leq z$, то из полунепрерывности снизу функции u следует $u(x) \leq \liminf u(x_\alpha) \leq z$, т. е. $x \in F(z)$, и, значит, график F замкнут. Если E компактно, то F полунепрерывно сверху в соответствии с [171, глава 1, предложение 2.23].
- 2) Числовая функция $\psi : A \mapsto \mathbb{R}$, где $\psi(z) = \sup\{\varphi(x) : x \in F(z)\}$ является монотонно неубывающей в силу монотонности F , т. е. $z \leq z'$ влечет $F(z) \subseteq F(z')$. По теореме Бержа, см. теорему 3.1.2 из главы 3, функция ψ полунепрерывна сверху. Для монотонно неубывающей числовой функции полунепрерывность сверху равносильна непрерывности справа.

□

Предложение 4.1.1. Пусть E — непустое компактное подмножество метрического пространства (X, ρ) , функция $f : X \mapsto Y$, где (Y, d) — метрическое пространство, непрерывна. Тогда модуль непрерывности $\omega_f^E = \omega$ удовлетворяет дополнительным условиям:

3° ω принимает конечные значения;

4° ω непрерывна справа.

Доказательство.

Достаточно воспользоваться леммой 4.1.2, выбрав $T = E \times E$, для $x = (x_1, x_2) \in E \times E$; $u(x) = u(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)$; $A = [0, +\infty)$; $z = \delta$; $\phi(x) = \phi(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$. Тогда многозначное отображение

$$F(\delta) = \{(x_1, x_2) \in E \times E, \rho(x_1, x_2) \leq \delta\}$$

полунепрерывно сверху, функция φ непрерывна и достигает максимума на компакте $F(\delta)$, а, стало быть, функция

$$\psi(\delta) = \max_{x \in F(\delta)} \varphi(x) = \max_{x_1, x_2 \in E, \rho(x_1, x_2) \leq \delta} d(f(x_1), f(x_2)) = \omega_f^E(\delta)$$

является непрерывной справа.

□

Замечание 4.1.1.

- 1) Простой пример показывает, что модуль непрерывности в условиях предложения 4.1.1 может быть разрывным: достаточно рассмотреть дискретное пространство X с метрикой

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = y, \\ 1 & \text{при } x \neq y. \end{cases}$$

В этом случае любая функция $f : X \mapsto Y$ равномерно непрерывна и

$$\omega_f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } \delta \in [0, 1), \\ 1 & \text{при } \delta \in [1, \infty). \end{cases}$$

- 2) Дополнительная структура на пространстве X позволяет установить не только непрерывность, но и такое свойство модуля непрерывности, как субаддитивность.

Пусть E — непустое выпуклое подмножество нормированного пространства X с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Случай, когда E состоит из единственной точки, не интересен², так что будем предполагать, что E содержит две разные точки (а значит, и бесконечное их число). Фиксируем произвольные неотрицательные, не равные нулю одновременно, δ_1, δ_2 и выберем произвольные точки x и y из E , такие что $\rho(x, y) = \|x - y\| \leq \delta_1 + \delta_2 > 0$. Положим $p = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}$ и $z_p = (1 - p)x + py \in E$, тогда

$$\begin{aligned} \|x - z_p\| &= p\|x - y\| \leq \delta_1, \\ \|z_p - y\| &= (1 - p)\|x - y\| \leq \delta_2. \end{aligned}$$

Поэтому для любых x и y , таких что $\|x - y\| \leq \delta_1 + \delta_2$ имеем неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(z_p)) + \rho(f(z_p), f(y)) \leq \omega_f^E(\delta_1) + \omega_f^E(\delta_2),$$

откуда, с учетом свойства 1°, когда $\delta_1 = \delta_2 = 0$, получаем, что модуль непрерывности $\omega_f^E = \omega$ удовлетворяет свойству субаддитивности:³

$$5^\circ \quad \omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2).$$

- 3) Функция $\varphi : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$, удовлетворяющая свойствам 1°, 2°, 3° и 5°, имеет модуль непрерывности⁴, совпадающий с этой функцией⁵, т. е. $\omega_\varphi = \varphi$. Действительно, пусть $|t_2 - t_1| \leq \delta$; тогда, используя 2°, 3° и 5°, получаем

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| = \varphi(t_1 \vee t_2) - \varphi(t_1 \wedge t_2) \leq \varphi(|t_2 - t_1|) \leq \varphi(\delta), \quad (4.1.5)$$

откуда $\omega_\varphi \leq \varphi$. Обратное, из 1° и 2° следует

$$\omega_\varphi(\delta) \geq |\varphi(\delta) - \varphi(0)| = \varphi(\delta) - \varphi(0) = \varphi(\delta).$$

²В этом случае, с учетом свойств 1°, свойство субаддитивности тривиально выполняется.

³При этом возможно, что $\omega(\delta) = \infty$ для всех $\delta > 0$. Если ω удовлетворяет условиям 1°, 2° и 5°, то для 3° достаточно конечности $\omega(\delta)$ в одной точке $\delta > 0$.

⁴Для такой функции φ условия пункта 2) замечания 4.1.1 выполняются.

⁵Похуже утверждение имеется в литературе, см., например §6 в книге [134], однако там налагается избыточные требования на φ .

- 4) Если, в дополнение к свойствам 1° , 2° , и 5° модуль непрерывности $\omega_f = \omega$ функции f удовлетворяет⁶ свойству 4° , то свойство 3° автоматически выполняется, ω совпадает со своим модулем непрерывности и f равномерно непрерывна, что вытекает из неравенства (4.1.5).
- 5) Примером равномерно непрерывной, но не абсолютно непрерывной функции $\varphi : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$, удовлетворяющей свойствам 1° , 2° , 4° и 5° может служить канторова лестница⁷, см. [60], раздел 3.2.4. При этом функция φ удовлетворяет условию Гельдера: $\varphi(\delta) = \omega_\varphi(\delta) \leq \delta^\alpha$, $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, см. [136].
- 6) В условиях пункта 2), если выполняется свойство 3° , то модуль непрерывности тем самым удовлетворяет 1° , 2° , 3° и 5° , а функция ω , удовлетворяющая этим четырем свойствам, асимптотически линейна.⁸ Действительно, фиксируем произвольное $t > 0$. Напомним, что $\omega \geq 0$ в силу 1° и 2° . Обозначая через $[a]$ целую часть числа $a \in \mathbb{R}$, для любого $x \in [0, \infty)$ имеем

$$\omega(x) = \omega\left(\left[\frac{x}{t}\right]t + r\right), \quad r = \left(\frac{x}{t} - \left[\frac{x}{t}\right]\right)t \in [0, t);$$

и из субаддитивности 5° вытекает

$$\omega(x) \leq \left[\frac{x}{t}\right]\omega(t) + \omega(r).$$

Поскольку ω монотонно убывает⁹ в соответствии с 2° , то

$$\omega(r) \leq \omega(t);$$

из последних двух неравенств получаем

$$\omega(x) \leq \left(\left[\frac{x}{t}\right] + 1\right)\omega(t) \leq \left(\frac{x}{t} + 1\right)\omega(t). \quad (4.1.6)$$

Далее, стандартные рассуждения, опирающиеся на (4.1.6), приводят к неравенству¹⁰:

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\omega(x)}{x} \leq \frac{\omega(t)}{t}, \quad t > 0,$$

⁶Если, в дополнение к 1° и 2° , функция вогнута, то 4° и 5° выполняются.

⁷Точнее, продолжение φ функции Кантора $\psi : [0, 1] \mapsto [0, 1]$, полагая $\varphi(\delta) = 1$ при $\delta > 1$.

⁸Это свойство можно назвать непрерывным вариантом леммы Фекете.

⁹Т. к. аддитивная функция, т. е. решение уравнения Коши, является субаддитивной, то без дополнительных условий получить для субаддитивной функции асимптотическую линейность невозможно, поскольку из аксиомы выбора следует существование неизмеримого решения уравнения Коши, такого что его график всюду плотен на плоскости [179]. Достаточно потребовать ограниченности ω в окрестности точки 0; в нашем случае это вытекает из неотрицательности ω (следствие свойств 1° и 2°) и свойств монотонности 2° и конечности 3° .

¹⁰Если функция ω , удовлетворяющая 1° и 2° , вогнута, то функция $t \rightarrow \frac{\omega(t)}{t}$ является невозрастающей.

а в силу произвольности $t > 0$, к неравенствам

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\omega(x)}{x} \leq \inf_{t > 0} \frac{\omega(t)}{t} \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\omega(x)}{x},$$

т. е. получаем классический результат

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\omega(x)}{x} = \inf_{x > 0} \frac{\omega(x)}{x} < +\infty.$$

Расстояние Помпею—Хаусдорфа¹¹ может быть представлено в форме

$$h_\rho(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq [B]^\varepsilon, B \subseteq [A]^\varepsilon\},$$

где

$$\begin{aligned} \rho(x, A) &= \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}, \\ [A]^\delta &= \{x \in X : \rho(x, A) < \delta\}. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Лемма 4.1.3. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, заданы непустые множества $E \subseteq X$, $A \subseteq E$ и $B \subseteq E$, а также числовая функция $f : E \mapsto \mathbb{R}$.

1) Если $h_\rho(A, B) < \delta$, то

$$\left| \sup_A f - \sup_B f \right| \leq \omega_f^E(\delta).$$

2) Если, кроме того f непрерывна на E , компактном подмножестве X , то

$$\left| \sup_A f - \sup_B f \right| \leq \omega_f^E(h_\rho(A, B)).$$

Доказательство.

1) Рассмотрим метрическое пространство (E, ρ') , где ρ' — сужение ρ на $E \times E$. Заметим, что для $x \in E$, $A \subseteq E$ имеет место равенство $\rho'(x, A) = \rho(x, A)$. Обозначим $[A]_E^\delta = \{x \in E : \rho(x, A) < \delta\} = [A]^\delta \cap E$. Поскольку для $A \subseteq E$ включение $A \subseteq [B]^\varepsilon$ влечет $A \subseteq [B]^\varepsilon \cap E = [B]_E^\varepsilon$, а включение $A \subseteq [B]_E^\varepsilon$ влечет $A \subseteq [B]^\varepsilon \cap E \subseteq [B]^\varepsilon$, то для $A \subseteq E$ и $B \subseteq E$ расстояние Помпею—Хаусдорфа на E , задаваемое посредством формулы $h_{\rho'}(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq [B]_E^\varepsilon, B \subseteq [A]_E^\varepsilon\}$, совпадает с $h_\rho(A, B)$. Поскольку $h_{\rho'}(A, B) < \delta$, то $A \subseteq [B]_E^\delta$ и $B \subseteq [A]_E^\delta$. Для $x \in [A]_E^\delta$ найдется $y \in A$, такое что $\rho(x, y) < \delta$, а значит $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f^E(\delta)$.

Отсюда

$$\sup_{[A]_E^\delta} f \leq \sup_A f + \omega_f^E(\delta);$$

¹¹Может быть, что $h_\rho(A, B) = \infty$.

аналогично получаем

$$\sup_{[B]_E^{\delta}} f \leq \sup_B f + \omega_f^E(\delta).$$

Кроме того,

$$\sup_B f \leq \sup_{[A]_E^{\delta}} f \leq \sup_A f + \omega_f^E(\delta)$$

и

$$\sup_A f \leq \sup_{[B]_E^{\delta}} f \leq \sup_B f + \omega_f^E(\delta),$$

откуда следует

$$|\sup_A f - \sup_B f| \leq \omega_f^E(\delta).$$

- 2) В соответствии с предложением 4.1.1, функция ω_f^E непрерывна справа, так что из пункта 1) следует пункт 2).

□

Обозначим $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ класс всех непустых компактных множеств \mathbb{R}^n . Рассмотрим $N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ с выпуклой оболочкой, содержащей начало координат, т. е. $0 \in \text{conv}(N)$. Опорная функция $\sigma_N(h) = \max_{y \in N} hy$ в этом случае является выпуклой и конечной для всех $h \in \mathbb{R}^n$, а значит непрерывной (см., например, [40, глава 1, следствие 10.1.1]), поэтому достигает минимума на компактном множестве $S_1(0)$ — единичной сфере в \mathbb{R}^n , т. е. $S_1(0) = \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\|_2 = 1\}$, где $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма, $\|h\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}$.

Определим теперь важную (для дальнейших рассмотрений) функцию r посредством¹²

$$r(N) = \min_{h \in S_1(0)} \sigma_N(h) = \min_{h \in S_1(0)} \max_{y \in N} hy \quad (4.1.8)$$

для¹³ $N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ с $0 \in \text{conv}(N)$. Отметим, что $r(\text{conv}(N)) = r(N)$, поскольку опорная функция множества N совпадает с опорной функцией выпуклой оболочки $\text{conv}(N)$ этого множества. Для выпуклого множества $N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, содержащего точку 0, геометрический смысл $r(N)$ — радиус вписанного шара с центром в 0, т. е. максимальный радиус шара с центром в точке 0, содержащегося в выпуклом компакте N , или, что равносильно, расстояние от точки 0 до границы $\text{bd}(N)$ множества N .

Лемма 4.1.4. *Функция $N \mapsto r(N)$ является липшицевой, с константой Липшица равной единице, на пространстве $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ непустых выпуклых компактов в \mathbb{R}^n с метрикой Помпею—Хаусдорфа.*

¹²Напомним, что hy обозначает скалярное произведение.

¹³Для таких значений аргумента функция r принимает конечные неотрицательные значения.

Доказательство. Обозначим для $N \subseteq \mathbb{R}^n$

$$N^* = \text{conv}(N). \quad (4.1.9)$$

Пусть $N_i \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$. В соответствии с [26, теорема 14.1] расстояние Помпею—Хаусдорфа между выпуклыми компактами¹⁴ N_1^* и N_2^* представимо в виде

$$h_\rho(N_1^*, N_2^*) = \max_{h \in S_1(0)} |\sigma_{N_1^*}(h) - \sigma_{N_2^*}(h)|.$$

Используя лемму 4.1.1 имеем

$$\begin{aligned} |r(N_1) - r(N_2)| &= |r(N_1^*) - r(N_2^*)| = \left| \min_{h \in S_1(0)} \sigma_{N_1^*}(h) - \min_{h \in S_1(0)} \sigma_{N_2^*}(h) \right| \leq \\ &\leq \max_{h \in S_1(0)} |\sigma_{N_1^*}(h) - \sigma_{N_2^*}(h)| = h_\rho(N_1^*, N_2^*) \leq h_\rho(N_1, N_2); \end{aligned}$$

последнее из неравенств содержится в [36, предложение 5.2], формула (5.12). \square

Лемма 4.1.5. Пусть K — компакт, многозначное отображение $N : K \mapsto \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно снизу. Кроме того, предположим, что множества $N(x)$ для всех $x \in K$ удовлетворяют условию¹⁵ $0 \in \text{int}(N^*(x))$, где обозначено $N^*(x) = \text{conv}(N(x))$. Тогда функция $x \mapsto r(N(x))$ полунепрерывна снизу и $\min_{x \in K} r(N(x)) > 0$.

Доказательство.

Функция $(x, h) \mapsto \sigma_{N(x)}(h) = \max_{y \in N(x)} hy$ полунепрерывна снизу по теореме Берга, см. пункт 1° Замечания 3.1.5 из главы 3. Далее, отображение $x \mapsto S_1(0)$, принимающее постоянное компактное значение, непрерывно, так что по теореме Берга, см. пункт 2° Замечания 3.1.5 из главы 3, функция $x \mapsto r(N(x)) = \min_{h \in S_1(0)} \sigma_{N(x)}(h)$ является полунепрерывной снизу и достигает минимального значения в некоторой точке $x^* \in K$, для которой $0 \in \text{int}(N^*(x^*))$, а значит $r(N(x^*)) = r(N^*(x^*)) > 0$. \square

Замечание 4.1.2.

- 1) Если отображение $x \mapsto N(x)$, принимающее компактные выпуклые значения, непрерывно, или, что равносильно, h -непрерывно, то функция $x \mapsto r(N(x))$ непрерывна, что непосредственно вытекает из леммы 4.1.4.
- 2) Если $N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $0 \in N^*$ и¹⁶ $\dim(\text{aff}(N)) < n$, то $r(N) = 0$.

¹⁴Выпуклая оболочка компакта компактна, см., например, [26, теорема 2.6]. Заметим, что здесь мы используем обозначение (4.1.9).

¹⁵В этом случае аффинная оболочка множества $N(x)$ (совпадающая с линейной оболочкой, т. к. $0 \in N(x)$) равна \mathbb{R}^n .

¹⁶Здесь $\text{aff}(N)$ — аффинная оболочка N , $\dim(A)$ — размерность аффинного многообразия A .

3) Определим новую функцию

$$\tilde{r}(N) = \min_{h \in S_1(0) \cap \text{aff}(N)} \sigma_N(h)$$

для множеств $N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, таких что $0 \in \text{ri}(N^*)$, где $\text{ri}(A)$ — относительная внутренность выпуклого множества A . $\tilde{r}(N)$ — расстояние от 0 относительной границы $\text{rbd}(N^*)$ множества N^* , и $\tilde{r}(N)$ уже не будет непрерывной функцией относительно расстояния Помпею—Хаусдорфа отвечающего, евклидовой метрике в пространстве \mathbb{R}^n . Например, если N — выпуклый компакт, $0 \in \text{ri}(N)$ и $\dim(\text{aff}(N)) < n$, то $\tilde{r}(N) > 0$ и выбирая произвольно малое $\varepsilon \in (0, \tilde{r}(N))$, получаем, что для $N^\varepsilon = N + \bar{B}_\varepsilon(0)$ выполняется $h_\rho(N, N^\varepsilon) = \varepsilon$ и $\tilde{r}(N^\varepsilon) = r(N^\varepsilon) = \varepsilon$. Разумеется, если сузить пространство \mathbb{R}^n до $E = \text{aff}(N)$ с наследованной евклидовой метрикой и соответствующим расстоянием Помпею—Хаусдорфа, то \tilde{r} станет в таком пространстве уже непрерывной функцией.

4.2 Оценка модуля непрерывности решений уравнений Беллмана—Айзекса

Следующий результат является уточнением теоремы 3.2.2, позволяющим не только оценить модуль непрерывности, но и одновременно дать альтернативное (прямое) доказательство непрерывности функций v_t^* , $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Нам удобно считать¹⁷, что в исходной постановке задачи функции $g_t(\cdot)$ и многозначные отображения $K_t(\cdot)$ заданы на всем пространстве $(\mathbb{R}^n)^t$; соответственно, всюду определены функции $v_t^*(\cdot)$, задаваемые (BI). В действительности, потребуется задание на множестве возможных траекторий B_t , или, возможно, на некотором выпуклом компактном подмножестве $(\mathbb{R}^n)^t$, содержащем B_t . Зададим норму для $\bar{x}_t \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$ посредством

$$\|\bar{x}_t\| = \sum_{s=0}^t \|x_s\|_1,$$

где

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z^i| \text{ для } z = (z^1, \dots, z^n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим $K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$;

$$C_t^* = \bigvee_{s=t}^N C_s, \tag{4.2.1}$$

$$C_t = \sup_{\bar{x}_{t-1} \in B_t} g_t(\bar{x}_{t-1});$$

¹⁷По крайней мере, в отношении функций потенциальных выплат g_t , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ это не только удобно, но и естественно — обычно именно так ставится задача на практике.

$$A_t^* = \sup_{x \in B_{t-1}} \left\| \hat{D}_t^{C_t^*} \right\|_2, \quad (4.2.2)$$

где множество $\hat{D}_t^h(\cdot)$ определяется формулой (3.2.4) из главы 3, $\|A\|_2 = \sup_{h \in A} \|h\|_2$, а $\|h\|_2$ — евклидова норма, т. е.

$$\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (h^i)^2} \text{ для } h = (h^1, \dots, h^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 4.2.1. Пусть выполнено робастное условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP, для $s = 1, \dots, N$ функции потенциальных выплат g_s непрерывны, компактнозначные отображения $\bar{x}_{s-1} \mapsto K_s(\bar{x}_{s-1})$ являются h -непрерывными (для метрики Помпею—Хаусдорфа¹⁸), многозначное отображение $\bar{x}_{s-1} \mapsto D_s(\bar{x}_{s-1})$ полунепрерывно снизу и замкнуто, множество B_0 возможных начальных цен компактно. Тогда функции v_s^* , заданные посредством (VI), равномерно непрерывны и ограничены на B_s , т. е.

$$0 \leq v_s^* \leq C_s^* < \infty, \quad s \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad (4.2.3)$$

и имеет место оценка модуля непрерывности $\omega_{v_s^*}$ функций v_s^* :

$$\omega_{v_{s-1}^*}^{B_{s-1}}(\delta) \leq \omega_{g_{s-1}}^{B_{s-1}}(\delta) \vee \left[\omega_{v_s^*}^{B_s}(\omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta)) + A_s^* \omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta) + \omega_{v_s^*}^{B_s}(\delta) \right], \quad s = N, \dots, 1; \\ \omega_{v_N^*}^{B_N} = \omega_{g_N}^{B_N}, \quad (4.2.4)$$

где формально полагаем $g_0 \equiv 0$ (и $\omega_{g_0} \equiv 0$), $\omega_{K_s}^{B_{s-1}}$ — модуль непрерывности $K_s(\cdot)$ в метрике Хаусдорфа на B_{s-1} , $\omega_{g_s}^{B_s}$ и $\omega_{v_s^*}^{B_s}$ — модули непрерывности на B_s функций g_{s-1} и v_s^* , соответственно, причем величины A_s^* , задаваемые посредством (4.2.2), являются конечными, $s = N, \dots, 1$.

Доказательство. Утверждение о непрерывности функций v_s^* , $s \in \llbracket 0, N \rrbracket$, вытекает из Теоремы 3.2.2, учитывая также, что для компактнозначных отображений $K_s(\cdot)$, $s \in \llbracket 1, N \rrbracket$, полунепрерывность и h -полунепрерывность (снизу или сверху) суть одно и то же, см. [171, глава 1, предложение 2.68]. Поскольку, в соответствии с предложением 3.1.1 из главы 3, множество возможных траекторий B_s является компактным, функции v_s^* на B_s являются равномерно непрерывными и ограниченными, $s \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Впрочем, для рассматриваемого случая равномерная непрерывность функций v_s^* также получается по индукции непосредственно (из рассуждений, приведенных ниже), одновременно с оценкой модулей непрерывности (4.2.4) и неравенствами (4.2.3). Для $s = N$ это очевидно. Пусть v_s^* равномерно непрерывна для $s = N, \dots, t$, где $t < N$. Проверим, что v_{t-1}^* равномерно непрерывна и для $s = t$ выполняются (4.2.3) и (4.2.4). В соответствии с (VI) уравнения Беллмана—Айзека для $t = N, \dots, 1$ имеют вид

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \rho_t(\bar{x}_{t-1}), \quad (4.2.5)$$

¹⁸Для компактнозначных отображений h -непрерывность равносильна непрерывности, см. [171, глава 1, теорема 2.68].

где

$$\rho_t(\bar{x}_{t-1}) = \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \quad (4.2.6)$$

Поскольку, по предположению теоремы, функции g_{t-1} непрерывны, то они равномерно непрерывны и ограничены на компакте B_t возможных траекторий, в частности, $C_t < \infty$.

Поскольку $v_{t-1}^*(\cdot) \geq g_{t-1}(\cdot)$, то $v_s^*(\cdot) \geq 0$ для $s = t-1, \dots, N$. Так как, по предположению индукции, $v_t^*(\cdot) \leq C_t^*$, а точная нижняя грань по h в (4.2.6) не превосходит значения точной верхней грани по y при $h = 0$, то $\rho_t(\cdot) \leq C_t^*$ и имеют место неравенства $v_{t-1}^*(\cdot) \leq C_{t-1} \vee C_t^* = C_{t-1}^*$. Тем самым, неравенства (4.2.3) установлены.

Покажем теперь равномерную непрерывность функции $\bar{x}_{t-1} \mapsto \rho_t(\bar{x}_{t-1})$ и одновременно оценим ее модуль непрерывности. Поскольку непрерывное отображение компактного метрического пространства в метрическое пространство равномерно непрерывно (см., например, [135, теорема 3.16.5]), а с учетом [36, теоремы 5.1 и леммы 5.5], класс всех компактных подмножеств \mathbb{R}^n является метрическим пространством для метрики, равной расстоянию Помпею—Хаусдорфа, то отображение $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, рассматриваемое как однозначное, равномерно непрерывно на B_{t-1} ; обозначая через $\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\cdot)$ — модуль непрерывности отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, имеем $\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

По предположению индукции функция $v_t^*(\cdot)$ равномерно непрерывна, так что модуль ее непрерывности $\omega_{v_t^*}(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Пусть $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$, $\bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$, $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| \leq \delta$. Имеют место неравенства

$$\begin{aligned} & \left| \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] - \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1} + y) - hy] \right| \leq \\ & \leq \left| \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] - \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] \right| + \\ & + \left| \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] - \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1} + y) - hy] \right|. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Чтобы оценить первое слагаемое в правой части неравенства (4.2.7), заметим, что модуль непрерывности в точке $\varepsilon \geq 0$ функции $y \mapsto v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$ можно оценить сверху величиной $\omega_{v_t^*}^{B_t}(\varepsilon) + \|h\|_2 \varepsilon$. Далее, используя Лемму 4.1.3, пункт 2), получаем, что первое слагаемое оценивается сверху величиной

$$\begin{aligned} & \omega_{v_t^*}(h_\rho(K_t(\bar{x}_{t-1}), K_t(\bar{x}'_{t-1}))) + \|h\|_2 h_\rho(K_t(\bar{x}_{t-1}), K_t(\bar{x}'_{t-1})) \leq \\ & \leq \omega_{v_t^*}^{B_t}(\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)) + \|h\|_2 \omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta). \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части неравенства (4.2.7), с использованием Леммы 4.1.1, оценивается сверху величиной

$$\sup \{ |v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1} + y)|, y \in K_t(\bar{x}'_{t-1}) \} \leq \omega_{v_t^*}^{B_t}(\delta).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \left| \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] - \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1} + y) - hy] \right| \leq \\ & \leq [\omega_{v_t^*}^{B_t}(\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta))] + \|h\|_2 \omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta) + \omega_{v_t^*}(\delta) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

для всех $\bar{x}_{t-1}, \bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$, таких что $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| < \delta$.

В соответствии с леммой 3.2.1 функция $\rho_t(\cdot)$, задаваемая (3.1.4), может быть представлена в виде

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in \hat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy],$$

где a не меньше равномерной оценки сверху для функции w_t , в качестве которой может выступать (поскольку неравенство (4.2.3) установлено) константа C_t^* . Таким образом, $D_t(\cdot)$ можно заменить на выпуклое множество $\hat{D}_t^a(\cdot)$, компактность которого следует из условия RNDSAUP, и выбрать $a = C_t^*$, т. е.

$$\rho_t(\bar{x}_{t-1}) = \inf_{h \in \hat{D}_t^{C_t^*}(\bar{x}_{t-1})} \varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h), \quad (4.2.9)$$

где

$$\varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h) = \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \quad (4.2.10)$$

По предложению 3.2.3 многозначное отображение $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ непрерывно¹⁹, а поскольку $B_t(\cdot)$ компактно, то по [36, Предложению 6.4] это отображение компактно ограничено²⁰ на B_t и, стало быть A_t^* принимает конечное значение.

Учитывая (4.2.8), неравенства

$$|\varphi_t(\bar{x}'_{t-1}, h) - \varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h)| \leq \beta(\delta), \quad (4.2.11)$$

где

$$\beta(\delta) = \omega_{v_t^*}^{B_t}(\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)) + A_t^* \omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta) + \omega_{v_t^*}^{B_{t-1}}(\delta), \quad (4.2.12)$$

имеют место для любых $\bar{x}_{t-1}, \bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$, таких что $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| < \delta$ и всех $h \in B_{A_t^*}(0)$. Из (4.2.9), (4.2.11) и (4.2.12), а также Леммы 4.1.1 следует неравенство

$$|\rho_t(\bar{x}'_{t-1}) - \rho_t(\bar{x}_{t-1})| \leq \beta(\delta) \quad (4.2.13)$$

для всех $\bar{x}_{t-1}, \bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$, таких что $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| < \delta$. Поскольку v_t^* и K_t равномерно непрерывны, то $\beta(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$; таким образом, функция ρ_{t-1} равномерно непрерывна, с модулем непрерывности

$$\omega_{\rho_t}^{B_{t-1}}(\delta) = \beta(\delta). \quad (4.2.14)$$

¹⁹Для компактозначных отображений h -непрерывность равносильна непрерывности.

²⁰Т. е. найдется компакт, содержащий все значения многозначного отображения (см. [36, определение 6.3]).

Поскольку $v_{t-1}^* = g_{t-1} \vee \rho_t$, то с использованием следствия (4.1.3) из леммы 4.1.1 имеем для $\delta \geq 0$:

$$\omega_{v_{t-1}^*}^{B_{t-1}}(\delta) \leq \omega_{g_{t-1}}^{B_{t-1}}(\delta) \vee \omega_{\rho_t}^{B_{t-1}}(\delta). \quad (4.2.15)$$

Наконец, из (4.2.12), (4.2.14) и (4.2.15) вытекают требуемые неравенства (4.2.4). \square

Из доказанной теоремы легко получается следующее утверждение.

Предложение 4.2.1. Пусть выполнено условие *RNDSAUP*, многозначное отображение $D_t(\cdot)$ полунепрерывно снизу и замкнуто, функции g_{t-1} и $K_t(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица с константами L_{g_t} и L_{K_t} соответственно, тогда функции Беллмана v_t^* также удовлетворяют условиям Липшица с константами $L_{v_t^*}$, которые могут быть определены из следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} L_{v_N^*} &= L_{g_N}, \\ L_{v_{t-1}^*} &= L_{g_{t-1}} \vee [L_{v_t^*}(L_{K_t} + 1) + A_t^* L_{K_t}], \quad t = N, \dots, 1. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

где A_t^* определяется посредством (4.2.1), $t = N, \dots, 1$.

Доказательство. Равенство $L_{v_N^*} = L_{g_N}$ очевидно. Используя рекуррентные неравенства (4.2.4) и формулы (4.2.1), а также липшицевость g_{t-1} и $K_t(\cdot)$, т. е.²¹

$$\begin{aligned} \omega_{g_{t-1}}(\delta) &\leq L_{g_t} \delta, \\ \omega_{K_{t-1}}(\delta) &\leq L_{K_{t-1}} \delta, \end{aligned}$$

получаем требуемый результат. \square

Обозначим

$$r_t^* = \inf_{x \in B_{t-1}} r(K_t^*(x)), \quad t = 1, \dots, N, \quad (4.2.17)$$

где r — функция, определенная формулой (4.1.8).

Предложение 4.2.2. Если торговые ограничения отсутствуют и выполняются условия теоремы 4.2.1, то справедливы неравенства

$$A_t^* \leq \frac{C_t^*}{r_t^*}, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (4.2.18)$$

причем величины r_t^* , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, задаваемые посредством (4.2.17), являются положительными.

²¹Здесь константы Липшица можно считать выбранными минимальными, т. е. $L_{g_{t-1}} = \sup\{\omega_{g_{t-1}}(\delta)/\delta, \delta > 0\}$, $L_{K_{t-1}} = \sup\{\omega_{K_{t-1}}(\delta)/\delta, \delta > 0\}$.

Доказательство.

В случае отсутствия торговых ограничений условие RNDSAUP равносильно условию RNDAO (см. теорему 2.4.1 и предложение 2.4.1), что эквивалентно геометрическому условию (2.4.8), т. е. $0 \in K_t^*(\cdot)$.

Функция $\bar{x}_{t-1} \mapsto r(K_t(\bar{x}_{t-1}))$, где функция r определена посредством (4.1.8), непрерывна в силу леммы 4.1.4; по лемме 4.1.5 непрерывная функция $\bar{x}_{t-1} \mapsto r(K_t(\bar{x}_{t-1}))$ достигает минимума для некоторого $\bar{x}_{t-1}^* \in B_{t-1}$ и $r(K_t(\bar{x}_{t-1}^*)) = r_t^* > 0$.

По определению r_t^* посредством (4.2.17), имеем $K_t^*(\cdot) \supseteq B_{r_t^*}(0)$, что влечет неравенство для опорных функций $\sigma_{K_t^*(\cdot)} \geq r_t^* \|h\|_2$. Поэтому для $h \in D_t^{\hat{C}_t^*}(\cdot)$ имеет место неравенство

$$r_t^* \|h\|_2 \leq \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h) \leq C_t^*,$$

откуда $\|h\|_2 \leq \frac{C_t^*}{r_t^*}$, а значит $A_t^* \leq \frac{C_t^*}{r_t^*}$. □

Замечание 4.2.1.

- 1) Для того, чтобы был применим пункт 2) замечания 4.1.1, достаточно расширить множество B_t , на котором определяются модули непрерывности, до выпуклого множества, содержащего B_t , минимально до выпуклой оболочки $\text{conv}(B_t)$; для некоторых моделей B_t является выпуклым множеством, $t = 0, \dots, N$.
- 2) Если E — непустое компактное подмножество метрического пространства (X, ρ) , то функция $f : X \mapsto Y$, где (Y, d) — метрическое пространство, удовлетворяет условию Липшица на E тогда и только тогда, когда для модуля непрерывности $\omega_f^E(\delta) = \omega(\delta)$ выполняется условие

$$a = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(\delta)}{\delta} < \infty. \quad (4.2.19)$$

Необходимость очевидна. Если выполнено (4.2.19), то функция f равномерно непрерывна на E , поскольку $\omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta^* = \delta^*(\varepsilon) > 0$, такое что $\omega(\delta) \leq (a + \varepsilon)\delta$ при $\delta \in [0, \delta^*]$. Поскольку ω не превосходит максимума непрерывной функции $(x_1, x_2) \mapsto d(f(x_1), f(x_2))$ на компакте $E \times E$, который обозначим через m , то $\omega(\delta) \leq \left[\frac{m}{\delta^*} \vee (a + \varepsilon) \right] \delta$ для всех $\delta \geq 0$.

- 3) Пусть, как в пункте 2) замечания 4.1.1, E — непустое выпуклое подмножество нормированного пространства X с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$, содержащее две точки (а значит, и бесконечное их число). Тогда условие (4.2.19) необходимо и достаточно для липшицевости функции $f : E \mapsto Y$, где (Y, d) — метрическое пространство, причем $\omega(\delta) < a\delta$ для всех $\delta \in [0, \infty)$, т. е. a — константа Липшица.

Необходимость очевидна. Если выполнено (4.2.19), фиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$ и выберем $\delta^* = \delta^*(\varepsilon) > 0$, такое что $\omega(\delta) \leq (a + \varepsilon)\delta$ при $\delta \in [0, \delta^*]$. Поскольку при сделанных предположениях функция ω субаддитивна, то из неравенства (4.1.6) следует, что при $x \geq t > 0$

$$\frac{\omega(x)}{x} \leq \left(1 + \frac{t}{x}\right) \frac{\omega(t)}{t}; \quad (4.2.20)$$

выбирая в (4.2.20) $x > \delta^*$ и $t < \varepsilon\delta^*$ получаем, что $\sup_{x>0} \frac{\omega(x)}{x} \leq (a + \varepsilon)(1 + \varepsilon)$. В силу произвольной малости ε заключаем, что a — константа Липшица.

- 4) Результат теоремы 4.2.1 может быть полезен, в частности, для оценки точности численного решения задачи, в случае, когда имеется дополнительное более сильное, чем непрерывность, свойство «гладкости» функций и многозначных отображений — липшицевость. Отметим, что липшицевость функций потенциальных выплат — вполне реалистичное предположение, выполняющееся для многих видов опционов. Исключение, например, составляют бинарные опционы²². В приведенном ниже предложении 4.2.3 доказывается липшицевость многозначных отображений для мультипликативной модели.

Рассмотрим модель, относящуюся к мультипликативно-независимому типу и однородную по времени²³, где мультипликативные факторы M_t , определяющие динамику цен посредством мультипликативного представления:

$$X_t^i = M_t^i X_{t-1}^i, \quad M_t = (M_t^1, \dots, M_t^n) \in C_t(\cdot), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (4.2.21)$$

где $C_t(\cdot)$ — непустое компактное подмножество \mathbb{R}^n ; неопределенные величины M_t^i назовем мультипликативными факторами. Для вектора $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $\Lambda(z)$ диагональную матрицу вида

$$\Lambda(z)_{ij} = \begin{cases} z_i, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

тогда (4.2.21) можно записать в матричном виде:

$$X_t = \Lambda(M_t) X_{t-1}. \quad (4.2.22)$$

Очевидно, приращения цен $Y_t = \Delta X_t$ связаны с мультипликативным представлением соотношениями

$$Y_t = [\Lambda(M_t) - I] X_{t-1}, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

где I — единичная матрица;

$$K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = [\Lambda(m) - I] x_{t-1}, \quad m \in C_t(x_0, \dots, x_{t-1})\}.$$

²²По английски “binary” или “digital”. В главе 11 рассматривается задача ценообразования таких опционов в рамках модели с некоторыми специальными предположениями.

²³Эта терминология введена в разделе 1.1 главы 1.

Предложение 4.2.3. Пусть $C_t(\cdot) \equiv C^*$, где C^* — непустое компактное выпуклое подмножество \mathbb{R}^n . Тогда многозначное отображение, принимающее компактные выпуклые значения

$$x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto K(x) = \left\{ y = (y^1, \dots, y^n) : \begin{aligned} y^i &= (M^i - 1)x^i, \\ i &= 1, \dots, n, \quad M = (M^1, \dots, M^n) \in C^* \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяет условию Липшица относительно метрики Помпею–Хаусдорфа с константой Липшица L_K , не превосходящей $\|C^* - e\|_2$, где обозначено $e = (1, \dots, 1)$ и $\|A\|_2 = \sup_{a \in A} \|a\|_2$.

Доказательство. В самом деле, обозначим $L^i = M^i - 1$; тогда, с учетом (4.2.22), $y \in K(x)$ равносильно $y^i = L^i x^i$, $i = 1, \dots, n$, где $L \in C' = C^* - e$. Опорная функция

$$\begin{aligned} \sigma_{K(x)}(z) &= \sup_{y \in K(x)} \sum_{i=1}^n z^i y^i = \sup_{L \in C'} \sum_{i=1}^n z^i L^i x^i = \\ &= \sigma_{C'}((z^1 x^1, \dots, z^n x^n)) = \sigma_{C'}(\Lambda(z)x), \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

где $\Lambda(z)$ — диагональная матрица:

$$\Lambda(z)_{ij} = \begin{cases} z^i, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Пусть ρ — евклидова метрика на \mathbb{R}^n , т. е. $\rho(a, b) = \|a - b\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a^i - b^i)^2}$; тогда отвечающая ρ метрика Помпею–Хаусдорфа h_ρ на пространстве выпуклых компактов представима в виде

$$h_\rho(A, B) = \max_{z: \|z\|_2=1} |\sigma_A(z) - \sigma_B(z)|, \quad (4.2.24)$$

как мы уже отмечали в доказательстве леммы 4.1.4. Поэтому, с учетом (4.2.23) и (4.2.24),

$$\begin{aligned} h_\rho(K(x), K(x')) &= \max_{z: \|z\|_2=1} |\sigma_{K(x)}(z) - \sigma_{K(x')}(z)| = \\ &= \max_{z: \|z\|_2=1} |\sigma_{C'}(\Lambda(z)x) - \sigma_{C'}(\Lambda(z)x')| \leq \|C'\|_2 \sup_{z: \|z\|_2=1} \|\Lambda(z)\|_2 \|x - x'\|_2, \end{aligned}$$

где

$$\|\Lambda(z)\|_2 = \max_{x: \|x\|_2=1} \|\Lambda(z)x\| = \bigvee_{i=1}^n |z^i| = \|z\|_\infty.$$

Здесь используется тот факт, что опорная функция σ_A является липшицевой с константой $\|A\|_2$, см. [36, предложение 9.10]. Таким образом, с учетом

соотношения норм²⁴ $\|z\|_\infty \leq \|z\|_2 \leq \|z\|_1$, получаем

$$h_\rho(K(x), K(x')) \leq \|C'\|_2 \|x - x'\|_2 \leq \|C'\|_2 \|x - x'\|_1,$$

т. е. многозначное отображение $x \mapsto K(x)$ является липшицевым с константой Липшица $L_K \leq \|C'\|_2$. \square

Замечание 4.2.2. В модели, рассмотренной В. Н. Колокольцовым в главе 13 из [95], предполагается, что мультипликативные факторы лежат в заданных интервалах, т. е. множество C^* выбрано как прямоугольных параллелепипед, $C^* = \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$, где $\alpha_i < \beta_i, i = 1, \dots, n$. Следовательно, $C' = \prod_{i=1}^n [\alpha_i - 1, \beta_i - 1]$ и $\|C'\|_2 = \max_{y \in V} \|y\|_2$, где V — множество, состоящее из 2^n вершин C' , так что в данном случае

$$L_K \leq \|C'\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (|\alpha_i - 1| \vee |\beta_i - 1|)^2}. \quad (4.2.25)$$

²⁴В действительности, для конечномерного нормированного пространства любые две нормы эквивалентны.

Глава 5. Смешанные стратегии и игровое равновесие

Исходная постановка задачи, представленная в главе 1, носит теоретико-игровой характер и приводит к уравнениям Беллмана–Айзекса в чистых стратегиях. В настоящей главе вводится смешанное расширение чистых стратегий «рынка».

В терминах смешанных стратегий сформулированы и доказаны критерии для релевантных формализаций свойства безарбитражности.

Основные результаты главы касаются существования игрового равновесия (в смешанных стратегиях «рынка»), что имеет место при весьма общих условиях. Приводится пример, когда такого равновесия не имеется.

В случае отсутствия торговых ограничений полученные результаты дают важную с экономической точки зрения интерпретацию: наиболее неблагоприятные смешанные стратегии рынка являются риск-нейтральными вероятностями.

Основные результаты главы опубликованы в [48] и [223].

5.1 Смешанные стратегии «рынка»

После получения уравнений Беллмана–Айзекса, опираясь на экономические соображения, а также исследования свойств «гладкости» решений, следующим принципиально важным этапом, допускающим прозрачную экономическую интерпретацию, является переход к смешанным стратегиям «рынка». Здесь как раз и появляются вероятности, и, как мы увидим далее, в том числе, естественным образом возникнут, при определенных предположениях относительно торговых ограничений, риск-нейтральные вероятности.

Рассмотрение смешанных стратегий «хеджера» не имеет смысла, поскольку выражение в квадратных скобках формулы (VI) является линейной функцией¹ аргумента h , а множество $D_t(\cdot)$ — выпукло.

Рассмотрим класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ распределений² Q на \mathbb{R}^n (вероятностных мер), удо-

¹Напомним, что это связано с предположением об отсутствии транзакционных издержек.

²Область \mathcal{A} определения Q , т. е. σ -алгебру подмножеств \mathbb{R}^n , можно выбирать в зависимости от конкретного $\mathcal{P}_t(\cdot)$. Например, в качестве \mathcal{A} можно взять класс всех подмножеств, если $\mathcal{P}_t(\cdot)$ содержит меры, сосредоточенные не более чем в счетном множестве точек. В других случаях, можно взять, например, борелевскую σ -алгебру, что естественно, когда функции v_t полунепрерывны сверху. Невозможность использования класса всех подмножеств в общем, «непрерывном»

влетворяющий следующим свойствам.

- 1) Для $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$ (топологический) носитель $\text{supp}(Q)$ меры Q содержится в компакте $K_t(\cdot)$.
- 2) Класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ содержит все меры Дирака δ_x (вырожденные распределения, сосредоточенные в одной точке x , то есть носитель меры δ_x равен одноточечному множеству $\{x\}$).

Класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$, удовлетворяющий 1) и 2), назовем смешанным расширением класса стратегий «рынка». Примером смешанного расширения класса чистых стратегий может служить класс всех вероятностных мер $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$, сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке $K_t(\cdot)$.

Полезным дополнительным свойством смешанного расширения также может быть следующее условие, используемое в разделе 5.2 данной главы.

- 3) Класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ замкнут относительно образования конечных смесей распределений; другими словами, множество $\mathcal{P}_t(\cdot)$ вероятностных мер выпукло.

Когда выполнены свойства 1), 2) и 3), будем говорить о выпуклом смешанном расширении, или же о допустимом классе смешанных стратегий.

Минимальный допустимый класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ (удовлетворяющий условиям 1)–3)) — это класс $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$, который состоит из всех вероятностных мер, сосредоточенных в конечном числе точек из компакта $K_t(\cdot)$. Максимальный допустимый класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ (удовлетворяющий условиям 1)–3)) — это класс $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$, который состоит из всех вероятностных мер³ с носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$. Отметим, что свойство 3) не выполняется для смешанного расширения $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$, если носитель $K_t(\cdot)$ содержит более чем $n + 1$ точку.

Особо отметим, что проблем с измеримостью (интегрируемостью) функций не возникает в случае, когда $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))$, поскольку в этом случае любая функция интегрируема. Для рассмотрения других случаев будут накладываться дополнительные условия, которые мы обсудим далее.

Лемма 5.1.1. *Условия 1) и 2) на $\mathcal{P}_t(\cdot)$ гарантируют неизменность функции Беллмана–Айзекса (BI) при переходе от чистых к смешанным стратегиям из смешанного расширения $\mathcal{P}_t(\cdot)$, как следствие равенства*

$$\sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy), \quad (5.1.1)$$

где w_t задается посредством (Т).

случае связана с аксиомой выбора, приводящей к наличию неизмеримых по Лебегу множеств. В случае использования альтернативной аксиомы вместо аксиомы выбора (в добавление к аксиоматике Цермело–Френкеля теории множеств), например, аксиомы детерминированности, позволяет снять эту проблему, см. например Мычельский, Сверчковский [201].

³Заданных на борелевской σ -алгебре, или же, в более общем случае, на σ -алгебре универсально измеримых подмножеств \mathbb{R}^n .

Действительно⁴, интегралы в правой части не превосходят точной верхней грани на компакте $K_t(\cdot)$ подынтегральной функции, поскольку в силу свойства 1) имеем $\text{supp}(Q) \subseteq K_t(\cdot)$, так что правая часть (5.1.1) не превосходит левую. С другой стороны, класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ смешанных стратегий, в силу условия 2), является расширением класса детерминированных стратегий, поскольку $\mathcal{P}_t(\cdot)$ содержит меры Дирака, так что правая часть (5.1.1) не меньше левой.

Таким образом, с учетом (5.1.1) новая формулировка уравнений Беллмана—Айзека для смешанного расширения класса стратегий «рынка» $\mathcal{P}_t(\cdot)$ выглядит следующим образом:

$$v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot),$$

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy), \text{ для } t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (5.1.2)$$

Введение смешанных стратегий приводит к рассмотрению динамики цен как случайного процесса, то можно поставить вопрос о «реалистичности» уже стохастической (а не детерминистской) модели динамики цен. Этот вопрос обсуждается в главе 6. Вероятностная интерпретация смешанной стратегии на шаге t , т.е. меры $Q_t(\cdot) \in \mathcal{P}_t(\cdot)$, состоит в том, что $Q_t(\cdot)$ является «кандидатом» на роль условного распределения ΔX_t при известной предыстории цен (обозначенной точкой). Более формально, для построения вероятностной меры \mathbb{Q} , являющейся распределением случайного процесса цен X_t , $t = 0, \dots, N$, селектор $Q_t(\cdot) \in \mathcal{P}_t(\cdot)$ должен еще удовлетворять условиям измеримости, чтобы обеспечить применимость конструкции теоремы Ионеску Тулча. Общие условия существования такого селектора будут представлены в главе 8.

Отметим, что *проблема измеримости не возникает* в случае, когда $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))$, а начальное состояние фиксировано, $X_0 = x_0$ (в этом случае число траекторий конечно).

В терминах смешанных стратегий можно сформулировать критерии безарбитражности, для условий NDSA и NDSAUP. Следующая теорема представляет собой аналог первой фундаментальной теоремы финансовой математики для «детерминистской» постановки⁵.

Теорема 5.1.1.

1) *Условие отсутствия гарантированного арбитража NDSA равносильно следующему условию:*

$$\text{существует мера } Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)), \text{ такая что}$$

$$\int yQ(dy) \in D_t^\circ(\cdot). \quad (5.1.3)$$

⁴Условие 3) выпуклости класса $\mathcal{P}_t(\cdot)$ смешанных стратегий не используется в доказательстве леммы, но оно требуется для доказательства теорем о седловой точке далее.

⁵Доказательство этого результата значительно проще, чем для вероятностной постановки, см. [213].

2) Условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью NDSAUP равносильно следующему условию:

$$\begin{aligned} &\text{существует мера } Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)), \text{ такая что} \\ &\int yQ(dy) \in \text{bar}(D_t(\cdot)). \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Доказательство. Утверждения теоремы 1) и 2) можно доказывать одновременно, обозначая через $D_t^*(\cdot)$ выпуклый конус $D_t^\circ(\cdot)$ для пункта 1) и выпуклый конус $\text{bar}(D_t(\cdot))$ для пункта 2). Используя для пункта 1) геометрическое условие NDSA, задаваемое (2.2.5) (см. предложение 2.2.3), а для пункта 2) — геометрическое условие NDSAUP, задаваемое (2.3.1) (см. теорему 2.3.1), оба эти условия можно записать в виде $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^*(\cdot) \neq \emptyset$.

Если выполняется условие (5.1.3) или же (5.1.4), то найдется точка $y^* \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^*(\cdot) \neq \emptyset$, которую можно представить в виде выпуклой комбинации точек y_1, \dots, y_m из $K_t(\cdot)$, т.е. для некоторых чисел $p_i > 0$, таких что $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, имеет место $y^* = \sum_{i=1}^m p_i y_i$. Далее, по теореме Каратеодори (см., например, [40]) выпуклая оболочка множества $K_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$ состоит из выпуклых комбинаций не более чем $n + 1$ точек множества $K_t(\cdot)$; таким образом, число точек m в представлении y^* в виде выпуклой комбинации можно выбрать не превосходящим $n + 1$. Таким образом, в качестве меры Q можно взять меру вида $\sum_{i=1}^{n+1} p_i \delta_{y_i}$ (возможно при этом, что некоторые вероятности p_i равны нулю).

Обратно, пусть теперь $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^*(\cdot) = \emptyset$. Поскольку для любой меры с носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$, барицентр $\int yQ(dy)$ лежит⁶ в $\text{conv}(K_t(\cdot))$, а это множество не пересекается с $D_t^*(\cdot)$, значит этот барицентр не может лежать в $D_t^*(\cdot)$. \square

Замечание 5.1.1.

1) Если выполнено условие NDSA (или же NDSAUP), то в случае фиксированной начальной цены $X_0 = x_0$, используя теорему 5.1.1, можно построить меру \mathbb{Q} , о которой речь шла ранее в данном параграфе и для которой соответствующие условные распределения ΔX_t при заданной предьстории будут удовлетворять условию (5.1.3) или же условию (5.1.4) без необходимости требования измеримости, т.к. построенная при помощи конструкции Ионеску Тулча мера \mathbb{Q} будет сосредоточена на конечном множестве возможных траекторий цен для $t = 0, \dots, N$, в количестве не более чем $(n + 1)N$.

2) В случае, если конус $D_t^\circ(\cdot)$ содержит единственную точку, а такой точкой может быть только 0, условие (5.1.3), влечет «мартингальность» меры \mathbb{Q} из пункта 1) данного замечания, т.е. ΔX_t , $t = 1, \dots, N$, в этом случае образуют мартингал-разности (или, что равносильно, X_t , $t = 0, \dots, N$ является мартингалом) относительно естественной фильтрации, т.е. порожденной процессом X .

⁶См. общий результат в главе 7, лемма 7.4.3. В рассматриваемом же случае, для вероятностных мер, сосредоточенных в конечном числе точек, это вытекает непосредственно из определения выпуклой оболочки.

Для того, чтобы $D_t^o(\cdot) = \{0\}$, достаточно, чтобы множество $D_t(\cdot)$ содержало некоторую окрестность точки 0. В частности, это выполнено для рынка без торговых ограничений, т.е. когда $D_t \equiv \mathbb{R}^n$; в этом случае также и $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$, а значит в пункте 2) теоремы 5.1.1 также возникает «мартингалность».

3) В случае отсутствия торговых ограничений, если $K_t(\cdot)$ было бы неограниченным замкнутым множеством и $0 \in \text{cl}(K_t(\cdot))$, могло бы случиться, что не существует мартингалная мера с носителями условных распределений (при известной предыстории цен) содержащимися в $K_t(\cdot)$, как показывает пример в замечании 2.2.5.

5.2 Равновесие в смешанных стратегиях «рынка»

Основная цель данного параграфа — установить соотношение между величинами, определенными формулами (5.2.1) и (5.2.2):

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy), \quad (5.2.1)$$

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \inf_{h \in D_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy). \quad (5.2.2)$$

Разумеется, необходимо гарантировать, чтобы интегралы в (5.2.1) и (5.2.2) имели смысл. Если в качестве допустимого класса смешанных стратегий $\mathcal{P}_t(\cdot)$ выбрать $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ — класс мер, сосредоточенных на конечном множестве точек из $K_t(\cdot)$, то, как уже отмечалось, любая функция интегрируема.

Заметим, что функция $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ ограничена: как установлено в теореме 1.2.1 из главы 1, для всех $t = 0, \dots, N$ имеем $0 \leq v_t^* \leq C$ и, стало быть, $0 \leq w_t \leq C$. С использованием условия $0 \in D_t(\cdot)$ точная нижняя грань в (5.2.1) не превосходит значения точной верхней грани для конкретного $h = 0$, поэтому получаем, с учетом $w_t \leq C$, что ρ_t ограничено сверху:

$$\rho_t \leq C. \quad (5.2.3)$$

Величина $\rho_t(\cdot)$ входит в уравнения Беллмана—Айзека (5.1.2) для смешанных стратегий, которые можно переписать в сокращенном виде:

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot), \text{ для } t = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

С экономической точки зрения, $\rho_t(\cdot)$ можно интерпретировать как «минимальные» требования к резервам⁷, которые необходимо создать в момент времени $t - 1$ (где $t = 1, \dots, N$) для гарантированного покрытия обязательств по опциону в будущем, т.е. для возможных выплат в моменты $t, t + 1, \dots, N$.

⁷В принципе, ρ_t может принимать значение $-\infty$ (в этом случае ρ'_t также равно $-\infty$).

Как отмечалось во введении, уравнения Беллмана—Айзека (5.1.2) (или, что равносильно, уравнения (5.2.4)) возникают в задаче управления в условиях неопределенности, однако нам будет удобно интерпретировать задачу как динамическую игру с дискретным временем, на каждом шаге которой, при заданной предыстории цен (обозначенной точкой), возникает антагонистическая игра: первый игрок – «хеджер» – пытается минимизировать резервы на покрытие возможных выплат в будущем по обусловленному обязательству, взятому на себя, выбирая чистую стратегию $h \in D_t(\cdot)$, в то время как второй игрок – «рынок» – выбирает наиболее неблагоприятный для «хеджера» сценарий в виде смешанной стратегии – условного распределения $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$ при известной траектории цен. Соответственно, будем говорить об игре «рынок» - «хеджер» (на шаге t).

Приведем некоторые хорошо известные факты и термины из теории игр. Во-первых, всегда имеет место хорошо известное неравенство

$$\rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot). \quad (5.2.5)$$

В частности, из (5.2.3) и (5.2.5) получаем $\rho'_t(\cdot) \leq \rho_t(\cdot) \leq C$. Если для некоторого смешанного распределения $\mathcal{P}_t(\cdot)$ имеет место равенство:

$$\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot), \quad (5.2.6)$$

то будем говорить, что в игре со смешанным расширением $\mathcal{P}_t(\cdot)$ имеет место (игровое) равновесие⁸, а величину $\rho_t = \rho'_t$ будем называть значением игры (на шаге t); если существуют стратегии $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}_t(\cdot)$, для которых достигается равенство (5.2.6), то они образуют седловую точку $(h_t^*(\cdot), Q_t^*(\cdot))$ игры, $t = 1, \dots, N$.

В этом параграфе представлено несколько результатов, касающихся достаточных условий для равновесия в игре. Все они опираются на классическую теорему Кнезера [183], поэтому для полноты изложения и удобства читателя приводим ее формулировку.

Теорема (Кнезер). Пусть:

1° X и Y два выпуклых множества в (вещественном) линейном пространстве.

⁸ Доказательство неравенства (5.2.5) представляет собой легкое математическое упражнение, однако полезнее представляется не доказательство, а игровая интерпретация: можно считать $\rho_t(\cdot)$ наилучшим (с позиции первого игрока) результатом в игре, когда первым «ходит» второй игрок — рынок, максимизирующий риск, а $\rho'_t(\cdot)$ — наилучший результат в игре, когда первым «ходит» первый игрок — хеджер. Поскольку первый игрок стремится к минимизации риска, то право «первого хода», вообще говоря, может давать ему преимущество, что и отражает неравенство (5.2.5). В случае, когда имеет место равновесие (5.2.6), последовательность ходов не имеет значения.

2° Числовая функция $F(x, y)$ является аффинной⁹ по каждому из аргументов $x \in X$ и $y \in Y$.

3° Множество X является компактным в некоторой топологии, для которой функции $x \mapsto F(x, y)$ являются полунепрерывными снизу для всех $y \in Y$.

Тогда

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F(x, y) = \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x, y). \quad (5.2.7)$$

Разумеется, аналогичное утверждение (как следствие) имеет место, когда выполняются условия 1° и 2°, а вместо 3° предполагается следующее.

4° Множество Y является компактным в некоторой топологии, для которой функции $y \mapsto F(x, y)$ являются полунепрерывными сверху для всех $x \in X$.

Тогда

$$\inf_{x \in X} \max_{y \in Y} F(x, y) = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F(x, y). \quad (5.2.8)$$

Замечание 5.2.1. Отметим, что в теореме Кнезера (равно как и в теореме Фань Цзы)

- 1) не утверждается конечность цены игры, т. е. выражений (5.2.7) и (5.2.8);
- 2) в левой части (5.2.7) *infimum* можно заменить на *minimum*, а в правой части (5.2.8) *supremum* можно заменить на *maximum*, поскольку в предположении 3° функции $x \mapsto \sup_{y \in Y} F(x, y)$ полунепрерывны снизу, а для случая 4° функция $y \mapsto \inf_{x \in X} F(x, y)$ полунепрерывна снизу, а область определения этих функций компактна в обоих случаях.

Интерес к (игровому) равновесию связан с тем, что при весьма общих предположениях относительно $K_t(\cdot)$, $D_t(\cdot)$ и $v_t(\cdot)$ равновесие (5.2.6) имеет место, а для $\rho'_t(\cdot)$ выражение (5.2.2) может быть упрощено за счет явного выражения для точной нижней грани. Для удобства, напомним уже введенные ранее обозначения:

σ_A — опорная функция множества A , т. е.

$$\sigma_A(y) = \sup_{h \in A} hy;$$

⁹Вместо предположения об аффинности функций в теореме Кнезера достаточно потребовать выпуклости F по x и вогнутости по y . Это обобщение принадлежит Фань Цзы [145, теорема 2]. Забавно, что в русскоязычной литературе по теории вероятностей для этого же автора используют кальку с американского написания фамилии – Ки Фан. Справедливости ради, отметим, что Фань Цзы соответствует китайскому произношению.

$\text{bar}(A)$ — барьерный конус¹⁰ множества A , т. е.

$$\text{bar}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \sigma_A(y) < +\infty\}.$$

Отметим, что полярный конус $A^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : hy \leq 0 \text{ для всех } h \in A\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \sigma_A(y) \leq 0\}$ содержится в $\text{bar}(A)$.

Предложение 5.2.1. Пусть функции w_t и класс мер $\mathcal{P}_t(\cdot)$ таковы, что определены¹¹ интегралы $\int w_t(\cdot, y)Q(dy)$ для любой меры $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$. Тогда

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\cdot, y)Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)} \left(\int yQ(dy) \right) \right]. \quad (5.2.9)$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения элементарно: анализируя выражение (5.2.2) для $\rho'_t(\cdot)$ под знаком *supremum* получаем:

$$\inf_{h \in D_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy]Q(dy) = \int w_t(\cdot, y)Q(dy) - \sup_{h \in D_t(\cdot)} h \int yQ(dy). \quad (5.2.10)$$

Откуда и следует (5.2.9). □

Замечание 5.2.2.

1) Из формулы (5.2.9) непосредственно вытекает, что:

- либо выполняется условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью NDSAUP, геометрический критерий которого имеет вид¹²

$$\text{conv} \left(K_t(\cdot) \right) \cap \text{bar} \left(D_t(\cdot) \right) \neq \emptyset; \quad (5.2.11)$$

и тогда в формуле (5.2.9) точную верхнюю грань следует искать только по тем мерам $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$, для которых $\int yQ(dy) \in \text{bar} \left(D_t(\cdot) \right) \neq \emptyset$;

- либо же имеет место:

$$\text{conv} \left(K_t(\cdot) \right) \cap \text{bar} \left(D_t(\cdot) \right) = \emptyset, \quad (5.2.12)$$

и в этом случае¹³ $\rho'_t(\cdot) = -\infty$.

¹⁰Этот конус является выпуклым и содержит точку 0.

¹¹Можно, например, в качестве $\mathcal{P}_t(\cdot)$ взять класс $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ мер, сосредоточенных в конечном множестве точек из $K_t(\cdot)$, чтобы не накладывать дополнительных требований на функции v_t^* . Либо же, например, наложить условие на v_t^* , потребовав универсальную измеримость этих функций (или же какое-нибудь свойство гладкости, например полунепрерывность).

¹²См. теорема 2.3.1 из главы 2.

¹³В случае выполнения условия (5.2.12) имеет место равновесие $\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot) = -\infty$, что соответствует получению неограниченной прибыли от гарантированного арбитража, а хеджирование обусловленного обязательства по (проданному) опциону теряет экономический смысл, см. пункт 2) замечания 5.2.7 далее.

- 2) Значение $\rho'_t(\cdot)$ в (5.2.1) не изменится, если заменить $D_t(\cdot)$ на его замыкание $\bar{D}_t(\cdot)$, так как опорная функция не изменится при замыкании множества, т. е. $\sigma_{D_t(\cdot)} = \sigma_{\bar{D}_t(\cdot)}$. Поэтому в случае равновесия (5.2.6), не ограничивая общности, можно считать, что торговые ограничения $D_t(\cdot)$ — замкнутые множества.
- 3) В случае общего положения для торговых ограничений (т. е. когда все множества $D_t(\cdot)$ не содержатся в аффинных многообразиях размерности меньше чем n) в силу выпуклости $D_t(\cdot)$ внутренность $D_t(\cdot)$ имеет замыкание, совпадающее с замыканием $D_t(\cdot)$. Поэтому, если имеет место равновесие (5.2.6), то не ограничивая общности, можно считать (в случае общего положения), что множества $D_t(\cdot)$ — открытые, см. [40, следствие 6.3.1].
- 4) Если имеет место равновесие (5.2.6), то уравнения (5.2.4) можно называть уравнениями Беллмана, поскольку хеджирующие стратегии в (5.2.9) больше не присутствуют, а оптимизация проводится только по смешанным стратегиям рынка.
- 5) В случае отсутствия торговых ограничений, т. е. когда $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, базисный конус $\text{bar}(D_t(\cdot))$ содержит единственную точку 0. Поэтому формула (5.2.9) принимает особо простой вид при условии (5.2.11):

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot), \int y Q(dy)=0} \int w_t(\cdot, y) Q(dy); \quad (5.2.13)$$

таким образом, максимизация осуществляется по «мартингальным» мерам.

- 6) Поскольку $0 \in D_t(\cdot)$, то $\sigma_{D_t(\cdot)}(y) \geq 0$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$. Отсюда, в частности, следует, что полярный конус $D_t^\circ(\cdot) = \{y : \sigma_{D_t(\cdot)}(y) = 0\}$.

Предложение 5.2.2. Пусть $D_t(\cdot)$ — содержащее точку 0 компактное выпуклое множество, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Тогда для класса $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ имеет место равновесие (5.2.6). При этом точная нижняя грань в (5.2.1) и (5.2.2) достигается для некоторого $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$.

Доказательство. Функционал $F_{t,\cdot}$, задаваемый соотношением

$$F_{t,\cdot}(h, Q) = \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy),$$

является аффинным по каждому из аргументов, $h \mapsto F_{t,\cdot}(h, Q)$ непрерывна, D непустое компактное выпуклое множество, $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ непустое выпуклое множество, так что непосредственно применима теорема Кнезера [183]; таким образом равновесие (5.2.6) имеет место. \square

Замечание 5.2.3.

- 1) Напомним, что величина $\rho_t(\cdot)$ в (5.2.1) не зависит от конкретного выбора $\mathcal{P}_t(\cdot)$, удовлетворяющего свойствам 1) и 2), см. лемму 5.1.1. Величина $\rho'_t(\cdot)$ в (5.2.2), вообще говоря, может зависеть от конкретного выбора $\mathcal{P}_t(\cdot)$.
- 2) Уравнения Беллмана (5.2.4), в условиях предложения 5.2.2, где имеет место равновесие $\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot)$, а последняя величина определяется при помощи формулы (5.2.9), не требуют никаких дополнительных свойств функций Беллмана v_t^* , или, что равносильно, w_t .

Будем использовать обозначения из главы 3, формула (3.2.4):

$$\widehat{D}_t^a(\cdot) = \{h \in D_t(\cdot) : \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h) \leq a\}, \quad (5.2.14)$$

где¹⁴ $K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$.

Замечание 5.2.4. В соответствии с леммой 3.2.1 из главы 3, если выполнены предположение 1.2.2 и грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP из главы 3, а $D_t(\cdot)$ принимает замкнутые значения, торговые ограничения можно изменить, заменив $D_t(\cdot)$ на компактное множество $\widehat{D}_t^a(\cdot)$, где $a \geq C$, а константа C задается формулами (1.2.2) и (1.2.3), не изменив при этом значения $\rho_t(\cdot)$, а значит, в силу (5.2.4), решения $v_t^*(\cdot)$ уравнения (В1).

Положим

$$\begin{aligned} \rho_t^{(a)}(\cdot) &= \inf_{h \in \widehat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy); \\ \rho'_t{}^{(a)}(\cdot) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))} \inf_{h \in \widehat{D}_t^a(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy) \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))} \left[\int w_t(\cdot, y) Q(dy) - \sigma_{\widehat{D}_t^a(\cdot)} \left(\int y Q(dy) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Равенство (5.2.15) имеет место в силу предложения 5.2.1, с учетом того, что любая функция интегрируема относительно меры $Q \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$. В силу компактности $\widehat{D}_t^a(\cdot)$ применимо предложение 5.2.2, так что имеет место равновесие для новых торговых ограничений $\widehat{D}_t^a(\cdot)$:

$$\rho_t(\cdot) = \rho_t^{(a)}(\cdot) = \rho'_t{}^{(a)}(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot),$$

где $\rho'_t(\cdot)$ задается формулой (5.2.2) с исходными торговыми ограничениями $D_t(\cdot)$. Вопрос о совпадении $\rho'_t{}^{(a)}(\cdot)$ и $\rho'_t(\cdot)$ требует, однако, дополнительного изучения.

Построение теории для случая, когда выпуклое множество $D_t(\cdot)$ не удовлетворяют условию компактности, т. е. могут быть неограниченными, без дополнительных требований к функции $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ может приводить к значительным техническим осложнениям (см., например, [41; 43] или [144]), поэтому

¹⁴Отметим, что имеет место равенство $\sigma_{K_t(\cdot)}(\cdot) = \sigma_{K_t^*(\cdot)}(\cdot)$.

подобное рассмотрение выходит за рамки настоящей работы; однако при дополнительных предположениях относительно w_t , соответствующий результат приведен в предложении 5.2.3, а также в следствии 5.2.1 ниже.

В то же время, случай рынка без торговых ограничений без дополнительных требований к функциям $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ может быть сведен к использованию предложения 5.2.2, в предположении отсутствия арбитражных возможностей, NDAO. Соответствующий результат доказан в теореме 5.3.1, в следующем параграфе данной главы.

Следующий (альтернативный) результат о равновесии получается в предположении, что выполнено следующее условие, касающееся «гладкости» решений уравнений Беллмана—Айзекса¹⁵ $v_t^*(\cdot)$.

Для $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$ функции $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$ полунепрерывны сверху. (USC)

Достаточные условия для выполнения условия (USC) приведены в теореме 3.1.4 из главы 3: полунепрерывность сверху многозначных отображений $x \mapsto K_t(x)$, полунепрерывность снизу многозначных отображений $x \mapsto D_t(x)$ и полунепрерывность сверху функций выплат g_t , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Предложение 5.2.3. Пусть $D_t(\cdot)$ — содержащее точку 0 выпуклое множество, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

- 1) Если выполняется условие (USC) и условие (B) (ограниченность сверху функций выплат) то имеет место равновесие (5.2.6) с классом $\mathcal{P}_t(\cdot)$ равным¹⁶ $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$, причем в этом случае точная верхняя грань по Q в (5.1.2) достигается для некоторого $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))$.
- 2) Если выполняется условие (USC) и при этом $D_t(\cdot)$ компактно, то значение игры «рынок» - «хеджер» на шаге t достигается для некоторой седловой точки — оптимальной пары $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))$, а значение игры конечно.

Доказательство. В силу теоремы А. Д. Александрова¹⁷, слабая сходимость вероятностных мер Q_n к мере Q на польском (полном сепарабельном метрическом) пространстве с борелевской σ -алгеброй равносильна тому, что для

¹⁵Это условие, очевидно, равносильно полунепрерывности сверху для функций $w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y)$.

¹⁶Напомним, что $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$ — множество всех вероятностных мер на $K_t(\cdot)$ с борелевской σ -алгеброй.

¹⁷В §16 [74, теорема 2] (точнее, в этой теореме речь идет о полунепрерывности снизу (сверху) функции, аргумент которой пробегает множество вероятностных мер, а значение функции — мера открытого (замкнутого) множества; однако, это легко обобщается на случай интеграла полунепрерывной функции, см, например, [249, теорема 8.1], которую он называет “Portmanteau theorem” (в переносном смысле «все собрано в одном месте»). В первом издании (1968 года) хорошо известной и цитируемой книги [99], в примечании к § 2 главы 1 Патрик Биллингсли справедливо ссылается, по поводу авторства теоремы, на серию работ А. Д. Александрова 1940–1943 годов. Однако во втором издании книги [100] (1999 года) Биллингсли решил пошутить: ссылка на работу А. Д. Александрова исчезла, а появилась ссылка на «работу» вымышленного

любой полунепрерывной сверху и ограниченной сверху числовой функции f имеет место неравенство:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f dQ_n \leq \int f dQ.$$

Поэтому, в силу ограниченности сверху решений уравнений Беллмана–Айзекса (по теореме 1.2.1), аффинный по каждой переменной функционал

$$F_{t,\cdot}(h, Q) = \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy)$$

является полунепрерывным сверху по Q в слабой топологии¹⁸ на множестве $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$ всех вероятностных мер на $K_t(\cdot)$ с борелевской σ -алгеброй. Выбирая в качестве $\mathcal{P}_t(\cdot)$ множество $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$, являющееся компактным в слабой топологии, мы вновь получаем возможность применения теоремы Кнезера, но уже не с «правой», а с «левой» стороны функционала F , т. е. с предположением 4° вместо 3°. Таким образом, имеет место равновесие (5.2.6) с $\mathcal{P}_t(\cdot)$ равным $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$.

То, что точная верхняя грань в соответствующих выражениях достигается, следует из того, что полунепрерывная сверху функция достигает максимума на компактном множестве. Пункт 2) вытекает из пункта 1) и предложения 5.2.2. \square

Следствие 5.2.1. Пусть выполнены условие (USC) (полунепрерывность сверху целевых функций), условие (B) (ограниченность сверху функций выплат)¹⁹, RNDSAUP (грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью),²⁰ а выпуклозначное отображение $D_t(\cdot) \ni 0$ принимает замкнутые значения, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Тогда значение игры «рынок» - «хеджер» на шаге $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ достигается для некоторой седловой точки — оптимальной пары $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))$, а значение игры конечно²¹.

математика Portmanteau, которому на странице 15 приписывается эта теорема. Надо признать, что розыгрыш Биллингсли более чем удался — теперь, как правило, этот результат называют «теорема Портманто». Во франкоязычной версии Википедии по этому поводу имеется острое замечание. “Dans la deuxième édition de *Convergence of Probability Measures*, Billingsley attribue le théorème à Jean-Pierre Portmanteau, de l’université de Fellein, dans un papier que Jean-Pierre Portmanteau aurait publié en 1915 dans *Annals of the University of Fellein*, sous le titre farfelu « Espoir pour l’ensemble vide ». Il s’agit d’un canular : il n’y a pas de mathématicien portant le nom de Jean-Pierre Portmanteau, et il n’y a jamais eu d’université à Fellein. Et, surtout, il n’y a jamais eu d’espoir pour l’ensemble vide...”

¹⁸Слабейшая топология, для которой функционалы $Q \mapsto \int f dQ$ непрерывны для любой ограниченной непрерывной функции $f : Y \mapsto \mathbb{R}$. Отметим, что эта топология метризуема для польского пространства, см. например, [99], так что можно обойтись сходимостью последовательностей (а не направленностей).

¹⁹В соответствии с результатами из главы 3, для выполнения первых двух условий (т. е. (USC) и (B)) достаточно потребовать полунепрерывность сверху многозначных отображений $x \mapsto K_t(x)$, полунепрерывность снизу многозначных отображений $x \mapsto D_t(x)$ и полунепрерывность сверху функций выплат g_t , $t = 1, \dots, N$.

²⁰Напомним, что достаточным условием RNDSAUP является компактность $D_t(\cdot)$.

²¹Далее будет получено более сильное утверждение, см. пункт 1) теоремы 8.2.1.

Доказательство. Применяя пункт 1) предложения 5.2.3 получаем, что имеет место равновесие (5.2.6) со смешанным расширением $\mathcal{P}_t(\cdot)$, равным $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$, причем в этом случае точная верхняя грань достигается для некоторого $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))$. Благодаря условию RNDSAUP и замкнутости $D_t(\cdot)$ применима лемма 3.2.1. Как и в замечании 5.2.4, заменим $D_t(\cdot)$ на компактное выпуклое множество $\widehat{D}_t^a(\cdot)$, задаваемое формулой (5.2.14), где $a \geq C$, а константа C задается формулами (1.2.2) и (1.2.3). Для новых торговых ограничений применим пункт 2) предложения 5.2.3, при этом неравенства

$$\rho_t(\cdot) = \rho_t^{(a)}(\cdot) \geq \rho_t^{\prime(a)}(\cdot) \geq \rho_t'(\cdot),$$

где обозначения соответствуют формулам (5.2.15), обращается в равенства, поскольку равновесие в исходной модели имеет место. \square

Замечание 5.2.5. На самом деле, лемма 3.2.1 дает более точную картину: для модели с исходными торговыми ограничениями функция $h \mapsto \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]$ достигает минимального значения $\rho_t(\cdot)$ в некоторой точке $h^*(\cdot) \in \widehat{D}_t^C$, где константа C задается формулами (1.2.2) и (1.2.3).

Замечание 5.2.6. Ограниченность $D_t(\cdot)$, на наш взгляд, может являться вполне реалистичным (с экономической точки зрения) предположением, поскольку обычно леверидж ограничен требованиями к обеспечению, а также к экономическому и регуляторному капиталу; кроме того, риск-менеджмент зачастую устанавливает ограничения на показатели риска портфеля и на концентрацию (см. главу 1, пример 1.1.4). Кроме того, вряд ли безопасно пользоваться стратегиями хеджирования, которые используют неограниченно большие позиции. Наконец, неограниченные позиции физически нереализуемы.

Полезные следствия можно извлечь из предложения 2.2.3 из главы 2, содержащего выводы о характере «арбитража» на рынке в момент времени t при заданных $K_t(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$ в терминах некоторой «игры», имеющей значение $\pi_t(\cdot)$; интерпретация величины $\pi_t(\cdot)$ — гарантированная (безрисковая) прибыль от одношаговой операции в момент времени t с допустимыми стратегиями. Здесь нам потребуются лишь первые два пункта этого предложения.

Напомним, что в случае гарантированного арбитража (т. е. когда $\pi_t(\cdot) > 0$) мы различаем два случая: в соответствии с предложением в главе 2 терминологией мы говорим о гарантированном арбитраже с неограниченной прибылью в момент t , если $\pi_t(\cdot) = +\infty$, обозначая такой арбитраж SAUP, и говорим о гарантированном арбитраже с ограниченной прибылью в момент t , если $0 < \pi_t(\cdot) < +\infty$, обозначая такой арбитраж SABP.

Предложение 2.2.3 из главы 2 позволяет оценить $\rho_t(\cdot)$ и $\rho_t'(\cdot)$ из (5.2.1) и (5.2.2): с использованием $\pi_t(\cdot)$ мы сейчас установим оценку снизу для ρ_t' , а также более точную, чем (5.2.3), оценку сверху для ρ_t .

Предложение 5.2.4. *Имеют место неравенства*

$$C - \pi_t(\cdot) \geq \rho_t(\cdot) \geq \rho_t'(\cdot) \geq -\pi_t(\cdot). \quad (5.2.16)$$

Доказательство. Поскольку $0 \leq v_t(\cdot, x_{t-1} + y) \leq C$ для всех $y \in K_t(\cdot)$, обозначив $m(Q) = \int yQ(dy)$, имеем:

$$C + \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} [-hm(Q)] \geq \rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot) \geq \sup_{h \in D_t(\cdot)} \inf_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} [-hm(Q)].$$

Нетрудно видеть, что $m(Q)$ пробегает в точности $\text{conv}(K_t(\cdot))$, когда Q пробегает $\mathcal{P}_t(\cdot)$ (это вытекает из свойств допустимого класса $\mathcal{P}_t(\cdot)$).

Поэтому:

$$C - \sup_{h \in D_t(\cdot)} \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} hy \geq \rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot) \geq - \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy,$$

откуда, с учетом равенства (2.2.6), вытекает (5.2.16). \square

Замечание 5.2.7.

- 1) В случае отсутствия торговых ограничений, при наличии гарантированного арбитража, имеют место неограниченные прибыли, т. е. SAUP; в этом случае $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$.
- 2) Отметим, что когда имеет место SAUP, т. е. $\pi_t(\cdot) = +\infty$, из (5.2.16) получаем равновесие $\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot) = -\infty$; с учетом (5.2.3) можно сделать вывод, что нет нужды создавать резервы на покрытие обязательств в будущем, когда можно извлекать неограниченную гарантированную прибыль.
- 3) Отметим также, что из (5.2.16) вытекает при $C = 0$ (что равносильно $g_t \equiv 0, t = 1, \dots, N$) равновесие $\rho_t = \rho'_t = -\pi_t(\cdot)$.
- 4) Кроме того, из (5.2.16) и пункта 2) предложения 2.2.3 получаем, что, если выполнено NDSA, то $\rho'_t(\cdot) \geq 0$.

Замечание 5.2.8. Рассмотрим теперь европейский опцион с функцией выплата в терминальный момент равной $g(x_0, \dots, x_N) = g(\cdot) \geq 0$, причем $g(\cdot) \leq C$. Полагая формально $g_t \equiv -\infty$ для $t = 0, \dots, N-1$ и $g_N = g(\cdot)$, получаем из (5.2.4) уравнения Беллмана—Айзека для европейского опциона:

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= \rho_t(\cdot) \text{ для } t = N, \dots, 1. \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Если выполнено условие «безарбитражности» NDSA, то нетрудно показать, что $v_t^*(\cdot) \geq 0$ для всех $t = 0, \dots, N$. Действительно, для $t = N$ это следует из предположения о неотрицательности g . Используя неравенство (5.2.5) и неравенство из пункта 4) замечания 5.2.7, получаем $\rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot) \geq 0, t = N, \dots, 1$, а значит, в соответствии с (5.2.17), $v_{t-1}^*(\cdot) = \rho_t(\cdot) \geq 0$. Таким образом, $v_t^*(\cdot) \geq 0$ для всех $t = 0, 1, \dots, N$. Поэтому, если выбрать $g_t \equiv 0$ при $t = 0, \dots, N-1$ и $g_N = g$, то результат для функции Беллмана—Айзека v_t^* с использованием уравнений (5.2.4), получается такой же, как и для $g_t = -\infty$ при $t = 0, \dots, N-1$,

т. е. в предположении NDSA имеем, что европейский опцион сводится к частному случаю американского опциона. Если при этом также имеет место равновесие (5.2.6), то получаем уравнения Беллмана (5.2.17), где $\rho_{t-1}(\cdot) = \rho'_{t-1}(\cdot)$ задается формулой (5.2.9).

Аналогичным образом может быть рассмотрен бермудский опцион — при условии «безарбитражности» NDSA такой опцион сводится к частному случаю американского опциона (у которого некоторые функции выплат нулевые, а некоторые — неотрицательные).

Естественно поставить вопрос, когда равенство (5.2.6) может нарушаться (т. е. в (5.2.5) имеет место строгое неравенство), — построить пример, когда равновесие не имеет место. Исходя из результатов, полученных в этом параграфе, для того чтобы построить такой пример:

- 1) $D_t(\cdot)$ не должно быть компактно;
- 2) функция $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ не должна быть полунепрерывной сверху;
- 3) в случае гарантированного арбитража не должно быть неограниченной прибыли;
- 4) в случае отсутствия торговых ограничений не должно выполняться NDAO, и не должно быть гарантированного арбитража.

Пример 5.2.1. Рассмотрим случай одномерной одношаговой мультипликативной модели без торговых ограничений, описанной в примере 2.2.2 из главы 2, с конкретным выбором параметров, обеспечивающих наличие арбитражных возможностей, но отсутствие гарантированного арбитража. Для удобства читателя воспроизведем это описание здесь.

Цену единственного «рискового» актива X_t^1 будем записывать без верхнего индекса, т. е. как X_t . Динамика цены этого актива задается в виде мультипликативного представления вида:

$$X_t = M_t X_{t-1}, \quad t = 1, \dots, N,$$

где $X_0 > 0$.

Априорно известно, что $M_t \in [\alpha, \beta]$, $\beta > \alpha > 0$, так что модель является однородной по времени, со свойством мультипликативной независимости, см. терминологию из главы 1, раздел 1.1. Здесь $K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = [x_{t-1}(\alpha - 1), x_{t-1}(\beta - 1)]$.

Условие «безарбитражности» NDAO, т. е. отсутствия арбитражных возможностей, очевидно, равносильно $1 \in (\alpha, \beta)$, то есть через один период в будущем возможно как повышение, так и понижение цены рискованного актива; другими словами, доходность на периоде t рискованного актива $R_t = M_t - 1$ может быть как положительной, так и отрицательной. Если $\alpha = 1$ или $\beta = 1$, имеется арбитражная возможность, но выполнено условие «безарбитражности» NDSA, т. е.

отсутствие гарантированного арбитража. Если же $\alpha > 1$ или $\beta < 1$, то имеет место гарантированный арбитраж.

Далее рассмотрим одношаговый частный случай этой модели, т. е. когда $N = 1$. Выберем $\alpha = 1$ и начальную цену $X_0 = 1$, тогда $K_1(1) = [0, b]$, где $b = \beta - 1 > 0$. В качестве опциона возьмем бинарный²² опцион “call” с функцией выплат²³ $g_1(x) = I_{(1, +\infty)}(x)$. Очевидно, эта функция не является полунепрерывной сверху (хотя полунепрерывна снизу). В этом случае $v_1^*(1, 1 + y) = g_1(1 + y) = I_{(0, +\infty)}(y)$.

Нетрудно найти значение $\rho_t(\cdot)$ в данной модели с учетом леммы 5.1.1:

$$\rho_t(\cdot) = \min_{h \in \mathbb{R}^1} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [v_1^*(1, 1 + y) - hy] Q(dy) = \min_{h \in \mathbb{R}^1} \sup_{y \in K_1(1)} [I_{(0, +\infty)}(y) - hy].$$

Поскольку

$$\sup_{y \in [0, b]} [I_{(0, +\infty)}y - hy] = \begin{cases} 1 & \text{если } h \geq 0, \\ 1 - bh & \text{если } h < 0, \end{cases} \quad (5.2.18)$$

то выражение (5.2.18) имеет минимальное значение 1, при $h \geq 0$. Таким образом,

$$\rho_1(1) = 1.$$

Это случай, когда первым ходит игрок «рынок». Если хитрый «хеджер» ходил бы первым, то его незаслуженный результат был бы:

$$\rho'_1(1) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \min_{h \in \mathbb{R}^1} \int [v_1^*(1, 1 + y) - hy] Q(dy).$$

Нетрудно видеть, что

$$\min_{h \in \mathbb{R}^1} \int [I_{(0, +\infty)}y - hy] Q(dy) = \begin{cases} -\infty & \text{если } m(Q) \neq 0, \\ 0 & \text{если } m(Q) = 0. \end{cases} \quad (5.2.19)$$

Здесь равенство $m(Q) = 0$ выполняется только в том случае, если $Q = \delta_0$, т. е. мера сосредоточена в точке 0. Поэтому выражение (5.2.19) имеет максимальное значение 0 при $Q = \delta_0$; следовательно,

$$\rho'_1(1) = 0.$$

Таким образом, этот пример показывает существенность условий (USC), компактности $D_t(\cdot)$, а также, в случае отсутствия торговых ограничений, условия NDAO для того, чтобы имело место равновесие 5.2.6.

Заметим, что отсутствие игрового равновесия в данном примере наблюдается при бифуркации, понимаемой (по аналогии с теорией динамических систем) как качественное изменение поведения модели (в нашем случае качественным свойством является безарбитражность) при бесконечно малом изменении параметров ее динамики.

²²На английском языке для таких опционов есть два синонима: “binary” и “digital”.

²³Здесь I_A — индикатор множества A , т. е. $I_A(x) = 1$ при $x \in A$ и $I_A(x) = 0$ при $x \notin A$. Выбор начальной цены отвечает случаю, называемому “tie” (“breakeven point”).

□

В разделе 2.3 главы 2 был поставлен вопрос, может ли иметь смысл хеджирование в случае, когда существует гарантированный арбитраж с ограниченной прибылью SABP. Было установлено, что если рассматривать одномерную задачу (с одним рисковым активом), то ответ на этот вопрос будет отрицательным: оптимальная стратегия соответствует извлечению максимально возможной прибыли.

В двумерном случае, однако, можно дать положительный ответ на поставленный вопрос, что говорит об экономической целесообразности суперхеджирования для опционов типа²⁴ “rainbow”.

Пример 5.2.2. Рассмотрим одношаговую (т. е. $t \in \{0, 1\}$) модель с двумя рисковыми активами, с динамикой цен мультипликативно-независимого типа, вида:

$$\begin{aligned} X_1^1 &= M_1^1 X_0^1, & M_1^1 &\in [\alpha^1, \beta^1]; \\ X_1^2 &= M_1^2 X_0^2, & M_1^2 &\in [\alpha^2, \beta^2], \end{aligned}$$

начальное состояние цен известно:

$$X_0^1 = x_0^1 > 0, \quad X_0^2 = x_0^2 > 0.$$

Тогда²⁵

$$\Delta X_1 = X_1 - X_0 \in K = K_1(x_0) = [a^1(x_0), b^1(x_0)] \times [a^2(x_0), b^2(x_0)],$$

где $a^i = a^i(x_0) = (\alpha^i - 1)x_0^i$; $b^i = b^i(x_0) = (\beta^i - 1)x_0^i$, $i = 1, 2$.

Пусть торговые ограничения состоят в запрете коротких позиций по рисковым активам и в лимите $r > 0$ на вложения $h = (h^1, h^2)$ в рисковые активы; тем самым

$$h^1 \geq 0, \quad h^2 \geq 0, \quad h^1 x_0^1 + h^2 x_0^2 \leq r,$$

т. е. $h \in D = D_1(x_0)$, где D представляет собой треугольник²⁶ с вершинами $(0, 0)$, $(\varepsilon_1, 0)$ и $(0, \varepsilon_2)$, где $\varepsilon_1 = r/x_0^1 > 0$, $\varepsilon_2 = r/x_0^2 > 0$.

Предположим, что у «хеджера» имеется обусловленное обязательство по опциону “straddle”²⁷ на второй актив, т. е. имеем функцию выплат

$$g(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = |x_1^2 - x_0^2| = |\Delta x_1^2| = |y^2|,$$

где обозначено $y^i = \Delta x_1^i$, $i = 1, 2$. Далее, наложим на параметры α^i и β^i , $i = 1, 2$ условия, чтобы по одному рисковому активу (для определенности —

²⁴Т.е. когда число рисковых активов, фигурирующих в функциях (потенциальных) выплат $g_i(\cdot)$, не менее двух.

²⁵Отметим, что в данном примере компакт K — выпуклый.

²⁶Отметим, что D — компактно, $\text{bar}(D) = \mathbb{R}^n$ и, значит, $\text{bar}(D) \cap \text{conv}(K) = K$.

²⁷Точнее, так называют комбинацию из двух опционов — длинных позиций по опционам “call” и “put” на один и тот же актив с одинаковой ценой исполнения, равной текущей цене базового актива, и с одинаковым сроком до исполнения.

по первому) был бы гарантированный арбитраж²⁸, а по другому не было бы арбитражных возможностей²⁹, т. е. $\beta^1 > \alpha^1 > 1$ и $\alpha^2 < 1 < \beta^2$ (что равносильно $b^1 > a^1 > 0$ и $a^2 < 0 < b^2$).

Поскольку $D_t(\cdot)$ в данном примере компактны, применимо предложение 5.2.2 о наличии равновесия в классе смешанных стратегий $\mathcal{P}^*(K)$, т. е. $\rho_t(\cdot) = \rho'(\cdot)$. Задачу максимизации (5.2.9) будем решать в два этапа: сначала условная оптимизация при условии $\int yQ(dy) = z$, а затем, на втором этапе, оптимизация по z полученного на первом этапе решения.

Первый этап сводится к нахождению вогнутой оболочки³⁰ f^* для функции $f(y^1, y^2) = |y^2|$; в данном случае это легко получается благодаря выпуклости f и прямоугольности K :

$$f^*(z_1, z_2) = \gamma z_2 + \delta, \quad z = (z_1, z_2) \in K,$$

где

$$\gamma = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \quad \delta = -\frac{2b^2 a^2}{b^2 - a^2} > 0.$$

На втором этапе нужно найти максимум по $z = (z_1, z_2)$ на K вогнутой функции

$$(z_1, z_2) \mapsto f^*(z_1, z_2) - \sigma_D(z_1, z_2),$$

где опорная функция σ_D имеет вид

$$\sigma_D(z_1, z_2) = 0 \vee (\varepsilon_1 z_1) \vee (\varepsilon_2 z_2) = (\varepsilon_1 z_1) \vee (\varepsilon_2 z_2),$$

так как $z_1 \geq a^1 > 0$. Выберем теперь α^2 и β^2 так, $\alpha^2 + \beta^2 > 2$, т. е. $a^2 + b^2 > 0$; тогда $\gamma > 0$. Кроме того, пусть $\gamma < \varepsilon_2$ и $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a^1 < b^2$ (это условие на начальные цены x_0). Тогда максимум w достигается при $z_1 = a_1$, $\varepsilon_1 z_1 = \varepsilon_2 z_2$, т. е. в точке $z^* = (z_1^*, z_2^*) = (a^1, c^2) \in K$, где $c^2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a^1 = \frac{x_0^2}{x_0^1} a^1$, причем $a^2 < c^2 < b^2$. Этот максимум достигается для смешанных стратегий, сосредоточенных не более, чем в трех точках, причем, в силу выпуклости функции выплат, в крайних точках K , т. е. в вершинах этого прямоугольника. Поскольку z^* лежит на стороне прямоугольника K — на отрезке, соединяющем вершины (a^1, a^2) и (a^1, b^2) , то в данном случае максимум достигается для смешанного распределения сосредоточенного в двух точках, (a^1, a^2) и (a^1, b^2) , а именно:

$$Q^* = q_1 \delta_{(a^1, a^2)} + \delta_{(a^1, b^2)},$$

где q_1 и q_2 определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} q_1 a^1 + q_2 b^2 = c^2, \\ q_1 + q_2 = 1, \end{cases}$$

²⁸ Имеется в виду случай операций только с этим активом.

²⁹ Аналогично предыдущей сноске.

³⁰ Общие результаты на эту тему представлены в главе 7.

т. е.

$$q_1 = \frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2} > 0, \quad q_2 = \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2} > 0.$$

Далее, нетрудно найти минимизатор $h^* \in D$ для функции $h \mapsto \varphi(h) = \bigvee_{y \in K'} (|y^2| - hy)$, где $K' = \{(a^1, a^2), (a^1, b^2)\}$. Поскольку

$$\varphi(h) = (|a^2| - h^1 a^1 - h^2 a^2) \bigvee (|b^2| - h^1 a^1 - h^2 b^2) = \\ -h^1 a^1 + (-a^2 - h^2 a^2) \bigvee (b^2 - h^2 b^2),$$

то минимум φ на D достигается для

$$h^{2*} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} = \gamma > 0, \\ h^{1*} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} (\varepsilon_2 - \gamma) = \frac{r - \gamma x_0^2}{x_0^1} > 0.$$

Таким образом, оптимальная стратегий «хеджера» $h^* = (h^{1*}, h^{2*})$ подразумевает при выбранных параметрах задачи занимать длинные позиции по обоим рисковым активам — не вкладывать все средства в первый («арбитражный») актив, а хеджировать позицию по второму активу (как если бы первого актива не было), приобретая второго актива на сумму $h^{2*} x_0^2 = \gamma x_0^2 > 0$, а в пределах остатка лимита r , инвестировать в первый актив с целью (ограниченного) арбитража, приобретая первый актив на сумму $h^{1*} x_0^1 = r - \gamma x_0^2 > 0$.

Стратегия $\check{h} = (\check{h}^1, \check{h}^2)$, отвечающая максимальному вложению в первый («арбитражный») актив, т. е.

$$\check{h}^1 = \varepsilon_1, \quad \check{h}^2 = 0,$$

дает гарантированный результат (по потенциальным потерям):

$$\check{v} = \sup_{y \in K} (g(x^0 + y) - \check{h}y) = \sup_{y^1 \in [a^1, b^1]} \sup_{y^2 \in [a^2, b^2]} (|y^2| - \varepsilon_1 y^1) = b^2 - \varepsilon_1 a^1.$$

Оптимальный же гарантированный результат, с использованием стратегии h^* , лучше:

$$v_0^* = u_1(z^*) = \left[\gamma \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a^1 \right) + \delta \right] - \varepsilon_1 a^1 < [\gamma b^2 + \delta] - \varepsilon_1 a^1 = b^2 - \varepsilon_1 a^1 = \check{v},$$

поскольку $\gamma > 0$ и $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a^1 < b^2$, в силу выбора параметров. □

5.3 Равновесие при отсутствии торговых ограничений

Далее будем рассматривать класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ — смешанное расширение класса чистых стратегий³¹ в виде $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$, т. е. класс всех вероятностных

³¹Напомним, что в смешанное расширение входят только меры с носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$ и входят все меры, сосредоточенные в одной точке $y \in K_t(\cdot)$.

мер с конечным носителем, содержащемся в компакте $K_t(\cdot)$; этот класс является допустимым (т. е. выпуклым). В рассматриваемом нами случае отсутствия торговых ограничений множества $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, так что формулы (5.2.1) и (5.2.2) приобретают вид:

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in \mathbb{R}^n} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy), \quad (5.3.1)$$

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \inf_{h \in \mathbb{R}^n} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy). \quad (5.3.2)$$

Отметим, что интегралы в (5.3.1) и (5.3.2) определены относительно меры Q из $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ (в этой связи не требуется условие измеримости).

Для доказательства основного результата данного раздела, теоремы 5.3.1 (ниже), потребуются вспомогательные результаты. В частности, полезным для дальнейших рассуждений будет следующий «фольклорный» результат.

Лемма 5.3.1. Пусть Q — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Тогда

$$\int yQ(dy) \in \text{ri}(\text{conv}(\text{supp}(Q))).$$

Лемма 5.3.1 вытекает, например, из более общего результата [248, теорема 1], которая формулируется для (произвольного) нормированного пространства. Однако доказательство этого результата опирается на [248, лемма 1] о топологическом носителе меры, которая доказана некорректно: в ней используется свойство плотности меры, которое, вообще говоря, не выполняется в общем случае нормированного пространства, но будет выполняться если пространство полное и сепарабельное (в частности, в конечномерном случае), в соответствии с классическим результатом Ю. В. Прохорова [38]. Обсуждение релевантного свойства топологического носителя можно найти в работе [251]. Таким образом, для приведенного в [248] доказательства следовало бы предполагать, что пространство не просто нормированное, а сепарабельное банахово. Впрочем, утверждение [248, лемма 1] справедливо для сепарабельного метрического пространства (без требования полноты). Поэтому мы сформулируем [248, теорема 1] с дополнительным предположением о сепарабельности³² нормированного пространства X .

Бариецентр (среднее значение) $m(Q) = \int yQ(dy)$ вероятностной меры Q определяется при помощи интеграла Гельфанда-Петтиса: если существует вектор $m(Q) \in X$, такой что для произвольного линейного непрерывного функционала φ на X справедливо равенство

$$\varphi(m(Q)) = \int \varphi(y)Q(dy).$$

³²Здесь уместно упомянуть проблему теории меры о существовании сепарабельного носителя меры, заданной на борелевской σ -алгебре метрического пространства, см. [99, дополнение III]; эта проблема носит теоретико-множественный характер и связана с отсутствием (или наличием) измеримых кардиналов. Вообще говоря, ответ зависит от выбора конкретной аксиоматики теории множеств, что, кстати, характерно для свойств топологических носителей для общих топологических пространств, см., например, [219].

Теорема (Borwein–Tijjs). Пусть на сепарабельном нормированном пространстве X с борелевской σ -алгеброй задана вероятностная мера Q . Если найдется множество $V \subseteq X$, такое что

$$a) \text{cl}(V) = \text{supp}(Q),$$

$$б) \text{ri}(\text{conv}(V)) \neq \emptyset,$$

то

$$m(Q) \in \text{ri}(\text{conv}(V)).$$

Замечание 5.3.1. Для конечномерного пространства X относительная внутренность непустого выпуклого множества всегда является непустой, (см., например, [40, теорема 6.2]). Однако для бесконечномерного случая условие б) сформулированной выше теоремы может не выполняться.

В качестве иллюстрации этого факта рассмотрим гильбертово пространство ℓ^2 квадратично суммируемых последовательностей с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и дискретной вероятностной мерой Q , сосредоточенной в точках $a_k e_k$, где $a_k \neq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ и $p_k = Q(\{a_k e_k\}) > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Вычисляя среднее значение $y = \int x Q(dx)$ при помощи интеграла Гельфанда–Петтиса, получаем $y = \sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k e_k \in \ell^2$. Очевидно, $y \notin \text{conv}(\text{supp}(Q))$, поскольку выпуклая оболочка содержит только конечные выпуклые комбинации векторов $a_k e_k$.

В данном примере $\text{supp}(Q) = \{0, a_1 e_1, a_2 e_2, \dots\}$, причем нулевой вектор 0 является единственной предельной точкой, поэтому условие а) выполняется лишь в двух случаях выбора множества $V \subseteq X$, а именно если $V = \text{supp}(Q)$ или же если $V = \text{supp}(Q) \setminus \{0\}$. В каждом из этих случаев $\text{ri}(\text{conv}(V)) = \text{int}(\text{conv}(V)) = \emptyset$, поскольку в открытом шаре с центром $x \in X$ сколь угодно малого радиуса ε имеются точки, все координаты которых в выбранном базисе ненулевые³³.

Достаточное условие для отсутствия арбитражных возможностей NDAO в терминах «риск-нейтральных» вероятностей дает следующее утверждение.

Предложение 5.3.1. Пусть торговые ограничения отсутствуют. Если для $t \in [1, N]$ существуют меры $Q_{t,\cdot}$, такие что $\text{supp}(Q_{t,\cdot}) \subseteq K_t(\cdot)$, $\int y Q_{t,\cdot}(dy) = 0$ и $\dim(\text{conv}(\text{supp}(Q_{t,\cdot}))) = \dim(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, то выполняется условие отсутствия арбитражных возможностей NDAO.

Доказательство. Очевидно, что

$$\text{conv}(\text{supp}(Q_{t,\cdot})) \subseteq \text{conv}(K_t(\cdot)), \quad (5.3.3)$$

причем оба множества, фигурирующие во включении (5.3.3), замкнуты в силу компактности. Если бы $\text{rbd}(\text{conv}(\text{supp}(Q_{t,\cdot}))) \subseteq \text{rbd}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, то из [40,

³³Либо это центр шара $x \in X$, либо же, если координаты вектора x с номерами i_1, i_2, \dots являются нулевыми, достаточно выбрать ненулевые числа β_1, β_2, \dots , такие что $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \varepsilon^2$ и добавить к вектору x вектор $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_{i_k}$.

следствие 6.3.3] $\dim(\text{conv}(\text{supp}(Q_t, \cdot))) < \dim(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, что противоречит предположениям данного Предложения. Поэтому применимо [40, следствие 6.5.2], в соответствии с которым

$$\text{ri}(\text{conv}(\text{supp}(Q_t, \cdot))) \subseteq \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))). \quad (5.3.4)$$

Из леммы 5.3.1 и включения (5.3.4) следует $0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, что равносильно условию NDAO. \square

Следующий результат доказан в [151, теорема 1.49].

Предложение 5.3.2. Пусть P — вероятностная мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, $\mathfrak{N}(P)$ — класс всех эквивалентных P мер с конечным средним³⁴, т. е. $\mathfrak{N}(P) = \{Q \sim P : \int \|y\|Q(dy) < \infty\}$. Тогда

$$M_P = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \int yQ(dy), Q \in \mathfrak{N}(P)\} = \text{ri}(\text{conv}(\text{supp}(P))).$$

Предложение 5.3.3. Пусть $K \subseteq \mathbb{R}^n$ — компакт, такой что $0 \in \text{ri}(K^*)$, где $K^* = \text{conv}(K)$. Обозначим³⁵

$$r^*(K) = \inf_{h \in S_1(0) \cap \text{lin}(K)} \sigma_K(h). \quad (5.3.5)$$

Тогда $r^*(K) > 0$ и для произвольной меры $Q^1 \in \mathcal{P}^*(K)$ найдется мера $\tilde{Q}^1 \in \mathcal{P}^*(K)$, а для произвольной меры $Q^2 \in \mathcal{P}(K)$ найдется $\tilde{Q}^2 \sim Q^2$ со свойствами:

$$m(\tilde{Q}^i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.3.6)$$

$$\|Q^i - \tilde{Q}^i\|_{TV} \leq \frac{2\|m(Q^i)\|}{\|m(Q^i)\| + r^*(K)}, \quad i = 1, 2, \quad (5.3.7)$$

где $\|\mu\|_{TV}$ — норма полной вариации заряда μ ; $m(Q) = \int yQ(dy)$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма на \mathbb{R}^n .

Доказательство. Формула (5.3.5) определяет (максимальный) радиус вписанного в K^* шара в пространстве $L^* = \text{lin}(K)$ (с наследуемой нормой) с центром в точке 0, т. е. $r^*(K) = \max\{r : \bar{B}_r^*(0) = \bar{B}_r(0) \cap L^* \subseteq K^*\}$. Условие $0 \in \text{ri}(K^*)$, очевидно, влечет $r^*(K) > 0$.

Если для $i = 1$ или $i = 2$ выполняется $m(Q^i) = 0$, то полагаем $\tilde{Q}^i = Q^i$ и требуемый результат получен. Пусть теперь $m(Q^i) \neq 0$. Обозначим

$$p(Q^i) = \frac{\|m(Q^i)\|}{\|m(Q^i)\| + R}, \quad (5.3.8)$$

³⁴Здесь $\|\cdot\|$ — какая-нибудь норма на \mathbb{R}^n (одна из эквивалентных).

³⁵Мы принимаем естественную конвенцию, в соответствии с которой $\inf \emptyset = +\infty$ и $1/\infty = 0$.

где $R \in (0, r^*(K))$, Положим

$$y(Q^i) = -\frac{1-p(Q^i)}{p(Q^i)}m(Q^i) = -\frac{R}{\|m(Q^i)\|}m(Q); \quad (5.3.9)$$

очевидно, что $\|y(Q^i)\| = R < r^*(K)$, и, поскольку $m(Q) \in K^*$, то $y(Q^i) \in -\frac{R}{\|m(Q)\|}K^* \subseteq L^*$. Поэтому

$$y(Q^i) \in \bar{B}_R(0) \cap L^* \subseteq \text{ri}(K^*) \subseteq K^*. \quad (5.3.10)$$

Следовательно, найдутся точки³⁶ y^1, \dots, y^m из K , такие что $y(Q^1)$ является их выпуклой комбинацией, т. е. для некоторых $q^j \geq 0$, $\sum_{j=1}^m q^j = 1$,

$$y(Q^1) = \sum_{j=1}^m q^j y^j.$$

Положим $\tilde{Q}^1 = \sum_{j=1}^m q^j \delta_{y^j}$; тогда $m(\tilde{Q}^1) = y(Q^1)$ и $\text{supp}(\tilde{Q}^1) \subseteq K$, т. е. $\tilde{Q}^1 \in \mathcal{P}^*(K)$,

Пользуясь предложением 5.3.2 и соотношением (5.3.10), можно найти меру $\tilde{Q}^2 \sim Q^2$, такую, что $m(\tilde{Q}^2) = y(Q^2)$.

Положим теперь

$$\tilde{Q}^i = (1-p(Q^i))Q^i + p(Q^i)\tilde{Q}^i. \quad (5.3.11)$$

Тогда по построению, из (5.3.8), (5.3.9) и (5.3.11) получаем $\tilde{Q}^1 \in \mathcal{P}^*(K)$, $\tilde{Q}^2 \sim Q^2$ и для $i = 1, 2$ выполняется (5.3.6), т. е. $m(Q^i) = 0$, а также имеет место неравенство

$$\|Q^i - \tilde{Q}^i\|_{TV} = p(Q^i)\|Q^i - \tilde{Q}^i\|_{TV} \leq 2p(Q^i) = \frac{2\|m(Q^i)\|}{\|m(Q^i)\| + R}, \quad i = 1, 2;$$

в силу произвольности $R \in (0, r^*(K))$ получаем (5.3.7). \square

Замечание 5.3.2. В действительности, в данном разделе будет использоваться лишь результат из предложения 5.3.3, касающийся близости Q^1 и \tilde{Q}^1 . Результат относительно близости Q^2 и \tilde{Q}^2 здесь помещен, поскольку его доказательство аналогично; предложение 5.3.2 используется в этом доказательстве. Этот результат будет востребован в главе 9, посвященной соотношению детерминистского и стохастического подходов.

Теорема 5.3.1. *В случае отсутствия торговых ограничений, т. е. когда $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, в предположении отсутствия арбитражных возможностей NDAO и при выполнении условия ограниченности функции выплат (предположение 1.2.2) имеет место равновесие (5.2.6) для $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))$, причем точная нижняя грань в (5.3.1) достигается для некоторого h^* и выполняются равенства*

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(\cdot), m(Q)=0} \int w_t(\cdot, y)Q(dy), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (5.3.12)$$

³⁶По теореме Каратеодори можно считать, что $m \leq n + 1$.

Доказательство. Фиксируем момент времени t и предысторию цен (которую далее будем обозначать точкой для упрощения обозначений). Заметим, что если $K_t(\cdot)$ не является полноразмерным, рассмотрение, по сути дела, сводится к полноразмерному (однако, меньшей размерности) следующим образом. Пусть³⁷ $L_t(\cdot) = \text{lin}(K_t(\cdot))$; если ее размерность $\dim(L_t(\cdot))$ меньше n , то рассмотрим разложение для $h \in \mathbb{R}^n$: $h = h' + h''$, где $h' \in L_t(\cdot)$, $h'' \in L_t^\perp(\cdot)$, где $L_t^\perp(\cdot)$ — ортогональное дополнение $L_t(\cdot)$. Тогда для $h \in \mathbb{R}^n$, $y \in \text{conv}(K_t(\cdot))$ имеем³⁸: $hy = h'y$, т. е. достаточно рассмотреть задачу с торговыми ограничениями $D_t^*(\cdot) \equiv L_t(\cdot)$.

Пользуясь неотрицательностью w_t , оценим снизу выражение под знаком *infimum* в правой части выражения (5.3.1), как функцию от $h \in D_t^*(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \varphi_{t,\cdot}(h) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] Q(dy) = \\ &= \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] \geq \\ &\geq \max_{y \in K_t(\cdot)} (-hy) = \max_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy) = \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h). \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

где $K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$.

По условию теоремы выполняется условие NDAO, и по критерию точка 0 является внутренней точкой $\text{conv}(K_t(\cdot))$ в относительной топологии на $D_t^*(\cdot)$. Поэтому найдется замкнутый шар $B_{r_t(\cdot)}(0)$ радиуса $r_t(\cdot) > 0$ с центром в нуле, такой что $D_t^*(\cdot) \cap B_{r_t(\cdot)}(0) \subseteq \text{conv}(K_t(\cdot))$. Следовательно, для $h \in D_t^*(\cdot)$:

$$\max_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy) \geq \max_{y \in B_{r_t(\cdot)}(0) \cap D_t^*(\cdot)} (-hy) = r_t(\cdot) \|h\|, \quad (5.3.14)$$

где $\| \cdot \|$ — евклидова норма.

В качестве $r_t(\cdot)$ выберем максимально возможное значение, для которого справедливо неравенство (5.3.14), см. формулу (5.3.5):

$$r_t^*(K_t(\cdot)) = \min_{h \in D_t^*(\cdot), \|h\|=1} \max_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy) = \min_{h \in D^*(\cdot), \|h\|=1} \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что константа C из предположения 1.2.2 положительна³⁹. Таким образом, если взять h такое, что $\|h\| > \frac{C}{r_t^*(K_t(\cdot))}$, то $\varphi_{t,\cdot}(h) > C$, так что для таких h точная нижняя грань в правой части (5.3.1) заведомо не может достигаться, т. к. $\inf_{h \in D_t(\cdot)} \varphi_{t,\cdot}(h) \leq C$.

Зафиксируем произвольное $\delta^* \in (0, 1)$ и положим $\delta_t(\cdot) = \delta^* r_t^*(K_t(\cdot))$. Выберем достаточно большое $R_t(\cdot) \geq \frac{C}{\delta_t(\cdot)}$ и положим $D'_t(\cdot) = D_t^*(\cdot) \cap B_{R_t(\cdot)}(0)$; тогда, если $h \in D_t^*(\cdot)$ не лежит в $D'_t(\cdot)$, то $\|h\| > R_t(\cdot) \geq \frac{C}{\delta_t(\cdot)} > \frac{C}{r_t^*(K_t(\cdot))}$.

³⁷ Благодаря геометрическому критерию NDAO, аффинная оболочка K_t совпадает с линейной оболочкой.

³⁸ Напомним, что hy обозначает скалярное произведение.

³⁹ В противном случае функции выплат — нулевые.

Функция $h \mapsto \varphi_{t,\cdot}(h)$ является полунепрерывной сверху (и выпуклой) и достигает минимума в некоторой точке $h^* = h_t^*(\cdot)$ компактного (и выпуклого) множества $D_t'(\cdot)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \rho_t(\cdot) &= \inf_{h \in \mathbb{R}^n} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] Q(dy) = \\ &= \min_{h \in D_t'(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] Q(dy). \end{aligned}$$

Теперь, поскольку $D_t'(\cdot)$ — компактное выпуклое множество, содержащее точку 0, применимо предложение 5.2.2, откуда получаем, что имеет место равновесие (5.2.6) для $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ и формула (5.2.9) влечет

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))} \left[\int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) - \sigma_{D_t'(\cdot)}(m(Q)) \right], \quad (5.3.15)$$

где $m(Q) = \int y Q(dy) \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \subseteq L_t(\cdot)$, так что в данном случае

$$\sigma_{D_t'(\cdot)}(m(Q)) = R_t(\cdot) \|m(Q)\|.$$

Обозначим

$$\mathcal{M}_t^\delta(\cdot) = \{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot)) : \|m(Q)\| \leq \delta_t(\cdot)\}.$$

Из (5.3.15) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \rho_t(\cdot) &\geq \sup_{Q \in \mathcal{M}_t^\delta(\cdot)} \left[\int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) - \sigma_{D_t'(\cdot)}(0) \right] = \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot)), m(Q)=0} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy). \end{aligned}$$

Покажем противоположное неравенство:

$$\begin{aligned} \rho_t(\cdot) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))} \left[\int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) - R_t(\cdot) \|m(Q)\| \right] = \\ &= \left[\sup_{Q \in \mathcal{M}_t^\delta(\cdot)} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) - R_t(\cdot) \|m(Q)\| \right] \vee \\ &\vee \left[\sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot)), \|m(Q)\| > \delta_t(\cdot)} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) - R_t(\cdot) \|m(Q)\| \right] \leq \\ &\leq \sup_{Q \in \mathcal{M}_t^\delta(\cdot)} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) \vee [C - R_t(\cdot) \delta_t(\cdot)] = \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{M}_t^\delta(\cdot)} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy), \end{aligned}$$

поскольку $w_t \geq 0$ и в силу выбора $R_t(\cdot)$ имеем $C - R_t(\cdot) \delta_t(\cdot) \leq 0$. Выберем произвольное $Q \in \mathcal{M}_t^\delta(\cdot)$. По предложению 5.3.3 найдется $\tilde{Q} \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$, такое что

$$m(\tilde{Q}) = 0, \quad \|Q - \tilde{Q}\|_{TV} \leq \frac{2\|m(Q)\|}{\|m(Q)\| + r^*(K_t(\cdot))}. \quad (5.3.16)$$

Поэтому

$$\left| \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y)Q(dy) - \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y)\widetilde{Q}(dy) \right| \leq C\|Q - \widetilde{Q}\|_{TV} \leq \frac{2\|m(Q)\|}{\|m(Q)\| + r^*(K_t(\cdot))} \leq \frac{2C\delta_t(\cdot)}{\delta_t(\cdot) + r^*(K_t(\cdot))} = \frac{2c\delta^*}{\delta^* + 1}.$$

Тем самым,

$$\begin{aligned} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y)Q(dy) &\leq \frac{2c\delta^*}{\delta^* + 1} + \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y)\widetilde{Q}(dy) \leq \\ &\leq \frac{2c\delta^*}{\delta^* + 1} + \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot)), m(Q)=0} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y)Q(dy). \end{aligned}$$

В силу произвольности $Q \in \mathcal{M}_t^\delta(\cdot)$ и $\delta^* \in (0, 1)$ при $\delta^* \rightarrow 0$ получаем требуемое неравенство. Таким образом, имеет место равенство

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot)), m(Q)=0} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y)Q(dy). \quad (5.3.17)$$

Заметим, что для случая отсутствия торговых ограничений, т. е. $D_t(\cdot) = \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \rho_t'(\cdot) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))} \left[\int w_t(\bar{x}_{t-1}, y)Q(dy) - \sigma_{\mathbb{R}^n}(m(Q)) \right] = \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot)), m(Q)=0} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y)Q(dy), \end{aligned}$$

поскольку

$$\sigma_{\mathbb{R}^n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{для } y = 0; \\ \infty & \text{для } y \neq 0. \end{cases}$$

Тем самым, с учетом (5.3.17) имеет место равновесие $\rho_t'(\cdot) = \rho_t(\cdot)$ для $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$. \square

Замечание 5.3.3. В главе 7 будет показано, что класс мер $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ в теореме 5.3.1 можно сузить до $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ — класса всех мер с конечными носителями, содержащимися в $K_t(\cdot)$ и число точек в которых не превосходит $n + 1$.

Если дополнительно потребовать полунепрерывность сверху функций $w_t(\cdot)$ (или, что равносильно, функций $v_t^*(\cdot)$)⁴⁰, то точная верхняя грань в равенстве (5.3.12) будет достигаться для некоторые меры $Q^* \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$, такой что $m(Q^*) = 0$.

⁴⁰Достаточные условия для этого вытекают из теоремы 3.1.4, а именно достаточно полунепрерывности сверху функций выплат $g_t(\cdot)$ и полунепрерывности сверху компактозначных отображений $K_t(\cdot)$.

Глава 6. Реалистичность модели рынка и ее критерий

В данной главе мы вводим понятие реалистичности модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен, как наличие (стохастических) сценариев поведения рынка, описываемых смешанными стратегиями рынка с носителями, совпадающими с детерминистской динамикой цен, которые можно считать реалистичными — в том смысле, что зависимость от предыстории носит непрерывный характер, что формализуется как феллеровость переходных ядер для условных распределений приращений цен при известной предыстории. Опираясь на более абстрактные результаты, полученные нами, доказан критерий реалистичности модели в терминах свойств многозначного отображения, описывающего движение цен, а именно, его полунепрерывность снизу.

Интересно, что при условии структурной устойчивости модели (и дополнительно выпуклости и телесности непрерывного компактозначного отображения, описывающего движение цен) найдется стохастическая модель с феллеровостью в строгом смысле переходных ядер для условных распределений приращений цен при известной предыстории.

Основные результаты главы опубликованы в [53] (английская версия [222]) и [237].

6.1 Реалистичность модели рынка

Реалистичными стохастическими сценариями поведения рынка мы считаем (вероятностные) распределения стохастического процесса с дискретным временем, описывающего эволюцию цен, для которых условные распределения текущей цены непрерывно (в слабой топологии) зависят от предыстории цен. Другими словами, для стохастической модели динамики цен — переходные ядра Q_t , отвечающие условным вероятностям цены $X_t \in \mathbb{R}^n$ в момент времени t при известной предыстории $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1} \in (\mathbb{R}^n)^t$, обладают феллеровским свойством. Если для распределения вектора $\bar{X}_t = (\bar{X}_{t-1}, X_t)$ существует (регулярный) вариант условного распределения $P(X \in \cdot | \bar{X}_{t-1} = x) = Q_t(x, \cdot)$, обладающий феллеровским свойством, то такой вариант единственный для $x \in \text{supp}(P_{\bar{X}_{t-1}})$, где $P_{\bar{X}_{t-1}}$ — распределение случайного вектора \bar{X}_{t-1} , а $\text{supp}(\pi)$

обозначает (топологический) носитель меры π . В этом случае естественно выбирать именно феллеровский вариант регулярного условного распределения, а детерминистский и стохастический подходы приводят к одинаковым понятиям «безарбитражности», когда референтная вероятностная мера задается при помощи феллеровских переходных ядер (посредством теоремы Ионеску Тулча).

Отметим, что феллеровское свойство является естественным предположением в моделировании физических и социо-экономических процессов. Кроме того, отметим, что марковские процессы, удовлетворяющие феллеровскому свойству, составляют важный класс случайных процессов (подробнее см., например [235]).

Из соображений здравого инженерного смысла, вряд ли можно привести пример реалистичной модели цен, описываемой стохастическим процессом, когда (регулярные) условные распределения цен при известной предыстории цен не имеют феллеровского варианта. Рассуждая с экономической точки зрения, естественно задать вопрос: какие объективные причины на финансовом рынке могли бы объяснить ситуацию, когда малые изменения в предыстории цен способны существенно изменить характер поведения текущих (или будущих) цен? При этом, разумеется, технический анализ к научным объяснениям относить не стоит¹.

Кстати, для случая непрерывного времени классическая модель Башелье—Самуэльсона, а в более общем случае стохастической динамики цен с непрерывным временем, описываемой невырожденным многомерным диффузионным процессом, случайный процесс является марковским с сильно феллеровскими² переходными вероятностями, по теореме Гирсанова—Молчанова [32].

Определение 6.1.1. Будем называть модель финансового рынка с неопределенной эволюцией цен реалистичной, если существуют смешанные стратегии рынка, для которых имеются феллеровские переходные ядра $P_t(x, \cdot)$ — условные распределения X_t при известной предыстории $\bar{X}_{t-1} = x$, такие что выполняется условие согласованности³

$$\text{supp } P_t(x, \cdot) = x + K_t(x), \quad t = 1, \dots, N. \quad (6.1.1)$$

Условие согласованности можно также записать в эквивалентном виде для условных распределений $Q_t(x, \cdot)$ приращений цен ΔX_t при известной предыстории $\bar{X}_{t-1} = x$,

$$\text{supp } Q_t(x, \cdot) = K_t(x), \quad t = 1, \dots, N. \quad (6.1.2)$$

Основным результатом данной главы является следующая теорема.

¹Впрочем, честный экономист может все же теоретически признать (но не обосновать) такую возможность, в очень краткосрочной перспективе, учитывая возросшую в последние годы роль алгоритмической (высокочастотной) торговли, способной, как показывает практика, при некоторой (пока не вполне ясной) ситуации на рынке спровоцировать резкий обвал цен (flash crash).

²Определение сильной феллеровости приведено далее, в замечании 6.5.1.

³Это условие отражает реалистичность детерминистских сценариев приращений цен.

Теорема 6.1.1. *Для реалистичности модели финансового рынка с неопределенной детерминистской эволюцией цен⁴ необходимо и достаточно, чтобы многозначные отображения $K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$ были бы полунепрерывны снизу.*

Эта теорема непосредственно вытекает из более общих результатов, представленных в следующем разделе.

6.2 Свойства феллеровских переходных ядер

Обозначим $\text{supp}(Q)$ — топологический носитель⁵ вероятностной меры Q , а 2^Y — множество всех подмножеств Y .

Следующий результат известен (см., например, [190, лемма 4.3]), однако в силу простоты его доказательства и в целях полноты изложения мы приводим его ниже.

Лемма 6.2.1. *Пусть Y — сепарабельное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $Q \mapsto \text{supp}(Q)$ является полунепрерывным снизу⁶ для слабой топологии на пространстве вероятностных мер $\mathcal{P}(Y)$, заданных на борелевской σ -алгебре \mathcal{B}_Y .*

Доказательство. Для открытого множества $G \in 2^Y$, по определению топологического носителя,

$$\mathcal{M}_G = \{Q \in \mathcal{P}(Y) : \text{supp}(Q) \cap G \neq \emptyset\} = \{Q \in \mathcal{P}(Y) : Q(G) > 0\}; \quad (6.2.1)$$

проверим открытость множества \mathcal{M}_G , или, что равносильно, проверим замкнутость его дополнения $(\mathcal{M}_G)^c = \{Q \in \mathcal{P}(Y) : Q(G) = 0\}$. Если последовательность⁷ $Q_n \in (\mathcal{M}_G)^c$ слабо сходится к Q^* , по классической теореме А. Д. Алек-

⁴В данном случае компактность $K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$ не требуется, предполагается лишь замкнутость (как у потенциальных топологических носителей вероятностных мер). Отметим, что в случае компактозначных отображений из полунепрерывности снизу следует h -полунепрерывность снизу, см. [171, теорема 2.68] и [171, предложение 2.66].

⁵Топологический носитель меры на топологическом пространстве с борелевской σ -алгеброй определяют как множество точек, любая окрестность которых имеет положительную меру; такое множество замкнуто. Однако без дополнительных предположений о топологическом пространстве нельзя гарантировать, что дополнение носителя (представимое в виде объединения открытых множеств нулевой меры) будет иметь нулевую меру; наличие счетной базы снимает проблему. Отметим, что топологический носитель может быть пустым, см., например, [252, глава 1, предложение 3.5] — принадлежащий Дьедонне пример вероятностной меры, заданной на борелевской σ -алгебре компактного хаусдорфова пространства, с пустым носителем (при этом мера не является регулярной).

⁶Напомним, что многозначное отображение $F : X \mapsto 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ полунепрерывно снизу, если для любого открытого множества $G \subseteq Y$ множество $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ является открытым, см., например, в [171, определение 2.3], [171, замечание 2.4] и эквивалентные формулировки в [171, предложение 2.6].

⁷Слабая топология на $\mathcal{P}(Y)$ для сепарабельного пространства Y метризуема, см., например, [99, дополнение III, теорема 5], поэтому (учитывая, что мера на сепарабельном пространстве сама сепарабельна) можно рассматривать последовательности, а не направленности мер.

сандрова ([74, §16, теорема 2]) $\liminf_{n \rightarrow \infty} Q_n(G) \geq Q^*(G)$, так что $Q^*(G) = 0$ и значит $Q^* \in (\mathcal{M}_G)^c$. \square

Определение 6.2.1. Для заданной пары измеримых пространств (X, \mathcal{A}_X) и (Y, \mathcal{A}_Y) стохастическое переходное ядро P определяется как числовая функция $(x, A) \mapsto P(x, A)$, такая что функции $x \mapsto P(x, A)$ являются⁸ \mathcal{A}_X -измеримыми для всех $A \in \mathcal{A}_Y$, а функции $A \mapsto P(x, A)$ являются нормированными (вероятностными) мерами на \mathcal{A}_Y для всех $x \in X$.

Поскольку далее будут рассматриваться только стохастические переходные ядра, будем называть их просто «переходные ядра», опуская слово «стохастические».

Определение 6.2.2. Переходное ядро $Q = Q(x, B)$ удовлетворяет феллеровскому свойству, если отображение $x \mapsto Q(x, \cdot)$ непрерывно (по отношению к слабой топологии на пространстве вероятностных мер).

Предложение 6.2.1. Пусть X — топологическое пространство и Y — метрическое пространство с заданными на них борелевскими σ -алгебрами \mathcal{B}_X и \mathcal{B}_Y соответственно. Если отображение $x \mapsto Q(x, \cdot) \in \mathcal{P}(Y)$, $x \in X$ непрерывно для слабой топологии на $\mathcal{P}(Y)$, то $Q = Q(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}_Y$ является переходным ядром, т. е. для любого $B \in \mathcal{B}_Y$ числовая функция $x \mapsto Q(x, B)$ является \mathcal{B}_X -измеримой.

Доказательство. Обозначим через \mathcal{D} класс всех множеств $B \in \mathcal{B}_Y$, таких что функция $x \mapsto Q(x, B)$ является \mathcal{B}_X -измеримой. Нетрудно видеть, что \mathcal{D} образует систему Дынкина (см. например, [77, определение 4.1.1]), т. е.

- 1) $Y \in \mathcal{D}$ (т. к. функция-константа измерима);
- 2) если $A, B \in \mathcal{D}$ и $A \subseteq B$, то $A \setminus B \in \mathcal{D}$ (т. к. разность измеримых функций измерима);
- 3) если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$ и $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$ (т. к. предел измеримых функций измерим).

Заметим, что топология \mathcal{J}_Y на Y содержится в \mathcal{D} , поскольку, в силу непрерывности отображения $x \mapsto Q(x, \cdot)$, для открытого множества $G \subseteq Y$ функция $x \mapsto Q(x, G)$ полунепрерывна снизу: по теореме А. Д. Александрова⁹ для сходящейся направленности $x_\alpha \rightarrow x$ направленность мер $Q(x_\alpha, \cdot)$ удовлетворяет свойству $\liminf Q(x_\alpha, G) \geq Q(x, G)$ для любого $G \in \mathcal{J}_Y$. Полунепрерывная снизу функция $x \mapsto Q(x, G)$ является \mathcal{B}_X -измеримой, поскольку множество

⁸На \mathbb{R} задается борелевская σ -алгебра $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

⁹Напомним, что эту теорему естественно так называть, т. к. первый результат такого типа был опубликован в работе [74, §16, теорема 2]. В действительности, нужное нам утверждение содержится в книге [103, теорема 8.2.3], и [103, следствие 8.2.4]. Кстати, доказательство леммы 6.2.1 также опирается на теорему А. Д. Александрова.

$\{x \in X : Q(x, G) > a\}$ открыто, а значит принадлежит \mathcal{B}_X для любого $a \in \mathbb{R}$ (см., например, [68, глава 2, §4, следствие из леммы 1]). Поскольку топология \mathcal{J}_Y замкнута относительно конечных пересечений, то применима теорема о системах Дынкина (см. например, [77, теорема 4.1.2]), в соответствии с которой \mathcal{D} содержит минимальную σ -алгебру, содержащую \mathcal{J}_Y , т. е. борелевскую σ -алгебру \mathcal{B}_Y . Тем самым, для любого $B \in \mathcal{B}_Y$ функция $x \mapsto Q(x, B)$ является \mathcal{B}_X -измеримой. \square

Предложение 6.2.2. Пусть X — топологическое пространство и Y — сепарабельное метрическое пространство¹⁰ с заданными на них борелевскими σ -алгебрами \mathcal{B}_X и \mathcal{B}_Y соответственно. Если переходное ядро $Q = Q(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}_Y$ обладает феллеровским свойством, то многозначное отображение $x \mapsto \text{supp}(Q(x, \cdot))$ является полунепрерывным снизу.¹¹

Доказательство. Обозначим $\varphi(x) = Q(x, \cdot)$; (однозначное) отображение $\varphi : X \mapsto \mathcal{P}(Y)$ (слабо) непрерывно в силу предположения о феллеровости Q . Очевидно

$$\{x \in X : \text{supp}(\varphi(x)) \cap G \neq \emptyset\} = \varphi^{-1}(\mathcal{M}_G),$$

где

$$\mathcal{M}_G = \{Q \in \mathcal{P}(Y) : \text{supp}(Q) \cap G \neq \emptyset\};$$

в силу леммы 6.2.1, для открытого G множество \mathcal{M}_G открыто, а его прообраз открыт в силу непрерывности φ . \square

6.3 Вспомогательные результаты

Для доказательства основных результатов, представленных в разделе 6.4, потребуется ряд вспомогательных результатов.

Пусть (Y, ρ) — сепарабельное метрическое пространство. Рассмотрим линейное пространство $BL(Y)$ ограниченных липшицевых функций $f : Y \mapsto \mathbb{R}$ с нормой¹²

$$\begin{aligned} \|f\|_{BL} &= \|f\|_L + \|f\|_\infty, \\ \|f\|_\infty &= \sup\{|f(y)| : y \in Y\}, \\ \|f\|_L &= \sup\left\{\frac{|f(y) - f(y')|}{\rho(y, y')} : y, y' \in Y, y \neq y'\right\}; \end{aligned}$$

а также рассмотрим нормированное векторное пространство $\mathcal{M}(Y)$ зарядов (знакопеременных мер) на пространстве Y с борелевской σ -алгеброй \mathcal{B}_Y , снаб-

¹⁰Слабая топология на $\mathcal{P}(Y)$ для сепарабельного пространства Y метризуема, см., например, [99, дополнение III, теорема 5], поэтому (учитывая, что мера на сепарабельном пространстве сама сепарабельна) можно рассматривать последовательности, а не направленности мер.

¹¹Тем самым, необходимость в теореме 6.1.1 установлена.

¹²Это пространство является банаховым, см., например, [255], где это доказано для эквивалентной нормы $\|f\|_{BL} = \max(\|f\|_L, \|f\|_\infty)$.

женной нормой Дадли (Dudley):¹³

$$\|\mu\|_D = \sup \left\{ \left| \int f d\mu \right| : \|f\|_{BL} \leq 1 \right\}.$$

Множество всех нормированных (вероятностных) мер $\mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{M}(Y)$ будет замкнутым выпуклым подмножеством $\mathcal{M}(Y)$, с метрикой ρ_D , порожденной нормой $\|\cdot\|_D$, т. е. $\rho_D(\pi_1, \pi_2) = \|\pi_1 - \pi_2\|_D$.

Лемма 6.3.1. Пусть (Y, \mathcal{B}_Y) — сепарабельное метрическое пространство с борелевской σ -алгеброй. Тогда любую вероятностную меру Q на (Y, \mathcal{B}_Y) можно приблизить в метрике Дадли¹⁴ вероятностными мерами с конечными носителями, содержащимися в носителе Q , в том смысле, что найдется слабо сходящаяся последовательность вероятностных мер Q_n , таких что $\text{supp}(Q_n) \subseteq \text{supp}(Q)$ и $\|Q_n - Q\|_D \rightarrow 0$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и $Q \in \mathcal{P}(Y)$. Если Y конечно, то доказывать нечего, поэтому предположим, что Y бесконечно. Пусть $C = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное всюду плотное в Y множество. Обозначим $S = \text{supp}(Q)$ и $B_\varepsilon(x)$ — открытый шар радиуса ε с центром x . Рекуррентно построим последовательность множеств A_1, A_2, \dots , попарно непересекающихся и таких что¹⁵ $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq S$; в частности, $Q(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. Положим $A_1 = B_\varepsilon(x_1)$, $A_{n+1} = B_\varepsilon(x_{n+1}) \setminus \sum_{i=1}^n A_i$, $n = 1, 2, \dots$. Обозначим $J = \{k \geq 1 : A_k \cap S \neq \emptyset\}$. Если $n \notin J$, то $Q(A_n) = 0$, поэтому $\sum_{k \in J} Q(A_k) = 1$. Положим¹⁶ $Q_\varepsilon = \sum_{k \in J} q_k \delta_{x_k^*}$, $q_k = Q(A_k)$, где для $k \in J$ точка x_k^* произвольно выбрана в $A_k \cap S \neq \emptyset$. Заметим, что по построению $A_k \subseteq B_\varepsilon(x_k)$ и для $k \in J$ множество A_k имеет диаметр, не превосходящий 2ε . Поэтому для произвольной числовой функции f , такой что $\|f\|_{BL} \leq 1$,

$$\left| \int f dQ - \int f dQ_\varepsilon \right| \leq \sum_{k \in J} \int_{A_k} |f(x) - f(x_k^*)| Q(dx) \leq 2\varepsilon,$$

так что $\|Q - Q_\varepsilon\|_D \leq 2\varepsilon$. Найдется конечное множество индексов $I \subseteq J$, такое что для его дополнения $I^c = J \setminus I$ будет выполняться неравенство¹⁷

¹³Отметим, что в соответствии с [167, теорема 3.11] нормированное пространство $\mathcal{M}(Y)$ не является полным, если только Y не является равномерно дискретным (когда найдется число $r^* > 0$, такое что $\rho(y_1, y_2) \geq r^*$ для всех $y_1, y_2 \in Y$).

¹⁴Эта метрика приписывается множеству разных авторов: расстояние Канторовича, расстояние Канторовича—Рубинштейна, расстояние Вассерштейна, расстояние Форте—Мурье, расстояние Дадли (последнее название представляется предпочтительным, не по принципу кто первым ввел это расстояние, но по вкладу в теорию). Бывают и курьезы. Так, например в статье [170], на странице 534 авторы определяют метрику, ссылаясь на теорему 8.1.3 из книги Богачева [103] и называют ее метрикой Леви—Прохорова (которая в книге Богачева, между прочим, называется расстоянием Канторовича—Рубинштейна).

¹⁵Как принято в теории вероятностей, $\sum_n A_n$ обозначает объединение $\bigcup_n A_n$ попарно непересекающихся множеств.

¹⁶Здесь δ_x обозначает вероятностную меру, сосредоточенную в точке x .

¹⁷Если J конечно, то можно выбрать $I = J$, тогда $\delta = 0$.

$\delta(I) = \sum_{k \in I^c} q_k \leq \varepsilon$. Полагая $Q'_\varepsilon = \sum_{k \in I} q'_k \delta_{x_k^*}$, $q'_k = q_k/1 - \delta$, получаем $\|Q_\varepsilon - Q'_\varepsilon\|_{TV} = 2\delta(I) \leq 2\varepsilon$, где $\|\mu\|_{TV}$ — норма полной вариации конечного ряда μ ; поскольку $\|\mu\|_D \leq \|\mu\|_{TV}$, то $\|Q - Q'_\varepsilon\|_D \leq \|Q - Q_\varepsilon\|_D + \|Q_\varepsilon - Q'_\varepsilon\|_D \leq 4\varepsilon$. При этом по построению $\text{supp}(Q'_\varepsilon) \subseteq \text{supp}(Q)$. Осталось сослаться на [138, теорема 11.3.3], в соответствии с которой для сепарабельного метрического пространства Y слабая сходимость последовательности вероятностных мер равносильна сходимости в метрике Дадли. \square

Лемма 6.3.2. Пусть F — замкнутое множество сепарабельного метрического пространства Y . Тогда найдется мера $Q \in \mathcal{P}(Y)$, такая что $\text{supp}(Q) = F$.

Доказательство. Случай, когда F конечно, очевиден. Пусть F бесконечно; поскольку (см., например, [24, глава III, раздел 7, §4, лемма]) F сепарабельно относительно суженной на $F \times F$ метрики, найдется счетное всюду плотное подмножество $C = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq F$. Выберем произвольную последовательность q_1, q_2, \dots , такую что $q_n > 0$ для всех $n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = 1$ и положим $Q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \delta_{x_n}$. Тогда, очевидно, $\text{supp}(Q) = F$. \square

Предложение 6.3.1. Пусть X — топологическое пространство и Y — сепарабельное метрическое пространство, снабженные борелевскими σ -алгебрами \mathcal{B}_X и \mathcal{B}_Y соответственно. Если $S : X \mapsto 2^Y$ многозначное отображение, принимающее непустые замкнутые значения, полунепрерывно снизу, то многозначное отображение $\mathcal{N} : X \mapsto \mathcal{P}(Y)$, задаваемое посредством

$$\mathcal{N}(x) = \{Q \in \mathcal{P}(Y) : \text{supp}(Q) \subseteq S(x)\}, \quad (6.3.1)$$

принимает непустые замкнутые выпуклые значения и является¹⁸ h -полунепрерывным снизу для метрики, порожденной нормой Дадли в пространстве $\mathcal{P}(Y)$.

Доказательство. Очевидно, $\mathcal{N}(x) \neq \emptyset$ для всех $x \in X$, поскольку $S(x) \neq \emptyset$. Проверим, что для произвольной точки $x_0 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $V_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 , такая что для любого $x \in V_\varepsilon(x_0)$ и любой меры $Q_0 \in \mathcal{N}(x_0)$ существует мера $Q_\varepsilon^x \in \mathcal{N}(x)$, такая что $\|Q_0 - Q_\varepsilon^x\|_D < \varepsilon$. По определению (6.3.1), для $Q_0 \in \mathcal{N}(x_0)$ имеем $\text{supp}(Q_0) \subseteq S(x_0)$. В силу леммы 6.3.1 найдется мера Q_ε с конечным носителем $\text{supp}(Q_\varepsilon) = \{y^1, \dots, y^m\} \subseteq S(x_0)$, т. е. представляемая в виде $Q_\varepsilon = \sum_{i=1}^m q_i \delta_{y^i}$, где $\sum_{i=1}^m q_i = 1$, $q_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, такая что $\|Q_0 - Q_\varepsilon\|_D < \varepsilon/2$. В силу предположения о полунепрерывности снизу многозначного отображения¹⁹ $x \mapsto S(x)$, у выбранной точки $x_0 \in X$ найдутся

¹⁸Напомним, что если X — топологическое пространство, (Y, ρ) — метрическое пространство, то многозначное отображение $F : X \mapsto 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ называется h -полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X$, если $e(F(x_0), F(x))$, отклонение Помпею $F(x_0)$ от $F(x)$, непрерывно в точке x_0 . Здесь $e(A, B) = \sup\{\rho(a, B) : a \in A\}$, $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$, см., например, [171, определение 2.60].

¹⁹Многозначное отображение $F : X \mapsto 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ полунепрерывно снизу в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $G \subseteq Y$, такого что $G \cap F(x_0) \neq \emptyset$, найдется окрестность W_{x_0} точки x_0 , такая что для всех $x \in W_{x_0}$ имеет место $G \cap F(x) \neq \emptyset$.

окрестности $V_\varepsilon^i(x_0)$, $i = 1, \dots, m$, такие что множества $S(x) \cap B_{\varepsilon/2}(y^i)$ будут непустыми для любого $x \in V_\varepsilon^i(x_0)$, $i = 1, \dots, m$. Выбирая в качестве окрестности точки x_0 множество $V_\varepsilon(x_0) = \bigcap_{i=1}^m V_\varepsilon^i(x_0)$ получаем, что для любого $x \in V_\varepsilon(x_0)$ найдутся точки $\hat{y}^i(\varepsilon, x) \in S(x)$, такие что $\rho(y^i, \hat{y}^i(\varepsilon, x)) < \varepsilon/2$ для $i = 1, \dots, m$. Положим теперь $Q_\varepsilon^x = \sum_{i=1}^m q_i \delta_{\hat{y}^i(\varepsilon, x)}$; тогда

$$\|Q_\varepsilon - Q_\varepsilon^x\|_D \leq \sum_{i=1}^m q_i \|\delta_{y^i} - \delta_{\hat{y}^i(\varepsilon, x)}\|_D \leq \sum_{i=1}^m q_i \rho(y^i, \hat{y}^i(\varepsilon, x)) < \varepsilon/2.$$

Таким образом, $\|Q_0 - Q_\varepsilon^x\|_D \leq \|Q_0 - Q_\varepsilon\|_D + \|Q_\varepsilon - Q_\varepsilon^x\|_D < \varepsilon$, а значит многозначное отображение $x \mapsto \mathcal{N}(x)$ является h -полунепрерывным снизу (для метрики, порожденной нормой Дадли в пространстве $\mathcal{P}(Y)$).

Чтобы убедиться в замкнутости $\mathcal{N}(x)$, достаточно заметить, что $Q \in \mathcal{N}(x)$ равносильно $Q((S(x))^c) = 0$; по теореме А. Д. Александрова для слабо сходящейся последовательности $Q_n \in \mathcal{N}(x)$ к мере Q^* имеем

$$0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} Q_n((S(x))^c) \geq Q^*((S(x))^c),$$

т. е. $Q^* \in \mathcal{N}(x)$. Выпуклость $\mathcal{N}(x)$ очевидна. □

6.4 Существование феллеровских переходных ядер с носителями мер, заданными многозначным отображением

Предложение 6.2.1 устанавливает необходимое условие феллеровости ядра Q — полунепрерывность снизу многозначного отображения $x \mapsto \text{supp}(Q(x, \cdot))$. Несколько усиливая требования по сравнению с разделом 6.2 к пространствам X и Y , получаем два утверждения, которые устанавливают в определенном смысле обратные утверждения к предложению 6.2.2.

Теорема 6.4.1. Пусть X — нормальное счетно паракомпактное пространство²⁰ и Y — польское пространство²¹, снабженные борелевскими σ -алгебрами \mathcal{B}_X и \mathcal{B}_Y соответственно. Если $S : X \mapsto 2^Y$ многозначное отображение, принимающее непустые замкнутые значения, полунепрерывно снизу, то найдется феллеровское переходное ядро $Q = Q(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}_Y$, такое что $\text{supp}(Q(x, \cdot)) \subseteq S(x)$.

Доказательство. Рассмотрим пополнение $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$ пространства зарядов $\mathcal{M}(Y)$, являющееся банаховым пространством относительно нормы Дадли, причем

²⁰См. определения, например, в книге [72] в гл. 1, раздел 1.5 и в гл. 5, раздел 5.2; счетная паракомпактность топологического пространства означает, что в любое его счетное открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

²¹Полное сепарабельное метрическое пространство.

$\mathcal{M}(Y)$ отображается в $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$ при помощи изометрического линейного оператора (так что можно говорить о вложении пространства $\mathcal{M}(Y)$ в пространство $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$, причем как всюду плотного множества). Это пополнение однозначно определено с точностью до изометрического линейного изоморфизма, см., например, [178, теорема 2.5.2, 2.5.4]. По теореме 1.11 из классической работы Ю. В. Прохорова [38] пространство вероятностных мер $\mathcal{P}(Y)$ со слабой топологией метризуемо при помощи метрики d_P Прохорова²²,

$$d_P(Q', Q) = \inf\{\epsilon > 0 : Q(B) \leq Q'(B^\epsilon) + \epsilon, Q'(B) \leq Q(B^\epsilon) + \epsilon \text{ для всех } B \in \mathcal{B}^n\}, \quad (6.4.1)$$

где $B^\epsilon = [B]^\epsilon$, что определено формулой (4.1.7), и это пространство является польским. Из этой теоремы, а также из [137, раздел 2, следствие 2, 3], в соответствии с которыми имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} \|Q_1 - Q_2\|_D &\leq 2d_P(Q_1, Q_2), \\ d_P(Q_1, Q_2) &\leq \sqrt{\frac{3}{2}} \|Q_1 - Q_2\|_D \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

для любых Q_1 и Q_2 из $\mathcal{P}(Y)$, вытекает замкнутость $\mathcal{P}(Y)$ в $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$ (в силу полноты $\mathcal{P}(Y)$ в метрике Дадди). Поэтому, замкнутые по норме Дадди подмножества $\mathcal{P}(Y)$ будут также замкнутыми в $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$.

В силу предложения 6.3.1, заметим, что многозначное отображение $\mathcal{N} : X \mapsto \mathcal{P}(Y)$, определяемое соотношением (6.3.1), является h -полунепрерывным снизу, а значит и полунепрерывным снизу, см., например, [171, предложение 2.66]. Полунепрерывность снизу \mathcal{N} в пространстве $\mathcal{M}(Y)$ равносильна тому, что для любого замкнутого множества $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{M}(Y)$ множество точек $\{x \in X : \mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{J}\}$ замкнуто в пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$. Поскольку $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{P}(Y)$, а $\mathcal{P}(Y)$ замкнуто в $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$, то

$$\{x \in X : \mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{J}\} = \{x \in X : \mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{J} \cap \mathcal{P}(Y)\},$$

²²Мы категорически не согласны с приписыванием Полю Леви метрики в [115, предположение 4.4]. Расстояние Леви, введенное в [191], является одной из подходящих метрик для метризации слабой сходимости пространства вероятностных мер на вещественной прямой \mathbb{R} (снабженное борелевской σ -алгеброй); обозначим его d_L . Подчеркнем, что при выборе вещественной прямой как частного случая сепарабельного метрического пространства метрика Прохорова d_P отличается из исходной метрики Леви d_L (это следует из примера в последнем абзаце и неравенства статьи [137, следствие 2]). Иногда d_P называют метрикой Леви—Прохорова, — возможно, потому, что Прохоров писал во введении своей статьи, что вводится расстояние между мерами, «аналогичное расстоянию Леви — для мер на прямой». Но что означает «аналогичное»? Можно предположить, что речь идет о метризации слабой сходимости вероятностных мер. Это, впрочем, неубедительно, поскольку существуют другие метрики с таким же свойством, например, см., например, [139], но никто не вспоминает метрику Леви в этой связи. Можно догадаться, что это потому, что выражение для метрики Прохорова выглядит «похоже» на соответствующую формулу для расстояния Леви. Кстати, метрика Прохорова также «похожа» на расстояние, введенное Хаусдорфом в его книге [165]; отметим, что справедливым названием для этого расстояния является расстояние Помпею—Хаусдорфа, см. историческую справку в [94]. Однако односторонняя (асимметричная) форма d_P (используемая в [115]), замеченная Штрассеном [244], уже больше не выглядит «похоже» на метрику Леви; справедливым названием могло бы быть «форма Штрассена метрики Прохорова».

где $\mathcal{J} \cap \mathcal{P}(Y)$ — замкнутое подмножество $\mathcal{P}(Y)$, так что полунепрерывное снизу в пространстве $\mathcal{P}(Y)$ отображение \mathcal{N} будет также полунепрерывным снизу и в пространстве $\overline{\mathcal{M}}(Y)$.

Далее, $\overline{\mathcal{M}}(Y)$ является сепарабельным, поскольку таковым является $\mathcal{M}(Y)$. Сепарабельность $\overline{\mathcal{M}}(Y)$ проверяется достаточно легко. Действительно, используя разложение Жордана, конечный заряд μ единственным образом представим в виде разности взаимно сингулярных (неотрицательных) конечных мер μ^+ и μ^- , т. е. $\mu = \mu^+ - \mu^-$ (см., например, [24, раздел 1, §5]). Любую конечную меру ν можно приблизить мерами вида $r_n \pi$, где $\pi \in \mathcal{P}(Y)$, а $r_n \geq 0$ — рациональные числа, такие что при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $r_n \rightarrow \|\nu\|_D = \|\nu\|_{TV} = \nu(Y)$.²³ В то же время $\mathcal{P}(Y)$ сепарабельно; пусть \mathcal{P}' — счетное всюду плотное в $\mathcal{P}(Y)$ множество. Для конечной меры $\nu \neq 0$ положим $\pi = \frac{1}{\|\nu\|_D} \nu$ и пусть $\pi_n \in \mathcal{P}'$, $\pi_n \rightarrow \pi$, тогда

$$\|r_n \pi_n - \nu\|_D \leq |r_n - \|\nu\|_D| + \|\nu\|_D \|\pi_n - \pi\|_D \rightarrow 0.$$

Таким образом, с учетом предложения 6.2.1, многозначное отображение \mathcal{N} представляет собой полунепрерывное снизу многозначное отображение, принимающее непустые выпуклые замкнутые значения, содержащиеся в замкнутом выпуклом подмножестве $\mathcal{P}(Y)$ сепарабельного банахова пространства $\overline{\mathcal{M}}(Y)$, поэтому применима теорема 3.1'' из классической работы Майкла [195], в соответствии с которой \mathcal{N} имеет непрерывную ветвь (селектор) $x \mapsto Q(x, \cdot) \in \mathcal{N}(x)$. Для завершения доказательства достаточно сослаться на предложение 6.2.1. \square

Незначительное усиление требований к топологическому пространству X позволяет получить следующее утверждение.

Теорема 6.4.2. Пусть X — совершенно нормальное пространство²⁴ и Y — польское пространство, снабженные борелевскими σ -алгебрами \mathcal{B}_X и \mathcal{B}_Y соответственно. Если $S : X \mapsto 2^Y$ многозначное отображение, принимающее непустые замкнутые значения, полунепрерывно снизу, то найдется феллеровское переходное ядро $Q = Q(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}_Y$, такое что²⁵ $\text{supp}(Q(x, \cdot)) = S(x)$.

Доказательство. Поскольку многозначное отображение $\mathcal{N} : X \mapsto \mathcal{P}(Y)$, определяемое соотношением (6.3.1), представляет собой полунепрерывное снизу многозначное отображение, принимающее непустые выпуклые замкнутые

²³Здесь $\|\mu\|_{TV}$ — норма полной вариации заряда μ на пространстве (Y, \mathcal{B}) , т. е. $\|\mu\|_{TV} = \mu^+(Y) + \mu^-(Y)$; в общем случае (знакопеременном), очевидно, $\|\mu\|_D \leq \|\mu\|_{TV}$.

²⁴См. определение, например, в книге [72, глава 1, раздел 1.5]; топологическое пространство называют совершенно нормальным, если оно нормально и любое замкнутое множество является множеством типа G_δ , т. е. представимо в виде пересечения счетного числа открытых множеств. Совершенно нормальное пространство является счетно паракомпактным, см. например, [72, следствие 5.2.5].

²⁵Тем самым, достаточность в теореме 6.1.1 установлена.

значения, содержащиеся в замкнутом выпуклом подмножестве $\mathcal{P}(Y)$ сепарабельного банахова пространства $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$, пополнения пространства конечных мер $\mathcal{M}(Y)$, применима лемма 5.2 из классической работы Майкла [195], в соответствии с которой найдется счетное семейство непрерывных ветвей (селекторов) $x \mapsto Q_k(x, \cdot) \in \mathcal{N}(x)$, $x \in X$, $k = 1, 2, \dots$, таких что для любого $x \in X$ множество мер $\{Q_k(x, \cdot), k = 1, 2, \dots\}$ плотно в $\mathcal{N}(x)$. Пусть $Q_x \in \mathcal{N}(x)$ — мера, для которой $\text{supp}(Q_x) = S(x)$; такая мера существует по лемме 6.3.2. В силу плотности в $\mathcal{N}(x)$ множества $\{Q_k(x, \cdot), k = 1, 2, \dots\}$ найдется (зависящая от x) подпоследовательность $Q_{k_l}(x, \cdot)$, слабо сходящаяся к $Q_x \in \mathcal{N}(x)$. Поэтому

$$\liminf_{l \rightarrow \infty} Q_{k_l}(x, G) \geq Q_x(G) > 0 \quad (6.4.3)$$

для произвольного открытого G , такого что $G \cap S(x) \neq \emptyset$. Положим

$$Q^*(x, \cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k Q_k(x, \cdot),$$

где $q_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1$. Из (6.4.3) следует, что $\text{supp}(Q^*(x, \cdot)) = S(x)$ для любого $x \in X$. При этом функция $x \mapsto Q^*(x, \cdot)$ непрерывна в слабой топологии, поскольку для ограниченной непрерывной функции f ряд непрерывных функций

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} q_k \int f(y) Q_k(x, dy)$$

сходится равномерно:

$$\left| \sum_{k=1}^n q_k \int f(y) Q_k(x, dy) - \int f(y) Q^*(x, dy) \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} q_k \int f(y) Q_k(x, dy) \right| \leq \|f\|_{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} q_k.$$

Таким образом, с учетом предложения 6.2.1, Q^* является феллеровским переходным ядром. \square

Замечание 6.4.1.

- 1) Для сепарабельности пространства $\mathcal{P}(Y)$ полнота Y не требуется, достаточно, чтобы Y было сепарабельным метрическим пространством. В $\mathcal{P}(Y)$, например, счетным всюду плотным множеством будет множество мер с конечными носителями, содержащимися в счетном всюду плотном подмножестве Y , представимыми в виде выпуклой комбинации мер Дирака (вероятностных мер, сосредоточенных в одной точке) с рациональными коэффициентами, см., например,²⁶ [133, предложение 2.5.40].
- 2) Условия на топологическое пространство X в теоремах 6.4.1 и 6.4.2 выполняются, если X — метрическое пространство.

²⁶В формулировке этого предложения авторы забыли упомянуть про рациональность коэффициентов (хотя имели это в виду).

6.5 Существование переходных ядер с сильно феллеровским свойством в строгом смысле в случае структурной устойчивости модели

Для модели без торговых ограничений т. е. когда $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$ оказывается, что при предположении структурной устойчивости, т. е. при грубом условии отсутствия арбитражных возможностей RNDAO, а также более сильных предположениях относительно многозначных отображений $K_t(\cdot)$ утверждение теоремы 6.1.1 может быть усилено; более того, это можно показать конструктивно — на конкретном примере.

Теорема 6.5.1. *Если множество начальных цен K_0 выпуклое и компактное, многозначные отображения $K_t(\cdot)$ непрерывны и принимают выпуклые компактные значения и выполняется RNDAO, то существует «вероятностная» модель, удовлетворяющая условию согласованности (6.1.2), такая, что ядра Q_t являются сильно феллеровскими в строгом смысле.²⁷*

Доказательство. Пусть λ — мера Лебега на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, а $Q_t, t = 1, \dots, N$ — переходные ядра, удовлетворяющие условию согласованности (6.1.2), такие что для любого x мера $Q_t(x, \cdot)$ абсолютно непрерывно по отношению к $\lambda(\cdot)$ и для любого x (условная) плотность приращений цен равна

$$q_t(x, y) = \frac{I_{K_t(x)}(y)}{\lambda(K_t(x))} \quad \lambda - \text{п.в.} \quad (6.5.1)$$

Величина²⁸ r_t^* , определяемая равенством (4.2.17), положительна в силу условия RNDAO, см. предложение 4.2.2. Как следствие, определение (6.5.1) плотностей q_t является корректным, поскольку

$$0 < \pi^{n/2} \Gamma(1 + n/2) (r_t^*)^n \leq \lambda(K_t(x)) \leq \pi^{n/2} \Gamma(1 + n/2) \left(\max_{x \in B_{t-1}} \|K_t(x)\|_2 \right)^n < \infty,$$

где Γ — гамма-функция. Поскольку компактные множества $K_t(x)$ являются выпуклыми, мы можем использовать формулу Хёрмандера, выражающую расстояние Помпею—Хаусдорфа через опорные функции (см., например, [26, теорема 14.1]); обозначим

$$\delta(x', x) = h_p(K_t(x'), K_t(x)) = \max_{u \in S_1(0)} |\sigma_{K_t(x')}(u) - \sigma_{K_t(x)}(u)|.$$

Поэтому для любого $u \in S_1(0)$ имеет место неравенство

$$\sigma_{K_t(x')}(u) \leq \sigma_{K_t(x)}(u) + \delta(x', x) \leq \gamma \sigma_{K_t(x)}(u),$$

²⁷Мы следуем терминологии [209, глава 1, определение 5.8.]. Ядра Q_t являются сильно феллеровскими в строгом смысле, если отображение $x \mapsto Q_t(x, \cdot)$ непрерывно в метрике на пространстве вероятностных мер (снабженном σ -алгеброй), порожденной нормой полной вариации на пространстве конечных знакопеременных мер.

²⁸Напомним, что эта величина равна минимальному по предыстории x расстоянию от точки 0 до границы выпуклой оболочки $K_t(x)$ (в нашем случае эти множества являются выпуклыми).

где

$$\gamma = \gamma(x', x) = 1 + \frac{\delta(x', x)}{r_t^*}.$$

Аналогично, получается неравенство $\sigma_{K_t(x)}(u) \leq \gamma \sigma_{K_t(x')}(u)$. Таким образом²⁹, $K_t(x') \subseteq \gamma K_t(x)$ и $K_t(x) \subseteq \gamma K_t(x')$. Для нормы полной вариации имеет место равенство

$$\begin{aligned} \|Q_t(x', \cdot) - Q_t(x, \cdot)\|_{TV} &= \int |q_t(x', y) - q_t(x, y)| \lambda(dy) = \\ &= \frac{\lambda(K_t(x') \setminus K_t(x))}{\lambda(K_t(x'))} + \frac{\lambda(K_t(x) \setminus K_t(x'))}{\lambda(K_t(x))} + \\ &+ \left| \frac{1}{\lambda(K_t(x'))} - \frac{1}{\lambda(K_t(x))} \right| \lambda(K_t(x') \cap K_t(x)). \end{aligned}$$

Имеет место неравенство

$$\lambda(K_t(x') \setminus K_t(x)) \leq \lambda(K_t(x') \setminus \gamma^{-1}K_t(x')) = (1 - \gamma^{-1})\lambda(K_t(x')).$$

Аналогично, имеет место неравенство

$$\lambda(K_t(x) \setminus K_t(x')) \leq (1 - \gamma^{-1})\lambda(K_t(x)).$$

Кроме того,

$$\lambda(K_t(x') \cap K_t(x)) \leq \lambda(K_t(x')) \wedge \lambda(K_t(x))$$

и

$$\begin{aligned} |\lambda(K_t(x')) - \lambda(K_t(x))| &= [\lambda(K_t(x')) - \lambda(K_t(x))] \vee [\lambda(K_t(x)) - \lambda(K_t(x'))] \leq \\ &\leq (1 - \gamma^{-1})[\lambda(K_t(x')) \vee \lambda(K_t(x))]. \end{aligned}$$

Из этих четырех неравенств а также равенства для нормы полной вариации получаем оценку

$$\|Q_t(x', \cdot) - Q_t(x, \cdot)\|_{TV} \leq [3(1 - \gamma^{-1})] \wedge 2 = \frac{3h_\rho(K_t(x'), K_t(x))}{h_\rho(K_t(x'), K_t(x)) + r_t^*} \wedge 2,$$

где величина $r_t^* > 0$ определена посредством (4.2.17). Тем самым, переходные ядра Q_t является сильно феллеровскими в строгом смысле. \square

Замечание 6.5.1. Для модели стохастической динамики цен с непрерывным временем, описываемой невырожденным многомерным диффузионным процессом, как мы уже отмечали в начале главы, случайный процесс является марковским с сильно феллеровскими³⁰ переходными ядрами. На самом деле, эти переходные

²⁹В общем случае (для невыпуклых множеств), неравенство для опорных функций $\sigma_A(u) \leq \sigma_B(u)$ для всех $u \in S_1(0)$ влечет включение $\text{conv}(A) \subseteq \text{cl}(\text{conv}(B))$.

³⁰Пусть X — топологическое пространство и Y — метрическое пространство с заданными на них борелевскими σ -алгебрами B_X и B_Y соответственно. Переходное ядро $Q = Q(x, B)$, $x \in X$, $B \in B_Y$ называется сильно феллеровским, если для любого $B \in B_Y$ числовая функция $x \mapsto Q(x, B)$ является непрерывной.

ядра являются даже сильно феллеровскими в строгом смысле. Это вытекает из того, что для ядер, действующих из локального компактного пространства со счетной базой и снабженного борелевской алгеброй, в другое пространство, с теми же свойствами, композиция двух сильно феллеровских ядер является сильно феллеровской в строгом смысле, см. [209, глава 1, теорема 5.10].

Глава 7. Наиболее неблагоприятные сценарии поведения рынка и проблема моментов

В предположении игрового равновесия в смешанных стратегиях «рынка», предлагается двухэтапный метод решения уравнений Беллмана. Первый этап представляет собой задачу, относящейся к общей проблеме моментов, а второй этап сводится к максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве.

Установлены результаты о том, что смешанные стратегии рынка можно искать в классе распределений, сосредоточенных не более чем в конечном числе точек, равном совокупному количеству активов (рисковых и безрискового). В одном случае используется доказанная нами теорема, относящаяся к теории игр с нулевой суммой. В другом случае используется теория, относящаяся к общей проблеме моментов. Все эти результаты объединены в теореме 7.3.2.

Общая проблема моментов применяется также для решения первого этапа двухэтапного метода и сводится к построению вогнутой оболочки функции. Особо простой случай возникает при отсутствии торговых ограничений — второй этап отпадает, а для наиболее неблагоприятных смешанных стратегий «рынка» задача может быть сведена к решению хорошо изученной задачи суперхеджирования для соответствующей вероятностной модели.

Основные результаты главы получены в [51] (английская версия [230]) и [45].

7.1 Двухэтапный метод решения уравнений Беллмана

Опишем общий способ решения детерминистской задачи суперрепликации в предположении, что имеет место равновесие (5.2.6) для смешанного расширения $\mathcal{P}_t(\cdot)$. Тогда задача ценообразования сводится к уравнениям Беллмана (5.2.4), где $\rho = \rho'$ определяется при помощи формулы (5.2.9), т. е.

$$v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot),$$

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\cdot, y) Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)} \left(\int y Q(dy) \right) \right], \quad (7.1.1)$$

$$t = 1, \dots, N,$$

где функции w_t задаются соотношением (Т).

Случай, когда $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) = \emptyset$ рассматривался в замечании 5.2.2; он соответствует наличию SAUP — гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. В этом случае имеет место равновесие, однако, хеджирование нецелесообразно, а рациональное поведение «хеджера» состоит в реализации арбитража. Поэтому, если имеет место равновесие (5.2.6), достаточно рассмотреть случай отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью NDSAUP, т. е. когда $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$, что мы и будем предполагать далее.

Разобьем задачу нахождения точной верхней грани в формуле (7.1.1) на два этапа для каждого $t = 1, \dots, N$, начиная с $t = N$.

Этап 1. Для каждого $z \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))$ решаем задачу условной оптимизации по $Q \in \mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1})$ при дополнительном ограничении $\int yQ(dy) = z$, т. е. находим

$$u_{t, \bar{x}_{t-1}}(z) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1}), \int yQ(dy)=z} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y)Q(dy); \quad (7.1.2)$$

Этап 2. Решаем задачу максимизации по $z \in \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})) \cap \text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))$ функции $z \mapsto u_{t, \bar{x}_{t-1}}(z) - \sigma_{D_t(\bar{x}_{t-1})}(z)$, т. е. находим¹

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{z \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))} [u_{t, \cdot}(z) - \sigma_{D_t(\cdot)}(z)], \quad (7.1.3)$$

и

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot). \quad (7.1.3')$$

Что касается второго этапа, то для приложений типично задание $D_t(\cdot)$ в аналитической форме, что обычно позволяет явно найти опорную функцию этого множества, т. е. $\sigma_{D_t(\cdot)}(z)$ для $z \in \text{bar}(D_t(\cdot))$.

Пример 7.1.1.

- 1) Возможность задания $\sigma_{D_t(\cdot)}$ в аналитической форме относится, в частности, к примеру 1.1.4, в соответствии с формулой (1.1.12):

$$D_t(\cdot) = \{h \in \mathbb{R}^n : \langle h, B_t(\cdot)h \rangle \leq d^2\},$$

где $d = \frac{L}{\gamma} > 0$, $B_t(\cdot)$ — симметричная неотрицательно определенная матрица. Здесь $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{y = B_t(\cdot)x, x \in \mathbb{R}^n\}$; для $z \in \text{bar}(D_t(\cdot))$ имеем

$$\sigma_{D_t(\cdot)}(z) = d\sqrt{\langle z, B_t^+(\cdot)z \rangle},$$

где B_t^+ — псевдообратная матрица (совпадает с обратной в случае невырожденности B_t).

¹Отметим, что множество, по которому проводится максимизация, не обязано быть замкнутым: в работе [246] приведена характеристика выпуклого конуса, который является барьерным конусом для некоторого непустого выпуклого множества: этот конус должен быть множеством типа F_σ (представим в виде счетного объединения замкнутых множеств). Необходимость очевидна, т. к. опорная функция полунепрерывна снизу.

- 2) Рассмотрим случай конических торговых ограничений, т. е. когда торговые ограничения $D_t(\cdot)$ представляют собой выпуклый конус (при этом $0 \in D_t(\cdot)$). В этом случае барьерным конусом для D_t является D_t° — полярный к D_t конус, т. е.

$$\text{bar}(D_t(\cdot)) = (D_t(\cdot))^\circ = \{y : hy \leq 0 \text{ для всех } h \in D_t(\cdot)\},$$

а опорная функция множества D_t является индикаторной функцией его барьерного конуса, т. е.

$$\sigma_{D_t(\cdot)}(z) = \begin{cases} 0 & z \in (D_t(\cdot))^\circ \\ +\infty & z \notin (D_t(\cdot))^\circ \end{cases},$$

В данном случае задача оптимизации (7.1.1) приобретает вид

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \bigvee_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \sup_{\int y Q(dy) \in (D_t(\cdot))^\circ} \int w_t(\cdot, y) Q(dy), \quad t = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

где $w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y)$. Отметим, что для конических торговых ограничений условие NDSAUP равносильно условию NDSA, геометрический критерий которого $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap (D_t(\cdot))^\circ \neq \emptyset$, а точная верхняя грань в (7.1.4) берется по непустому множеству, по теореме 5.1.1.

Таким образом, в случае конических торговых ограничений, на втором этапе решения, предложенном выше, задача упрощается — в (7.1.1) исчезает выражение с опорной функцией.

Частный случай, важный для приложений, возникает, когда имеются статические торговые ограничения, заключающиеся в запрете коротких позиций по рисковому активам с индексами из множества² $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, где $k \geq 1$, т. е.

$$D_t(\cdot) \equiv D = \{h \in \mathbb{R}^n : h^{i_1} \geq 0, \dots, h^{i_k} \geq 0\}. \quad (7.1.5)$$

В этом случае барьерный конус³

$$\text{bar}(D) = \{y \in \mathbb{R}^n : y_j \leq 0 \text{ если } j \in I \text{ и } y_j = 0 \text{ если } j \notin I\}.$$

Здесь точная верхняя грань в (7.1.4) берется по классу вероятностных мер, для которых процесс цен будет супермартингалом для каждого рискового актива с индексом $j \in I$ и мартингалом для $j \notin I$. Это соответствует нашей интерпретации наиболее неблагоприятного поведения рынка — в данном случае, в отношении занятия длинных позиций по ряду рисковых активов. \square

²В частности, при полном запрете коротких позиций по рисковому активам (т. е. когда $k = n$), имеем $D_t(\cdot) = [0, \infty)^n$.

³При $k < n$, кстати, это естественный с экономической точки зрения пример, когда барьерный конус не сводится к одной точке 0 и имеет пустую внутренность.

Функция $z \mapsto u_t(\cdot, z)$ является вогнутой по лемме 7.3.1, доказанной далее в этом параграфе. Поскольку опорная функция выпукла, то функция $z \mapsto u_t(\cdot, z) - \sigma_{D_t(\cdot)}(z)$ также вогнута; максимизация вогнутой функции на выпуклом множестве $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))$ является классической задачей.

Основное внимание сконцентрируем на задаче, возникающей на первом этапе. Начнем с анализа класса оптимальных смешанных стратегий в частном случае — в предположении о компактности торговых ограничений. В соответствии с предложением 5.2.2 имеет место равновесие (5.2.6), причем в качестве класса допустимых смешанных стратегий $\mathcal{P}_t(\cdot)$ можно выбрать $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ — класс всех распределений с конечным носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$. Оказывается, что для решения задачи (7.1.1) и ее первого этапа, т. е. задачи (7.1.2), достаточно проводить оптимизацию по более узкому классу распределений с носителем, содержащим не более чем $n+1$ точку, что вытекает, например, из общего результата теории антагонистических игр, представленного в следующем разделе.

7.2 Конечные носители смешанных стратегий в антагонистической игре

В данном разделе представлено опубликованное в нашей статье [51] обобщение результата, полученного в работе Боненбласта, Карлина и Шепли [104], см. также [10, глава 2, параграф 3, пункт 3.5, 3.6] и [78, глава 20, стр. 736]. Избыточное требование непрерывности функции f заменено на полунепрерывность, так что наши предположения близки к сделанным в теоремах Кнезера [183] и Фань Цзы [145], а также нами используется квазивыпуклость⁴, в духе работы Сайона [221]. По сути дела, наш результат является уточнением этих теорем для случая, когда один из аргументов функции выигрыша (фигурирующей в теоремах из [183], [145] и [221]), принимает значения в конечномерном выпуклом компакте. По стилю наше доказательство близко к доказательству Э.Г. Давыдова [12], которое, в свою очередь, опирается на идеи Л.Г. Шнирельмана [71], однако в [12] и [71] предполагается непрерывность функции f по совокупности аргументов. Интересно, что наш результат был получен для финансовой задачи ценообразования и хеджирования обусловленных обязательств по опционам, формализованной с использованием метода гарантированного оценивания — решение соответствующего уравнения Беллмана—Айзекса опирается на доказанную теорему. Доказательство теоремы представляет определенный интерес, причем самостоятельный интерес представляет следующее утверждение.

Лемма 7.2.1. Пусть заданы:

⁴Функция f , заданная на выпуклом подмножестве A линейного пространства называется квазивыпуклой, если для $q = (q_1, \dots, q_m) \in S_{m-1}$ и $x_1, \dots, x_m \in A$ справедливо неравенство $f\left(\sum_{i=1}^m q_i x_i\right) \leq \bigvee_{i=1}^m f(x_i)$.

1° X — непустое компактное выпуклое подмножество \mathbb{R}^n , $m \geq 1$; Y — произвольное непустое множество;

2° числовая функция $f(x, y)$ аргументов $x \in X$ и $y \in Y$, такая что для любого $y \in Y$ функции $x \mapsto f(x, y)$

- а) полунепрерывны снизу,
- б) квазивыпуклы.

Обозначим⁵:

$$W = \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y), \quad (7.2.1)$$

$$W_m = \sup_{y_1 \in Y, \dots, y_{m+1} \in Y} \min_{x \in X} \bigvee_{i=1}^{m+1} f(x, y_i).$$

Тогда $W = W_m$.

Доказательство. Легко проверяется, что $W_m \leq W$; действительно, для всех $x \in X$ и $y_i \in Y$, $i = 1, 2, \dots, m+1$,

$$\bigvee_{i=1}^{m+1} f(x, y_i) \leq \sup_{y \in Y} f(x, y),$$

следовательно, для всех $y_i \in Y$, $i = 1, 2, \dots, m+1$,

$$\min_{x \in X} \bigvee_{i=1}^{m+1} f(x, y_i) \leq \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y),$$

и, значит,

$$\sup_{y_1 \in Y, \dots, y_{m+1} \in Y} \min_{x \in X} \bigvee_{i=1}^{m+1} f(x, y_i) \leq \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y).$$

Покажем обратное неравенство $W \leq W_m$; оно нетривиально лишь, если Y содержит более $m+1$ элементов. В самом деле, поскольку операция \bigvee взятия максимума является непрерывной по совокупности аргументов, функция $x \mapsto \bigvee_{i=1}^{m+1} f(x, y_i)$ является полунепрерывной снизу, так что ее минимум достигается в некоторой точке из X (зависящей от y_1, \dots, y_{m+1}). Поэтому если обозначить

$$C_y = \{x : f(x, y) \leq W_m\},$$

то

$$\bigcap_{i=1}^{m+1} C_{y_i} \neq \emptyset$$

⁵Здесь и далее в тексте символ \bigvee используется для обозначения бинарной ассоциативной (и коммутативной) операции взятия максимума, что оправдывает обозначение вида $\bigvee_{i=1}^k a_i$. Использование минимума в (7.2.1) корректно, так как функция $x \mapsto \sup_{y \in Y} f(x, y)$ является полунепрерывной снизу, причем эта функция может принимать значения $+\infty$ (здесь окрестностями $+\infty$ считаются интервалы вида $(a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$), так что минимум достигается в некоторой точке компакта X .

для любых y_1, \dots, y_{m+1} из Y .

Замечая, что в силу предположения 2° а) снизу C_y замкнуты и значит, компактны, а в силу предположения 2° б) выпуклы, убеждаемся, что применима теорема Хелли [166]

$$\bigcap_{y \in Y} C_y \neq \emptyset.$$

Стало быть, найдется точка $x^* \in X$, такая что $f(x^*, y) \leq W_m$ для всех $y \in Y$. Поэтому

$$W = \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) \leq \sup_{y \in Y} f(x^*, y) \leq W_m.$$

□

Обозначим для $m \geq 0$ симплекс

$$S_m = \{q = (q_1, \dots, q_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : q_i \geq 0, i = 1, \dots, m+1; \sum_{i=1}^{m+1} q_i = 1\}; \quad (7.2.2)$$

и $\mathcal{P}^m(Y)$ — класс всех вероятностных мер на Y , сосредоточенных не более чем в $m+1$ точке, т. е.

$$\mathcal{P}^m(Y) = \{Q = \sum_{i=1}^{m+1} q_i \delta_{y_i} : q \in S_m, y_i \in Y, i = 1, \dots, m+1\}, \quad (7.2.3)$$

где δ_y обозначает сосредоточенную в точке $y \in Y$ вероятностную меру.

Лемма 7.2.2. *Если Y — компактное хаусдорфово топологическое пространство, то множество $\mathcal{P}^m(Y) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ является компактным (в слабой топологии)⁶.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную направленность Q^α , $\alpha \in I$ мер из $\mathcal{P}^m(Y)$; тогда мера Q^α представима в виде $Q^\alpha = \sum_{i=1}^{m+1} q_i^\alpha \delta_{y_i^\alpha}$. В силу компактности Y , а также симплекса S_m , существуют поднаправленности $q^{\alpha\beta} = (q_1^{\alpha\beta}, \dots, q_{m+1}^{\alpha\beta}) \in S_m$, $y_1^{\alpha\beta} \in Y, \dots, y_{m+1}^{\alpha\beta} \in Y$, сходящиеся соответственно к точкам $q^* = (q_1^*, \dots, q_{m+1}^*) \in S_m$, $y_1^* \in Y, \dots, y_{m+1}^* \in Y$; при этом, очевидно, поднаправленность $Q^{\alpha\beta}$ слабо сходится к мере $Q^* = \sum_{i=1}^{m+1} q_i^* \delta_{y_i^*}$, так что предельная мера $Q^* \in \mathcal{P}^m(Y)$. □

Перейдем теперь к формулировке и доказательству теоремы.

Теорема 7.2.1.

Пусть в антагонистической игре:

⁶Напомним, что речь идет о минимальной топологии, такой что функции $Q \mapsto \int g(y)Q(dy)$ непрерывны для любой ограниченной непрерывной числовой функции g на Y (для компактного пространства Y непрерывные числовые функции автоматически ограничены).

1° первый игрок выбирает чистые стратегии на пространстве X , компактном выпуклом подмножестве \mathbb{R}^m , $m \geq 1$, а второй игрок выбирает смешанную стратегию — распределение⁷ на непустом множестве Y , снабженном σ -алгеброй \mathcal{A} , содержащей все одноточечные подмножества Y ;

2° функция выигрыша $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ такова, что для любого $y \in Y$ функции $x \mapsto f(x, y)$

а) полунепрерывны снизу,

б) любые выпуклые комбинации функций из семейства $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ являются квазивыпуклыми⁸.

Тогда имеет место равенство

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^m(Y)} \min_{x \in X} \int f(x, y) Q(dy), \quad (7.2.4)$$

где $\mathcal{P}^m(Y)$ — класс всех вероятностных мер на Y , сосредоточенных не более чем в $m + 1$ точке, т. е.

$$\mathcal{P}^m(Y) = \left\{ Q = \sum_{i=1}^{m+1} q_i \delta_{y_i} : q \in S_m, y_i \in Y, i, i+1, \dots, m+1 \right\}, \quad (7.2.5)$$

где $S_m = \{q = (q_1, \dots, q_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : q_i \geq 0, i = 1, \dots, m+1; \sum_{i=1}^{m+1} q_i = 1\}$, а δ_y обозначает сосредоточенную в точке $y \in Y$ вероятностную меру.

3° функция выигрыша $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ такова, что для любого $y \in Y$ функции $x \mapsto f(x, y)$

а) полунепрерывны снизу,

б) любые выпуклые комбинации функций из семейства $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ являются квазивыпуклыми⁹.

⁷Т. е. вероятностную меру на (Y, \mathcal{A}) , где σ -алгебра \mathcal{A} содержит все одноточечные множества Y ; функции $y \mapsto f(x, y)$ должны быть измеримы относительно \mathcal{A} . В действительности, конкретный выбор \mathcal{A} не используются в доказательстве первой части теоремы, не опирающейся на предположение 3°. Поэтому в этой части, например, можно считать, что \mathcal{A} является σ -алгеброй всех не более чем счетных подмножеств Y ; условие измеримости выполняется тогда для любых функций, а речь идет только о дискретных распределениях.

⁸Т. е. функции вида $x \mapsto \sum_{i=1}^n p_i f(x, y_i)$ для любого $p = (p_1, \dots, p_n) \in S_{n-1}$, $n \geq 1$ и произвольных $y_i \in Y$, $i = 1, \dots, n$ квазивыпуклы; в частности, функции $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ являются квазивыпуклыми.

⁹Т. е. функции вида $x \mapsto \sum_{i=1}^n p_i f(x, y_i)$ для любого $p = (p_1, \dots, p_n) \in S_{n-1}$, $n \geq 1$ и произвольных $y_i \in Y$, $i = 1, \dots, n$ квазивыпуклы; в частности, функции $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ являются квазивыпуклыми.

Тогда имеет место равенство

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^m(Y)} \min_{x \in X} \int f(x, y) Q(dy), \quad (7.2.6)$$

3° Y — компактное хаусдорфово топологическое пространство, а функции $y \mapsto f(x, y)$ полунепрерывны сверху для всех x , то супремум в обеих частях (7.2.4) можно заменить на максимум.

Доказательство. Заметим, что для любого $x \in X$, $u \geq 0$ и $y_i \in Y$, $i = 1, 2, \dots, n+1$ функция

$$q = (q_1, \dots, q_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} q_i f(x, y_i), \quad q \in S_n,$$

является аффинной и непрерывной, а, по предположению 2° б) теоремы, выпуклая комбинация

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} q_i f(x, y_i), \quad x \in X,$$

является квазивыпуклой функцией, а также, как следствие предположения 2° а) теоремы, полунепрерывной снизу для любого $q \in S_n$. Применяя теорему Сайона [221, следствие 3.3]), получаем равенство:

$$\min_{x \in X} \max_{q \in S_n} \sum_{i=1}^{n+1} q_i f(x, y_i) = \max_{q \in S_n} \min_{x \in X} \sum_{i=1}^{n+1} q_i f(x, y_i). \quad (7.2.7)$$

Кроме того, очевидно,

$$\bigvee_{i=1}^{n+1} f(x, y_i) = \max_{q \in S_n} \sum_{i=1}^{n+1} q_i f(x, y_i). \quad (7.2.8)$$

В случае, когда $Y = \{y_1, \dots, y_{n+1}\}$, $n \geq 0$, причем $n \leq m$, очевидно, $\mathcal{P}^n(Y) = \mathcal{P}^m(Y)$; с учетом (7.2.7) и (7.2.8) получаем (7.2.4).

Если же Y содержит более чем $m+1$ элементов, прибегнем к доказанной лемме. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $y_1^\varepsilon, \dots, y_{m+1}^\varepsilon$ из Y , такие что

$$\min_{x \in X} \bigvee_{i=1}^{n+1} f(x, y_i^\varepsilon) \geq \left[\sup_{y_i^\varepsilon \in Y, \dots, y_{m+1}^\varepsilon \in Y} \min_{x \in X} \bigvee_{i=1}^{n+1} f(x, y_i) \right] - \varepsilon = W - \varepsilon, \quad (7.2.9)$$

где W задается формулой (7.2.1). Применим (7.2.7) для $n = m$, $y_i = y_i^\varepsilon$, $i = 1, \dots, m+1$ и заметим, что в правой части (7.2.7) максимум по q достигается для некоторого $q^\varepsilon \in S_m$. Обозначая $Q^\varepsilon = \sum_{i=1}^{m+1} q_i^\varepsilon \delta_{y_i^\varepsilon} \in \mathcal{P}^m(Y)$, получаем, с учетом (7.2.7), (7.2.8) и (7.2.9):

$$\min_{x \in X} \int f(x, y) Q^\varepsilon(dy) \geq W - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}^m(Y)} \min_{x \in X} \int f(x, y) Q(dy) \geq W;$$

обратное неравенство вытекает из неравенства, справедливого для любого распределения $Q \in \mathcal{P}^m(Y)$:

$$\min_{x \in X} \int f(x, y) Q^\varepsilon(dy) \leq \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = W,$$

поскольку среднее функции не превосходит ее супремума.

Если выполнено 3°, то в левой части (7.2.1) максимум достигается в силу предположения о компактности Y и полунепрерывности сверху функций $y \mapsto f(x, y)$.

В силу теоремы А.Д. Александрова¹⁰, для каждого $x \in X$ функция $Q \mapsto \int g(y) Q(dy)$ будет при сделанных в части 2° теоремы предположениях полунепрерывной сверху в слабой топологии на пространстве $\mathcal{P}(Y)$ всех вероятностных борелевских мер¹¹ на Y . Поскольку, в соответствии с леммой 7.2.2, множество $\mathcal{P}^m(Y) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ является компактным, то функция $Q \mapsto \int f(x, y) Q(dy)$ достигает максимального значения на $\mathcal{P}^m(Y)$. □

Замечание 7.2.1.

- 1) Предположение 2° б) теоремы 7.2.1 выполняется, например, в одномерном случае (когда $m = 1$), для $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ и семейства унимодальных функций $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ с общим минимизатором (т. е. когда существует аргумент $x^* \in [a, b]$, такой что при $x \leq x^*$ функции $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ невозрастающие, а при $x \geq x^*$ они неубывающие).
- 2) Условие выпуклости функций $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ достаточно для справедливости предположения 2° б) теоремы 7.2.1.
- 3) Если найдется числовая функция φ , строго монотонная и непрерывная, такая что композиция $\varphi \circ f$ удовлетворяет условиям из пункта 2 замечания, т. е. функция $x \mapsto \varphi(f(x, y))$ является выпуклой для всех $y \in Y$ (в частности, функции $x \mapsto f(x, y)$ будут квазивыпуклыми¹² для всех $y \in Y$), то

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^m(Y)} \min_{x \in X} \phi^{-1} \left(\int \phi(f(x, y)) Q(dy) \right),$$

¹⁰Теорема 2 в §16 статьи [74] (точнее, там речь идет о полунепрерывности снизу (сверху) функции, аргумент которой пробегает множество вероятностных мер, а значение функции — мера открытого (замкнутого) множества; однако, это легко обобщается на случай интеграла полунепрерывной функции, см., например, Теорему 9.1.5 в [245]).

¹¹Здесь естественно выбрать в качестве \mathcal{A} , области определения мер Q , борелевскую σ -алгебру; функции $y \mapsto f(x, y)$ будут измеримы благодаря их полунепрерывности сверху.

¹²Отметим, что квазивыпуклая функция не обязана быть представима в виде композиции строго монотонной числовой функции и выпуклой функции, что было впервые замечено Фенхелем [149].

- 4) Класс $\mathcal{P}^m(Y)$ не является выпуклым, если Y содержит более чем $m + 1$ точку.
- 5) Простой пример показывает, что только лишь квазивыпуклости функций $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ (а не условия 2° б) теоремы 7.2.1) недостаточно для справедливости результата (7.2.4), а также что условие из пункта 1 замечания о наличии общего минимизатора для семейства унимодальных функций $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ является существенным. Положим

$$f(x, y) = 4 - (x - y)^2, \quad x \in [-1, 1] = X, \quad y \in \{-1, 1\} = Y.$$

Здесь функции $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ квазивыпуклые и унимодальные (с единственными, но разными точками минимума). Легко проверить, что

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = 3,$$

но

$$\max_{Q \in \mathcal{P}(Y)} \min_{x \in X} \int f(x, y) Q(dy) = 2.$$

Для применения теоремы 7.2.1 в случае, когда множества $D_t(\cdot)$ компактны, достаточно выбрать

$$X = D_t(\cdot), \quad Y = K_t(\cdot), \quad f(h, y) = w_t(\cdot, y) - hy. \quad (7.2.10)$$

Применим теперь теорему 7.2.1 в случае отсутствия торговых ограничений, т. е. когда $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$.

Предложение 7.2.1. Пусть выполняется предположение об отсутствии торговых ограничений, а также предположение об отсутствии арбитражных возможностей NDAO. Предположим кроме того, что функции v_t^* в уравнениях (BI) полунепрерывны сверху¹³. Тогда для опционов американского, бермудского и европейского типов свойство оптимальности смешанных стратегий «рынка» достигается в классе риск-нейтральных вероятностей, таких что условные распределения приращений цен при известной предыстории цен сосредоточены не более чем в $n + 1$ точке.

Доказательство. Для опционов американского типа, бермудского типа и европейского типа уравнения (BI) могут быть записаны в сокращенной форме¹⁴, в виде уравнения (5.2.4); для удобства выпишем его еще раз:

$$v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot),$$

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot), \quad t = N, \dots, 1, \quad (7.2.11)$$

¹³ Достаточные условия для полунепрерывности сверху v_t^* , установлены в теореме 3.1.4 и в данном случае состоят в полунепрерывности сверху $K_t(\cdot)$, и полунепрерывности сверху $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$ (статические многозначные отображения $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$ автоматически полунепрерывны снизу).

¹⁴ Формально, как предложено в главе 1, $g_0 \equiv -\infty$, но, в силу неотрицательности $\rho_t(\cdot)$ для американских опционов, можно считать, что $g_0 \equiv 0$.

где $\rho_t(\cdot)$ задается посредством (5.2.1). При этом, в общем случае, значения функции $g_t(\cdot)$ в моменты времени t , когда по опциону возможны выплаты (для американского типа — во все моменты времени для бермудского — в некоторые фиксированные моменты времени, а для европейского — в момент экспирации) неотрицательны, а для остальных моментов времени (при отсутствии обязательств по выплатам) $g_t(\cdot) \equiv -\infty$. Однако условие безарбитражности NDAO влечет NDSA; кроме того, имеют место неравенства

$$C \geq \rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot) \geq 0, \quad (7.2.12)$$

где C задается (1.2.3). Из (7.2.11) и (7.2.12) следует $v_t^*(\cdot) \geq 0$, а функции $g_t(\cdot)$ во все моменты времени $t = 1, \dots, N$ можно формально считать неотрицательными, полагая для моментов времени с отсутствием обязательств по выплатам $g_t(\cdot) \equiv 0$ вместо $g_t(\cdot) \equiv -\infty$.

Далее нам потребуются результаты из параграфа 5.3; для удобства частично воспроизведем их здесь. Для начала заметим, что, не ограничивая общности¹⁵ можно считать компакты $K_t(\cdot)$ полноразмерными, т. е. не содержащимися в аффинном многообразии, размерности меньшим чем n . В таком случае $0 \in \text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$ и для некоторого $r > 0$ замкнутый шар $\bar{B}_r(0)$ радиуса r с центром в точке 0 , содержится в $\text{conv}(K_t(\cdot))$; максимальный радиус $r_t^*(\cdot)$ такого шара для полноразмерного случая задается формулой (4.2.17). Используя неотрицательность $v_t^*(\cdot)$, а значит и $w_t(\cdot)$, для выражения (5.2.1) имеет место оценка снизу

$$\begin{aligned} \varphi_{t,\cdot}(h) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy) = \\ &= \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \geq \\ &\geq \max_{y \in K_t(\cdot)} (-hy) = \sigma_{K_t(\cdot)}(-h) \geq r_t^*(\cdot) \|h\|. \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

Вместе с тем, справедливо неравенство

$$\inf_{h \in \mathbb{R}^n} \varphi_{t,\cdot}(h) = \rho_t(\cdot) \leq C. \quad (7.2.14)$$

Пусть¹⁶ $A \geq A_t^*(\cdot) = \frac{C}{r_t(\cdot)}$. Используя (7.2.13) и выбор числа A , заметим, что неравенство $\|h\| \geq A$ влечет неравенство $\varphi_{t,\cdot}(h) > C$. С учетом (7.2.14), отсюда следует, что для любого $A \geq A_t^*(\cdot)$

$$\inf_{h \in \mathbb{R}^n} \varphi_{t,\cdot}(h) = \inf_{h \in \bar{B}_A(0)} \varphi_{t,\cdot}(h).$$

¹⁵Условие NDAO равносильно $0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot)0))$, поэтому аффинная оболочка $K_t(\cdot)$ является линейным подпространством $L_t(\cdot)$; скалярное произведение hy для $y \in K_t(\cdot)$ совпадает с $h'y$, где h' — ортогональная проекция h на $L_t(\cdot)$.

¹⁶Здесь мы фиксируем момент времени t и предысторию цен, продолжая обозначать ее точкой.

В отличие от параграфа 5.3, где было использовано предложение 5.2.2, основанное на применении теоремы Кнезера об игровом равновесии, здесь мы используем теорему 7.2.1. Достаточно заметить, что функция¹⁷

$$f(h, y) = w_t(\cdot, y) - hy,$$

рассматриваемая ниже как функция выигрыша в антагонистической игре с нулевой суммой, удовлетворяет следующим свойствам.

- 1) Первый игрок — «хеджер» — выбирает чистые стратегии h на компактном выпуклом множестве $X = \bar{B}_A(0) \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, а второй игрок — «рынок» — выбирает смешанную стратегию, распределение¹⁸ Q на множестве $Y = K_t(\cdot)$, снабженном борелевской σ -алгеброй.
- 2) Функция выигрыша $f(h, y)$ такова, что для любого $y \in Y$ функции $h \mapsto f(h, y)$ являются аффинными (а значит, непрерывными).

Поэтому применима теорема 7.2.1, так что

- 1) имеет место равенство¹⁹

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^n(Y)} \min_{x \in X} \int f(x, y) Q(dy), \quad (7.2.15)$$

- 2) кроме того, поскольку Y компактно, а функции $y \mapsto f(x, y)$ полунепрерывны сверху для всех $x \in X$, то *supremum* в обеих частях (7.2.4) можно заменить на *maximum*.

Таким образом, имеет место равновесие для смешанного расширения $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$. Используя (5.2.9), и то, что опорная функция шара $\bar{B}_A(0)$ равна $A\|h\|$, имеем для любого $A \geq A_t^*(\cdot)$

$$\rho_t(\cdot) = \max_{Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))} \left[\int w_t(\cdot, y) Q(dy) - A\|m(Q)\| \right], \quad (7.2.16)$$

где $m(Q)$ обозначает барицентр меры Q , т. е. $m(Q) = \int y Q(dy)$. Выберем произвольное $A > A_t^*(\cdot)$ и пусть Q^A — распределение, на котором достигается максимум в (7.2.16) для этого A . Тогда для числа A' , удовлетворяющего неравенству $A > A' > A_t^*(\cdot)$, получаем

$$\left| \int w_t(\cdot, y) Q^A(dy) - A\|m(Q^A)\| \right| = \rho_t(\cdot) \geq \left| \int w_t(\cdot, y) Q^A(dy) - A'\|m(Q^A)\| \right|,$$

откуда $(A - A')\|m(Q^A)\| \leq 0$, а значит $\|m(Q^A)\| = 0$. Тем самым

$$\rho_t(\cdot) = \max_{Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot), \int y Q(dy) = 0)} \int w_t(\cdot, y) Q(dy), \quad (7.2.17)$$

¹⁷Здесь мы фиксируем время и предысторию цен.

¹⁸Распределение — синоним вероятностной меры.

¹⁹Напомним, что $\mathcal{P}^n(Y)$ — класс всех вероятностных мер на Y , сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке.

откуда и следует требуемое утверждение²⁰. □

7.3 Общая проблема моментов

Задача (7.1.2) относится к проблеме моментов²¹, что позволяет использовать соответствующие результаты этой теории, которые мы обсудим ниже.

Подчеркнем, что результат о том, что экстремум интеграла на классе вероятностных распределений с n моментными ограничениями можно искать среди дискретных распределений, сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точках, справедлив при весьма общих предположениях.

Пусть заданы числовые функции f_0, f_1, \dots, f_n с аргументом из множества X , причем эти функции измеримы относительно заданной σ -алгебры \mathcal{A} подмножеств X . Обозначим $\mathcal{P}(X)$ класс всех вероятностных мер на (X, \mathcal{A}) .

Проблема моментов является оптимизационной задачей следующего вида: найти точную верхнюю (или точную нижнюю) грань значений интеграла

$$\int f_0(x)\pi(dx) \quad (7.3.1)$$

для таких $\pi \in \mathcal{P}(X)$, что

$$\int f_j(x)\pi(dx) = z_j^*, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.3.2)$$

где z_j^* — заданные числа, $j = 1, \dots, n$; соответствующие значение точной верхней грани обозначим через $I(z^*)$. При этом предполагается, что для мер из рассматриваемого класса $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$ интегралы в (7.3.1), как минимум, определены или же конечны (в (7.3.2), разумеется, интегралы конечны).

Обозначим:

$$\begin{aligned} f(x) &= (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n; \\ z^* &= (z_1^*, \dots, z_n^*) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Пусть²²

$$\mathcal{P}^f(X) = \left\{ \int f d\pi : \pi \in \mathcal{P}(X), \int \|f\| d\pi < \infty \right\}. \quad (7.3.3)$$

Нам будет удобно обозначать

$$J(\pi) = \int f d\pi \quad (7.3.4)$$

²⁰Если в начальный момент времени цены фиксированы, то меры $Q_t^*(x)$, $t = 1, \dots, N$, на которых достигается максимум в (7.2.17), интерпретируемые как условные распределения приращений цен при условии что $X_{t-1} = x$, задают вероятностную меру \mathbb{P} , сосредоточенную на конечном числе траекторий и являющуюся риск-нейтральной (мартингальной). Таким образом, \mathbb{P} порождает полную модель рынка, см. [177], что позволяет использовать известные результаты стохастической финансовой математики для определения премии и хеджирующей стратегии.

²¹Эту задачу также называют проблемой Чебышёва—Маркова, поскольку задача, поставленная П. Л. Чебышёвым, решалась его учеником А. А. Марковым в диссертации [28].

²²Выбор нормы произволен, поскольку любые две нормы в \mathbb{R}^n эквивалентны. Интеграл Петтиса в \mathbb{R}^n можно понимать покоординатно.

линейный оператор, определенный на $\mathcal{P}^f(X)$ со значениями в \mathbb{R}^n . В силу постановки задачи, а именно, учитывая ограничения (7.3.2), будем рассматриваем только классы мер $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^f(X)$. При постановке задачи в проблеме моментов, разумно также предполагать, что система (7.3.2) совместима. Это равносильно условию²³

$$z^* \in J(\mathcal{Q}). \quad (7.3.5)$$

В противном случае можно формально считать, что $I(z^*) = -\infty$.

Обозначим

$$\begin{aligned} E(z) &= J^{-1}(\{z\}) \cap \mathcal{Q} = \left\{ \pi \in \mathcal{Q} : \int f d\pi = z \right\}, \\ V &= J(\mathcal{Q}), \\ V_{-\infty} &= \{z \in V : I(z) = -\infty\}, \\ V_{>-\infty} &= \{z \in V : I(z) > -\infty\}, \\ V_{+\infty} &= \{z \in V : I(z) = +\infty\}, \\ V_{\neq\infty} &= \{z \in V : I(z) \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

Предложение 7.3.1. Пусть \mathcal{Q} — непустой выпуклый подкласс $\mathcal{P}^f(X)$. Предположим, что интеграл $\int f_0 d\pi$ определен (конечный или бесконечный) для всех мер $\pi \in \mathcal{Q}$. Функция

$$I(z) = \sup_{\pi \in E(z)} \int f_0 d\pi, \quad z \in J(\mathcal{Q}) \quad (7.3.7)$$

является вогнутой²⁴. При этом множества $E(z)$, $V_{-\infty}$, $V_{>-\infty}$ и $V_{+\infty}$, заданные посредством (7.3.6), являются выпуклыми²⁵. Если множество $V_{-\infty}$ непусто, то $V_{>-\infty}$ содержится в его относительной границе²⁶, а если $V_{+\infty}$ непусто, то $V_{\neq\infty}$ содержится в его относительной границе.

Доказательство. Если допустить, что в классе \mathcal{Q} найдутся меры π_1 и π_2 , такие что $\int f_0 d\pi_1 = +\infty$ и $\int f_0 d\pi_2 = -\infty$, то для нетривиальной смеси π этих мер, т. е. для их выпуклой комбинации вида $\pi = q_1\pi_1 + q_2\pi_2 \in \mathcal{Q}$, где $q_1, q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = 1$, интеграл $\int f_0 d\pi$ не определен, что противоречит условиям предложения. Тем самым, если бесконечное значение интеграла $\int f_0 d\pi$ для $\pi \in \mathcal{Q}$ входит в число

²³Здесь $J(\mathcal{Q})$ — образ \mathcal{Q} при отображении J , задаваемом посредством (7.3.4).

²⁴Вогнутая функция I определяется как в книге [40] — функция может принимать бесконечные значения $+\infty$ и $-\infty$, и может считаться заданной на всем пространстве \mathbb{R}^n , используя продолжение, равное $-\infty$ вне ее (выпуклой) области определения; для такого продолжения подграф (гипограф) функции $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y \leq I(x)\}$ должен быть выпуклым подмножеством \mathbb{R}^{n+1} .

²⁵Считая пустое множество выпуклым.

²⁶В частности, выпуклое подмножество $V_{>-\infty}$ границы выпуклого множества $V_{-\infty}$ имеет меньшую, чем $V_{-\infty}$ размерность [40, следствие 6.3.3]. По теореме 11.6 [40], примененной к замыканию $\bar{V}_{-\infty}$ множества $V_{-\infty}$ и к $V_{>-\infty} \subseteq \bar{V}_{-\infty}$, найдется опорная к $\bar{V}_{-\infty}$ (а значит и к $V_{>-\infty}$) гиперплоскость, содержащая $V_{>-\infty}$.

возможных значений, то только одно: либо $-\infty$, либо $+\infty$. Обозначим

$$\mathcal{Q}_{-\infty} = \left\{ \pi \in \mathcal{Q} : \int f_0 d\pi = -\infty \right\},$$

$$\mathcal{Q}_{+\infty} = \left\{ \pi \in \mathcal{Q} : \int f_0 d\pi = +\infty \right\},$$

$$\mathcal{Q}_{\neq\infty} = \left\{ \pi \in \mathcal{Q} : \int |f_0| d\pi < +\infty \right\}.$$

Эти три множества мер являются выпуклыми, попарно не пересекаются и в объединении дают \mathcal{Q} , причем как минимум одно из множеств $\mathcal{Q}_{-\infty}$ и $\mathcal{Q}_{+\infty}$ является пустым. Отметим, что для выпуклого класса $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{P}^f(X)$ множество $J(\mathcal{Q}')$ является выпуклым. Выпуклость множества $E(z)$ очевидна.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{Q}_{-\infty} \neq \emptyset$ (тогда автоматически $\mathcal{Q}_{+\infty} = \emptyset$). Если $\mathcal{Q}_{\neq\infty} = \emptyset$ то²⁷ $I(z) \equiv -\infty$. Если же $\mathcal{Q}_{\neq\infty} \neq \emptyset$, то $I(z) = -\infty$ когда $E(z) \subseteq \mathcal{Q}_{-\infty}$ и $I(z) > -\infty$ когда $E(z) \cap \mathcal{Q}_{\neq\infty} \neq \emptyset$. Заметим, что множества $V_{-\infty}$ и $V_{>-\infty} = J(\mathcal{Q}_{\neq\infty}) \neq \emptyset$ являются выпуклыми, непересекающимися и в объединении дают V . Если при этом $V_{-\infty} \neq \emptyset$, то $V_{>-\infty}$ содержится в относительной границе $V_{-\infty}$. В самом деле, если $z \in V_{>-\infty}$ и $z' \in V_{-\infty}$, то для $\pi \in E(z')$ имеем $\int f_0 d\pi = -\infty$, а для $\pi \in E(z)$ имеем $\int |f_0| d\pi < +\infty$, так что выбирая числа $q \geq 0$ и $q' > 0$, $q + q' = 1$ получаем, что выпуклая комбинация $qz + q'z' \in V_{-\infty}$.

Далее, достаточно проверить вогнутость функции I на выпуклом множестве $V_{>-\infty} \neq \emptyset$. Функция I может принимать на этом множестве значения из $(-\infty, +\infty]$; соответственно, множество $V_{>-\infty}$ можно представить в виде объединения двух непересекающихся множеств: $V_{+\infty}$ и $V_{\neq\infty}$.

Если $V_{\neq\infty} = \emptyset$, то $I(z) \equiv +\infty$, то вогнутость²⁸ имеет место. Предположим, что $V_{\neq\infty} \neq \emptyset$.

Выберем произвольные точки $z_1 \in V_{>-\infty}$ и $z_2 \in V_{>-\infty}$ и их выпуклую комбинацию $z = q_1 z_1 + q_2 z_2 \in V_{>-\infty} = J(\mathcal{Q}_{\neq\infty})$, где $q_1, q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 = 1$.

Пусть $V_{\neq\infty} \neq \emptyset$, но $V_{+\infty} = \emptyset$. Тогда $z_1 \in V_{\neq\infty}$ и $z_2 \in V_{\neq\infty}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся вероятностные меры $\pi_1 \in E(z_1)$ и $\pi_2 \in E(z_2)$, такие что $\int |f_0| d\pi_1 < +\infty$, $\int |f_0| d\pi_2 < +\infty$ и выполняются неравенства

$$\int f_0 d\pi_1 \geq I(z_1) - \varepsilon,$$

$$\int f_0 d\pi_2 \geq I(z_2) - \varepsilon.$$

Тогда для меры π , равной смеси π_1 и π_2 с весами q_1 и q_2 , т. е. для $\pi = q_1 \pi_1 + q_2 \pi_2$, имеем

$$\int f d\pi = q_1 z_1 + q_2 z_2 = z,$$

²⁷Такая вогнутая функция, в терминологии книги [40], является несобственной, с пустой эффективной областью.

²⁸Такая вогнутая функция, в терминологии книги [40], является несобственной.

т. е. $\pi \in E(z)$ и

$$I(z) \geq \int f_0 d\pi \geq q_1 I(z_1) + q_2 I(z_2) - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем неравенство

$$I(q_1 z_1 + q_2 z_2) \geq q_1 I(z_1) + q_2 I(z_2). \quad (7.3.8)$$

Если же $V_{\neq\infty} \neq \emptyset$ и $V_{+\infty} \neq \emptyset$, и хотя бы одно из чисел $I(z_1)$ и $I(z_2)$ обращается в $+\infty$, например $I(z_1) = +\infty$, то для сколь угодно большого числа a найдется мера $\pi_1 \in E(z_1)$, такая что $I(z_1) \geq a$. Фиксируем какую-нибудь меру $\pi_2 \in E(z_2) \neq \emptyset$; тогда для смеси $\pi = q_1 \pi_1 + q_2 \pi_2$, где $q_1 > 0$, $q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 = 1$ имеем $\pi \in E(z)$ и

$$\int f_0 d\pi = q_1 \int f_0 d\pi_1 + q_2 \int f_0 d\pi_2 \geq q_1 a + q_2 \int f_0 d\pi_2.$$

В силу произвольности a имеем $I(z) = +\infty$ и неравенство (7.3.8) обращается в равенство. Тем самым, множества $V_{+\infty}$ является выпуклым, а множество $V_{\neq\infty}$ содержится в его в относительной границе²⁹.

Рассмотрение случая, когда $Q_{-\infty} = \emptyset$ вполне аналогично представленным выше рассуждениям при доказательстве вогнутости функции I на выпуклом множестве $V_{>-\infty} \neq \emptyset$. \square

Замечание 7.3.1.

- 1) Достаточные условия, для того чтобы функция I не принимала значение $-\infty$, т. е. чтобы $Q_{-\infty} = \emptyset$ можно сформулировать в виде требований к функции f_0 : достаточно, чтобы нашлись константы $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$, такие что

$$f_0(x) \geq \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) + \alpha_{n+1}.$$

- 2) Достаточное условие для $Q_{-\infty} = \emptyset$ можно сформулировать и в виде требований к классу \mathcal{Q} : например, можно выбрать $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^*(X)$, где $\mathcal{P}^*(X)$ — класс всех вероятностных мер с конечным носителем. Заодно получаем, что такой класс \mathcal{Q} — выпуклый подкласс $\mathcal{P}^f(X)$ и что интеграл $\int f_0 d\pi$ конечен для всех мер $\pi \in \mathcal{Q}$.

- 3) Достаточные условия, для того чтобы функция I не принимала значение $+\infty$, можно сформулировать в виде требований к функции f_0 , аналогично пункту 1) замечания: достаточно, чтобы нашлись константы $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$, такие что

$$f_0(x) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) + \alpha_{n+1}.$$

²⁹При этом множество $V_{\neq\infty}$ не обязано быть выпуклым, см. пример ниже.

Пример 7.3.1. Приведем пример, иллюстрирующий предложение 7.3.1.

Рассмотрим три пространства: $X_1 = [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, $X_2 = [0, +\infty)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ и $X = X_1 \times X_2 = [0, +\infty)^3 \subseteq \mathbb{R}^3$, каждое снабженное соответствующей борелевской σ -алгеброй. На X_1 зададим семейство вероятностных мер \mathcal{Q}_1 представимых виде смеси $q\delta_0 + (1-q)\pi'$, где $q \in [0, 1]$, а π' — произвольная вероятностная мера на $[0, 1]$, такая что $0 < \int x \pi'(dx) < +\infty$, $\int x^2 \pi'(dx) = +\infty$. На X_2 зададим семейство всех вероятностных мер \mathcal{Q}_2 . На $X = X_1 \times X_2$ зададим семейство вероятностных мер \mathcal{Q} , с маргинальными распределениями $A \mapsto \pi(A \times [0, +\infty)^2)$ из семейства мер \mathcal{Q}_1 и $B \mapsto \pi([0, +\infty) \times B)$ из семейства мер \mathcal{Q}_2 . Семейство вероятностных мер \mathcal{Q} является непустым³⁰ и выпуклым. Функцию f_0 выберем в виде $f_0(x) = x_1 x_2 - x_3^2$, где $(x_1, x_2, x_3) \in [0, +\infty)^3$. В данном примере, для класса \mathcal{Q} и функции f_0 получаем: $V_{-\infty} = (0, +\infty) \times [0, +\infty)^2$, $V_{>-\infty} = \{0\} \times [0, +\infty)^2$, $V_{+\infty} = \{0\} \times (0, +\infty)^2$ и $V_{\neq\infty} = \{0\} \times \{0\} \times (0, +\infty) \cup \{0\} \times (0, +\infty) \times \{0\} \cup \{(0, 0, 0)\}$. Отметим, что множество $V_{\neq\infty}$ в данном примере не является выпуклым.

Нас будет интересовать классы \mathcal{Q} — выпуклые подклассы $\mathcal{P}^f(X)$, удовлетворяющие дополнительному условию: \mathcal{Q} содержит все вероятностные меры, сосредоточенные в одной точке³¹. Поскольку класс $\mathcal{P}^*(X)$ всех вероятностных мер, сосредоточенных в конечном множестве точек из X , является минимальным классом с таким свойством, то данное условие можно записать в виде

$$\mathcal{Q} \supseteq \mathcal{P}^*(X) \quad (7.3.9)$$

При предположении (7.3.9) достаточное условие совместности (7.3.2), очевидно, состоит в том, чтобы выполнялось условие

$$z^* \in \text{conv}(f(X)); \quad (7.3.10)$$

в этом случае найдется выпуклая комбинация $\sum_{i=1}^k q_i y^i = z^*$, $k \geq 1$, где $y^i \in f(X)$, $i = 1, \dots, k$, так что для некоторых $x^i \in X$ имеем $y^i = f(x^i)$, $i = 1, \dots, k$. Тем самым

$$z^* = \sum_{i=1}^n q_i f(x^i) = \int f d\pi^*$$

для

$$\pi^* = \sum_{i=1}^k q_i \delta_{x^i}, \quad q = (q_1, \dots, q_k) \in S_{k-1},$$

где

$$S_{n-1} = \left\{ (p_1, \dots, p_n) : \sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

При этом, по теореме Каратеодори, можно выбрать количество точек k не превосходящим $n + 1$.

³⁰Например, в \mathcal{Q} входят прямые произведения мер из \mathcal{Q}_1 и \mathcal{Q}_2 .

³¹Хотя такие меры (меры Дирака) определены на классе всех подмножеств X , однако может быть удобным рассмотрение мер на фиксированном измеримом пространстве (X, \mathcal{A}) . В этом случае естественно потребовать, чтобы все одноточечные множества входили бы в \mathcal{A} .

Нетривиальный результат, справедливый без каких-либо дополнительных предположений, состоит в том, что условие (7.3.10) является также и необходимым для совместности системы (7.3.2). Соответствующая теорема доказана³² в работе [212, теорема 2]; схожие результаты были получены практически одновременно и независимо в работах [210] и [200]. Тогда упомянутые выше результаты можно записать в виде следующего утверждения³³:

Теорема 7.3.1. (Рогозинский—Рихтер—Мулхолланд—Роджерс)

$$J(\mathcal{P}^f(X)) = J(\mathcal{P}^n(X)). \quad (7.3.11)$$

Для \mathcal{Q} — выпуклого подкласса $\mathcal{P}^f(X)$, удовлетворяющего условию (7.3.9) имеют место включения

$$\mathcal{P}^f(X) \supseteq \mathcal{Q} \supseteq \mathcal{P}^*(X) \supseteq \mathcal{P}^n(X)$$

В качестве следствия теоремы Рогозинского—Рихтера—Мулхолланда—Роджерса получаем, что в этом случае

$$J(\mathcal{Q}) = J(\mathcal{P}^n(X)). \quad (7.3.12)$$

Отметим, что по теореме Каратеодори

$$J(\mathcal{P}^n(X)) = \text{conv}(f(X)).$$

Предположим теперь, что интеграл $\int f_0 d\pi$ является конечным для всех мер $\pi \in \mathcal{Q}$. Применим теперь (7.3.12) не к функции f , а к векторной функции \tilde{f} , значения которой получаются из функции f добавлением одной координаты:

$$\hat{f}(x) = (f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Тогда для $z \in \text{conv}(f(X))$ и $\pi \in E(z)$ имеем

$$\int \tilde{f} d\pi = \left(\int f_0 d\pi, z \right) \in \text{conv}(\tilde{f}(X)) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Тем самым найдутся x_1, \dots, x_k из X , такие что

$$\int \tilde{f}(x) d\pi = \int \tilde{f}(x) d\pi^*,$$

где $\pi^* = \sum_{i=1}^k q_i \delta_{x_i}$, $q = (q_1, \dots, q_k) \in S_{k-1}$, $k \geq 1$.

Тем самым, получаем следующее утверждение.

³²Несмотря на то, что теорема в этой работе доказывается для X , являющегося интервалом на вещественной прямой \mathbb{R} , как отмечает во введении сам автор, многие из рассуждений сохраняют силу для общего измеримого пространства. И в действительности, доказательство [212, теорема 1], из которой легко следует теорема 2, никак не использует специфику X .

³³Напомним, что $\mathcal{P}^n(X)$ является классом всех вероятностных мер, сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке из X .

Предложение 7.3.2. Задачу оптимизации (7.3.7) с моментными ограничениями, для выпуклого класса мер $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^f(X)$, такого что $\int |f_0| d\pi < \infty$ для всех мер $\pi \in \mathcal{Q}$ и удовлетворяющего условию (7.3.9), достаточно решать в классе мер $\mathcal{P}^*(X)$, сосредоточенных в конечном числе³⁴ точек X .

На самом деле, достаточно ограничиться классом $\mathcal{P}^n(X)$ мер, сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке из X , что, например, вытекает из следующих рассуждений. Рассмотрим оптимизационную задачу (7.3.7) для выпуклого класса мер $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^f(X)$, удовлетворяющие условиям предложения 7.3.2 и выберем $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^*(X)$. Обозначим

$$E^*(z^*) = \left\{ \pi \in \mathcal{P}^*(X) : \int f d\pi = z^* \right\}, \quad (7.3.13)$$

предполагая выполненным условие (7.3.10). Таким образом, требуется найти $q = (q_1, \dots, q_k) \in S_{k-1}$, $k \geq 1$.

$$I(z^*) = \sup_{\pi \in E^*(z^*)} \int f_0(x) \pi(dx) = \sup_{\substack{k=1,2,\dots \\ x^1, \dots, x^k \in X}} \left[\max_{q \in L_k^n(x^1, \dots, x^k; z^*)} \sum_{i=1}^k q_i f_0(x^i) \right],$$

$$L_k^n(x^1, \dots, x^k; z^*) = \left\{ q \in S_{k-1} : \sum_{i=1}^k q_i f_j(x^i) = z_j^*, j = 1, \dots, n \right\}. \quad (7.3.14)$$

Максимизация выражения в квадратных скобках равенства (7.3.14) есть стандартная задача линейного программирования. Хорошо известный «фольклорный» результат из теории линейного программирования заключается в том, что решение задачи

$$\max_{p_1, \dots, p_k} \sum_{i=1}^k p_i f_0(x^i) \quad (7.3.15)$$

при условиях:

$$\begin{cases} p_i \geq 0, & i = 1, \dots, k, \\ \sum_{i=1}^k p_i = 1, \\ \sum_{i=1}^k p_i f_j(x^i) = z_j^*, & i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (7.3.16)$$

достаточно искать среди векторов p , у которых не более чем $n + 1$ ненулевых компонент p_i (см., например, [11, глава II, §11, теорема VIII]).

Идея доказательства заключается в том, что множество допустимых значений $p = (p_1, \dots, p_k)$, удовлетворяющих ограничениям (7.3.16), в данном случае является ограниченным, и поэтому оно также является компактным выпуклым множеством (более того, многогранником), а решение задачи (7.3.15) достигается в крайних точках этого множества. Это следствие теоремы Штейница

³⁴Равенство (7.3.11), примененное не к f , а к \tilde{f} , позволяет свести число точек носителя меры, необходимой для решения оптимизационной задачи, до $n + 2$. Отметим, что аналогичным способом может быть получен результат [89, теорема 5.1].

для конечномерных пространств, см. [243]: каждая точка выпуклого компакта является выпуклой комбинацией крайних точек этого компакта.³⁵

При этом у крайней точки не может быть более $n + 1$ ненулевых компонент. В самом деле, если бы у крайней точки имелось $l > n + 1$ ненулевых компонент $p_i > 0, \dots, p_l > 0$, то поскольку однородная линейная система из $n + 1$ уравнений:

$$\sum_{m=1}^l u_{im} = 0,$$

$$\sum_{m=1}^l u_{im} f_i(x^{im}) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

имеет нетривиальное решение, при этом вектор $(u_{i1}, \dots, u_{il}) \neq 0$ можно выбрать сколь угодно близким нулевому вектору. Тогда, выбрав достаточно малое решение и положив $u_i = 0$ для $i \notin \{i_1, \dots, i_l\}$, получим, что для вектора $u = (u_1, \dots, u_n)$ вектора $p + u$ и $p - u$ также удовлетворяют ограничениям, из чего следует, что $p = \frac{1}{2}(p + u) + \frac{1}{2}(p - u)$, т. е. p не является крайней точкой.

Здесь уместно привести несколько релевантных результатов, касающихся описания крайних точек множество вероятностных мер с моментными ограничениями. Наиболее общий результат такого типа представлен в статье Уинклера, однако для наших целей достаточно частного случая³⁶ — следствия этой теоремы, когда пространство является польским.

Теорема (Уинклер). Пусть X — польское пространство с борелевской σ -алгеброй \mathcal{B} . Крайними точками для множества всех вероятностных мер из $\mathcal{P}(X)$, удовлетворяющих моментным ограничениям (7.3.2), будут меры $Q \in \mathcal{P}^n(X)$, удовлетворяющие условию:

$$\text{если } \text{supp}(Q) = \{x_1, \dots, x_k\}, \text{ где } k \leq n + 1,$$

то векторы $(f_1(x_i), \dots, f_n(x_i), 1)$, $i = 1, \dots, k$ линейно независимы. (L1)

Аналогичный результат был доказан ранее в работе Карра [182, теорема 2.1], при дополнительном предположении, что функции f_1, \dots, f_n являются ограниченными непрерывными, а X — компактное метрическое пространство. Обозначим

$$f_{n+1} = I_X, \quad (7.3.17)$$

³⁵На этот результат часто ссылаются как на теорему Крейна—Мильмана [187], которая является обобщением теоремы Штейница на бесконечномерный случай. Однако в теореме Крейна—Мильмана выпуклый компакт (в нормированном пространстве) принадлежит замыканию выпуклой оболочки крайних точек этого компакта. Интересно, что работа Крейна и Мильмана [187] появилась в 1940 году, практически одновременно с работой Канторовича 1939 года [22], где впервые были предложены практические приложения линейного программирования.

³⁶В общем случае, в этой теореме рассматривается класс вероятностных мер, образующий симплекс, в смысле определения из книги [64], см. §9 главы 9, крайними точками которого являются меры Дирака (т. е. сосредоточенные в одной точке).

где I_A — индикатор множества A (т. е. функция f_{n+1} тождественно равна единице). В теореме 2.2 из этой работы, являющейся следствием теоремы 2.1, делается более сильное предположение относительно функций фигурирующих в моментных ограничениях, а именно, предполагается что для любого множества $\{x_1, \dots, x_{n+1}\} \subseteq X$ матрица с элементами $f_i(x_j)$ ($i = 1, \dots, n+1; j = 1, \dots, n+1$) является невырожденной. В этом случае крайними точками будут являться меры, сосредоточенные не более чем в $n+1$ одной точке³⁷. Отметим, что результат [182, теорема 2.2] был получен значительно раньше, в работе Карлина [180, теорема 5], однако автор не ссылается на эту статью.

Обозначим теперь

$$E^m(z) = \left\{ \pi \in \mathcal{P}^m(X) : \int f d\pi = z \right\}. \quad (7.3.18)$$

Полезные для решения уравнений Беллмана на первом из двух предложенных выше этапов (т. е. для задачи (7.1.2)) результаты из общей теории проблемы моментов можно резюмировать в виде двух предложений следующим образом.

Предложение 7.3.3.

- 1) Система ограничений (7.3.2) совместна тогда и только тогда, когда выполнено (7.3.10).
- 2) Для совместной системы ограничений (7.3.2) точная верхняя грань интеграла (7.3.1) на выпуклом классе мер $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^f(X)$, таком что $\int |f_0| d\pi < \infty$ для всех мер $\pi \in \mathcal{Q}$ и удовлетворяющем условию (7.3.9), может быть найден в классе вероятностных мер $\mathcal{P}^n(X)$, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке X , т. е.

$$I(z^*) = \sup_{\pi \in E^n(z^*)} \int f_0(x) \pi(dx), \quad (7.3.19)$$

где $E^n(z^*)$ задано при помощи (7.3.18).

При дополнительных предположениях, касающихся топологических свойств, полезным для наших целей является следующее утверждение.

Предложение 7.3.4. Пусть X — компактное топологическое пространство, а функции f_1, \dots, f_n непрерывны³⁸, то $E^n(z^*)$ компактно в слабой топологии на пространстве мер $\mathcal{P}(X)$. Если, кроме того, функция f_0 полунепрерывна сверху и ограничена сверху, то для любого $z \in \text{conv}(f(X))$ в (7.3.19) достигается максимум для некоторой меры $\pi^{(z)} \in E^n(z) \subseteq \mathcal{P}^n(X)$, удовлетворяющей условию (Л), а функция I полунепрерывна сверху на $\text{conv}(f(X))$.

³⁷При условиях этой теоремы крайними точками могут являться меры, сосредоточенные менее чем в $n+1$ одной точке.

³⁸Отметим, что благодаря непрерывности f и компактности X множество $f(X)$ компактно, а значит компактно и множество $\text{conv}(f(X))$. Кроме того, в соответствии с [256, теорема 2.1, пункт (b)], крайние точки множества всех регулярных нормированных (вероятностных) мер на X , удовлетворяющих ограничениям (7.3.2), содержатся в $\mathcal{P}^n(X)$.

Доказательство. Нетрудно видеть что благодаря непрерывности f множество $E^n(z)$ определяемое соотношением (7.3.18) является компактным в слабой топологии³⁹ для любого $z \in \text{conv}(f(X))$. По теореме Александрова функция $\pi \mapsto \int f_0 d\pi$ полунепрерывна сверху на $E^n(z)$ и потому достигает максимума для некоторой меры $\pi^{(z)} \in E^n(z)$.

Рассмотрим направленность z_α точек $\text{conv}(f(X))$, сходящуюся к точке $z^* \in \text{conv}(f(X))$. Пусть $a \in \mathbb{R}$ — предельная точка направленности $I(z_\alpha)$; выделим поднаправленность z'_β , такую что $I(z'_\beta)$ сходится к a . Поскольку $\mathcal{P}^n(X)$ компактно в слабой топологии, можно выделить из $\pi^{(z'_\beta)}$ сходящуюся к некоторой мере $\pi^* \in \mathcal{P}^n(X)$ поднаправленность $\pi^{(z''_\gamma)}$, причем $\int f d\pi^{(z''_\gamma)} \rightarrow \int f d\pi^* = z^*$ в силу непрерывности f .

Пусть теперь f_0 полунепрерывна сверху и ограничена снизу. По теореме Александрова верхний предел $I(z''_\gamma) = \int f_0 d\pi^{(z''_\gamma)}$, равный a , не превосходит $\int f_0 d\pi^*$, что, в свою очередь, не превосходит $I(z^*)$, учитывая (7.3.19). В силу произвольности a получаем полунепрерывность сверху функции I в точке z^* . \square

В качестве следствия пунктов 1) и 2) замечания получаем следующее утверждение, уточняющее предложение 5.2.2, теорему 5.3.1 и предложение 5.2.3, а именно, класс смешанных стратегий «рынка» можно сузить до $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ — класса всех распределений на $K_t(\cdot)$, сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке.

Теорема 7.3.2.

- 1° Пусть для $t \in [1, N]$ множества⁴⁰ $D_t(\cdot)$ компактны. Тогда для класса $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ имеет место равновесие (5.2.6). При этом точная нижняя грань в (BI) достигается для некоторого $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$.
- 2° В случае отсутствия торговых ограничений, т. е. когда $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, в предположении отсутствия арбитражных возможностей NDAO, имеет место равновесие (5.2.6), причем точная нижняя грань в (BI) достигается для некоторого $h_t^*(\cdot)$, и для $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ выполняется равенство⁴¹

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)), \int y Q(dy) = 0} \int w_t(\cdot, y) Q(dy). \quad (7.3.20)$$

³⁹Слабейшая топология на $\mathcal{P}(X)$, в которой непрерывны функции $\pi \mapsto \int f d\pi$ для непрерывных на X числовых функций.

⁴⁰Напомним, что мы предлагаем, что множества $D_t(\cdot)$ выпуклы и содержат точку 0.

⁴¹Равенство (7.3.20) можно интерпретировать следующим образом: оптимальное поведение «рынка» можно ограничить классом распределений, при котором цены образуют мартингал, а условные распределения приращений цен сосредоточены в конечном числе точек (на самом деле, можно показать, что достаточно рассматривать распределения приращений цен, сосредоточенные не более чем в $n + 1$ точке). Тем самым, получаем игровую интерпретацию риск-нейтральных мер, как наиболее неблагоприятных при отсутствии торговых ограничений (см. обсуждение экономической интерпретации в [235]).

3° Пусть выполняется условие (USC) (полунепрерывность сверху целевых функций $v_t^*(\cdot)$ для $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$)⁴² и выполняется условие (B) (ограниченность сверху функций выплат).

Тогда для $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$

- а) имеет место равновесие (5.2.6) с классом $\mathcal{P}_t(\cdot)$ равным⁴³ $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$, причем в этом случае точная верхняя грань в (7.1.1) достигается для некоторого $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$;
- б) если при этом $D_t(\cdot)$ компактно, то значение игры достигается для некоторой седловой точки — оптимальной пары $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ и значение игры конечно.

Доказательство. С использованием результатов главы 5 — предложений 5.2.2 и 5.2.3, пункты 1°, 2° и 3° вытекают из приведенных выше рассуждений о характере решений общей проблемы моментов, применительно к решению задачи (7.1.2) на этапе 1. В пункте 3° также следует использовать слабую компактность классов $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$, $t = 1, \dots, N$. \square

Вернемся снова к проблеме моментов (7.3.1), (7.3.2) и будем предполагать, что система (7.3.2) совместна. Напомним, что мы ввели функцию f_{n+1} посредством (7.3.17); очевидно $\int f_{n+1} d\pi = 1$ для всех $\pi \in \mathcal{P}(X)$. Отметим, что фактически проблему моментов для вероятностных мер можно сформулировать как частный случай проблемы моментов для произвольных мер, когда требуется найти *supremum* (или *infimum*)

$$\int f_0 d\mu$$

при условиях

$$\begin{cases} \int f_j d\mu = z_j^*, & j = 1, \dots, n; \\ \int f_{n+1} d\mu = 1. \end{cases} \quad (7.3.21)$$

Предположим, что функция f_{n+1} не выражается линейно через f_j , $j = 1, \dots, n$; это равносильно $\text{rang}(f_1, \dots, f_n, f_{n+1}) = \text{rang}(f_1, \dots, f_n) + 1$, где $\text{rang}(\cdot)$ обозначает ранг системы функций (в смысле линейной алгебры). Пусть $\text{rang}(f_1, \dots, f_n, f_{n+1}) = k + 1 \leq n + 1$, тогда найдутся индексы j_1, \dots, j_k , такие что функции f_{j_1}, \dots, f_{j_k} линейно независимы и для $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$

$$f_j = \sum_{m=1}^k \alpha_{jm} f_{j_m} + \alpha_{n+1} f_{n+1}.$$

Это означает, что для таких j условия $\int f_j d\mu = z_j^*$ являются следствием условий (7.3.21) с $k + 1$ ограничениями с функциями f_j , отвечающими индексам

⁴²Достаточные условия полунепрерывности сверху функций v_t^* приведены в главе 3, теорема 3.1.4.

⁴³Здесь $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$ — множество всех вероятностных мер на $K_t(\cdot)$ с борелевской σ -алгеброй.

$j \in \{j_1, \dots, j_k, n+1\}$, поскольку автоматически для $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$

$$\int f_j d\mu = \sum_{m=1}^k \alpha_{j_m} z_j^* + \alpha_{n+1}.$$

Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что f_1, \dots, f_{n+1} линейно независимы,⁴⁴ что соответствует невырожденности $f(X) \subseteq \mathbb{R}^n$, в том смысле, что размерность аффинной оболочки $f(X)$ равна n , т. е. $f(X)$ не содержится в какой-либо гиперплоскости.⁴⁵ Это также равносильно тому, что $\text{conv}(f(X))$ имеет непустую внутренность; если это условие выполняется, будем говорить, что имеет место случай общего положения.

По аналогичным соображениям разумно предполагать, что f_0 не выражается линейно через f_1, \dots, f_n, f_{n+1} . В противном случае $\int f_0 d\pi$ принимает постоянное значение на $E(z^*)$ (тем самым задача вырождается), поскольку тогда найдется вектор $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, такой что $f_0(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f_j(x)$ для всех $x \in X$, откуда

$$I(z^*) = \int f_0 d\pi = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j^* + \lambda_{n+1}$$

для всех мер $\pi \in \mathcal{P}(X)$, таких что $\int \|f\| d\pi < \infty$.

Опишем теперь метод, восходящий к Маркову, который позволяет зачастую решать проблему моментов при помощи рассуждений геометрического характера. Рассмотрим случай общего положения (когда $\text{conv}(f(X))$ имеет непустую внутренность). Предположим, что для выпуклого класса мер \mathcal{Q} , фигурирующего в (7.3.7), выполняются условия предложения (7.3.2). Кроме того, предположим⁴⁶, что $I(z) < +\infty$ для $z \in \text{conv}(f(X))$. Обозначим через B подграфик (гипограф) функции I :

$$B = \{(z, z_0) : z_0 \leq I(z), z \in \text{conv}(f(X))\}.$$

По предложению 7.3.1 функция I вогнута, а значит подграфик B — выпуклое подмножество \mathbb{R}^{n+1} , имеющее непустую внутренность (для случая общего положения). Предположим, что $I(z) < \infty$ для всех $z \in \text{conv}(f(X))$, тогда точки $(z, I(z))$, где $z \in \text{conv}(f(X))$, являются граничными точками B , поэтому в каждой такой точке можно построить опорную гиперплоскость⁴⁷ L_z вида:

$$L_z = \left\{ (z_0, z) : \sum_{j=0}^n \beta_j z_j = \gamma \right\}. \quad (7.3.22)$$

⁴⁴Для этого, разумеется, необходимо, чтобы X содержало не менее $n+1$ точек.

⁴⁵Если $f(X)$ содержится в некоторой гиперплоскости, найдутся $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ и $\beta \in \mathbb{R}$, такие что $\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) = \beta$ для всех $x \in X$. Это означает, что $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f_j = 0$ для $\lambda_j = \alpha_j$, где $j = 1, \dots, n$, и $\lambda_{n+1} = -\beta$, т. е. f_1, \dots, f_{n+1} линейно зависимы. Обратно, если $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f_j = 0$ для некоторого вектора $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, то $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, т.к. в противном случае λ_{n+1} также обращается в ноль, так что достаточно выбрать $\alpha_i = \lambda_i$, где $i = 1, \dots, n$, и $\beta = -\lambda_{n+1}$.

⁴⁶Достаточное условие приведено в пункте 3) замечания 7.3.1.

⁴⁷См., например, [40, теорема 11.6].

Нас будет интересовать случай, когда в (7.3.22) выполнено $\beta_0 \neq 0$; тогда, обозначая

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta_0}, \quad \alpha_j = -\frac{\beta_j}{\beta_0}, \quad j = 1, \dots, n,$$

имеем

$$L_z = \left\{ (z_0, z) : \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j + \alpha_{n+1} = z_0 \right\}. \quad (7.3.23)$$

Достаточным условием для $\beta_0 \neq 0$ в формуле (7.3.22) является условие⁴⁸ $z \in \text{int}(\text{conv}(f(X)))$, где $\text{int}(\cdot)$ обозначает внутренность множества.

Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ следующие утверждения равносильны:

- 1) Вектор α определяется равенством из (7.3.23), где L_z — опорная к B в точке $(I(z), z)$ гиперплоскость;
- 2) Имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j z_j + \alpha_{n+1} \geq I(z) \text{ для всех } z \in \text{conv}(f(X)); \quad (7.3.24)$$

- 3) Имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \int f_j d\pi + \alpha_{n+1} \geq \int f_0 d\pi \text{ для всех } \pi \in \mathcal{P}(X) : \int \|f\| d\pi < \infty; \quad (7.3.25)$$

- 4) Имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) + \alpha_{n+1} \geq f_0(x) \text{ для всех } x \in X. \quad (7.3.26)$$

Равносильность 1) и 2) тривиальна; также очевидна равносильность 2) и 3); 3), очевидно, вытекает из 4), а 4) вытекает из 3), если положить $\pi = \delta_x$, $x \in X$. Обозначим

$$A = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) + \alpha_{n+1} \geq f_0(x) \right\}. \quad (7.3.27)$$

Множество A , очевидно, выпукло и замкнуто.

Таким образом, получаем следующий результат, который был открыт независимо Рихтером [210], Исии [175] и Карлином (см. [23]).

⁴⁸В этом случае супердифференциал функции I является непустым ограниченным множеством, см., например, [40, теорема 23.4].

Теорема (Рихтер—Исии—Карлин). Пусть $I(z) < \infty$ для всех $z \in \text{conv}(f(X))$ и $\text{int}(\text{conv}(f(X))) \neq \emptyset$. Тогда для $z \in \text{int}(\text{conv}(f(X)))$

$$I(z) = \inf_{\alpha \in A} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j z_j + \alpha_{n+1} \right), \quad (7.3.28)$$

где I задается посредством (7.3.7), а для выпуклого класса мер \mathcal{Q} , фигурирующего в (7.3.7), выполняются условия предложения 7.3.2. Множество A задается посредством (7.3.27). При этом точная нижняя грань в (7.3.28) достигается для некоторого $\alpha^* = \alpha^*(z) \in A$.

Введем функцию \hat{f}_0 , которую будем называть (верхней) огибающей функции f_0 относительно системы функций⁴⁹ $\{f_1, \dots, f_n, f_{n+1}\}$:

$$\hat{f}_0(x) = \inf_{\alpha \in A} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) + \alpha_{n+1} \right). \quad (7.3.29)$$

Предложение 7.3.5.

1) Если огибающая \hat{f}_0 измерима⁵⁰, то для $z \in \text{int}(\text{conv}(f(X)))$ имеем, при выполнении условий теоремы Рихтера—Исии—Карлина:

$$I(z) = \sup_{\pi \in E(z)} \int f_0 d\pi = \sup_{\pi \in E(z)} \int \hat{f}_0 d\pi. \quad (7.3.30)$$

Таким образом, для таких z нахождения точной нижней грани в (7.3.30) можно заменить функцию f_0 на ее огибающую \hat{f}_0 .

2) Кроме того, если для $z \in \text{int}(\text{conv}(f(X)))$, существует мера π^z для которой достигается точная верхняя грань в (7.3.7), то π^z -почти всюду функция f_0 совпадает с ее огибающей \hat{f}_0 .

Действительно, фиксируем $z \in \text{int}(\text{conv}(f(X)))$. По теореме Рихтера—Исии—Карлина для некоторого $\alpha^* = \alpha^*(z) \in A$ имеем

$$I(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^* z_j + \alpha_{n+1}^*. \quad (7.3.31)$$

а из (7.3.29) и (7.3.27) вытекают неравенства

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j^* f_j(x) + \alpha_{n+1}^* \geq \hat{f}_0(x) \geq f_0(x),$$

откуда, в свою очередь, следуют неравенства

$$\sup_{\pi \in E(z)} \int \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^* f_j + \alpha_{n+1}^* \right) d\pi \geq \sup_{\pi \in E(z)} \int \hat{f}_0 d\pi \geq \sup_{\pi \in E(z)} \int f_0 d\pi = I(z),$$

⁴⁹Напомним, что функция f_{n+1} тождественно равна единице.

⁵⁰Измеримость не требуется для мер из класса $\mathcal{P}^*(X)$, т. е. сосредоточенных в конечном числе точек.

которые обращаются в равенство, учитывая (7.3.31) и то, что для любого $\pi \in E(z)$

$$\int \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^* f_j + \alpha_{n+1}^* \right) d\pi = \sum_{j=1}^n \alpha_j^* z_j + \alpha_{n+1}^*.$$

Если для $z \in \text{int}(\text{conv}(f(X)))$, существует мера π^z для которой достигается точная верхняя грань в (7.3.7), то совпадение π^z -почти всюду функции f_0 с ее огибающей \hat{f}_0 следует из равенства (7.3.30) и неравенства $\hat{f}_0 \geq f_0$.

Замечание 7.3.2.

- 1) Для того чтобы $I(z) < \infty$ для всех $z \in \text{conv}(f(X))$ в случае общего положения, т. е. когда $\text{int}(\text{conv}(f(X))) \neq \emptyset$, достаточно, чтобы функция I была конечна в $n + 1$ аффинно-независимых точках из $\text{conv}(f(X))$.

Действительно, при сделанном предположении случаи 1) и 3) из замечания 7.3.1 отпадают.

- 2) Если множества A , определяемое (7.3.27), непусто, то $I(z) < \infty$ для всех $z \in \text{conv}(f(X))$.

Действительно, в этом случае для $\alpha \in A$ и $x \in X$ имеем

$$f_0(x) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) + \alpha_{n+1},$$

так что

$$\int f_0 d\pi \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j + \alpha_{n+1}$$

для всех мер $\pi \in E(z)$.

Отметим, что в общем случае нельзя гарантировать измеримость множества $f(X)$; то же относится и к $\text{conv}(f(X))$. Условия для универсальной измеримости этих множеств рассматриваются ниже.

7.4 Измеримость в общей проблеме моментов

Пусть $f : X \mapsto Y$ измеримое отображение, где X — польское пространство с борелевской σ -алгеброй \mathcal{A} , Y — сепарабельное метрическое пространство с борелевской σ -алгеброй \mathcal{B} , π -мера на (X, \mathcal{A}) .

Лемма 7.4.1.

- 1) *Найдется борелевское множество $X' \in \mathcal{A}$, такое что $\pi(X') = 1$ и $f(X') \in \mathcal{B}$. Другими словами, $f(X') \in \mathcal{B}_\pi$, где \mathcal{B}_π — пополнение \mathcal{B} относительно меры π .*

2) Множество X' может быть выбрано таким образом, чтобы оно было бы представимо в виде счетного объединения компактов⁵¹ и одновременно его образ $f(X')$ также был бы представим в виде счетного объединения компактов.

Доказательство. Достаточно воспроизвести рассуждения из работы [215] с незначительной модификацией. Известно, что вероятностная мера π на борелевской σ -алгебре \mathcal{A} польского пространства X является плотной, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт K_ε , такой что $\pi(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, см., например, книгу [133, теорема 2.5.11]. Класс \mathcal{K} всех компактных подмножеств X может быть выбран в качестве компактного класса⁵², аппроксимирующего снизу борелевские множества относительно любой меры на (X, \mathcal{A}) , см., например, [133, теорема 2.5.10]; любая мера на (X, \mathcal{A}) , тем самым компактна по определению. По теореме 2 из [215] компактная мера квазикompактна⁵³. В соответствии с [215, теорема 1] мера квазикompактна тогда и только тогда, когда она совершенна⁵⁴. Для того, чтобы получить требуемое утверждение, достаточно в доказательстве необходимости [215, теорема 1] выбрать в качестве I_n не интервалы с рациональными концами, а счетную базу в пространстве Y , например, шары с центрами в счетном и всюду плотном множестве и рациональными радиусами.

Однако можно также предложить весьма простое альтернативное доказательство леммы. Для этого достаточно воспользоваться одним из вариантов теоремы Лузина, см., например, книгу [133, теорема 2.5.15]: при сделанных предположениях относительно X, Y, f и π для любого ε найдется компакт K_ε , такой что $\pi(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ и сужение $f|_{K_\varepsilon}$ функции f на K_ε является непрерывным.

Выберем теперь последовательность чисел $\varepsilon_n \mapsto 0$ и положим $X' = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\varepsilon_n}$. Тогда $\pi(X') = 1$ и

$$f(X') = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\varepsilon_n}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_{\varepsilon_n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f|_{K_{\varepsilon_n}}(K_{\varepsilon_n}).$$

Осталось заметить, что непрерывный образ компакта компактен. \square

Пусть $A_n, n = 1, 2, \dots$ — некоторая последовательность множеств. Будем использовать обозначение $A_n \uparrow A$ в случае, когда $A_n \subseteq A_{n+1}, n = 1, 2, \dots$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

⁵¹В частности, X' имеет тип F_σ , т. е. оно представимо в виде счетного объединения замкнутых множеств. Любое F_σ — подмножество \mathbb{R}^n представимо в виде счетного объединения компактов (поскольку \mathbb{R}^n является σ -компактным пространством).

⁵²Компактный класс — класс подмножеств некоторого пространства Ω , такой что любое счетное семейство множеств из этого класс с пустым пересечением содержит конечное подсемейство с пустым пересечением.

⁵³Нормированная мера π на произвольном измеримом пространстве (Ω, \mathcal{F}) квазикompактна, если для любой счетной последовательности $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $B \in \mathcal{F}$, такое что $\{A_n \cap B, n = 1, 2, \dots\}$ образует компактный класс.

⁵⁴См. определение и критерии для совершенной меры в статье В. В. Сазонова в математической энциклопедии 1985 г. на тему «Совершенная мера» [29]. Одно из эквивалентных определений (использованное Рыль—Нарджевским) состоит в том, что мера π на (Ω, \mathcal{F}) является совершенной, если для любого измеримого отображения $f: \Omega \mapsto \mathbb{R}$, где вещественная прямая \mathbb{R} снабжена борелевской σ -алгеброй \mathcal{B} , найдется $\Omega' \in \mathcal{F}$, такое что $\pi(\Omega') = 1$ и $f(\Omega') \in \mathcal{B}$.

Лемма 7.4.2. Если $A_n \uparrow A$, то $\text{conv}(A_n) \uparrow \text{conv}(A)$.

Доказательство. Поскольку для любого $n = 1, 2, \dots$ $\text{conv}(A_n) \subseteq \text{conv}(A)$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(A_n) \subseteq \text{conv}(A)$. Покажем противоположное включение: $x \in \text{conv}(A)$ равносильно существованию целого $m \geq 0$, $q \in S_m = \{(q_1, \dots, q_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : q_i \geq 0, i = 1, \dots, m+1; \sum_{i=1}^{m+1} q_i = 1\}$, $x_i \in A_{n_i}$, $i = 1, \dots, m+1$, таких что $x = \sum_{i=1}^{m+1} q_i x_i$. Полагая $N = \bigvee_{i=1}^{m+1} n_i$, имеем $x_i \in A_N$, для $i = 1, \dots, m+1$, так что $x \in \text{conv}(A_N)$. Тем самым, $\text{conv}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{conv}(A_n)$. \square

Следствие 7.4.1. Если $Y = \mathbb{R}^n$, то $\text{conv} f(X')$ является измеримым относительно \mathcal{B} .

Действительно, в соответствии с леммой 7.4.1, если $f(X') = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, $i = 1, 2, \dots$, где $K_i \subseteq K_{i+1}$, K_i — компакты⁵⁵, тогда, применяя лемму 7.4.2, получаем, что $\text{conv} f(X') = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{conv}(K_i)$, а выпуклая оболочка компакта⁵⁶, содержащегося в \mathbb{R}^n , сама компактна, т. е. $\text{conv} f(X')$ представимо в виде счетного объединения компактов.

Лемма 7.4.3. Пусть $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, Q)$ вероятностное пространство с борелевской σ -алгеброй \mathcal{B}^d и для $B \in \mathcal{B}^d$ выполнено $Q(B) = 1$. Если интеграл $\int x Q(dx)$ конечен⁵⁷, то

$$\int_{\mathbb{R}^d} x Q(dx) \in \text{conv}(B).$$

Доказательство. ⁵⁸ Обозначим

$$y = \int_{\mathbb{R}^d} x Q(dx).$$

Заметим, что $y \in \text{cl}(\text{conv}(\text{supp}(Q)))$, где $\text{cl}(A)$ обозначает замыкание A . Действительно, для случая компактного носителя в \mathbb{R}^n см., например, [26, теорема 3.6]; в общем случае носитель $\text{supp}(Q)$ представим в виде $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ компактов K_i , таких что $K_i \subseteq K_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, $Q(K_1) > 0$; полагая $dQ_{K_i} = \frac{I_{K_i}}{Q(K_i)} dQ$, имеем $\int y Q_{K_i}(dy) \in \text{conv}(K_i) \subseteq \text{conv}(\bigcup_{j=1}^n K_j) = \text{conv}(\text{supp}(Q))$ и, переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, имеем $\int y Q_{K_i}(dy) = \int y \frac{I_{K_i}}{Q(K_i)} Q(dy) \rightarrow \int y Q(dy)$, поскольку $\int \|y\| Q(dy) < \infty$ (по теореме Лебега о мажорируемой сходимости), так что среднее $\int y Q(dy)$ принадлежит замыканию выпуклой оболочки носителя меры Q .

⁵⁵Конечное объединение компактов — компакт, поэтому последовательность можно считать, не ограничивая общности, монотонной, т. е. $K_i \uparrow f(X')$.

⁵⁶Компактность выпуклой оболочки компакта — свойство конечномерного пространства, которое перестает быть справедливым в бесконечномерном случае.

⁵⁷Конечны одномерные интегралы по каждой координате вектора y , что равносильно неравенству $\int \|y\| Q(dy) < \infty$.

⁵⁸Лемма 7.4.3 и ее доказательство были сообщены мне Джорджем Лоузером (George Lowther).

Пусть V — аффинная оболочка носителя $\text{supp}(Q)$ распределения Q , тогда V — наименьшее аффинное подпространство (в частности, минимальной размерности), такое что $Q(V) = 1$. Поскольку аффинная оболочка замкнута в \mathbb{R}^d , она содержит замыкание выпуклой оболочки носителя Q , так что $y \in V$. Допустим, что $y \notin \text{conv}(B)$; тогда по теореме о разделяющей гиперплоскости (см. [40, теорема 11.2]) существует невырожденный⁵⁹ аффинный функционал $L : V \mapsto \mathbb{R}$, такой что⁶⁰

$$L(x) \geq 0, \text{ для любого } x \in \text{conv}(B), \quad (7.4.1)$$

$$L(y) = 0. \quad (7.4.2)$$

Заметим, что это разделение является собственным, но, вообще говоря, не сильным (строгим) в терминологии [40]. Поскольку в силу (7.4.2)

$$\int_V L(x)Q(dx) = L\left(\int_V xQ(dx)\right) = L(y) = 0$$

и $L(x)$ неотрицательно почти всюду в силу (7.4.1), то $L(x) = 0$ почти всюду относительно Q , т. е. $Q(V') = 0$ для $V' = \{x : L(x) = 0\}$. Аффинное многообразие $V' \subseteq V$ имеет размерность $\dim(V') = \dim(V) - 1$, что противоречит минимальности V по его определению. Следовательно, $y \in \text{conv}(B)$. \square

Замечание 7.4.1. Лемма 7.4.3 существенно опирается на конечномерность пространства \mathbb{R}^n . Утверждение Леммы перестает быть справедливым в бесконечномерном случае.

В качестве иллюстрации этого факта рассмотрим гильбертово пространство ℓ^2 квадратично суммируемых последовательностей с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и дискретной вероятностной мерой Q , сосредоточенной в точках $a_k e_k$, где $a_k \neq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ и $p_k = Q(\{a_k e_k\}) > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Вычисляя среднее значение $y = \int x Q(dx)$ при помощи интеграла Гельфанда—Петтиса, получаем $y = \sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k e_k \in \ell^2$. Очевидно, $y \notin \text{conv}(\text{supp}(Q))$, поскольку выпуклая оболочка содержит только конечные выпуклые комбинации векторов $a_k e_k$.

Чтобы применить изложенные выше результаты к проблеме моментов (7.3.1) и (7.3.2), положим $Y = \mathbb{R}^n$, $f = g$ в лемме 7.4.1 и пусть $X' \subseteq X$ выбрано таким, что $X' \in \mathcal{A}$, $\pi(X') = 1$ и $g(X') \in \mathcal{B}^n$. Обозначим Q_g меру, индуцированную

⁵⁹Отличный от тождественной константы.

⁶⁰По [40, теорема 11.2] для аффинного многообразия $M = \{y\}$ можно найти содержащую его гиперплоскость H (в пространстве V), такую что выпуклое относительно открытое множество $C = \text{ri}(\text{conv}(B))$ содержится в одном из открытых полупространств, порожденных H , т. е. найдется (невырожденный) аффинный функционал L , такой что $L(x) = 0$ для $x \in H$ и $L(x) > 0$ для $x \in C$. В конечномерном пространстве аффинные функционалы непрерывны, так что $L(x) \geq 0$ для $x \in \text{cl}(\text{ri}(\text{conv}(B))) = \text{cl}(\text{conv}(B)) \supseteq \text{conv}(B)$. При этом $\text{conv}(B) \supseteq B \neq \emptyset$, так как $Q(B) = 1$.

отображением $g : X \mapsto \mathbb{R}^n$, т. е. $Q_g(A) = \pi(g^{-1}(A))$ для $A \in \mathcal{B}^n$. С использованием замены переменных в интеграле Лебега имеем:

$$\int_X g(x)\pi(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} yQ_g(dy).$$

Чтобы применить лемму 7.4.3, выберем $d = n$, $B = g(X') \in \mathcal{B}^n$; тогда $g^{-1}(g(X')) \supseteq X'$, поэтому $Q_g(B) = 1$. Таким образом,

$$\int g(x)\pi(dx) \in \text{conv}(g(X')), \quad (7.4.3)$$

причем $X' \subseteq X$, $X' \in \mathcal{A}$, $g(X') \in \mathcal{B}^n$, а по следствию 7.4.1 получаем $\text{conv}(g(X')) \in \mathcal{B}^n$. Тем самым, в частности, установлен следующий результат.

Предложение 7.4.1. *Если X — польское пространство с σ -алгеброй \mathcal{A} и функции g_j , $j = 1, \dots, n$ измеримы (относительно борелевской σ -алгебры \mathcal{B} на \mathbb{R}), то множества $g(X)$ и $\text{conv}(g(X))$ универсально измеримы.*

Замечание 7.4.2. Это предложение можно также получить иным, «менее конструктивным» способом, используя результаты из книги [5].

По определению 7.7 этой книги борелевским пространством называется гомоморфный образ борелевского множества польского пространства (в частности, польское пространство в этой терминологии является борелевским пространством). По предложению 7.40 этой книги для борелевски измеримого отображения одного борелевского пространства в другое образ аналитического множества⁶¹ является аналитическим. Следствие 7.42.1 из этой книги утверждает, что любое аналитическое подмножество борелевского пространства универсально измеримо. В действительности, для этого требуется дополнительное предположение из дескриптивной теории множеств — аксиома проективной детерминированности⁶², см. [199]. Принимая эту аксиому, получаем, что образ борелевски измеримой функции в нашем случае (для проблемы моментов), т. е. для $g : X \mapsto \mathbb{R}^n$, является универсально измеримым. Для произвольной меры $\pi \in \mathcal{P}(X)$ найдутся $B, B' \in \mathcal{B}^n$, такие что $B \subseteq g(X) \subseteq B'$ и $\pi(B' \setminus B) = 0$, при этом $g^{-1}(B) \subseteq g^{-1}(g(X)) = X = g^{-1}(B')$, поэтому $Q_g(B) = 1$. Любое борелевское множество в \mathbb{R}^n можно приблизить снизу (по мере) компактными, поэтому найдутся компакты K_i , такие что $K_i \subseteq K_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \subseteq B$ и $Q_g(B \setminus \bigcup_{i=1}^n K_i) = 0$. Далее можно применить рассуждения из следствия 7.4.1, чтобы убедиться в универсальной измеримости $\text{conv}(g(X))$.

⁶¹Определение аналитического множества см., например, в [5, параграф 7.6.1].

⁶²Это ослабленный вариант аксиомы детерминированности, где утверждение о существовании выигрышной стратегии в бесконечной игре применяется только к проективным множествам.

7.5 Применение результатов общей проблемы моментов

Рассмотрим частный случай проблемы моментов, когда $X \subseteq \mathbb{R}^n$ компактно и

$$f_j(y) = y_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

иными словами, отображение f является тождественным:

$$f(y) = y \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что линейная независимость функций $f_1, \dots, f_n, f_{n+1} \equiv 1$ на области определения X функции f_0 равносильна тому, что X не содержится в аффинном многообразии, меньшей чем n размерности; это отвечает случаю общего положения. Можно, не ограничивая общности⁶³, рассматривать случай общего положения, что мы и будем предполагать ниже; это равносильно условию $\text{int}(\text{conv}(X)) \neq \emptyset$.

В этом случае функция, фигурирующая в (7.3.7), принимает вид

$$I(z) = \sup_{\pi \in E(z)} \int f_0 d\pi, \quad z \in \text{conv}(X), \quad (7.5.1)$$

где множество $E(z)$ задаваемое посредством (7.3.6), принимает вид

$$E(z) = \left\{ \pi \in \mathcal{Q} : \int x \pi(dx) = z, \text{supp}(\pi) \subseteq X \right\}, \quad (7.5.2)$$

где выпуклый класс мер \mathcal{Q} , заданный на борелевской σ -алгебре подмножеств X , содержит все меры, сосредоточенные в одной точке, а интегралы $\int f_i d\pi$, $i = 0, \dots, n$ конечны для $\pi \in \mathcal{Q}$.

Следующий результат легко сводится, используя предложение 7.3.2, к известному факту выпуклого анализа (см. например, [40, следствие 17.1.5]), однако мы приведем простое непосредственное доказательство ниже⁶⁴.

Предложение 7.5.1. *Функция $I(z)$, $z \in \text{conv}(X)$ является вогнутой огибающей⁶⁵ функции $f_0(x)$, $x \in X$, т. е. наименьшей вогнутой функцией, заданной на $\text{conv}(X)$, мажорирующей f_0 на X .*

Доказательство. В соответствии с леммой 7.3.1 функция $I(z)$ является вогнутой. Проверим, что если заданная на $\text{conv}(X)$ вогнутая функция g , мажорирует функцию f_0 на X , то g мажорирует $I(z)$ на $\text{conv}(X)$. Действительно,

⁶³В противном случае можно свести рассмотрение к задаче меньшей размерности.

⁶⁴Компактность пространства X при этом не требуется.

⁶⁵Вогнутая огибающая (произвольной) числовой функции определяется аналогично определению выпуклой огибающей функции в [40, §5].

$\int g \, d\pi \geq \int f_0 \, d\pi$ для любой меры π с носителем, содержащимся в X . Поэтому, с учетом (7.3.19), используя неравенство Йенсена, примененное для мер из класса $E^*(z)$, задаваемого посредством (7.3.13), получаем

$$g(z) \geq \sup_{\pi \in E^*(z)} \int g \, d\pi \geq \sup_{\pi \in E^*(z)} \int f_0 \, d\pi = I(z), \quad z \in \text{conv}(X).$$

□

Замечание 7.5.1. Обозначим через $\hat{I}(z)$ $z \in \text{conv}(X)$ поточечную точную нижнюю грань значений в точке z всех аффинных функций, мажорирующих функцию f_0 на X . Функция \hat{I} является⁶⁶ также наименьшей полунепрерывной сверху вогнутой функцией, мажорирующей функцию f_0 на X (в частности, с учетом предложения 7.5.1, \hat{I} мажорирует I на $\text{conv}(X)$). Кроме того, $\hat{I}(z)$ совпадает с дважды примененным к $I(z)$ преобразованием Лежандра—Юнга—Фенхеля; это преобразование для вогнутой функции связано с соответствующим преобразованием (сопряжением) выпуклых функций как минус сопряжение для минус вогнутой функции.

На множестве $\text{ri}(\text{conv}(X))$, в случае общего положения совпадающего с $\text{int}(\text{conv}(X))$, вогнутая функция $I(z)$ непрерывна⁶⁷ и совпадает на этом множестве с $\hat{I}(z)$. Сужение \hat{I} на X совпадает с огибающей \hat{f}_0 (функции f_0), определяемой соотношением (7.3.29), которое в данном частном случае принимает вид

$$\hat{f}_0(x) = \inf_{\alpha \in A} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j + \alpha_{n+1} \right),$$

$$A = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j + \alpha_{n+1} \geq f_0(x), \quad x \in X \right\}.$$

Если функция f_0 полунепрерывна сверху, то в соответствии с предложением 7.3.4 функции \hat{I} и I совпадают на всем множестве $\text{conv}(X)$, а не только на его (относительной) внутренности. Кроме того, точная верхняя грань в (7.5.1) достигается, причем найдется максимизатор из $\mathcal{P}^n(X)$.

Мера, на которой достигается максимум в (7.5.1), может быть неединственной. Выберем среди максимизаторов меру $\pi^{(z)} \in \mathcal{P}^n(X)$ с минимально возможным числом $k = k(z)$ аффинно независимых точек носителя $\text{supp}(\pi^{(z)}) = \{x^1(z), \dots, x^k(z)\}$, где $1 \leq k \leq n+1$. Тогда ранг системы функций⁶⁸, $f_1(x) = x_1, \dots, f_n(x) = x_n, f_{n+1} \equiv 1$, суженных на носитель $\text{supp}(\pi^{(z)})$, равен k . Для такого носителя однозначно определяется вектор $q(z) = (q_1(z), \dots, q_k(z))$, такой что $q_i(z) > 0$ для $i = 1, \dots, k$ и выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^k q_i(z) x^i(z) = z, \quad \sum_{i=1}^k q_i(z) = 1.$$

⁶⁶См., например, [40, теорема 12.1].

⁶⁷См., например, [40, теорема 10.1].

⁶⁸Здесь уместно напомнить о характеристизации крайних точек множество мер в теореме Уинклера об условии (LI).

Иными словами, вектор q определяется однозначно из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k q_i(z) x_j^i(z) = z_j, & j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^k q_i(z) = 1, \end{cases} \quad (7.5.3)$$

где $x^i(z) = (x_1^i, \dots, x_n^i)$, $i = 1, \dots, k$.

Отметим также, что, в соответствии с пунктом 2) предложения 7.3.5, для $z \in \text{ri}(\text{conv}(X)) = \text{int}(\text{conv}(X))$ имеет место равенство $f_0(x^i(z)) = \hat{f}_0(x^i(z))$, $i = 1, \dots, k$, что может оказаться полезным для нахождения точек носителя $\text{supp}(\pi^{(z)}) = \{x^1(z), \dots, x^k(z)\}$.

Отдельно выделим случай, когда функция f_0 является вогнутой. Особо отметим, что выпуклость области определения X функции f_0 не предполагается: для функции, принимающей конечные значения (т. е. из \mathbb{R}), понимается как выполнение соответствующего неравенства Йенсена для всех выпуклых комбинаций точек из X , лежащих в X , см. [206, определение 1]. В цитированной статье доказана теорема о продолжении вогнутой на X функции на $\text{conv}(X)$, при этом используются конструкция аналогичная⁶⁹ использованной нами в предложении 7.5.1. Таким образом, в этом случае сужение функции I на X совпадает с f_0 , а для $z \in X$ максимизатор $\pi^{(z)} \in \mathcal{P}^n(X)$ с минимально возможным числом $k(z)$ аффинно независимых точек носителя получается при $k(z) = 1$, т. е. когда $\pi^{(z)} = \delta_z$.

Отметим также, что для выпуклой на X функции f_0 ее вогнутая оболочка совпадает с вогнутой крышей⁷⁰, построенной на крайних точках⁷¹ X .

Возвращаясь к задаче (7.1.1) при оптимизации на первом этапе, т. е. к задаче (7.1.2), имеем проблему моментов, представляющую собой максимизацию интеграла (7.5.1) с ограничениями (7.5.2), где

$$\begin{aligned} X &= K_t(\cdot), \\ z &\in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset, \\ f_0(y) &= w_t(\cdot, y), \\ I(z) = u_{t,\cdot}(z) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot), \int y Q(dy) = z} \int w_t(\cdot, y) Q(dy), \\ \mathcal{P}_t(\cdot) &= \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)). \end{aligned} \quad (7.5.4)$$

При этом вогнутая функция $z \mapsto I(z) = u_{t,\cdot}(z)$ является собственной, поскольку справедливы неравенства $0 \leq w_t(\cdot, y) \leq C$, где оценка сверху получена в неравенстве (3.2.10).

⁶⁹С той разницей, что в [206] речь идет о выпуклых функциях, вместо максимизации по множеству мер из $\mathcal{P}^*(X)$ используется минимизация, а в качестве продолжения строится наибольшая выпуклая функция, минорирующая заданную на X функцию.

⁷⁰Термин введен в работе Ульмана [250]. Понятие выпуклой крыши играет существенную роль в квантовой теории информации.

⁷¹Крайние точки могут быть определены для произвольных множеств X , как крайние точки $\text{conv}(X)$, выпуклой оболочки X .

В случае, когда функция $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ полунепрерывна сверху, по теореме 4.2.1 пункт 3 а) найдется мера $Q_{t_i}^z \in E^n(z)$ на которой достигается максимум интегралов в (7.5.4). $x^1, \dots, x^k \in X$. Следовательно, $f_0(x^i) = f_0^*(x^i)$, $i = 1, \dots, k$, причем для некоторого $q \in S_{k-1}$, такого что $q_i > 0$ для $i = 1, \dots, k$, имеет место $\sum_{i=1}^k q_i x^i = z$. Если $k = n + 1$, то $q \in S_n$, такое что $q_i > 0$ для $i = 1, \dots, n + 1$, определяется однозначно в случае общего положения из системы линейных уравнений

Важный частный случай возникает в случае выпуклости целевых функций. Как отмечалось выше, решение оптимизационной задачи (7.5.4) в данном случае приводит к построению вогнутой крыши.

Следующий простой пример имеет, однако, важную экономическую интерпретацию, показывая значимость простейших торговых ограничений — запрета коротких позиций.

Пример 7.5.1. Рассмотрим одношаговую мультипликативную модель, схожую с рассмотренной в примере 2.2.2 из главы 2, однако на сей раз предположим, что имеются торговые ограничения — запрет коротких позиций, т. е. $D_1(1) = [0, \infty)$. Положим $X_0 = 1$, $K_1(1) = [a, b]$, причем $-1 < a < 0 < b$. В качестве опциона выберем бинарный опцион “put”, в начальный момент времени “out of the money” с ценой исполнения $1 + s$, где $s \in (a, 0)$, с полунепрерывной сверху функцией выплат, т. е. $g_1(x) = I_{(-\infty, 1+s)}(x)$; в этом случае $v_1^*(1, 1 + y) = g_1(1 + y) = I_{(-\infty, s)}(y)$. Решая задачу (7.1.2) на этапе 1 для⁷² $z \in (a, b) \cap (-\infty, 0] = (a, 0]$, с учетом вышеизложенного, точная верхняя грань в (7.1.2) достигается для распределений, сосредоточенных не более чем в двух точках, причем вогнутая оболочка для функции $y \mapsto g_1(1 + y)$ равна 1 при $y \leq s$, а при $y \in [s, b]$ ее график — отрезок, соединяющий точки на плоскости $(s, 1)$ и $(b, 0)$, а при $y \geq b$ эта функция равна нулю. Оптимальная смешанная стратегия рынка, распределение Q^* , сосредоточено в двух точках s и b , когда $z \in (s, 0]$, т. е. $Q^* = q_1 \delta_s + q_2 \delta_b$, $q_1, q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = 1$. Условие $\int y Q^*(dy) = s q_1 + b q_2 = z$ влечет

$$q_1 = q_1(z) = \frac{b - z}{b - s} \in (0, 1).$$

Если же $z \in (a, s]$, то наиболее неблагоприятная смешанная стратегия рынка сосредоточена в одной точке z , т. е. $Q^* = \delta_z$. С учетом (7.1.2) и (7.1.4), для $z \in (a, 0]$

$$u_1(z) = I_{(a, s]}(z) + q_1(z) I_{(s, 0]}(z) = I_{(a, s]}(z) + \frac{b - z}{b - s} I_{(s, 0]}(z).$$

С учетом (7.1.3) и (7.1.3')⁷³

$$v_0^* = \rho_1 = \sup_{z \in (a, 0]} u_1(z) = 1;$$

⁷²Здесь $\text{bar}(D_1(1)) = (-\infty, 0]$, см. пример 7.1.1.

⁷³Напомним, что для одношаговой задачи мы формально полагаем $g_0 \equiv -\infty$.

при этом точная верхняя грань в задаче (7.1.1) достигается на одноточечных распределениях $Q^* = \delta_z$ для $z \in (a, s]$. Поскольку по условию $s < 0$, все эти меры «супермартингалльные», но не «мартингалльные». Таким образом, вопреки распространенному на практике мнению, что для ценообразования опционов следует всегда использовать «риск-нейтральные» вероятности, в данном примере с запретом коротких позиций, этому (ничем не обоснованному) предположению о риск-нейтральности соответствовало бы значение

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot), \int y Q(dy) = 0} \int v_1^*(1, 1 + y) Q(dy) = \frac{b}{b - s} < 1.$$

□

Допустим, что имеет место равновесие (5.2.6), и что в (7.1.3) точная верхняя грань достигается для некоторого $z_t^*(\cdot) \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))$. Кроме того, предположим, что при этом точная верхняя грань в (7.1.2) для $z = z^*$ достигается для некоторого распределения $Q_{t,\cdot}^* \in E_t^n(z^*) = \{Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)) : \int z Q(dz) = z^*\}$ с носителем $\text{supp}(Q_{t,\cdot}^*) = \{y_t^1(\cdot), \dots, y_t^{m_t(\cdot)}(\cdot)\} \subseteq K_t(\cdot)$, где $m_t(\cdot) \leq n + 1$. Тогда решение задачи (VI) сводится к решению более простой задачи с новыми ограничениями на возможные приращения цен, представимыми в виде компактов $K'_t(\cdot) \subseteq K_t(\cdot)$, содержащих конечное число точек: $K'_t(\cdot) = \{y_t^1(\cdot), \dots, y_t^{m_t(\cdot)}(\cdot)\}$. Таким образом, для определения хеджирующей стратегии h_t на шаге $t = 1, \dots, N$ достаточно хеджировать обусловленное обязательство против $m_t(\cdot)$ наиболее неблагоприятных сценариев движения рынка на этом шаге.

С этой целью, в принципе, можно решать задачу минимизации, включая нахождения минимизатора, вида

$$\rho_{t-1}(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \varphi_{t,\cdot}(h), \quad (7.5.5)$$

где $\varphi_{t,\cdot}(h) = \bigvee_{y \in K'_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]$. Отметим, что функция $h \mapsto \varphi_{t,\cdot}(h)$ является выпуклой полиэдральной. При этом предложение $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$ равносильно условию NDSAUP по теореме 2.3.1 из главы 2, так что $\pi_t(\cdot) < \infty$, а из предложения 5.2.4 (см. формулу (5.2.16)) имеем $\rho_{t-1}(\cdot) \geq -\pi_t(\cdot)$, т. е. точная нижняя грань в (7.5.5) — конечное число. При этом можно воспользоваться следующим фактом: для того, чтобы $h^*(\cdot)$ доставлял минимум в (7.5.5), необходимо и достаточно, чтобы нашелся субградиент $y_t^*(\cdot)$ функции $\varphi_{t,\cdot}$ в точке $h_t^*(\cdot)$, являющийся внутренней нормалью⁷⁴ к множеству $D_t(\cdot)$, см. [40, теорему 27.4]. Отметим, что субдифференциал полиэдральной выпуклой функции является полиэдральным выпуклым множеством [40, теорема 23.10], множество внешних нормалей к множеству D в точке h^* является замкнутым выпуклым конусом. Кроме того, можно использовать тот факт, что по [13, главы IV, теорема 2.1] для того, чтобы h^* была точкой минимума функции $\varphi_{t,\cdot}(h)$ на $D_t(\cdot)$,

⁷⁴ Внутренняя нормаль y^* к выпуклому множеству D в точке h^* есть вектор, удовлетворяющий $(h - h^*)y^* \geq 0$ для всех $h \in D$.

необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{h \in D_t(\cdot)} \bigvee_{j \in J_t, (h^*)} (h - h^*)y^j = 0,$$

где $J_t, (h^*) = \{j : v_t(\cdot, x_{t-1} + y) - h^*y^j = \varphi_t, (h^*)\}$.

7.6 Случай отсутствия торговых ограничений

Особо простой вид приобретает задача нахождения точной верхней грани в (7.1.1) в случае отсутствия торговых ограничений, т. е. $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, при отсутствии арбитражных возможностей, т. е. когда выполнено условие NDAO. В этом случае, с учетом теоремы 7.3.2 пункт 2), на этапе 1, решая задачу условной оптимизации (7.1.2), нужно найти

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}_t^n(K_t(\cdot)), \int y Q(dy)=0} \int w_t(\cdot, y) Q(dy), \quad (7.6.1)$$

причем этап 2 в данном случае отпадает в силу $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$. Условие NDAO, равносильное $0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, означает, что вектор $z^* = 0$ находится в относительной внутренней $\text{conv}(f(X)) = \text{conv}(K_t(\cdot))$. Таким образом, применима теорема Рихтера—Исии—Карлина (возможно, в линейном пространстве меньшей размерности, если размерность $K_t(\cdot)$ меньше n , проводя рассуждения, аналогичные использованным в доказательстве теоремы 5.3.1). Поэтому можно, не ограничивая общности, рассматривать случай общего положения.

Предположим, что точные верхние грани в (7.6.1) достигаются. При этом, ограничивая число точек носителя смешанной стратегии Q числом $n + 1$, и учитывая, что для конечного множества траекторий детерминистский и вероятностный способ описания приводят к одной и той же (одношаговой) задаче, получаем модель полного рынка. Поэтому возможно использовать все относящиеся к полному рынку результаты стохастического подхода, в частности [177], см. также [69], теорему B^* (расширенный вариант второй фундаментальной теоремы); условие отсутствия арбитражных возможности здесь равносильно существованию единственной эквивалентной⁷⁵ мартингалной меры. В нашей постановке, наиболее неблагоприятные смешанные стратегии меры $Q_t^*(\cdot)$ с конечным носителем $K_t^*(\cdot)$, содержащим не более чем $n + 1$ точку, задают соответствующие условные распределения приращений при заданной траектории цен из предыстории относительно текущего момента t , так что эти приращения образуют мартингал-разность; обозначая наиболее неблагоприятную смешанную стратегию на шаге t , т. е. $Q_t^*(\cdot)$, через⁷⁶ Q_t^* , уравнения Беллмана (7.1.1)

⁷⁵Эквивалентность мер, заданных на конечном множестве, сводится к совпадению их носителей.

⁷⁶Для удобства обозначений при интегрировании по мере.

принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \int w_t(\cdot, y) Q_{t,\cdot}^*(dy), \quad t = N, N-1, \dots, 1. \end{aligned} \quad (7.6.2)$$

где w_t задается (Т). Для случайного процесса X_t , $t = 0, \dots, N$, у которого $X_0 = x_0$ фиксировано, а распределения условных приращений цен ΔX_t при известной предыстории $X_0 = x_0, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}$ равны $Q_{t,x_0,\dots,x_{t-1}}^*$, уравнения (7.6.2) задают огибающую Снелла⁷⁷ процесса G_t , $t = 1, \dots, N$, где $G_t = g_t(X_0, \dots, X_t)$. Отметим, что огибающая Снелла связана с задачей оптимальной остановки⁷⁸, если стратегию владельца опциона описывать посредством выбора момента остановки-исполнения американского опциона, см. [69, глава VI, раздел 2, §2с]; теорема 3 этого параграфа дает способ нахождения соответствующей хеджирующей стратегии $H_t^* = h_t^*(\bar{X}_{t-1})$, а именно, из разложения Дуба для супермартингала $V_t^* = v_t^*(\bar{X}_t)$ относительно единственной мартингальной меры \mathbb{P}_* , с использованием представления мартингала в виде мартингального преобразования⁷⁹:

$$H_t^* \Delta X_t = V_t^* - \mathbb{E}_*^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^*, \quad t = 1, \dots, N, \quad (7.6.3)$$

где $\mathbb{E}_*^{\mathcal{F}_t}$ — оператор математического ожидания⁸⁰ относительно σ -алгебры \mathcal{F}_t , порожденной случайными величинами X_0, \dots, X_t , т. е.

$$\mathbb{E}_*^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* = \int v_t^*(X_0, \dots, X_{t+1}, X_{t+1} + y) Q_{t,X_0,\dots,X_{t-1}}^*(dy).$$

Иными словами, стратегия $h_t^*(\bar{x}_{t-1})$ находится из системы линейных уравнений

$$h_t^*(\bar{x}_{t-1})z = v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + z) - \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) Q_{t,\bar{x}_{t-1}}^*(dy),$$

когда z пробегает сценарии приращений цен⁸¹ из $K_t'(\bar{x}_{t-1}) = \text{supp}(Q_{t,\bar{x}_{t-1}}^*)$; вектор $h_t^*(\cdot)$ выбирается из линейной оболочки носителя $K_t'(\cdot)$ размерности $m_t - 1$.

В случае, когда задача ценообразования и хеджирования ставится как суперрепликация относительно \mathbb{P}_* европейского опциона (торговые ограничения отсутствуют, рынок без арбитражных возможностей), в силу полноты рынка

⁷⁷Наименьший супермартингал, мажорирующий заданный случайный процесс.

⁷⁸См. [70, глава III, §1].

⁷⁹Адаптированный процесс V_t , $t = 0, 1, \dots$ является мартингальным преобразованием X при помощи H , если H — предсказуемый процесс, $\Delta V_t = H_t \Delta X_t$, а X — мартингал (в учебнике [68, том 2, глава VII, §1, определение 4]) еще дополнительно требуется $V_0 = H_0 X_0$.

⁸⁰В силу конечности носителей условных распределений равенства и неравенства, связанные с использованием условных ожиданий (которые обычно понимаются «почти всюду»), здесь выполняются «всюду».

⁸¹Достаточно $m_t - 1$ из m_t сценариев, так что они линейно зависимы.

для референтной меры \mathbb{P}_* это равносильно репликации. Процесс V^* в этом случае — мартингал, так что (7.6.2) превращается в соотношение

$$\begin{aligned} V_N^* &= g(\bar{X}_N), \\ V_{t-1}^* &= \mathbb{E}_*^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^*, \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned}$$

где g — функция выплат по опциону в терминальный момент, а (7.6.3) в этом случае принимает вид

$$H_t^* \Delta X_t = \Delta V_t^*, \quad t = 1, \dots, N,$$

т. е. аналогично предыдущему случаю, стратегия $h_t^*(\cdot)$ находится из системы линейных уравнений для сценариев приращений цен из носителя условного распределения, отвечающего наиболее неблагоприятной смешанной стратегии рынка, соответствующей единственной мартингальной мере \mathbb{P}_* .

Глава 8. Свойства оптимальных стратегий «рынка» и их носителей

Поведение наиболее неблагоприятных смешанных стратегий рынка, с носителями, состоящими из не более чем в конечном числе точек, равного совокупному количеству активов (рисковых и безрискового), представляет прикладной интерес, поскольку суперхеджирование сводится к хеджированию для данного конечного числа сценариев движения цен. Этой проблеме и посвящена настоящая глава.

Наиболее важными результатами главы являются опирающиеся на предположение о структурной устойчивости модели теорема 8.1.1 о полунепрерывности сверху многозначного отображения со значениями в классе смешанных стратегий рынка и с аргументом, равным предыстории цен, а также теорема 8.2.2 о существовании измеримого по Борелю переходного ядра для оптимальных (наиболее неблагоприятных) смешанных стратегий рынка.

Исследуются также модели, для которых сохраняется свойство выпуклости решений уравнений Беллмана—Айзекса; в этом случае оптимальные смешанные стратегии рынка сосредоточены на множестве экстремальных точек выпуклой оболочки носителя.

Основные результаты главы опубликованы в [227] и [224].

8.1 Свойства гладкости оптимальных смешанных стратегий «рынка» и их носителей

В данном разделе получены условия полунепрерывности сверху многозначных отображений, ставящих в соответствие предыстории цен класс оптимальных смешанных стратегий «рынка».

Предложение 8.1.1. Пусть X — компактное топологическое пространство с борелевской σ -алгеброй \mathcal{B}_X , Y — сепарабельное метрическое пространство с σ -алгеброй \mathcal{B}_Y , $\mathcal{P}(Y)$ — множество вероятностных мер на (Y, \mathcal{B}_Y) , $S : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ — многозначное отображение, полунепрерывное сверху¹, где $\mathcal{K}(Y)$ —

¹В силу компактозначности полунепрерывность (сверху и снизу) и h -полунепрерывность совпадают, см. [171, предложение 2.61], [171, предложение 2.66].

класс непустых компактных подмножеств Y ,

$$\mathcal{M}(x) = \{Q \in \mathcal{P}(Y) : \text{supp}(Q) \subseteq S(x)\}. \quad (8.1.1)$$

Тогда многозначное отображение $x \mapsto \mathcal{M}(x)$ полунепрерывно сверху.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем произвольную точку $x_0 \in X$. В силу полунепрерывности сверху многозначного отображения $x \mapsto K(x)$ найдется окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 , такая что для всех $x \in U_\varepsilon(x_0)$ имеют место включения² $S(x) \subseteq \{y \in Y : \rho(y, S(x_0)) \leq \varepsilon\} = F_\varepsilon$. Рассмотрим направленности $x_\alpha \rightarrow x_0$, $Q_\alpha \in \mathcal{M}(x_\alpha)$. По [171, следствие 2.20], образ (в многозначном смысле) $S(X)$ компактен, поэтому также и образ $\mathcal{M}(X)$ компактен в слабой топологии на $\mathcal{P}(Y)$, которая метризуема, см. [38]. Стало быть, найдется поднаправленность Q_{α_β} , слабо сходящаяся к некоторой мере $Q_0 \in \mathcal{P}(Y)$. При этом по теореме А. Д. Александрова [74], имеет место неравенство³ $\liminf_{\beta \rightarrow \infty} Q_{\alpha_\beta}(F_\varepsilon^c) \geq Q_0(F_\varepsilon^c) = 0$, поскольку множество F_ε^c открыто; тем самым, $\text{supp}(Q_0) \subseteq F_\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\text{supp}(Q_0) \subseteq S(x_0)$, т. е. $Q_0 \in \mathcal{M}(x_0)$. С учетом компактозначности отображения $\mathcal{M}(\cdot)$ это отображение полунепрерывно сверху [171, предложение 2.19]. \square

В предложении 6.3.1 доказано следующее утверждение: если X — топологическое пространство (компактность не требуется), $S : X \mapsto \mathcal{F}(Y)$ — многозначное отображение полунепрерывное снизу, где $\mathcal{F}(Y)$ — класс всех замкнутых подмножеств, то $\mathcal{M}(\cdot)$, задаваемое соотношением (8.1.1), h -полунепрерывно снизу. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Предложение 8.1.2. Пусть выполнены условия предложения 8.1.1 и, кроме того, многозначное отображение $S : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ полунепрерывно снизу. Тогда многозначное отображение $\mathcal{M}(\cdot)$, задаваемое соотношением (8.1.1), является непрерывным.

Лемма 8.1.1. Пусть X и Y — хаусдорфовы топологические пространства и X — компактно. Если многозначное отображение $K : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ полунепрерывно сверху, тогда для $n \geq 1$ многозначное отображение $x \mapsto \mathcal{P}^n(K(x))$, $x \in X$ полунепрерывно сверху.

Доказательство. Рассмотрим направленности $x_\alpha \rightarrow x_*$, $Q_\alpha \in \mathcal{P}^n(K(x_\alpha))$. Заметим, что Q_α представима в виде

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} p_\alpha^i \delta_{y_\alpha^i},$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_\alpha^i = 1, \quad p_\alpha^i \geq 0, \quad y_\alpha^i \in K(x_\alpha) \subseteq K(X).$$

²Здесь $\rho(y, A) = \inf\{\rho(y, z), z \in A\}$.

³Здесь A^c — дополнение множества A (в соответствующем пространстве).

Образ $K(X)$ компактен в силу компактозначности $K(\cdot)$ [171, следствие 2.20]. Поэтому, с учетом полунепрерывности сверху $K(\cdot)$, по [171, предложение 2.19], найдется поднаправленность, для которой $y_{\alpha_\beta}^i \rightarrow y_*^i \in K(x_*)$, $i = 1, \dots, n+1$, а в силу компактности симплекса

$$S_n = \left\{ p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} p^i = 1, p^i \geq 0, i = 1, \dots, n+1 \right\}$$

из этой поднаправленности можно выделить еще поднаправленность, такую что $p_{\alpha_\beta\gamma} = (p_{\alpha_\beta\gamma}^1, \dots, p_{\alpha_\beta\gamma}^{n+1}) \rightarrow p_* \in S_n$. Таким образом, $Q_{\alpha_\beta\gamma} \rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} p_*^i \delta_{y_*^i} \in \mathcal{P}^n(K(x_*))$. Применяя еще раз [171, предложение 2.19], получаем полунепрерывность сверху для $x \mapsto \mathcal{P}^n(K(x))$. \square

Пусть (Y, ρ) — сепарабельное метрическое пространство. Рассмотрим линейное пространство $BL(Y)$ ограниченных липшицевых функций $f : Y \mapsto \mathbb{R}$ с нормой

$$\begin{aligned} \|f\|_{BL} &= \|f\|_L + \|f\|_\infty, \\ \|f\|_\infty &= \sup\{|f(y)| : y \in Y\}, \\ \|f\|_L &= \sup\left\{ \frac{|f(y) - (y')|}{\rho(y, y')} : y, y' \in Y, y \neq y' \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим $\mathcal{M}(Y)$ нормированное векторное пространство зарядов (знакопеременных мер) на пространстве Y с борелевской σ -алгеброй \mathcal{B}_Y , снабженной нормой Дадли (Dudley):

$$\|\mu\|_D = \sup \left\{ \left| \int f d\mu \right| : \|f\|_{BL} \leq 1 \right\}.$$

Множество всех нормированных (вероятностных) мер $\mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{M}(Y)$ будет замкнутым выпуклым подмножеством $\mathcal{M}(Y)$, с метрикой ρ_D , порожденной нормой $\|\cdot\|_D$, т. е. $\rho_D(\pi_1, \pi_2) = \|\pi_1 - \pi_2\|_D$. В соответствии с [138, теорема 11.3.3], для сепарабельного метрического пространства Y слабая сходимость последовательности вероятностных мер из $\mathcal{P}(Y)$ равносильна сходимости в метрике Дадли, т. е. метрика ρ_D метризует слабую топологию на $\mathcal{P}(Y)$.

Лемма 8.1.2. Пусть X — хаудорфово топологическое пространство, (Y, ρ) — сепарабельное метрическое пространство, $F : X \mapsto K(Y)$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение. Тогда многозначное отображение $x \mapsto \mathcal{P}^n(F(x))$, где $n \geq 0$, является h -полунепрерывным⁴ снизу относительно метрики Дадли.

⁴В соответствии с [171, предложение 2.66] из h -полунепрерывности снизу следует полунепрерывность снизу многозначного отображения.

Доказательство. Пусть $Q_0 \in \mathcal{P}^n(K(x_0))$, где x_0 — произвольная точка X . Тогда мера Q_0 представима в виде

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{n+1} q^i \delta_{y_0^i}, \quad y_0^i \in F(x_0),$$

$$q^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} q^i = 1.$$

Поскольку F принимает компактные значения, из полунепрерывности снизу вытекает h -полунепрерывность снизу [171, предложение 2.68]. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $V_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 , такая что для любого $x \in V_\varepsilon(x_0)$ выполняется $F(x_0) \subseteq \{y \in Y : \rho(y, F(x)) < \varepsilon\}$. Отсюда для каждого $y_0^i, i = 1, \dots, n+1$ найдется $y^i \in F(x)$, такое что $\rho(y_0^i, y^i) < \varepsilon$. Полагая $Q = \sum_{i=1}^{n+1} q^i \delta_{y_0^i} \in \mathcal{P}^n(F(x))$, получаем $\rho_D(Q_0, Q) < \varepsilon$, т. е. $\mathcal{P}^n(F(\cdot))$ является h -полунепрерывной снизу в точке x_0 . \square

По лемме 3.2.1 множества⁵

$$\widehat{D}_t^a(\cdot) = \{h \in D_t(\cdot) : \sigma_{K_t(\cdot)}(-h) \leq a\},$$

задающие торговые ограничения, могут быть заменены в уравнениях Беллмана—Айзека (BI), не изменяя значений функции $v_t^*(\cdot)$, на компактные множества $\widehat{D}_t^a(\cdot)$, где $a \geq C$, а константа C определяется формулой (1.2.3), не ограничивая общности, можно считать⁶ $C > 0$. По предложению 5.2.2 имеет место (игровое) равновесие в классе мер с конечным носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$. Впрочем, мы будем далее делать предположения относительно $D_t(\cdot)$, $K_t(\cdot)$ и $g_t(\cdot)$, гарантирующие непрерывность $v_t^*(\cdot)$, так что применимо предложение 5.2.3, в соответствии с которым равновесие имеет место для класса всех мер с носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$.

Лемма 8.1.3. Пусть компактозначные отображения $K_t(\cdot)$ непрерывны, $D_t(\cdot)$ полунепрерывны снизу и замкнуты на B_{t-1} , и выполняется RNSAUP, грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. Тогда функционал $J(x, Q)$, $x \in B_{t-1}$, $Q \in \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$, задаваемый соотношением

$$J(x, Q) = \int w_t(x, y)Q(dy) - \sigma_{\widehat{D}_t^a(x)}\left(\int yQ(dy)\right), \quad (8.1.2)$$

является непрерывным (по совокупности переменных) на компакте $B_{t-1} \times \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$, где $\mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$ снабжено слабой топологией⁷.

⁵Здесь σ_A обозначает опорную функцию множества A , т. е. $\sigma_A(x) = \sup_{y \in A} \langle x, y \rangle$.

⁶Для американского опциона $C \geq 0$; если $C = 0$, то функции выплат тривиальны, т. е. $g_t(\cdot) \equiv 0$, что не представляет интереса с точки зрения экономической интерпретации.

⁷Слабая топология на пространстве $\mathcal{P}(Y)$ вероятностных мер, заданных на борелевской σ -алгебре \mathcal{B}_Y , в случае, когда Y — сепарабельное метрическое пространство, метризуема [138, теорема 11.3.3].

Доказательство. Зафиксируем $t \in \{1, \dots, N\}$ и рассмотрим последовательности $x^n \in B_{t-1} \subseteq (\mathbb{R}^n)^I$, $Q^n \in \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$, такие что $x^n \rightarrow x^*$ и $Q^n \rightarrow Q^*$ (слабо); очевидно, $(x^*, Q^*) \in B_{t-1} \times \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$. По теореме 3.2.2 решение $v_t^*(\cdot)$ уравнений Беллмана–Айзека (ВІ) непрерывно, т. е. функция $(x, y) \mapsto w_t(x, y)$ непрерывна (по совокупности переменных) на множестве $B_{t-1} \times K_t(B_{t-1})$, которое компактно по предложению 3.1.1 и замечанию 3.1.4, так что функция $w_t(\cdot, \cdot)$ равномерно непрерывна на $B_{t-1} \times K_t(B_{t-1})$. В частности, семейство функций $y \mapsto w_t(x, y)$, $x \in B_{t-1}$ равномерно непрерывно и ограничено.

Пользуясь этим наблюдением, проверим непрерывность первого члена в разности (8.1.2), т. е. $J_1(x, Q) = \int w_t(x, y)Q(dy)$ на $B_{t-1} \times \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$.

$$\begin{aligned} J_1(x^n, Q^n) - J_1(x^*, Q^*) &= \left[\int w_t(x^n, y)Q^n(dy) - \int w_t(x^n, y)Q^*(dy) \right] + \\ &+ \int [w_t(x^n, y) - w_t(x^*, y)]Q^*(dy). \end{aligned}$$

Первое слагаемое (в квадратных скобках) стремится к нулю [138, следствие 11.3.4]; второе слагаемое стремится к нулю, поскольку подынтегральное выражение (равномерно) стремится к нулю.

Что касается непрерывности выражения $J_2(x, Q) = \sigma_{\widehat{D}_t^a(x)}\left(\int yQ(dy)\right)$, заметим, что y ограничено на компакте $K_t(B_{t-1})$, т. е. $\sup_{y \in K_t(B_{t-1})} \|y\| = A_1 < \infty$, так что $\|\int yQ(dy)\| \leq \int \|y\|Q(dy) \leq A_1$. Кроме того, поскольку многозначное отображение $x \mapsto \widehat{D}_t^a(x)$ непрерывно, то $\sup_{x \in B_{t-1}} \{\|h\| : h \in \widehat{D}_t^a(x)\} = A_2 < \infty$ [36, предложение 6.4]. С использованием [36, предложение 9.10] и [36, предложение 9.11] имеем:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\widehat{D}_t^a(x^n)}\left(\int yQ^n(dy)\right) - \sigma_{\widehat{D}_t^a(x^*)}\left(\int yQ^*(dy)\right) = \\ &= \left[\sigma_{\widehat{D}_t^a(x^n)}\left(\int yQ^n(dy)\right) - \sigma_{\widehat{D}_t^a(x^n)}\left(\int yQ^*(dy)\right) \right] + \\ &+ \left[\sigma_{\widehat{D}_t^a(x^n)}\left(\int yQ^*(dy)\right) - \sigma_{\widehat{D}_t^a(x^*)}\left(\int yQ^*(dy)\right) \right] = \\ &= A_2 \left| \int yQ^n(dy) - \int yQ^*(dy) \right| + A_1 h_\rho(\widehat{D}_t^a(x^n), \widehat{D}_t^a(x^*)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$J(x^n, Q^n) = J_1(x^n, Q^n) - J_2(x^n, Q^n) \rightarrow J_1(x^*, Q^*) - J_2(x^*, Q^*) = J(x^*, Q^*).$$

□

Пусть класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ — смешанное расширение класса чистых стратегий.⁸ Будем использовать обозначения из раздела 5.2, для удобства читателя воспроизводя их здесь.

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy]Q(dy), \quad (8.1.3)$$

⁸В соответствии с терминологией из главы 5 в смешанное расширение входят только меры с носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$, и все меры, сосредоточенные в одной точке $y \in K_t(\cdot)$.

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \inf_{h \in D_t(\cdot)} \int [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] Q(dy). \quad (8.1.4)$$

считая, что интегралы в (8.1.3) и (8.1.4) определены относительно меры Q . Величина $\rho_t(\cdot)$ входит в уравнения Беллмана—Айзека для смешанных стратегий, которые можно записать в сокращенном виде:

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot), \quad \text{для } t = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

Отметим, что в предположении 1.2.2 функции $\rho_t(\cdot)$ и $v_t^*(\cdot)$ ограничены сверху константой C .

Теорема 8.1.1. Пусть⁹ компактозначные отображения $K_t(\cdot)$ непрерывны, выпуклозначные отображения $D_t(\cdot)$ слабо непрерывны¹⁰, функции $g_t(\cdot)$ непрерывны, $t = 1, \dots, N$ и выполняется грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP. Тогда класс оптимальных смешанных стратегий $\mathcal{P}_t^{\text{opt}}(\cdot)$ является непустым выпуклым, и многозначные отображения¹¹ $x \mapsto \mathcal{P}_t^{\text{opt}}(x)$ и $x \mapsto \mathcal{P}_t^{\text{opt}}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x)) \neq \emptyset$ полунепрерывны сверху.

Доказательство. Выберем в выражениях (8.1.3) и (8.1.4) смешанное расширение $\mathcal{P}_t(x) = \mathcal{P}(K_t(x)) \subseteq \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$, для $x \in B_{t-1}$; в силу замечания 3.1.4 и предложения 3.1.1 множество $K_t(B_{t-1})$ компактно, а функции $g_t(\cdot)$ ограничены сверху на компактах B_t , $t = 1, \dots, N$. По теореме 3.1.4 функция $v_t^*(\cdot)$ из (8.1.5), полунепрерывна сверху, а значит ограничена на компакте B_t , $t = 1, \dots, N$. По предложению 5.2.3 имеет место равновесие для выбранного нами смешанного расширения, т. е. $\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot)$, где $\rho_t(\cdot)$ и $\rho'_t(\cdot)$ задаются выражениями (8.1.3) и (8.1.4), причем интегралы в этих выражениях определены. Поскольку, в силу замкнутости отображения $x \mapsto D_t(\cdot)$, множества $D_t(\cdot)$ замкнуты [171, замечание 2.12] и выполнено условие (8.1.1), в соответствии с замечанием 3.2.1 множество $\widehat{D}_t^a(\cdot) = \{h \in D_t(\cdot) : \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h) \leq a\}$, где $K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$, является компактным. По лемме 3.2.1 $D_t(\cdot)$ можно заменить на $\widehat{D}_t^a(\cdot)$, не изменяя при этом значения $\rho_t(\cdot)$; по пункту 2) предложения 5.2.3 имеет место равновесие с седловой точкой $(h_t^*(\cdot), Q_t^*(\cdot))$. С учетом предложения 5.2.1

$$\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}(K_t(x))} J(x, Q), \quad (8.1.6)$$

где $J(x, Q)$ задается формулой (8.1.2). Используя предложение 8.1.2 о непрерывности многозначного отображения $x \mapsto \mathcal{P}(K_t(x))$, предложение 3.2.3 о непрерывности многозначного отображения $x \mapsto \widehat{D}_t^a(x)$ и лемму 8.1.3 о непрерывности функционала $J = J(x, Q)$, $x \in B_{t-1}$, $Q \in \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$, мы вправе

⁹Напомним, что $K_t(\cdot) \neq \emptyset$ и $D_t(\cdot) \neq \emptyset$ (поскольку $0 \in D_t(\cdot)$).

¹⁰Полунепрерывны снизу и замкнуты.

¹¹ $\mathcal{P}^n(X)$ — класс всех вероятностных мер, сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке пространства X , не является выпуклым, если X содержит более чем $n + 1$ точку.

применить теорему Берга о максимуме (см. теорему 3.1.3), в соответствии с которой для множества $\mathcal{P}_t^{opt}(x) \subseteq \mathcal{P}(K_t(x))$ мер, для которых в (8.1.6) достигается максимум функционала J на $\mathcal{P}(K_t(x))$, соответствующее многозначное отображение $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x)$ является полунепрерывным сверху на B_{t-1} . Выпуклость $\mathcal{P}_t^{opt}(x)$ вытекает из вогнутости функционала $J(x, Q)$ по переменной Q , с учетом выпуклости класса $\mathcal{P}(K_t(x))$.

Используя лемму 8.1.1 о полунепрерывности сверху многозначного отображения $x \mapsto \mathcal{P}^n(K_t(x))$, а также [171, предложение 2.45], применимое поскольку $\mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x)) \neq \emptyset$ по теореме 7.3.2, получаем, что многозначное отображение $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$ полунепрерывно сверху. \square

Следствие 8.1.1. *Если выполняются условия теоремы 8.1.1 и для любого $x \in B_{t-1}$ множество $\mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$ состоит из единственного элемента (в частности, если максимизатор в (8.1.6) единственный; иными словами множество $\mathcal{P}_t^{opt}(x)$ содержит только одну точку), т. е.*

$$\mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x)) = \{Q^*(x, \cdot)\}, \quad (8.1.7)$$

то переходное ядро Q^* является феллеровским¹² и $Q^*(x, \cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(x))$.

Это вытекает из следующего элементарного утверждения.

Лемма 8.1.4. *Если X и Y — топологические пространства, $F : X \mapsto 2^Y$ многозначное отображение¹³, такое что для всех $x \in X$ множество $F(x)$ одноточечное, т. е. для некоторой (однозначной) функции $f : X \mapsto Y$ имеет место представление $F(x) = \{f(x)\}$, то полунепрерывность сверху¹⁴ $F(\cdot)$ равносильно непрерывности f .*

Утверждение непосредственно вытекает из [171, определение 2.1, (a)] и [171, предложение 2.5, (c)], в соответствии с которыми полунепрерывность сверху $F(\cdot)$ равносильна тому, что для любого замкнутого множества $C \subseteq Y$ множество вида $\{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\} = \{x \in X : f(x) \in C\} = f^{-1}(C)$ является замкнутым.

Возможность неединственности максимизатора в (8.1.6) показывает следующий простой пример.

Пример 8.1.1. Рассмотрим для случая отсутствия торговых ограничений одношаговую одномерную ($n = 1$) модель. Фиксируем x_0 и положим $K_1(x_0) = [a, b]$, $a < b$. Предположим, что имеется интервал $[x', x'']$, такой что:

$$1) 0 \in (x', x'') \cap (a, b);$$

¹²Отображение $x \mapsto Q^*(x, \cdot)$ является непрерывным, поэтому Q^* является переходным ядром, в соответствии с предложением 6.2.1.

¹³Здесь 2^Y обозначает множество всех подмножеств Y .

¹⁴Аналогичное утверждение имеет место, если полунепрерывность сверху для $F(\cdot)$ заменить на полунепрерывность снизу.

- 2) сужение функции выплат $g_1(\cdot)$ на $[x', x'']$ является аффинным, $g_1(x) = \alpha x + \beta$, $x \in [x', x'']$;
- 3) вне интервала $[x', x'']$ для функции выплат выполняется неравенство $g_1(x) < \alpha x + \beta$.

Тогда вогнутая оболочка $g_1^*(\cdot)$ функции $g_1(\cdot)$ совпадает с ней на $[x', x'']$ и любая мера Q с носителем $\text{supp}(Q) \subseteq [x', x'']$, имеющая нулевое среднее, т. е. $\int xQ(dx) = 0$, будет оптимальной смешанной стратегией (см. раздел 7.6).

8.2 Существование переходного ядра для оптимальных смешанных стратегий

В [5, раздел 7.4.3] рассматриваются вероятностные меры на сепарабельном метризуемом пространстве, зависящие от элементов другого сепарабельного метризуемого пространства и в [5, определение 7.12] формулируется следующее альтернативное определение переходного ядра¹⁵.

Определение 8.2.1. Пусть X и Y — сепарабельные метризуемые пространства, $Q(x, \cdot) \in \mathcal{P}(Y)$, пространство X снабжено борелевской σ -алгеброй \mathcal{B}_X , а (сепарабельное метризуемое) пространство $\mathcal{P}(Y)$ снабжено борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}_{\mathcal{P}(Y)}$. Переходным ядром Q называют измеримое отображение $x \mapsto Q(x, \cdot)$ из X в $\mathcal{P}(Y)$.

Замечание 8.2.1. Определение 8.2.1 равносильно приведенному нами выше определению 6.2.1 для случая, когда пространства X и Y снабжены борелевскими σ -алгебрами [5, предложение 7.26].

Пользуясь этим фактом, из теоремы 8.1.1 легко получается следующее утверждение.

Следствие 8.2.1. Если выполняются условия теоремы 8.1.1, то существует переходное ядро¹⁶ Q , такое что $Q(x, \cdot) \in \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$ для $x \in V_{t-1}$.

Доказательство. Многозначное отображение $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$ непрерывно сверху, поэтому оно является сильно измеримым (по Борелю), по отношению к измеримому пространству $B_0^{(n-1)}$ с σ -алгеброй его борелевских подмножеств и польскому пространству $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ с борелевской σ -алгеброй¹⁷. В

¹⁵В этой книге используется термин стохастическое ядро.

¹⁶См. определение 6.2.1.

¹⁷Мы следуем терминологии из [171, глава 2, определение 1.1]; отметим что в пункте (а) этого определения имеется опечатка. Относительно заданной σ -алгебры \mathcal{F} (в нашем случае борелевской) многозначное отображение $F(\cdot)$ называется сильно измеримым, если $F^-(C) = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap C \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$ для любого замкнутого множества $C \subseteq Y$ и $F(\cdot)$ называется измеримым, если $F^-(U) = \{\omega \in \omega : F(\omega) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$ для любого открытого множества $U \subseteq Y$. Из определений непосредственно следует, что если $F(\cdot)$ является сильно измеримым или (просто) измеримым, то $\text{dom } F = \{\omega \in \omega : F(\omega) \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$, так что в этих случаях, без ограничения общности можно считать, что $F(\cdot)$ принимает непустые значения.

нашем случае можно говорить о (просто) измеримости¹⁸ многозначного отображения $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$. Осталось применить теорему Куратовского и Риль—Нарджевского об измеримом выборе [171, глава 2, теорема 2.1]. \square

Более сильное утверждение можно получить, используя [5, предложение 7.33], которое мы сформулируем в терминах многозначных отображений следующим образом.

Теорема 8.2.1. Пусть X — метризуемое пространство, Y — компактное метризуемое пространство, $B \subseteq X$ — замкнутое множество, $F : B \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ — замкнутое многозначное отображение, функция $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$ полунепрерывна сверху, где E — график многозначного отображения F и

$$f^*(x) = \max_{y \in F(x)} f(x, y). \quad (8.2.1)$$

Обозначим множество максимизаторов в (8.2.1) через $F^*(x) = \{y \in Y : f(x, y) = f^*(x)\}$. Тогда функция f^* полунепрерывна сверху и существует измеримый по Борелю селектор многозначного отображения $F^* : B \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$, т. е. функция $\varphi : B \rightarrow Y$ со свойством:

$$f(x, \varphi(x)) = f^*(x), \quad x \in B. \quad (8.2.2)$$

Замечание 8.2.2. Полунепрерывное сверху многозначное отображение замкнуто [171, глава 1, предложение 2.22]. Если (хаусдорфово) пространство X локально компактно, то замкнутое многозначное отображение F является полунепрерывным сверху. Это вытекает из [171, глава 1, следствие 2.20] и [171, глава 1, предложение 2.23].

Для доказательства существования оптимального переходного ядра потребуется еще следующее утверждение.

Лемма 8.2.1. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, Y — сепарабельное метрическое пространство, $B \subseteq X$ — замкнутое множество, $F : B \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ — замкнутое многозначное отображение, функция $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху, где E — график многозначного отображения F . Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Множество $A = \{(x, Q) : Q \in \mathcal{P}(Y), \text{supp}(Q) \subseteq F(x)\}$ замкнуто;
- 2) Если дополнительно предположить, что пространство Y компактно, то множество $A^{(n)} = \{(x, Q) : Q \in \mathcal{P}^n(Y), \text{supp}(Q) \subseteq F(x)\}$ замкнуто, а функция $\psi(x, Q) = \int \varphi(x, y)Q(dy)$ полунепрерывна сверху на множестве $A^{(n)}$.

¹⁸В общем случае сильная измеримость влечет измеримость [171, глава 2, предложение 1.3]), но для компактозначных отображений эти два свойства совпадают [171, глава 2, предложение 1.10]).

Доказательство.

- 1) Рассмотрим направленность $(x_\alpha, Q_\alpha) \in A$, сходящуюся к (x, Q) . Поскольку в соответствии с леммой 6.2.1 многозначное отображение $Q \mapsto \text{supp}(Q)$ является полунепрерывным снизу, то для произвольной точки $y \in \text{supp}(Q)$ и заданной направленности Q_α существуют точки $y_\alpha \in \text{supp}(Q_\alpha)$, такие что $y_\alpha \rightarrow y$. В силу замкнутости графика E многозначного отображения $F : B \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ направленность (x_α, y_α) сходится к точке $(x, y) \in E$, т. е. $y \in F(x)$. Тем самым, $\text{supp}(Q) \subseteq F(x)$, так что множество A замкнуто.
- 2) По лемме 7.2.2 множество $\mathcal{P}^n(Y)$ компактно, а значит замкнуто¹⁹. Поэтому множество $A^{(n)}$, также как A , замкнуто.

Рассмотрим направленность $(x_\alpha, Q_\alpha) \in A^{(n)}$, сходящуюся к (x, Q) . Меры Q_α представимы в виде $Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} q_\alpha^i \delta_{y_\alpha^i}$, где $\{y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^{n+1}\} \subseteq F(x_\alpha)$, $(q_\alpha^1, \dots, q_\alpha^{n+1}) \in S_n$, а симплекс S_n задается формулой (7.2.2). Используя компактность симплекса S_n и пространства Y , можно выделить поднаправленность Q_{α_β} , такую что $y_\alpha^i \rightarrow y^i$, $q_\alpha^i \rightarrow q^i$, $i = 1, \dots, n+1$. Тогда $\sum_{i=1}^{n+1} q^i \delta_{y^i} = Q$, где $(q^1, \dots, q^{n+1}) \in S_n$, при этом $\{y^1, \dots, y^{n+1}\} \subseteq F(x)$ в силу замкнутости множества $A^{(n)}$. Обозначим

$$a = \limsup_{(x_\alpha, Q_\alpha) \rightarrow (x, Q)} \psi(x_\alpha, Q_\alpha), \quad b^i = \limsup_{(x_\alpha, Q_\alpha) \rightarrow (x, Q)} \varphi(x_\alpha, y_\alpha^i), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Выберем очередную поднаправленность, такую, что имеет место сходимость $\psi(x_{\alpha_\beta}, Q_{\alpha_\beta}) \rightarrow a$ и $\varphi(x_{\alpha_\beta}, y_{\alpha_\beta}^i) \rightarrow b^i$, $i = 1, \dots, n+1$. Учитывая полунепрерывность сверху функции φ на E имеем

$$\begin{aligned} a \leftarrow \psi(x_{\alpha_\beta}, Q_{\alpha_\beta}) &= \sum_{i=1}^{n+1} q_{\alpha_\beta}^i \varphi(x_{\alpha_\beta}, y_{\alpha_\beta}^i) \rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} q^i b^i \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} q^i \varphi(x, y^i) = \psi(x, Q). \end{aligned}$$

□

Теорема 8.2.2. *Предположим, что выполнено условие RNDSAUP, для $t \in [1, N]$ компактозначные отображения $K_t(\cdot)$ полунепрерывны сверху, многозначные отображения²⁰ $D_t(\cdot)$ принимают замкнутые значения и полунепрерывны снизу, функции выплат $g_t(\cdot)$ полунепрерывны сверху и пусть $R_t(x)$ — множество оптимальных (наиболее неблагоприятных) смешанных стратегий из $\mathcal{P}^n(K_t(x))$ при заданной предыстории цен²¹ $x \in B_t$. Тогда*

¹⁹Компактное множество замкнуто в любом объемлющем хаусдорфовом пространстве, в частности метризуемом, каковым является пространство вероятностных мер на Y (с борелевской σ -алгеброй).

²⁰Напомним, что $D_t(\cdot)$ принимают выпуклые значения и $0 \in D_t(\cdot)$.

²¹Множество возможных траекторий B_t задается посредством соотношения (1.2.1).

- 1) Множество $R_t(x) = \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$ оптимальных смешанных стратегий из $\mathcal{P}^n(K_t(x))$ непусто, более того, имеет место игровое равновесие и значение игры «рынок» — «хеджер» на шаге t достигается для некоторой седловой точки — оптимальной пары $h_t^*(\cdot) \in \hat{D}_t^C$ и $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(x))$, где множество \hat{D}_t^C задается посредством (3.2.4), константа C задается формулами (1.2.2) и (1.2.3). При этом значение игры конечно.
- 2) Для многозначного отображения R_t , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ существует измеримый по Борелю селектор, т. е. переходное ядро Q_t^* , такое что $Q_t^*(x, \cdot) \in R_t(x)$.

Доказательство.

- 1) Заметим, что в соответствии с предложением 3.1.1 для $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ множества возможных траекторий B_t компактно, а g_t ограничены сверху на B_t . Кроме того, в соответствии с теоремой 3.1.4 решения уравнений Беллмана—Айзека v_t^* в полунепрерывны сверху. Благодаря условию RNDSAUP, соответствии с замечанием 5.2.4, торговые ограничения можно изменить, заменив $D_t(\cdot)$ на компактное множество $\hat{D}_t^a(\cdot)$, где $a \geq C$, не изменив при этом значения $\rho_t(\cdot)$. По лемме 3.2.1: для модели с исходными торговыми ограничениями функция $h \mapsto \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]$ достигает минимального значения $\rho_t(\cdot)$ в некоторой точке $h^*(\cdot) \in \hat{D}_t^C$. Теперь, в отличие от доказательства следствия 5.2.1, применим вместо предложения 5.2.3, основанного на использовании теоремы Кнезера, теорему 7.2.1. В этой теореме в качестве X выберем непустое выпуклое компактное множество \hat{D}_t^C , в качестве Y выберем $K_t(\cdot)$, а в качестве функции²² $f(h, y) = w_t(\cdot, y) - hy$ и получим требуемое утверждение о седловой точке.
- 2) Для применения теоремы 8.2.1, используем пункт 1 данной теоремы, в соответствии с которым имеет место равновесие (5.2.6) для смешанного расширения $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$. Предложение 5.2.1 позволяет свести задачу к решению уравнений Беллмана (7.1.1), что означает на каждом шаге $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ максимизацию по $Q \in \mathcal{P}^n(K_t(x))$ для каждого $x \in B_{t-1}$ выражения

$$\chi_t(x, Q) = \int w_t(x, y)Q(dy) - \sigma_{D_t(x)} \left(\int yQ(dy) \right). \quad (8.2.3)$$

Функция w_t , связанная с v_t^* аддитивным преобразованием (Γ) , полунепрерывна сверху, поэтому применим пункт 2 леммы 8.2.1, так что функция $(x, Q) \mapsto \int w_t(x, y)Q(dy)$ полунепрерывна сверху. Поскольку многозначное отображение $D_t(\cdot)$ полунепрерывно снизу и

$$\zeta_t(x, y) = -\sigma_{D_t(x)}(y) = - \sup_{h \in D_t(x)} hy = \inf_{h \in D_t(x)} [-hy], \quad (8.2.4)$$

²²Здесь мы опускаем зафиксированные момент времени и предысторию цен.

то по теореме Берга 3.1.1 функция ζ_t в (8.2.4) полунепрерывна сверху. Учитывая компактность (а значит ограниченность) множества $K_t(B_{t-1})$, функция $Q \mapsto \int yQ(dy)$ является непрерывной (для слабой топологии). Таким образом, функция χ_t в (8.2.3) полунепрерывна сверху на множестве $A_t^{(n)} = \{(x, Q) : x \in B_{t-1}, Q \in \mathcal{P}^n(K_t(x))\}$.

Заметим также, что в соответствии с леммой 8.1.1 многозначное отображение $x \mapsto \mathcal{P}^n(K_t(x))$, имеющее компактную область определения B_{t-1} , полунепрерывно сверху.

Выберем теперь в теореме 8.2.1: в качестве X — пространство $(\mathbb{R}^n)^t$, в качестве B — множество B_{t-1} , в качестве Y — $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, в качестве $F(x)$ — множество мер $\mathcal{P}^n(K_t(x))$ (тогда графиком многозначного отображения F будет $E = A_t^{(n)}$), в качестве f — функцию χ_t и получим существование борелевски измеримого селектора $x \mapsto Q_t^*(x, \cdot) \in \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$.

Для завершения доказательства достаточно сослаться на замечание 8.2.1.

□

Замечание 8.2.3. При фиксированной начальной цене x_0 , как уже отмечалось ранее, для оптимальной смешанной стратегии рынка с переходными ядрами $Q_t^*(x, \cdot) \in \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$, $t = 1, \dots, N$ строится вероятностная мера \mathbb{Q}_{x_0} — распределение случайного процесса цен \bar{X}_N с конечным числом траекторий, не превосходящим $(n+1)^N$. При этом, по теореме 8.2.2, можно обеспечить измеримость по Борелю отображения (ядра) $x_0 \mapsto \mathbb{Q}_{x_0}$.

8.3 Свойства носителей для случая единственной оптимальной стратегии рынка, сосредоточенной не более чем в $n + 1$ точке

В данном разделе получены достаточные условия для наличия непрерывных ветвей (селекторов) у носителей оптимальных стратегий «рынка», содержащих не более чем $n + 1$ точку.

Будем предполагать далее, что $\mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$ содержит единственный элемент — меру $Q_t^*(x, \cdot)$; по следствию 8.1.1 отображение $x \mapsto Q_t^*(x, \cdot)$ непрерывно. Обозначим

$$S(x) = \text{supp}(Q_t^*(x, \cdot)) \quad (8.3.1)$$

носитель меры $Q_t^*(x)$. В соответствии с предложением 6.2.2 многозначное отображение $x \mapsto S(x)$ полунепрерывно снизу, в силу феллеровости Q_t^* .

Наиболее «правильное» поведение этого многозначного отображения $S(\cdot)$, определяемого (8.3.1), получается в случае, когда для всех x

$$|S(x)| = n + 1, \quad (8.3.2)$$

где $|A|$ — число точек в множестве A . Условие (8.3.2), где $S(\cdot)$ задается (8.3.1), будем называть условием максимальной мощности носителей.

Предложение 8.3.1. Пусть X — топологическое пространство, Y — хаусдорфово топологическое пространство, $F : X \mapsto 2^Y$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение, значения которого — непустые конечные множества. Тогда

- 1) Функция $x \mapsto |F(x)|$, $x \in X$, полунепрерывна снизу;
- 2) Если функция $x \mapsto |F(x)|$ принимает постоянное значение, то F непрерывно.

Доказательство. Фиксируем произвольные $x \in X$ и пусть $F(x) = \{y_1, \dots, y_k\}$.

Если $k = 1$, то, очевидно, $|F(x')| \geq |F(x)| = 1$ для всех $x' \in X$, так что в такой точке x свойство 1) выполняется. Что касается утверждения 2), то в случае $k = 1$ по одному из эквивалентных определений [171, предложение 2.5] многозначное отображение F полунепрерывно снизу, если для любого открытого $G \subseteq Y$ множество $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ открыто. Но $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\} = \{x \in X : f(x) \in G\} = f^{-1}(G)$, а непрерывность функции f равносильна тому, что прообразы открытых множеств открыты.

Рассмотрим теперь случай $k \geq 2$. Пусть V — произвольное открытое множество, такое что $F(x) \subseteq V$. Поскольку $F(x) = \{y_1, \dots, y_k\} \subseteq Y$, а пространство Y хаусдорфово, для каждой пары $(i, j) \in \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$, найдутся окрестности точек y_i и y_j , соответственно $V_j(y_i) \subseteq V$ и $V_i(y_j) \subseteq V$, такие что $V_j(y_i) \cap V_i(y_j) = \emptyset$. Полагая $V(y_i) = \bigcap_{j \in \{1, \dots, k\}, j \neq i} V_j(y_i)$, $i = 1, \dots, k$, получаем, что новые окрестности $V(y_i)$ точек y_i , $i = 1, \dots, k$, попарно не пересекаются. Так как F полунепрерывно снизу, для $i \in \{1, \dots, k\}$ найдутся окрестности $U_i(x)$ точки x , такие что $F(x') \cap V(y_i) \neq \emptyset$ для всех $x' \in U_i(x)$. Положим теперь $U(x) = \bigcap_{i=1}^k U_i(x)$, тогда для произвольного $x' \in U(x)$ имеем $F(x') \cap V(y_i) \neq \emptyset$, для всех $i \in \{1, \dots, k\}$. Таким образом, в каждом из k попарно непересекающихся множеств $V(y_i)$, $i = 1, \dots, k$, содержится по крайней мере одна точка множества $F(x')$ для каждого $x' \in U(x)$. Тем самым, $|F(x')| \geq |F(x)|$, откуда следует 1). Если дополнительно предположить постоянство функции $x \mapsto |F(x)|$, то множество $F(x')$ для $x' \in U(x)$ содержит ровно k точек, так что каждая из окрестностей $V(y_i)$, $i = 1, \dots, k$, содержит ровно одну точку множества $F(x')$. Поэтому $F(x') \subseteq \bigcup_{i=1}^k V(y_i) \subseteq V$ для всех $x' \in U(x)$, т. е. F полунепрерывно сверху в точке x . Тем самым, F непрерывно в точке x , т. е. утверждение 2) доказано и для $k \geq 2$. \square

Замечание 8.3.1.

- 1) В доказательстве утверждения 2) предложения 8.3.1 для $k = 1$ хаусдорфовость не используется. Кроме того, в условиях предложения 8.3.1 в случае $k = 1$ полунепрерывность снизу F можно заменить на полунепрерывность

сверху, т. е. непрерывность однозначной функции f также равносильна и этому свойству, см. лемму 8.1.4.

- 2) В доказательстве утверждения 2) предложения 8.3.1 для $k \geq 2$ фактически доказано, что для многозначного отображения F (с постоянным конечным числом элементов $F(x)$) из полунепрерывности снизу в точке вытекает его непрерывность в точке (для случая $k = 1$ это очевидно), см. определения в [171, замечание 2.4].
- 3) Утверждение 2) для случая, когда Y — метрическое пространство получено в [189, лемма 2]; в этой Лемме утверждается²³ h -непрерывность F , однако для компактозначных отображений полунепрерывность сверху (снизу) равносильна h -полунепрерывности сверху (снизу) соответственно, так что и непрерывность равносильна h -непрерывности [171, теорема 2.68].

Будем говорить, что многозначное отображение F , такое что $|F(x)| = k \geq 1$ для всех x , разлагается на несовпадающие всюду ветви, если оно представимо в виде $F(x) = \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$, где $f_i, i = 1, \dots, k$ (однозначные) функции $f_i : X \mapsto Y, f_i(x) \neq f_j(x)$ для $i \neq j, x \in X$. Следующий результат доказан в недавней статье С. Е. Жуковского [258].

Теорема 8.3.1 (Жуковский). Пусть X — линейно связное односвязное²⁴ топологическое пространство, Y — хаусдорфово пространство, $F : X \mapsto 2^Y$ — непрерывное многозначное отображение, значения которого — конечные множества, содержащие ровно $k \geq 1$ элементов. Тогда F разлагается на k несовпадающих всюду непрерывных ветвей.

Замечание 8.3.2.

- 1) Работа [258] обобщает результат [218, лемма 1], где на пространства X и Y , фигурирующие в Теореме, накладывается дополнительное требование компактности. Лемма 1 из [218], в свою очередь, опирается²⁵ на [203, лемма 4]: если X — односвязное компактное топологическое пространство, Y — компактное метрическое пространство, непрерывное многозначное отображение $F : X \mapsto 2^Y$ обладает тем свойством, что для каждого $x \in X$ множество $F(x)$ имеет ровно $k \geq 1$ связных компонент, то график этого

²³Определения полунепрерывности снизу и h -полунепрерывности снизу многозначных отображений [171, определение 2.3], [171, предложение 2.5] и [171, определение 2.60]; в общем случае h -полунепрерывность снизу влечет полунепрерывность снизу [171, предложение 2.66], а полунепрерывность сверху влечет h -полунепрерывность [171, определение 2.60] и [171, предложение 2.61].

²⁴Односвязное пространство — линейно связное пространство, фундаментальная группа которого тривиальна (состоит из единицы), т. е. замкнутые пути в нем гомотопны нулю.

²⁵При ссылке в [218] на [203, лемма 4], компактное метрическое пространство в условиях леммы заменяется автором статьи [218] на компактное хаусдорфово топологическое пространство (без объяснения).

многозначного отображения, т. е. множество $\{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$, имеет ровно k связных компонент.

- 2) Пример, приведенный в [258, замечание 2], а именно многозначное отображение $F : X \mapsto Y$, где²⁶ $X = Y = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, задаваемое соотношением $F(x) = \{y \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : y^2 = x\}$ для $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, показывает существование односвязности пространства Y .
- 3) В работе [189, теорема 2] приведено некоторое достаточное условие для того, чтобы многозначное отображение, значения которого являются конечными множествами с постоянным количеством элементов, разлагалось бы на несовпадающие всюду ветви, однако, по нашему мнению, это условие трудно проверить на практике.

Изложенные выше результаты можно резюмировать в следующем утверждении.

Предложение 8.3.2. Пусть X — линейно связное односвязное пространство, Y — хаусдорфово пространство, $F : X \mapsto 2^Y$ — многозначное отображение, значения которого — конечные множества, содержащие ровно $k \geq 1$ элементов. Тогда F разлагается на k несовпадающих всюду непрерывных ветвей если и только если F полунепрерывно снизу.

Доказательство. Достаточность вытекает из пункта 2) предложения 8.3.1 и теоремы 8.3.1.

Обратно, пусть F разлагается на несовпадающие всюду непрерывные ветви, т. е. $F(x) = \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$, где (однозначные) функции f_i непрерывны, $i = 1, \dots, k$. Многозначное отображение²⁷

$$F(x) = \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^k \{f_i(x)\} \right) = \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$$

полунепрерывно снизу [36, предложение 14.2]. □

Предложение 8.3.3. Если выполняются условия теоремы 8.1.1, а также следствия 8.1.1 (о единственности максимизатора из $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$), компакты K_0 и $K_t(x)$, $x \in B_{t-1}$ являются выпуклыми, а многозначное отображение $x \mapsto S(x)$, задаваемое формулой (8.1.7), удовлетворяет условию максимальной мощности носителя (8.3.2), то оно непрерывно и разлагается на несовпадающие всюду непрерывные ветви.

Действительно, множества B_t , $t = 0, \dots, N$, задаваемые соотношением (1.2.1), в этом случае являются выпуклыми, а значит и линейно связными, односвязными, а как уже отмечалось ранее, $x \mapsto S(x)$ полунепрерывно снизу в силу феллеровости ядра $Q_t^*(\cdot, \cdot)$, см. предложение 6.2.2.

²⁶Здесь \mathbb{C} обозначает множество комплексных чисел.

²⁷Здесь $\text{cl}(A)$ обозначает замыкание множества A .

Отметим, что условие (8.3.1) максимальной мощности носителя может не выполняться в случае невырожденности (полноразмерности) $K_t(\cdot)$, т. е. когда аффинная оболочка $K_t(\cdot)$ совпадает с \mathbb{R}^n , иными словами, носители оптимальных смешанных стратегий могут вырождаться — быть сосредоточенными в менее, чем $n + 1$ точке $K_t(\cdot)$; достаточно сослаться на пример 7.5.1, где $n = 1$. Другой пример, для $n = 2$, приведен в следующем разделе.

8.4 Выпуклость решений уравнений Беллмана

Достаточно часто возникающим на практике случаем для конкретных видов опционов является выпуклость функций g_t потенциальных выплат по обусловленному обязательству. В этом случае естественно также сделать предположение о выпуклости $K_t(\cdot)$, которое мы и будем принимать везде далее в данном параграфе. Мы покажем, что при дополнительных предположениях, сформулированных ниже, свойство наследственности выпуклости решений уравнений Беллмана—Айзека v_t^* , $t = N, \dots, 1$ справедливо для моделей специального вида, которые можно назвать обобщенными моделями Колокольцова. Пользуясь терминологией, сформулированной в параграфе 1.1, эта модель марковского типа, более того, модель мультипликативно-независимого типа. Для удобства воспроизведем описание этой модели здесь. В этом случае детерминистская динамика цен $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n) \in (0, \infty)^n$ задается в мультипликативной форме:

$$X_t^i = M_t^i X_{t-1}^i, \quad M_t = (M_t^1, \dots, M_t^n) \in C_t^*, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (8.4.1)$$

где $X_0 \in (0, \infty)^n$, а C_t^* — выпуклый компакт²⁸, $C_t^* \subseteq (0, \infty)^n$. Для целей данного раздела более удобно матричное представление динамики цен:

$$X_t = \Lambda(M_t)X_{t-1}, \quad M_t \in C_t^*, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (8.4.2)$$

где X_t в (8.4.2) понимается как вектор-столбец, $t = 0, \dots, N$; для вектора $m = (m^1, \dots, m^n) \in \mathbb{R}^n$ мы обозначаем через $\Lambda(m)$ диагональную матрицу с главными диагональными элементами равными m^1, \dots, m^n . Отметим элементарное, но полезное равенство: для двух векторов-столбцов $m = (m^1, \dots, m^n) \in \mathbb{R}^n$ и $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$

$$\Lambda(m)x = \Lambda(x)m \quad (8.4.3)$$

Используя (8.4.3), заметим, что при известной предыстории цен $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1}$ приращение цен $Y_t = \Delta X_t$ и мультипликатор M_t связаны биективным аффинным преобразованием:

$$\begin{aligned} Y_t &= \Lambda(x_{t-1})(M_t - e); \\ M_t &= e + \Lambda^{-1}(x_{t-1})Y_t, \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

²⁸Напомним, что в главах 13 и 14 из [95], Колокольцов предполагал отсутствие торговых ограничений и рассматривал случай, когда множество C_t^* является фиксированным прямоугольником.

где $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Из (8.4.4) видно, что динамика цен (8.4.2) — марковского типа, т. е. множество $K_t(\cdot)$ представимо в виде $K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = K_t^*(x_{t-1})$. где

$$K_t^*(x_{t-1}) = \Lambda(x_{t-1})(-e + C_t^*), \quad (8.4.5)$$

откуда следует выпуклость и компактность множеств $K_t^*(x_{t-1})$.

Будем везде далее предполагать, что множества C_t^* имеют непустую внутренность; из (8.4.5) следует, что выпуклые множества $K_t^*(x_{t-1})$ также имеют непустую внутренность.

Лемма 8.4.1. Пусть для обобщенной модели Колокольцова с динамикой цен, описываемой (8.4.2) и торговыми ограничениями вида

$$D_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = D_t^*(x_{t-1}) = (\Lambda(x_{t-1}))^{-1} \check{D}_t, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (8.4.6)$$

где \check{D}_t — замкнутый выпуклый конус, выполняется условие NDSA. Предположим, что функции выплат по американскому опциону $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, полунепрерывны сверху и выполняется условие (B) (ограниченность сверху функций выплат).

Тогда имеет место равновесие для смешанного расширения²⁹ $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}(K_t(\cdot))$, решения v_t^* , $t = N, \dots, 0$ уравнений (BI) принимают конечные значения и являются решениями уравнений Беллмана следующего вида³⁰

$$\begin{aligned} v_N^*(\bar{x}_N) &= g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \max_{P \in \mathcal{R}_t} \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P(dm), \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

где

$$\mathcal{R}_t = \left\{ P \in \mathcal{P}(C_t^*) : \int m P(dm) \in e + \check{D}_t^\circ \right\}, \quad (8.4.8)$$

Доказательство. Начнем с того, что выполнено условие USC. В самом деле, нетрудно убедиться в полунепрерывности снизу многозначных отображений $D_t(\cdot)$, заданных посредством (8.4.6). Что касается полунепрерывности сверху отображений $K_t(\cdot)$, то в соответствии с предложением 4.2.3 эти компактнозначные отображения, даже удовлетворяет условию Липшица относительно метрики Помпею—Хаусдорфа. Поэтому, учитывая полунепрерывность сверху функции выплат, применимо предложение 3.1.4.

Далее, условия NDSA, (B) и USC обеспечивают применимость пункта 1) предложения 5.2.3, в соответствии с которым имеет место равновесие для смешанного расширения $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}(K_t(\cdot))$. Как следствие равновесия, функции

²⁹Напомним, что $\mathcal{P}(E)$ обозначает класс всех распределений, заданных на пространстве \mathbb{R}^n , снабженном борелевской σ -алгеброй, с носителем, содержащемся в замкнутом множестве E .

³⁰Если дополнительно предположить, что функция выплат зависит только от цены в текущий момент времени, т. е. представима в виде $g_t(\bar{x}_t) = g_t^*(x_t)$, то v_t^* также зависит только от цены в текущий момент времени, т. е. представима в виде $v_t^*(\bar{x}_t) = v_t^*(x_t)$. Это следует из предложения 1.2.1, поскольку динамика цен и торговые ограничения — марковского типа.

v_s^* , $s \in \llbracket 0, N \rrbracket$ удовлетворяют уравнением Беллмана (7.1.1). Кроме того, поскольку торговые ограничения являются коническими, то, как было отмечено в пункте 2 примера 7.1.1, барьерный конус $\text{bar}(D_t(\cdot))$ совпадает с полярным конусом $(D_t(\cdot))^\circ$. А опорная функция выпуклого конуса совпадает с индикаторной функцией его полярного конуса (см., например, [40, теорема 14.1]), поэтому уравнения Беллмана (7.1.1) в данном случае приобретают вид:

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \sup_{Q \in \mathcal{Q}_t(\cdot)} \int w_t(\cdot, y) Q(dy), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \end{aligned} \quad (8.4.9)$$

где функции w_t задаются соотношением (Т), а

$$\mathcal{Q}_t(\cdot) = \left\{ Q \in \mathcal{P}(K_t(\cdot)) : \int y Q(dy) \in (D_t(\cdot))^\circ \right\}. \quad (8.4.10)$$

Условие NDSAUP в случае конических торговых ограничений совпадает с условием NDSA, поэтому в силу теоремы 5.1.1 множество $\mathcal{Q}_t(\cdot)$ непусто; кроме того, это множество компактно (в слабой топологии), поскольку полярный конус $(D_t(\cdot))^\circ$ замкнут. Поэтому точная верхняя грань в равенствах (8.4.9) достигается.

Теперь мы учтем специфику торговых ограничений и заметим, что

$$(D_t(\bar{x}_{t-1}))^\circ = \left((\Lambda(x_{t-1}))^{-1} \check{D}_t \right)^\circ = \Lambda(x_{t-1}) \check{D}_t^\circ. \quad (8.4.11)$$

Используя (8.4.11), а также соотношения (8.4.4) и (8.4.5), произведем замену переменных $y = \Lambda(x_{t-1})(m - e)$ в интегралах, фигурирующих в формулах (8.4.9) и (8.4.10), где m — новая переменная. Получим равенство

$$\begin{aligned} & \max_{Q \in \mathcal{Q}_t(\bar{x}_{t-1})} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) = \\ &= \max_{P \in \mathcal{P}(C_t^*), \int m P(dm) \in e + \check{D}_t^\circ} \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P(dm), \end{aligned} \quad (8.4.12)$$

Подставляя (8.4.12) в уравнения Беллмана (8.4.9), получаем требуемый результат. \square

Замечание 8.4.1. Учитывая (8.4.4), имеется взаимно однозначное соответствие между оптимальными смешанными стратегиями рынка Q_t^* , (распределение приращений цен при известной предыстории цен, обозначаемой точкой) и распределением мультипликатора P_t^* . При этом по пункту а) теоремы 7.3.2 максимум по Q достигается для некоторой меры $Q_t^* \in \mathcal{P}^n(K_t(x))$; этой мере отвечает в лемме 8.4.1 оптимальное распределение мультипликатора $P_t^* \in \mathcal{P}^n(C_t^*) \subseteq \mathcal{P}^*(C_t^*)$. Поэтому можно заменить класс мер (8.4.8), по которому берется максимум в формуле (8.4.7), на более узкий класс³¹

$$\mathcal{R}_t^n = \left\{ P \in \mathcal{P}^n(C_t^*) : \int m P(dm) \in e + \check{D}_t^\circ \right\}, \quad (8.4.13)$$

³¹Напомним, что $\mathcal{P}^n(E)$ обозначает класс распределений, сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке множества E .

так что максимум в формуле (8.4.7) не изменится, т. е. для $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\max_{P \in \mathcal{R}_t^n} \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P(dm) = \max_{P \in \mathcal{R}_t} \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P(dm). \quad (8.4.14)$$

Замечание 8.4.2. Если потребовать в лемме более сильное условие безарбитражности, RNDSAUP (условие RNDSAUP влечет NDSAUP, которое в случае конических торговых ограничений совпадает с условием NDSA), то применима теорема 8.2.1 о наличии измеримого по Борелю переходного ядра. Тем самым, в этом случае можно говорить уже не просто о смешанных стратегиях рынка, а об условных распределениях: $Q_{t,\cdot}^*$ — условное оптимальное распределение приращений цен в момент t при известной предыстории цен (обозначаемой точкой), а $P_{t,\cdot}^*$ — соответствующее оптимальное распределение мультипликатора.

Замечание 8.4.3. Благодаря условию NDSA, в соответствии с замечанием 5.2.8, европейский и бермудский опционы сводятся к частному случаю американского опциона, у которого в некоторые (фиксированные) моменты времени функции выплат g_t нулевые, а остальные — неотрицательные ненулевые. Тем самым, лемма 8.4.1 применима и для таких опционов.

Замечание 8.4.4. Поскольку в условиях леммы 8.4.1 множества $K_t(\cdot)$ имеют непустую внутренность, геометрический критерий RNDSAUP, описывается формулой (2.4.3). Учитывая, что в данном случае барьерный конус совпадает с полярным, используя (8.4.11), соотношения (8.4.4) и (8.4.5) получаем, что что условие RNDSAUP в лемме 8.4.1 равносильно геометрическому критерию

$$\text{int}(C_t^*) \cap (e + \check{D}_t^\circ) \neq \emptyset. \quad (8.4.15)$$

Аналогично, используя теорему 2.3.1, получаем, что условие NDSAUP, совпадающее в данном случае с условием NDSA, имеет геометрический критерий

$$C_t^* \cap (e + \check{D}_t^\circ) \neq \emptyset. \quad (8.4.16)$$

Замечание 8.4.5. Для $x \in (0, \infty)^n$ линейный оператор $h \mapsto (\Lambda(x))^{-1}h$ осуществляет покоординатное масштабирование. Для отдельной координаты оператор масштабирования (т. е. умножения на положительное число) на \mathbb{R} имеет четыре замкнутые инвариантные множества: \mathbb{R} , $[0, +\infty)$, $(-\infty, 0]$ и $\{0\}$.

Разобьем множество индексов $J = \{1, \dots, n\}$ на четыре части ³², некоторые из которых могут быть пустыми:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \quad (8.4.17)$$

³²Здесь мы используем принятые в теории вероятностей обозначения — объединение попарно непересекающихся множеств.

Если теперь в качестве конуса \check{D}_t выбрать $\prod_{i=1}^n E_i$, где

$$\begin{aligned} E_i &= \mathbb{R}, \text{ если } i \in J_1, \\ E_i &= [0, +\infty), \text{ если } i \in J_2, \\ E_i &= (-\infty, 0], \text{ если } i \in J_3, \\ E_i &= \{0\}, \text{ если } i \in J_4, \end{aligned}$$

то торговые ограничения (8.4.6) теряют зависимость от предыстории цен. Однако, ограничение на координату хеджирующей стратегии вида $h_j = 0$ означает запрет занятия позиций по j -му активу, а ограничение вида $h_j \leq 0$ означает запрет занятия длинных позиций по j -му активу; и то и другое вряд ли имеет разумную интерпретацию с экономической точки зрения. Поэтому для приложений целесообразно выбрать $J_3 = J_4 = \emptyset$. Таким образом, торговые ограничения, где по части активов имеется запрет занятия коротких позиций, получаются как частный случай торговых ограничений (8.4.6). При этом нет оснований считать, что это часть должна изменяться со временем. Иными словами, естественно считать, что такого типа торговые ограничения являются стационарными:

$$\begin{aligned} D_t(\cdot) &= \check{D}_t \equiv \prod_{i=1}^n E_i, & (8.4.18) \\ E_i &= \mathbb{R}, \text{ если } i \in J_1, \\ E_i &= [0, +\infty), \text{ если } i \in J_2, \\ \{1, \dots, n\} &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Полярный конус (совпадающий с барьерным конусом) в этом случае равен

$$(D_t(\cdot))^\circ = \check{D}_t^\circ \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : y_j = 0 \text{ если } j \in J_1 \text{ и } y_j \leq 0 \text{ если } j \in J_2\}. \quad (8.4.19)$$

Предложение 8.4.1. Пусть выполняются условия леммы 8.4.1. Тогда

- 1) Если функции потенциальных выплат $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, являются выпуклыми³³, то функции Беллмана–Айзекса v_t^* , $t = 0, \dots, N$, определяемые посредством (В), также являются выпуклыми.
- 2) Если для $t = 1, \dots, N$ выпуклость функций выплат имеет место только по последней переменной, т. е. для любого \bar{x}_{t-1} функция $x_t \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1}, x_t)$ является выпуклой³⁴, то функции $x_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_t)$ также будут выпуклыми (и полунепрерывными сверху).

³³Подразумевается, что функции $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$ заданы на всем пространстве $((0, +\infty)^n)^{t+1}$, а потому выпуклость их влечет непрерывность (см., например, [40, следствии 10.1.1]), так что условие полунепрерывности сверху функций выплат выполняется автоматически.

³⁴При этом, по условию леммы 8.4.1, функция $g_t(\cdot)$ полунепрерывна сверху.

3) Если для $t = 1, \dots, N$ и для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$ функции выплата являются монотонными по j -ой компоненте последней переменной, т. е. для любых значений \bar{x}_{t-1} и x_t^i при $i \neq j$ функция $x_t^j \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1}, x_t)$ является неубывающей (невозрастающей), $t = 1, \dots, N$,³⁵ то функции $x_t^j \mapsto v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_t)$, $t = 1, \dots, N$, также будут неубывающими (невозрастающими) и полунепрерывными сверху³⁶.

Доказательство. Докажем пункты 1) и 2) утверждения по индукции, используя лемму 8.4.1. Для $s = N$ выпуклость (выпуклость по последней переменной) функции v_s^* очевидна, поскольку $v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot)$. Пусть v_s^* является выпуклой для $s = N, \dots, t > 0$. Тогда v_{t-1}^* также является выпуклой (выпуклой по последней переменной), что непосредственно вытекает из соотношений (8.4.7), поскольку $x \mapsto \Lambda(m)x$ — линейный оператор, а интегрирование и взятие максимума сохраняет выпуклость функций.

Что касается пункта 3), то сохранение монотонности связано с тем, что j -я компонента вектора $\Lambda(m)x_{t-1}$ равна $m^j x_{t-1}^j$, а $m^j > 0$. Таким образом, утверждение о монотонности получается рассуждением по индукции из соотношений (8.4.7), поскольку интегрирование и взятие максимума сохраняет монотонность функций. \square

Замечание 8.4.6. Полученные выше результаты в этом разделе в значительной степени опираются на специальный вид модели. В общем случае, пример, построенный далее в разделе 8.5, показывает, что даже при более сильном, чем NDSA условии безарбитражности NDAO, наследственность выпуклости может нарушаться.

Рассмотрим теперь частный случай динамики цен, когда множества C_t^* , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, являются прямоугольными параллелепипедами:

$$C_t^* = \prod_{i=1}^n [\alpha_t^i, \beta_t^i], \quad 0 < \alpha_t^i < \beta_t^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.4.20)$$

Предположим, что торговые ограничения являются стационарными вида (8.4.18), т. е. состоят в запрете коротких позиций по рисковому активам с индексами из непустого множества $I = J_2 \subseteq \{1, \dots, n\}$ (для активов с индексами из дополнения I торговые ограничения отсутствуют).

Предложение 8.4.2. Пусть для модели с динамикой цен, описываемой (8.4.2) с множествами C_t^* , задаваемыми (8.4.20) и торговыми ограничениями, состоящими в запрете коротких позиций по рисковому активам с индексами из непустого множества $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ выполняется условия пункта 3) предложения 8.4.1, включая предположения леммы 8.4.1, однако с более сильным

³⁵ Отметим, что как и в предыдущем пункте данного предложения, по условию леммы 8.4.1, функция $g_t(\cdot)$ полунепрерывна сверху.

³⁶ Напомним, что полунепрерывность сверху монотонной числовой функции равносильна непрерывности справа для неубывающей функции (слева для невозрастающей).

условием безарбитражности — RNDSAUP, с неубывающими функциями выплат по каждой j -ой компоненте последней переменной истории цен к моменту t (т. е. x_t) для $j \in I$.

Тогда для $t \in \{1, \dots, N\}$ максимум в уравнениях (8.4.7) достигается для некоторой меры $P_{t,\cdot}^* \in \mathcal{R}_t^*$, где³⁷

$$\mathcal{R}_t^* = \left\{ P \in \mathcal{P}^*(C_t^*) : \int m P(dm) \in e + \check{D}_t^\circ \right\}, \quad (8.4.21)$$

такой что $\int m P_{t,\cdot}^*(dm) = e$, и решение задачи ценообразования в этом случае совпадает с решением задачи без торговых ограничений.

Доказательство. Для заданных торговых ограничений, распределение $P \in \mathcal{P}^n(C_t^*)$ принадлежит классу мер \mathcal{R}_t^n , задаваемому (8.4.13), тогда и только тогда, когда³⁸ $\int m^i P(dm) \leq 1$, если $i \in I$ и $\int m^i P(dm) = 1$ если $i \notin I$. Рассмотрим, пользуясь замечанием 8.4.1, оптимальное условное распределение мультипликатора³⁹ $P_{t,\cdot}^* \in \mathcal{R}_t^*$ и обозначим $\gamma_{t,\cdot}^i = \int m^i P_{t,\cdot}^*(dm)$. Допустим, что для некоторого $i \in I$ имеет место неравенство $\gamma_{t,\cdot}^i < 1$. Пусть $\Phi_t^i : C_t^* \rightarrow C_t^*$ — отображение, «максимизирующее» i -ую компоненту, т. е. i -ая компонента вектора $\Phi_t^i(m)$ равна β_i , а остальные компоненты Φ_t^i оставляет неизменными. Если случайный вектор M_t имеет условное распределение $P_{t,\cdot}^*$, то обозначим через $\Phi_t^i \circ P_{t,\cdot}^*$ распределение случайного вектора $\Phi_t^i(M_t)$. Для данных торговых ограничений, учитывая (8.4.19) и вид множеств C_t^* , задаваемых (8.4.20), геометрический критерий RNDSAUP для такой модели, т. е. (8.4.15) принимает следующий вид: $1 < \beta_i^i$ для $i \in I$ и $\alpha_t^i < 1 < \beta_i^i$ для $i \notin I$. Неравенства $\gamma_{t,\cdot}^i < 1 < \beta_i^i$ позволяют корректно определить вероятность

$$q_{t,\cdot}^i = \frac{\beta_i^i - 1}{\beta_i^i - \gamma_{t,\cdot}^i} \in (0, 1)$$

и задать смесь распределений

$$\widehat{P}_{t,\cdot}^i = q_{t,\cdot}^i P_{t,\cdot}^* + (1 - q_{t,\cdot}^i) \Phi_t^i \circ P_{t,\cdot}^* \in \mathcal{P}^*(C_t^*),$$

для которой $\int m^i \widehat{P}_{t,\cdot}^i(dm) = 1$. Поскольку среднее значение остальных компонент осталось неизменным, то $\widehat{P}_{t,\cdot}^i \in \mathcal{R}_t^*$. В силу предположения о монотонности, используя предложение 8.4.1 получаем неравенство

$$\int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P_{t,\cdot}^*(dm) \leq \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) \widehat{P}_{t,\cdot}^i(dm),$$

³⁷Напомним, что $\mathcal{P}^*(E)$ обозначает класс распределений, сосредоточенных на конечном множестве точек из множества E .

³⁸Обратим внимание на то, что максимум в (8.4.7) берется по классу распределений мультипликаторов, для которых процесс цен будет супермартигалом для каждого рискового актива с индексом $j \in I$ и мартигалом для $j \notin I$. Это соответствует нашей интерпретации оптимальной смешанной стратегии «рынка» как вероятностного сценария наиболее неблагоприятного поведения рынка.

³⁹См. замечание 8.4.2.

которое означает, что условное распределение мультипликатора $\widehat{P}_{t,i}^* \in \mathcal{R}_t^*$ приводит к оптимальной смешанной стратегии «рынка», причем $\int m^i \widehat{P}_{t,i}^*(dm) = 1$. Повторяя эту процедуру применительно к полученному распределению из \mathcal{R}_t^* в случае, если еще остались индексы $i \in I$, для которых имеет место неравенство $\gamma_{t,i}^i < 1$, в конечном итоге, получим условное распределение $\widehat{P}_{t,\cdot}^* \in \mathcal{R}_t^*$, с барицентром $\int m \widehat{P}_{t,\cdot}^*(dm) = e$, удовлетворяющее неравенству

$$\int v_t^*((\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P_{t,\cdot}^*(dm) \leq \int v_t^*((\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) \widehat{P}_{t,\cdot}^*(dm), \quad (8.4.22)$$

тем самым отвечающее оптимальной смешанной стратегии «рынка» — условному распределению приращений $\widehat{Q}_{t,\cdot}^* \in \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^*(K_t(x))$ при заданных торговых ограничениях.

Рассмотрим теперь модель с той же самой параметризацией динамики цен, но без торговых ограничений. Класс распределений, который задается соотношением (8.4.8) в этом случае приобретает вид $\{P \in \mathcal{P}^n(C_t^*) : \int m P(dm) = e\}$. Этот класс содержится в классе $\{P \in \mathcal{P}(C_t^*) : \int m P(dm) \in e + \check{D}_t^\circ\}$, где \check{D}_t° задается формулой (8.4.19), который дает решение задачи ценообразования для случая рассматриваемых торговых ограничений, по которому берется максимум в формуле (8.4.7). Поэтому решение задачи ценообразования без торговых ограничений не превосходит решения задачи ценообразования с соответствующими торговыми ограничениями. Однако условное распределение $\widehat{P}_{t,\cdot}^*$, максимизирующее интеграл в (8.4.7) и на классе мер $\{P \in \mathcal{P}(C_t^*) : \int m P(dm) \in e + \check{D}_t^\circ\}$, где \check{D}_t° задается формулой (8.4.19), принадлежит классу $\{P \in \mathcal{P}(C_t^*) : \int m P(dm) = e\}$, а значит доставляет максимум интеграла и на этом более узком классе.

Тем самым, решение задачи ценообразования с заданными торговыми ограничениями в данном случае совпадает с решением задачи без торговых ограничений. \square

Лемма 8.4.2. Если $X \subseteq \mathbb{R}^n$ выпуклый компакт, выпуклая функция f является полунепрерывной сверху и ограниченной на X , то для фиксированной точки $z \in X$ функционал $Q \mapsto \int f dQ$ достигает на множестве⁴⁰

$$E(z) = \left\{ Q \in \mathcal{P}(X) : \int y Q(dy) = z \right\}$$

максимального значения для некоторого распределения Q^* , сосредоточенного не более чем в $n + 1$ крайней точке X .

Доказательство. В силу полунепрерывности сверху и ограниченности f функция $Q \mapsto \int f dQ$ также является полунепрерывной сверху (для слабой топологии на $\mathcal{P}(X)$), по теореме А. Д. Александрова. В силу предложения 7.3.3 найдется Q' — распределение, сосредоточенное в $k \leq n + 1$ точках X и представимое

⁴⁰Здесь $\mathcal{P}(X)$ обозначает класс всех вероятностных мер на X (заданных на борелевской σ -алгеброй подмножеств X).

в виде $Q' = \sum_{i=1}^k q_i \delta_{x^i}$, где $q \in S_{k-1}$, $x^1, \dots, x^k \in X$, доставляющее максимум функции $Q \mapsto \int f dQ$ на (слабо) компактном множестве $E(z)$. Построим по Q' распределение Q'' , сосредоточенное в конечном числе точек из $\text{ext}(X)$, где $\text{ext}(\cdot)$ обозначает множество крайних точек. По теореме Штейница о крайних точках⁴¹ и теореме Каратеодори [26, теорема 2.4] для каждой точки x^i , $t = 1, \dots, k$ можно указать $x^{ij} \in \text{ext}(X)$ и $p_{ij} \geq 0$, $j = 1, \dots, n+1$, такие что $\sum_{j=1}^{n+1} p_{ij} = 1$, $\sum_{j=1}^{n+1} p_{ij} x^{ij} = x^i$, $t = 1, \dots, k$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int f dQ' &= \sum_{i=1}^k q_i f(x^i) = \sum_{i=1}^k q_i f\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_{ij} x^{ij}\right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k q_i \sum_{j=1}^{n+1} p_{ij} f(x^{ij}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n+1} q_{ij} f(x^{ij}) = \int f dQ'', \end{aligned}$$

где $q_{ij} = q_i p_{ij} \geq 0$ и $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n+1} q_{ij} = 1$.

Таким образом, распределение $Q'' = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n+1} q_{ij} \delta_{x^{ij}}$ также доставляет максимум для $Q \mapsto \int f dQ$ на $E(z)$, причем Q'' сосредоточено на множестве N , состоящим из конечного числа точек⁴² $\text{ext}(X)$. Однако максимум $Q \mapsto \int f dQ$ на множестве распределений, сосредоточенных на $N \subseteq \text{ext}(X)$ с заданным средним z , т. е. $\{Q \in \mathcal{P}(N), \int y Q(dy) = z\}$, где $z \in \text{conv}(N)$, достигается на распределениях, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке, используя снова предложение 7.3.3). \square

Замечание 8.4.7. Пусть функции $v_t^*(\cdot)$ (решения уравнений (VI)) являются выпуклыми всюду на \mathbb{R}^n . Тогда

- 1) Функции $v_t^*(\cdot)$ непрерывны [40, теорема 10.1] (это же относится и к выпуклым функциям выплат $g_t(\cdot)$). Поэтому условие (USC) из главы 5 выполняется и применимо предложение 5.2.2, так что имеет место равновесие со смешанным расширением $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$ и $\mathcal{P}_t^{\text{opt}}(\cdot) \neq \emptyset$.
- 2) Если максимизатор в выражении (8.1.6) единственный, т. е. $\mathcal{P}_t^{\text{opt}}(\cdot) = \{Q_t^*(\cdot)\}$ — одноточечное множество, то по лемме 8.4.2 носитель оптимальной смешанной стратегии $\text{supp}(Q_t^*(\cdot)) \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot))$, а число точек носителя $|\text{supp}(Q_t^*(\cdot))| \leq n+1$. При этом, если выполняются условия теоремы 8.1.1, то отображение $x \mapsto Q_t^*(x)$ (слабо) непрерывно, а значит $x \mapsto \text{supp}(Q_t^*(\cdot))$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение.
- 3) В случае, когда $K_t(\cdot)$ являются выпуклыми многогранниками, т. е. представим в виде выпуклой оболочки конечного числа точек⁴³, множество

⁴¹Конечномерный вариант теоремы Крейна—Мильмана [26, теорема 4.2].

⁴²Отметим, что множество крайних точек замкнуто в случае $n \leq 2$ и может быть незамкнуто в случае $n > 2$.

⁴³В соответствии с [40, теорема 19.1] полиэдральность выпуклого множества равносильна его конечнопорожденности; в случае компактности такое множество совпадает с выпуклой оболочкой конечного числа точек [26, определение 2.2].

крайних точек $\text{ext}(K_t(\cdot))$ конечно и $m = |\text{ext}(K_t(\cdot))| \geq n + 1$; из этих m точек $n + 1$ входят в носитель оптимальной смешанной стратегии.

Предложение 8.4.3. Пусть функции $v_t^*(\cdot)$ являются выпуклыми всюду на \mathbb{R}^n , а условие безарбитражности усилено до грубого условия отсутствия арбитражных возможностей RNDAO и выполнено одно из двух условий:

- 1) Множество $K_t(\cdot)$ строго выпукло⁴⁴, $t = 1, \dots, N$;
- 2) $K_t(x)$ — выпуклый многогранник с постоянным по x числом вершин⁴⁵, $t = 1, \dots, N$.
Тогда многозначное отображение $x \mapsto \mathcal{P}_t^{\text{opt}}(x) \cap \mathcal{P}^n(\text{ext}(K_t(x))) \neq \emptyset$ полунепрерывно сверху.

Доказательство. В случае, если выполнено условие 1) данного предложения, то по [36, следствие 9.2] (из теорем 9.3 и 8.1) многозначное отображение $x \mapsto \text{cl}(\text{ext}(K_t(\cdot)))$ будет h -непрерывным⁴⁶. В общем случае можно лишь гарантировать, что это отображение h -полунепрерывно снизу⁴⁷, однако, в случае, если выполнено условие 2) данного предложения, используя [189, лемма 2], получаем h -непрерывность для $x \mapsto \text{ext}(K_t(x))$. По теореме 8.1.1 многозначное отображение $x \mapsto \mathcal{P}^{\text{opt}}(x)$ полунепрерывно сверху. Далее, аналогично концу доказательства теоремы 8.1.1, используя лемму 8.1.1, получаем полунепрерывность сверху многозначного отображения $x \mapsto \mathcal{P}^n(\text{ext}(K_t(x)))$, а также, используя [171, глава 1, предложение 2.45], применимое поскольку $\mathcal{P}_t^{\text{opt}}(x) \cap \mathcal{P}^n(\text{ext}(K_t(x))) \neq \emptyset$ по теореме 8.1.1, получаем, что многозначное отображение $x \mapsto \mathcal{P}_t^{\text{opt}}(x) \cap \mathcal{P}^n(\text{ext}(K_t(x)))$ полунепрерывно сверху. \square

Предложение 8.4.4. Пусть функции $v_t^*(\cdot)$ являются выпуклыми всюду на \mathbb{R}^n , отсутствуют торговые ограничения, выполняется условие NDSA отсутствия гарантированного арбитража, функции $g_t(\cdot)$ выпуклые, а $K_t(\cdot)$ являются выпуклыми многогранниками, $t = 1, \dots, N$.

- 1) Если выполняется условие:

$$\text{для любого } A \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot)), \text{ такого что } |A| \leq n, \text{ выполняется} \quad (\text{IN})$$

$$0 \notin \text{ri}(\text{conv}(A)),$$

то:

- а) Найдется оптимальная смешанная стратегия $Q_t^*(\cdot)$ с нулевым средним и $\text{supp}(Q_t^*(\cdot)) \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot))$, удовлетворяющая условию максимальной мощности носителя, т. е. $|\text{supp}(Q_t^*(\cdot))| \equiv n + 1$;

⁴⁴Множество A называется строго выпуклым, если для любых $x, y \in A$ и $\lambda \in (0, 1)$ имеет место $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \text{int}(A)$, т. е. граница множества A не содержит отрезков (и совпадает с множеством крайних точек).

⁴⁵Множество вершин выпуклого многогранника совпадает с множеством его крайних точек.

⁴⁶Для компактозначных отображений h -непрерывность и непрерывность равносильны [171, теорема 2.68].

⁴⁷См., например, соответствующее построение в [36, пример 9.2].

- б) Компакты $K_t(\cdot)$ являются полноразмерными (телесными), т. е. $\dim K_t(\cdot) = n$;
- в) Выполняется условие робастного отсутствия арбитражных возможностей RNDAO.
- 2) Если, кроме того, в $\mathcal{P}_t^{opt}(\cdot)$ — единственный элемент, т. е. $\mathcal{P}_t^{opt}(\cdot) = \{Q_t^*(\cdot)\}$, компактозначные отображения $K_t(\cdot)$ непрерывны, $t = 1, \dots, N$, то многозначное отображение $x \mapsto \text{supp}(Q_t^*(\cdot))$ разлагается на n несовпадающих всюду непрерывных ветвей, причем каждая из ветвей является вершиной одного из содержащегося в $K_t(\cdot)$ n -симплекса⁴⁸, внутренности которого принадлежит⁴⁹ точка 0.

Доказательство.

- 1) В случае отсутствия торговых ограничений условия NDSAUP и NDSA эквивалентны; поэтому $\rho'_t(\cdot) > -\infty$, более того, $\rho'_t(\cdot) \geq 0$ (см. замечание 5.2.7, пункт 4)). Так как в соответствии с пунктом 1 замечания 8.4.7 имеет место игровое равновесие, т. е. $\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot)$, более того $\mathcal{P}_t^{opt}(\cdot) \neq \emptyset$, то найдутся оптимальные смешанные стратегии рынка которые максимизируют выражение (5.2.9). Используя лемму 8.4.2, получаем, что найдется оптимальная смешанная стратегия $Q_t^*(\cdot)$ с нулевым средним, с носителем $\text{supp}(Q_t^*(\cdot)) \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot))$ и $|\text{supp}(Q_t^*(\cdot))| \leq n + 1$. С другой стороны, для оптимальной смешанной стратегии с нулевым средним, т. е. $\int y Q_t^*(dy) = 0$, по [151, теорема 1.49] должно выполняться $0 \in \text{ri}(\text{conv}(\text{supp}(Q_t^*(\cdot))))$; из условия (IN) вытекает поэтому $|\text{supp}(Q_t^*(\cdot))| \geq n + 1$. Тем самым, благодаря условию (IN), получаем, что для этой смешанной стратегии $|\text{supp}(Q_t^*(\cdot))| = n + 1$.

Обозначим $n' = \dim(\text{supp}(Q_t^*(\cdot)))$; так как $\text{supp}(Q_t^*(\cdot)) \subseteq K_t(\cdot)$, то $n' \leq \dim K_t(\cdot) \leq n$. Допустим, что $n' < n$. По Теореме Каратеодори найдутся не более чем $n' + 1$ точек x_1, \dots, x_k из $S(x)$, таких что $0 \in \text{conv}(\{x_1, \dots, x_k\})$; при этом найдутся натуральное $m \leq k$ и числа $q_{i_1} > 0, \dots, q_{i_m} > 0$, $\sum_{j=1}^m q_{i_j} = 1$, такие что $\sum_{j=1}^m q_{i_j} x_{i_j} = 0$, т. е. $0 \in \text{ri}(\text{conv}(\{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}))$; что противоречит предположению (IN). Следовательно $n' = n$. Но тогда и $\dim K_t(\cdot) = n$, т.е. $K_t(\cdot)$ — полноразмерные. Поскольку $\dim(\text{supp}(Q_t^*(\cdot))) = \dim K_t(\cdot)$, и $\int y Q_t^*(dy) = 0$, то по предложению 5.3.1 выполняется условие NDAO отсутствия арбитражных возможностей, что эквивалентно $0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) = \text{ri}(K_t(\cdot))$. Наконец, из полноразмерности $K_t(\cdot)$ следует $\text{ri}(K_t(\cdot)) = \text{int}(K_t(\cdot))$, а значит $0 \in f(K_t(\cdot))$, что равносильно условию RNDAO.

- 2) Используя предложение 8.3.3, получаем, что для $Q_t^*(\cdot)$, найденного в пункте 1) доказательстве, выполняется условие непрерывности отобра-

⁴⁸Под n -симплексом понимается телесный многогранник в \mathbb{R}^n с $n + 1$ вершинами (являющимися крайними точками этого многогранника).

⁴⁹Таких n -симплексов может быть несколько.

жения $x \mapsto \text{supp}(Q_t^*(\cdot))$, так что это многозначное отображение разлагается на $n + 1$ непрерывных несовпадающих всюду ветвей, $\text{supp}(Q_t^*(\cdot)) = \{y_t^1(\cdot), \dots, y_t^{n+1}(\cdot)\} \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot))$, причем $0 \in \int(\text{conv}(\{y_t^1(\cdot), \dots, y_t^{n+1}(\cdot)\}))$, а $\text{conv}(\{y_t^1(\cdot), \dots, y_t^{n+1}(\cdot)\})$ является симплексом. □

Проиллюстрируем в предположениях пункта 1 предложения 8.4.1 поведение носителей оптимальной смешанной стратегии⁵⁰ $Q_{t,\cdot}^*$, сосредоточенной в крайних точках $K_t(\cdot)$, на примере описанной в начале этого параграфа двумерной модели Колокольцова (т. е. для $n = 2$) в предположении отсутствия торговых ограничений.

Пример 8.4.1. Динамика рынка описывается соотношениями:

$$\begin{aligned} X_t^1 &= M_t^1 X_{t-1}^1, & M_t^1 &\in [\alpha^1, \beta^1]; \\ X_t^2 &= M_t^2 X_{t-1}^2, & M_t^2 &\in [\alpha^2, \beta^2]. \end{aligned}$$

В этом случае $K_t(\cdot)$ — прямоугольник; для $i = 1, 2$ обозначим $a^i(x_{t-1}) = x_{t-1}(\alpha^i - 1)$, $b^i(x_{t-1}) = x_{t-1}(\beta^i - 1)$, тогда

$$K_t(\bar{x}_{t-1} = K_t(x_0, \dots, x_{t-1})) = [a^1(x_{t-1}), b^1(x_{t-1})] \times [a^2(x_{t-1}), b^2(x_{t-1})].$$

Предположим, что выполняется условие RNDAO. Для носителя $S_t(\cdot)$ смешанной стратегии, сосредоточенной в крайних точках, т. е. вершинах прямоугольника $K_t(\cdot)$, условие RNDAO исключает случай $|S_t(\cdot)| = 1$; оно также исключает для случая $|S_t(\cdot)| = 2$ возможность, чтобы носитель $S_t(\cdot)$ состоял из концов какой-либо стороны прямоугольника; таким образом, если носитель $S_t(\cdot)$ сосредоточен в двух точках, то эти точки — концы диагонали (замкнутые отрезки, соединяющие противоположные вершины прямоугольника $K_t(\cdot)$). Условимся называть диагональ, соединяющую точки $(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))$ и $(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))$, положительной, а другую диагональ, соединяющую точки $(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))$ и $(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))$ — отрицательной⁵¹. Далее, нетрудно проверить, что точка $\mathbf{0} = (0, 0)$ лежит на положительной диагонали, если и только если

$$\frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \alpha^2} \in (0, 1); \quad (8.4.23)$$

обозначим это число через p . Точка $\mathbf{0} = (0, 0)$ лежит на отрицательной диагонали, если и только если

$$\frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} = \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \in (0, 1); \quad (8.4.24)$$

⁵⁰Теперь для оптимальной смешанной стратегии нам будет удобнее использовать обозначение $Q_{t,\cdot}$, вместо $Q_t(\cdot)$.

⁵¹Это название выбрано в связи с тем, что для распределения с носителем из двух или трех крайних точек $K_t(\cdot)$, содержащим данную диагональ, случайные величины — компоненты случайного вектора с этим распределением — имеют положительный или отрицательный коэффициент корреляции соответственно.

обозначим это число q . Если точка $\mathbf{0} = (0, 0)$ лежит на пересечении диагоналей, т. е. (8.4.23) и (8.4.24) выполняется одновременно, то $p = q = 1/2$. Еще четыре возможных варианта возникают для случая $|S_t(\cdot)| = 3$. Это отвечает случаю, когда оба соотношения (8.4.23) и (8.4.24) не выполняются, т. е.

$$\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \alpha^2} \neq \frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} \neq \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (8.4.25)$$

Для данного примера это в точности условие (IN)⁵² из предложения 8.4.4. Отметим, что коэффициенты α^1 , β^1 , α^2 и β^2 — параметры модели рынка и не связаны со значениями функций выплат. Резюмируя различные случаи, получаем, что оптимальная смешанная стратегия, сосредоточенная не более чем в трех крайних точках (вершинах) $K_t(\cdot)$, будет сосредоточена:

- 1) В двух точках, когда (8.4.23) и (8.4.24) выполняются одновременно, т. е. $\mathbf{0} = (0, 0)$ лежит на пересечении диагоналей, при этом две точки всегда лежат на одной из диагоналей;
- 2) В двух или в трех точках, если выполнено либо (8.4.23), либо (8.4.24), т. е. точка $\mathbf{0} = (0, 0)$ лежит на одной из диагоналей, при этом две точки всегда лежат на одной из диагоналей;
- 3) В трех точках, если соотношения (8.4.23) и (8.4.24) не выполняются оба, т. е. выполняется (8.4.25); в этом случае выполняется условие (IN).

Для того, чтобы определить оптимальную смешанную стратегию с $S_t(\cdot) \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot))$ и $|S_t(\cdot)| \leq 3$, необходимо привлечь информацию о значениях функции Беллмана $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ в вершинах прямоугольника $K_t(\cdot)$. В соответствии с результатами главы 7, разделы 7.5 и 7.6, построим вогнутую оболочку функции $y \mapsto w_t(\cdot, y)$. Для этого достаточно определить «доминирующую» диагональ, проверяя в точке пересечения диагоналей значения аффинных функций, заданных на диагоналях значениями функции Беллмана $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ в концах соответствующей диагонали, т. е. сравнивая

$$\frac{1}{2} \left[w_t(\cdot, (a^1(\bar{x}_{t-1}), a^2(\bar{x}_{t-1}))) + w_t(\cdot, (b^1(\bar{x}_{t-1}), b^2(\bar{x}_{t-1}))) \right] \quad (8.4.26)$$

(значение для положительной диагонали) и

$$\frac{1}{2} \left[w_t(\cdot, (a^1(\bar{x}_{t-1}), b^2(\bar{x}_{t-1}))) + w_t(\cdot, (b^1(\bar{x}_{t-1}), a^2(\bar{x}_{t-1}))) \right] \quad (8.4.27)$$

(значение для отрицательной диагонали). Доминирующей диагональю будет та, для которой значение одного из двух выражений (8.4.26) и (8.4.27) окажется большим; в случае совпадения (8.4.26) и (8.4.27) вогнутая оболочка функции Беллмана будет аффинной функцией.

⁵²С учетом того что точка $\mathbf{0} = (0, 0)$ не является вершиной прямоугольника $K_t(\cdot)$ и не лежит на его сторонах.

В соответствии с результатами статьи [141] телесный многогранник M_k в \mathbb{R}^n с k вершинами ($k \geq n + 1$) может быть представлен в виде симплициальной декомпозиции — объединения⁵³ $k - n$ подмножеств, n -симплексов⁵⁴ с вершинами, являющимися вершинами многогранника, так, чтобы внутренности этих n -симплексов были бы непересекающимися. Для нашего примера таких декомпозиций две: в одном варианте это деление положительной диагональю на два 3-симплекса (т. е. треугольника) и отрицательной диагональю на два других 3-симплекса (треугольника); соответственно, условимся называть эти декомпозиции положительной и отрицательной.

Если одно из выражений (8.4.26) и (8.4.27) строго больше другого, то, тем самым, выделяется конкретная декомпозиция, отвечающая доминирующей диагонали, а вогнутая оболочка представляет собой кусочно-аффинную функцию, аффинную на треугольниках, одна из сторон которых — доминирующая диагональ. Напомним, что в соответствии с результатами из разделов 7.5 и 7.6 значение $\rho'_{t-1}(\cdot)$ определяется как значение вогнутой оболочки функции $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ в точке $y = 0$; по теореме 5.3.1 при выполнении 1.2.2 имеет место равновесие в классе смешанных стратегий, сосредоточенных в конечном числе точек. Отметим, что поскольку RNDAO влечет NDSA, то европейской опцион сводится к частному случаю американского опциона, когда $g_t(\cdot) \equiv 0$ для $t = 1, \dots, N - 1$ и $g_N = g$, где g — терминальная функция выплат (см. рассуждения после замечания 5.2.7). Таким образом, в случае

$$\begin{aligned} w_t(\cdot, (a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))) + w_t(\cdot, (b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))) > \\ > w_t(\cdot, (a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))) + w_t(\cdot, (b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))) \end{aligned} \quad (8.4.28)$$

доминирует положительная диагональ. Если выполняется (8.4.23), т. е. $\mathbf{0} = (0, 0)$ находится на положительной диагонали, то

$$Q_{t, \bar{x}_{t-1}}^* = p\delta_{(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))} + (1 - p)\delta_{(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))}.$$

Если точка $\mathbf{0} = (0, 0)$ находится во внутренности треугольника, одна сторона которого — положительная диагональ и с вершиной $(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))$, т. е. «верхний треугольник», а это выполняется в случае, если

$$\frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} > \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \alpha^2},$$

то

$$Q_{t, \bar{x}_{t-1}}^* = p_1\delta_{(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))} + p_2\delta_{(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))} + p_3\delta_{(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))},$$

⁵³Это минимально возможное количество n -симплексов в симплициальной декомпозиции.

⁵⁴По n -симплексом понимается телесный многогранник в \mathbb{R}^n с $n + 1$ вершиной.

где

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1 - \alpha^1}{\beta^1 - \alpha^1} > 0, \\ p_2 &= \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \alpha^2} > 0, \\ p_3 &= 1 - p_1 - p_2 > 0. \end{aligned}$$

Если же точка $\mathbf{0} = (0, 0)$ находится во внутренности другого треугольника из данной декомпозиции прямоугольника, т. е. «нижнего», что выполняется, если

$$\frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} < \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \alpha^2},$$

то

$$Q_{t, \bar{x}_{t-1}}^* = p'_1 \delta_{(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))} + p'_2 \delta_{(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))} + p'_3 \delta_{(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))},$$

где

$$\begin{aligned} p'_1 &= \frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} > 0, \\ p'_2 &= \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} > 0, \\ p'_3 &= 1 - p'_1 - p'_2 > 0. \end{aligned}$$

Если же выполняется

$$\begin{aligned} w_t(\cdot, (a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))) + w_t(\cdot, (b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))) < \\ < w_t(\cdot, (a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))) + w_t(\cdot, (b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t+1}))), \end{aligned} \quad (8.4.29)$$

то доминирует отрицательная диагональ. Аналогично предыдущему случаю, если выполнено (8.4.24), т. е. точка $\mathbf{0} = (0, 0)$ находится на отрицательной диагонали, то

$$Q_{t, \bar{x}_{t-1}}^* = q \delta_{(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))} + (1 - q) \delta_{(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))}.$$

Если

$$\frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} > \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2},$$

то точка $\mathbf{0} = (0, 0)$ лежит внутри треугольника с вершинами $(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))$, $(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))$ и $(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))$, т. е. находится в «нижнем» треугольнике, и тогда

$$Q_{t, \bar{x}_{t-1}}^* = q_1 \delta_{(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))} + q_2 \delta_{(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))} + q_3 \delta_{(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))},$$

где

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} > 0, \\ q_2 &= \frac{1 - \alpha^1}{\beta^1 - \alpha^1} > 0, \\ q_3 &= 1 - q_1 - q_2 > 0. \end{aligned}$$

Если

$$\frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} < \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2},$$

то точка $\mathbf{0} = (0, 0)$ лежит в «верхнем» (от отрицательной диагонали) треугольнике, вершинами которого являются точки $(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))$; $(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))$ и $(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))$, и тогда

$$Q_{t, \bar{x}_{t-1}}^* = q_1' \delta_{(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))} + q_2' \delta_{(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))} + q_3' \delta_{(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))},$$

где

$$\begin{aligned} q_1' &= \frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} > 0, \\ q_2' &= \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \alpha^2} > 0, \\ q_3' &= 1 - q_1' - q_2' > 0. \end{aligned}$$

Наконец, в случае равенства

$$\begin{aligned} &w_t(\cdot, (a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))) + w_t(\cdot, (b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))) = \\ &= w_t(\cdot, (a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))) + w_t(\cdot, (b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))), \end{aligned} \quad (8.4.30)$$

поскольку вогнутая оболочка функции Беллмана является аффинной, то оптимальная смешанная стратегия с носителем $S_t(\cdot) \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot))$ неединственна: любая вероятностная мера с носителем, описанным выше в случаях 1), 2) и 3), и с нулевым средним будет оптимальной.

Тем самым, определяющим в данном случае является положение точки $\mathbf{0} = (0, 0)$. Если выполняется (IN), т. е. (8.4.25), то $\mathbf{0}$ лежит во внутренности пересечения двух треугольников, одного из положительной декомпозиции прямоугольника, а другого — из отрицательной⁵⁵. Если выполнено либо (8.4.23), либо (8.4.24), то соответственно оптимальные распределения сосредоточены в двух точках диагонали, на которой лежит точка $\mathbf{0} = (0, 0)$, либо же в вершинах одного из треугольников, одна из сторон которого — противоположная диагональ. Если же и (8.4.23), и (8.4.24) выполняются одновременно, т. е. точка

⁵⁵В этом случае, очевидно, подходят два варианта носителя, сосредоточенного в трех вершинах прямоугольника.

$\mathbf{0} = (0, 0)$ лежит на пересечении диагоналей, то распределение, сосредоточенное в концах одной из диагоналей и приписывающее ее концам вероятности $1/2$, будет оптимальным.

С алгебраической точки зрения, условия (8.4.28), (8.4.29) и (8.4.30) можно интерпретировать как условия⁵⁶ строгой супермодулярности, строгой субмодулярности и модулярности функции $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ на решетке⁵⁷ из четырех крайних точек $K_t(\cdot)$ с покоординатным сравнением, т. е. для $y = (y^1, y^2)$ и $z = (z^1, z^2)$ сравнимость $y \leq z$ имеет место, если $y^1 \leq y^2$ и $z^1 \leq z^2$.

В качестве альтернативы геометрическому подходу, основанному на построении вогнутой оболочки, можно использовать простое вероятностное рассуждение. Обозначим через $\mathfrak{M}_t(\cdot)$ класс всех распределений с нулевым средним, таких что носитель распределения сосредоточен в двух или трех крайних точках прямоугольника $K_t(\cdot)$. Если $Q \in \mathfrak{M}_t(\cdot)$ и $\text{supp}(Q)$ содержит концы недоминирующей диагонали, то в $\mathfrak{M}_t(\cdot)$ найдется распределение Q' с большим значением функции Беллмана. Пусть $\pi > 0$ — минимальная вероятность из двух точек недоминирующей диагонали; обозначим соответствующую точку диагонали y_1 , другую точку этой диагонали — y_2 , а y_3 — остающуюся точку носителя $\text{supp}(Q)$, лежащую на доминирующей диагонали. Представим Q в виде⁵⁸

$$Q = \pi\delta_{y_1} + \pi\delta_{y_2} + (1 - 2\pi)Q_1,$$

причем $\text{supp}(Q_1) \subseteq \{y_2, y_3\}$ благодаря выбору π . Тогда, если y_4 — еще одна точка доминирующей диагонали, то распределение

$$Q' = \pi\delta_{y_3} + \pi\delta_{y_4} + (1 - 2\pi)Q_1$$

имеет нулевое среднее и носитель $\text{supp}(Q') \subseteq \{y_2, y_3, y_4\}$. Очевидно

$$\begin{aligned} \int w_t(\cdot, y)Q(dy) - \int w_t(\cdot, y)Q'(dy) &= \\ &= \pi[(w_t(\cdot, y_1) + w_t(\cdot, y_2)) - (w_t(\cdot, y_3) + w_t(\cdot, y_4))] < 0. \end{aligned}$$

Замечание 8.4.8.

- 1) Наблюдаемое в приведенном выше примере «вырождение» $|S_t(\cdot)| = 2$ не является «случаем общего положения»; малое «шевеление» одного из параметров α^1 , β^1 , α^2 или β^2 приводит к оптимальной смешанной стратегии с $|S_t(\cdot)| = 3$.
- 2) Эффект, наблюдаемый в примере 8.4.1, в случае, когда точка $\mathbf{0}$ лежит на пересечении диагоналей, характерен для размерности $n \geq 2$. Это определенным образом связано с теоремой Штейница [242]: если $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и

⁵⁶Определения можно найти, например, в книге [220, определение 2.3.1].

⁵⁷См. например, книгу [6, глава 1, раздел 1, раздел 4].

⁵⁸Если $\pi = 1/2$, то в качестве Q_1 можно взять произвольное распределение с $\text{supp}(Q_1) \subseteq \{y_2, y_3\}$; в случае $\pi < 1/2$ распределение Q_1 определено однозначно.

$x \in f(\text{conv}(A))$, то найдется $2n$ точек A , т. е. $\{x_1, \dots, x_{2n}\} \subseteq A$, таких что $x \in f(\text{conv}(\{x_1, \dots, x_{2n}\}))$. В случае $n = 1$ имеем $n + 1 = 2n$, а при $n \geq 2$ имеем $n + 1 < 2n$. В примере 8.4.1 (для $n = 2$) нельзя гарантировать, что точка 0 , лежащая во внутренней выпуклой оболочке четырех точек, будет лежать во внутренней оболочке каких-нибудь трех из четырех точек.

- 3) В работе [185] рассматривается задача гарантированного суперхеджирования для мультипликативной модели рынка марковского типа (см. терминологию в разделе 1.1), при отсутствии торговых ограничений. Для европейского опциона “rainbow” функция выплат $g(\cdot)$ зависит в [185] только от цен рискованных активов в терминальный момент времени N , т. е. для некоторой функции ψ имеет место представление

$$g(\bar{x}_N) = \psi(x_N). \quad (8.4.31)$$

Отметим, что для такого опциона, а также для американского опциона, функции потенциальных выплат $g_t(\cdot)$ представимы в виде

$$g_t(\bar{x}_t) = \varphi_t(x_t), \quad t = 1, \dots, N, \quad (8.4.32)$$

для некоторых функций φ_t , случайный процесс, отвечающий условным распределениям $P(X_t \in A | \bar{X}_t = \bar{x}_t) = Q_{t, \bar{x}_t}^*$, будет марковским. В работе [185] получены явные формулы для решений, когда выполнено (8.4.31) в двумерном случае ($n = 2$) в предположении⁵⁹ выпуклости функции выплат g (в терминальный момент) и ее субмодулярности. В [172], когда выполнено (8.4.31), получены явные решения для аналогичной задачи в трехмерном случае ($n = 3$), в предположении субмодулярности функции выплат. В главе 13 из [95] (написанной В. Н. Колокольцовым) приводится основная теорема 13.2 для n -мерного случая, когда выполнено (8.4.31). При этом функция Беллмана сохраняет свойство субмодулярности, которое выполняется для ряда опционов⁶⁰, например, “best of asset or cash”, “call on max”, “multistrike”, для которых также выполнено (8.4.31), что позволяет выделить нужные варианты из смешанных стратегий — «кандидатов на оптимальность». Аналогичная задача решается для субмодулярных функций в [193], однако авторы не ссылаются ни на одну из трех упомянутых выше работ, касающихся субмодулярности.

Особо простая ситуация, когда функции $v_t^*(\cdot)$ являются выпуклыми всюду на \mathbb{R}^n , возникает в одномерном случае, т. е. когда $n = 1$. В этом случае $K_t(\cdot) = K_t^*(\cdot)$ имеет вид $[a_t(\cdot), b_t(\cdot)]$, где $a_t(\cdot) \leq b_t(\cdot)$. Вогнутая оболочка выпуклой на замкнутом интервале $[a, b]$ функции f совпадает с аффинной функцией, совпадающей с f в крайних точках этого интервала:

$$f^*(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \quad (8.4.33)$$

⁵⁹Кроме того, в [185] накладывається условие монотонности функции выплат.

⁶⁰Выражения для функций выплат этих (и других) опционов приведены в таблице в конце данной главы.

Таким образом, максимум функционала $Q \mapsto \int f dQ$ при ограничении $\int y Q(dy) = z \in (a, b)$ достигается для распределения, сосредоточенного на множестве $\{a, b\}$ крайних точек интервала $[a, b]$. Этот факт был впервые замечен, по-видимому, в первом издании книги Дана и Жанблан—Пике 1994 года (второе издание [127]).

Поэтому в случае, когда функции $v_t^*(\cdot)$ являются выпуклыми всюду на \mathbb{R}^n и отсутствуют торговые ограничения можно легко выписывать уравнения Беллмана с оптимальной стратегией рынка $Q_{t,\cdot}^*$, сосредоточенных в крайних точках отрезков $K_t(\cdot) = K_t^*(\cdot)$ (см. формулу (7.6.2)):

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \int w_t(\cdot, y) Q_{t,\cdot}^*(dy), \quad t = N, N-1, \dots, 1, \end{aligned} \quad (8.4.34)$$

а также соответствующие хеджирующие стратегии.

Пример 8.4.2. Рассмотрим мультипликативную модель из примера 2.2.2 из главы 2 (в одномерном случае, при отсутствии торговых ограничений), предполагая условие безарбитражности NDAO. Предположим, что функции потенциальных выплат g_t , $t = 1, \dots, N$ являются выпуклыми. Тогда наиболее неблагоприятным сценарием смешанной стратегией рынка будет случай, когда условные распределения приращений цен ΔX_t сосредоточены в точках $x_t(\alpha - 1)$ и $x_t(\beta - 1)$ с вероятностями q_- и q_+ , определяемыми системой линейных уравнений, которая в данном случае имеет вид:

$$\begin{aligned} q_- x_t(\alpha - 1) + q_+ x_t(\beta - 1) &= 0, \\ q_- + q_+ &= 1, \end{aligned}$$

откуда $q_- = \frac{(1-\alpha)}{(\beta-\alpha)}$, $q_+ = \frac{(\beta-1)}{(\beta-\alpha)}$. Напомним, что условие NDAO в данном случае равносильно $\alpha < 1 < \beta$, так что q_- и q_+ лежат в интервале $(0, 1)$, что отвечает их вероятностной интерпретации. Отметим, что при этом совместное распределение случайной величины $M_t = \frac{X_t}{X_{t-1}}$ для $t = 1, \dots, N$ автоматически получается таким, что они независимы⁶¹. Это связано с тем, что ограничения на M_t имеют вид $M_t \in [\alpha, \beta]$, не зависящий от предыстории цен, т. е. динамика цен относится к мультипликативно-независимому типу.

Уравнения Беллмана (8.4.34) принимают вид:

$$\begin{aligned} v_N^*(x_0, \dots, x_N) &= g_N(x_0, \dots, x_N), \\ v_{t-1}^*(x_0, \dots, x_{t-1}) &= g_{t-1}(x_0, \dots, x_{t-1}) \vee \\ &\vee [q_- v_t^*(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}\alpha) + \\ &+ q_+ v_t^*(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}\beta)], \end{aligned} \quad (8.4.35)$$

⁶¹ Другими словами, имеет место независимость логарифмических приращений.

где $t = 1, \dots, N$. При этом с учетом 8.4.33 оптимальной стратегией хеджирования $h_t(\cdot)$ на шаге t будет

$$h_t^*(x_0, \dots, x_{t-1}) = \frac{1}{x_{t-1}(\beta - \alpha)} [g_{t-1}(x_0, \dots, x_{t-1}) \vee v_t^*(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}\beta) - g_{t-1}(x_0, \dots, x_{t-1}) \vee v_t^*(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}\alpha)]. \quad (8.4.36)$$

В случае опционов европейского типа, когда $g_1 = \dots = g_{N-1} = 0$, $g_N = g$ — выпуклая функция, получаем разностные уравнения:

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= q_- v_t^*(\cdot, x_{t-1}\alpha) + q_+ v_t^*(\cdot, x_{t-1}\beta), \quad t = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (8.4.37)$$

а (8.4.36) упрощается до формулы

$$h_t^*(\cdot) = \frac{1}{x_{t-1}(\beta - \alpha)} [v_t^*(\cdot, x_{t-1}\beta) - v_t^*(\cdot, x_{t-1}\alpha)].$$

В частности, для опционов европейского типа с функцией выплат в терминальный момент N вида $g(\bar{x}_N) = (x_N - B(\bar{x}_N))_+$, т. е. опциона на покупку (call) по цене исполнения $B(\bar{x}_t)$, зависящей от траектории цен \bar{x}_t , или же $g(\bar{x}_N) = (S(\bar{x}_N) - x_N)_+$, т. е. опциона на продажу (put) по цене исполнения $S(\bar{x}_t)$, зависящий от траектории цен \bar{x}_t , условия выпуклости g выполняется, например, для азиатских опционов, опционов “lookback” и обычных (plain vanilla) опционов. В случае азиатского опциона $B(\bar{x}_N) = S(\bar{x}_N) = \frac{1}{N+1} \sum_{t=0}^N x_t$, для опциона “lookback” $B(\bar{x}_N) = \bigwedge_{t=0}^N x_t$ и $S(\bar{x}_N) = \bigvee_{t=0}^N x_t$, а для “plain vanilla” опционов $B(\bar{x}_N)$ и $S(\bar{x}_N)$ являются константами.

Отметим, что для азиатских опционов и опционов “lookback”, если обозначить $A_t = \frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^t x_s$, $L_t = \bigwedge_{s=0}^t x_s$ и $N_t = \bigvee_{s=0}^t x_s$, то процессы (X_t, A_t) , (X_t, L_t) и (X_t, N_t) являются марковскими, и в разностных уравнениях (8.4.37) для азиатского опциона и опциона “lookback” достаточно оставить всего по две переменные вместо всей траектории цен. Например, для опциона “lookback” на покупку разностные уравнения (8.4.37) можно представить в виде

$$v_t^*(x_0, \dots, x_t) = v_t \left(x_t, \bigwedge_{s=0}^t x_s \right),$$

где v_t удовлетворяют рекуррентным уравнениям для $t = N, N-1, \dots$:

$$\begin{aligned} v_N(x_N, l_N) &= (x_N - l_N)_+, \\ v_{t-1}(x_{t-1}, l_{t-1}) &= q_- v_t(x_{t-1}\alpha, l_t \wedge x_{t-1}\alpha) + q_+ v_t(x_{t-1}\beta, l_t \wedge x_{t-1}\beta), \\ & \quad t = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Отметим также, что модель движения цен, отвечающая независимым M_t , $t = 1, \dots, N$, принимающим значения α и β с вероятностями q_- и q_+ , будет совпадать с моделью Кокса—Росса—Рубинштейна⁶², если x_0 фиксировано и числа

⁶²Называемой также биномиальной моделью, см. [125].

α и β связаны соотношением $\alpha\beta = 1$; преимущество модели Кокса—Росса—Рубинштейна состоит в том, что происходит рекомбинация на решетке в логарифмическом масштабе, т. е. случайные величины $Z_t = \ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) = \sum_{s=1}^t \ln M_s$, $t = 1, \dots, N$, принимают значения из решетки⁶³ $\{kd, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, где $d = \ln \beta = -\ln \alpha$. Это сокращает число значений случайной величины Z_t с 2^t до $t + 1$. При этом вероятность того, что Z_t принимает значение kd равна⁶⁴ $C_t^{(t+k)/2} q_+^{(t+k)/2} q_-^{(t-k)/2}$. Отметим, что в нашем случае можно добиться рекомбинации, потребовав, чтобы числа $\ln \alpha$ и $\ln \beta$ были бы рационально соизмеримы, т. е. чтобы их отношение $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ было бы рациональным числом $r = -\frac{n}{m}$, где n и m — взаимно простые натуральные числа (т. е. дробь $\frac{n}{m}$ является несократимой). Определяя шаг d как $d = \frac{\ln \beta}{m} = -\frac{\ln \alpha}{n}$, получаем, что все значения случайной величины Z_t , $t = 0, 1, \dots$ (без ограничения по времени) лежат на решетке $\{kd, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, и не существует меньшей подрешетки, на которой бы лежали все возможные значения Z_t , поскольку n и m — взаимно простые.⁶⁵ Поскольку любое вещественное число можно приближать рациональными числами вида $\frac{n}{m}$ с точностью, не превосходящей $\frac{1}{m}$, исходную задачу с заданными α и β можно заменить на близкую к ней с α' и β' , где α' и β' будут рационально соизмеримы.

С точки зрения численных алгоритмов, рекомбинация имеет смысл для опционов “lookback”, но лишена смысла для азиатских опционов, поскольку в первом случае цена исполнения остается на решетке, а во втором случае — нет. □

Замечание 8.4.9. В одномерном случае вышеупомянутое свойство (8.4.33) для выпуклой функции выплат по опциону, при отсутствии торговых ограничений и выполнении условия отсутствия арбитражных возможностей NDAO, допускает следующую экономическую интерпретацию для одношаговой задачи. Покупку опциона с выпуклыми функциями потенциальных выплат можно трактовать как «покупку волатильности», поскольку она защищает от наиболее «неблагоприятного» сценария — самого «волатильного» движения цен, когда приращения цен принимают значения в крайних точках отрезков, задающих ограничения (во всяком случае, если волатильность измерять при помощи средне-квадратического отклонения приращения цен, то среди всех риск-нейтральных вероятностей максимум этого показателя достигается именно в данном случае). Покупка же опциона с вогнутой функций выплат можно трактовать как «продажу волатильности», как защиту от наиболее «неблагоприятного» сценария — отсутствия ценовой волатильности — для соответствующих риск-нейтральных вероятностей приращения цен нулевые (с нулевым показателем волатильности — средне-квадратичным отклонением приращений цен).

Можно привести достаточно много примеров опционов “rainbow”, т. е. ко-

⁶³ Решетка образует дискретную аддитивную подгруппу группы \mathbb{R} .

⁶⁴ Здесь C_n^k — биномиальный коэффициент, число сочетаний из n по k .

⁶⁵ См., например, [9].

гда количество рискованных активов больше единицы⁶⁶ с выпуклыми функциями потенциальных выплат. К таким опционам, например, относятся европейские опционы “rainbow” из таблицы 8.1.

Таблица 8.1: Примеры европейских опционов “rainbow” с выпуклыми функциями выплат.

Название	Функция выплат
“Best of asset or cash”	$\max(S_1, S_2, \dots, S_n, K)$
“Call on max”	$\max(\max(S_1, S_2, \dots, S_n) - K, 0)$
“Put on min”	$\max(K - \min(S_1, S_2, \dots, S_n), 0)$
“Put 2 and Call 1”	$\max(S_1 - S_2, 0)$
“Multi-strike”	$\max(S_1 - K_1, S_2 - K_2, \dots, S_n - K_n, 0)$
“Pyramid”	$\max(S_1 - K_1 + S_2 - K_2 + \dots + S_n - K_n - K, 0)$
“Madonna”	$\max(\sqrt{(S_1 - K_1)^2 + \dots + (S_n - K_n)^2} - K, 0)$

Для этих опционов применим описанный выше подход.

Разумеется, имеются опционы, функции которых не являются ни выпуклыми, ни вогнутыми. Таковые легко получаются в виде комбинаций длинных и коротких позиций по европейским опционам call и put с одинаковыми сроками для исполнения, например, коллар (collar). Бинарные (binary, digital) опционы дают другой пример таких опционов, причем с разрывной функцией выплат. Примерами опционов rainbow с функциями выплат, не являющимися выпуклыми, могут служить европейские опционы rainbow из таблицы 8.2.

Таблица 8.2: Примеры европейских опционов “rainbow” с функциями выплат, не являющимися выпуклыми.

Название	Функция выплат
“Call on min”	$\max(\min(S_1, S_2, \dots, S_n) - K, 0)$
“Put on max”	$\max(K - \max(S_1, S_2, \dots, S_n), 0)$

8.5 Возможное вырождение оптимальных смешанных стратегий рынка при нарушении структурной устойчивости как причина разрывности цены суперхеджирования

В этом параграфе предполагается отсутствие торговых ограничений. Результаты этого параграфа были бы уместны в главе 3, поскольку показывают возможность разрывной цены суперхеджирования при нарушении структурной

⁶⁶В переводе с английского rainbow — радуга; количество рискованных активов также называют количеством цветов (радуги).

устойчивости модели. Однако используемые здесь методы опираются на анализ поведения наиболее неблагоприятных (оптимальных) смешанных стратегий «рынка».

Для построения нужного примера достаточно рассматривать одношаговую модель. Из теоремы 3.1.4 вытекает, что функция v_0^* полунепрерывна сверху, если K_0 компактно, а многозначное отображение $K_1(\cdot)$ непрерывно. Однако, если выполняется условие NDAO, но при этом условие RNDAO не выполняется, функция v_0^* может быть разрывной, причем аналогичное поведение цены суперхеджирования⁶⁷ может наблюдаться и при вероятностной постановке задачи суперхеджирования⁶⁸.

Пример 8.5.1. В самом деле, рассмотрим одношаговую модель с двумя рисковыми активами (без торговых ограничений). Выберем две точки $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ на плоскости \mathbb{R}^2 , такие что отрезок с концами $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$, т. е. $S = \text{conv}(\{y^{(1)}, y^{(2)}\}) \subseteq \mathbb{R}^2$, содержит точку 0 в относительной внутренности, т. е. $0 \in \text{ri}(S)$. Фиксируем вектор⁶⁹ $l \in (\text{lin}(S))^\perp \cap S_1(0)$ и обозначим замкнутое полупространство с нормальным вектором l через $\bar{H}_l = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle l, y \rangle \geq 0\}$.

Положим $\delta(x) = \rho(x, \bar{H}_l) \wedge 1$, $\epsilon(x) = (\rho(x, \bar{H}_l))^2 \wedge 1$ и выберем компактное многозначное отображение $K_1(\cdot)$ в виде

$$K_1(x) = \{z^{(0)}(x), z^{(1)}(x), z^{(2)}(x)\},$$

где

$$z^{(0)}(x) = -\delta(x)l, \quad z^{(1)}(x) = y^{(1)} + \epsilon(x)l, \quad z^{(2)}(x) = y^{(2)} + \epsilon(x)l.$$

Заметим, что функции $z^{(0)}(\cdot)$, $z^{(1)}(\cdot)$ и $z^{(2)}(\cdot)$ непрерывны⁷⁰ на \mathbb{R}^2 , а на \bar{H}_l являются постоянными: $z^{(0)}(x) \equiv 0$, $z^{(1)}(x) \equiv y^{(1)}$, $z^{(2)}(x) \equiv y^{(2)}$. Многозначные отображение $K_1(\cdot)$ непрерывно, поскольку используя [171, глава 1, теорема 1.15], имеем неравенства:

$$\begin{aligned} h_\rho(K_t(x'), K_t(x)) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |\rho(y, K_t(x')) - \rho(y, K_t(x))| = \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^2} \left[\bigwedge_{i=1}^3 \|y - z^{(i)}(x')\| - \bigwedge_{i=1}^3 \|y - z^{(i)}(x)\| \right] \leq \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^2} \bigvee_{i=1}^3 \left| \|y - z^{(i)}(x')\| - \|y - z^{(i)}(x)\| \right| \leq \bigvee_{i=1}^3 \|z^{(i)}(x') - z^{(i)}(x)\| = \\ &= |\delta(x') - \delta(x)| \vee |\epsilon(x') - \epsilon(x)|. \end{aligned}$$

⁶⁷Цена суперхеджирования — калька с общепринятого английского термина “superhedging price”. С экономической точки зрения, такое название, однако, неудачно. Точнее было бы говорить не о ценах, а о (минимальных) резервах на текущий момент, требуемых на покрытие обусловленного обязательства по проданному опциону.

⁶⁸Поскольку в этом случае цена суперхеджирования определена с точностью до почти верное, имеется в виду отсутствие ее непрерывного варианта.

⁶⁹Здесь имеется всего лишь два варианта выбора вектора l .

⁷⁰Функция $x \mapsto \rho(x, A)$ для замкнутого множества A является липшицевой, с константой, равно единице (см., например, [36, лемма 5.1]).

Заметим, что при $x \notin \bar{H}_l$ множество $\text{conv}(K_1(x))$ представляет собой треугольник, во внутренности которого лежит точка 0, а если $x \in \bar{H}_l$, то $\text{conv}(K_1(x)) \equiv S$ и $0 \in \text{ri}(S)$, так что, в соответствии с геометрическим критериям Жакода—Ширияева выполняется условие NDAO, но условие RNDAO не выполняется (нарушается на S).

В качестве K_0 выберем выпуклый компакт, такой что его внутренность $\text{int}(K_0)$ имеет непустое пересечение как с полупространством \bar{H}_l , так и с его дополнением (которое является открытым полупространством). Чтобы обеспечить положительность цен, потребуем, чтобы точка $y^{(1)}$ лежала бы в открытом квадранте $(0, +\infty)^n$ (тогда, нетрудно видеть, можно выбрать K_0 соответствующим образом).

Пусть $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая неотрицательная функция (а, значит, непрерывная), такая что для $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = 1$, $q_1 y^{(1)} + q_2 y^{(2)} = 0$ имеет место неравенство

$$q_1 f(x, y^{(1)}) + q_2 f(x, y^{(2)}) > f(x, 0) \quad (8.5.1)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Определим функцию выплат $g_1 = g$ (также выпуклую) посредством соотношения

$$g(x_0, x_1) = f(x_0, x_1 - x_0). \quad (8.5.2)$$

Оптимальная смешанная стратегия $Q_1^*(x, \cdot)$ (для которой в правой части (7.3.20) достигается максимум, равный $v_0^*(x)$), сосредоточена в трех точках $K_1(x)$, когда $x \notin \bar{H}_l$ и в двух крайних точках $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ отрезка $\text{conv}(K_1(x)) = S$ когда $x \in \bar{H}_l$. Как мы уже видели в доказательстве теоремы, для оптимальных смешанных стратегий условие риск-нейтральности $\int y Q_1^*(x, dy) = 0$ для $x \notin \bar{H}_l$ влечет $q_0^*(x) = Q_1^*(x, \{0\}) > 0$ и $q_0^*(x)\epsilon(x) - (1 - q_0^*(x))\delta(x) = 0$, откуда $q_0^*(x) = \frac{1}{1 + \epsilon(x)/\delta(x)}$. Поэтому $v_0^*(x) = \int f(x, y) Q_1^*(x, dy) \rightarrow f(x, 0)$ для $x \in K_0$, $x \notin \bar{H}_l$ когда $\rho(x, \bar{H}_l) \rightarrow 0$. С другой стороны, для $x \in \bar{H}_l$ оптимальная смешанная стратегия принимает постоянное значение $Q_1^*(x, \cdot) = q_1^* \delta_{y^{(1)}} + q_2^* \delta_{y^{(2)}}$, где q_1^* и q_2^* положительны и однозначно определяется из условия риск-нейтральности, так что

$$v_0^*(x) = \int f(x, y) Q_1^*(x, dy) = q_1^* f(x, y^{(1)}) + q_2^* f(x, y^{(2)}) > f(x, 0). \quad (8.5.3)$$

Таким образом, функция v_0^* разрывна на $K_0 \cap \{y \in \mathbb{R}^n : \langle l, y \rangle = 0\}$.

Далее построим вероятностную модель, связанную с рассмотренной детерминистской. Выберем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ следующим образом. Положим пространство элементарных событий Ω равным компактному $B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$, множеству всех возможных траекторий, и снабдим его σ -алгеброй борелевских подмножеств Ω . Выберем распределение $P = P_{X_0}$ случайного вектора начальных цен X_0 , и переходное ядро Q , где $Q_1(x, \cdot)$ интерпретируется как условное распределение случайного вектора $X_1 - X_0 = \Delta X_1$ приращений цен при известном $X_0 = x$, такие что выполняются условие сопоставимости,

которое представляет собой соотношение между стохастическими и детерминистскими моделями:

$$\text{supp}(P) = K_0, \quad \text{supp}(Q_1(x, \cdot)) = K_1(x), \quad x \in B_0.$$

Мера \mathbb{P} может быть интерпретирована как совместное распределение векторов $X_0, \Delta X_1$, соответствующее паре P и Q ⁷¹.

Любая эквивалентная мартингаловая мера $\mathbb{P}' \sim \mathbb{P}$ определена посредством задания маргинального распределения X_0 начальных цен $P' \sim P$ и переходного ядра Q' , представляющего собой условное распределение приращение цен ΔX_1 при заданном $X_0 = x$:

$$Q'(x, \cdot) = q^{(0)}(x)\delta_{z(0)}(x) + q^{(1)}(x)\delta_{z(1)}(x) + q^{(2)}(x)\delta_{z(2)}(x)$$

где P — почти наверное $q^{(i)}(x) > 0$, $i = 1, 2, 3$; без ограничения общности мы можем предполагать положительность этих вероятностей для всех $x \in K_0$. Для $x \notin \bar{H}_1$ вероятности $q^{(i)}(x) > 0$, $i = 1, 2, 3$ однозначно определяются посредством мартингалового свойства и $Q'(x, \cdot) = Q_1^*(x, \cdot)$, в то время как для $x \in \bar{H}_1$ возникает семейство переходных ядер⁷² параметризованное посредством (измеримой) функции $p : \bar{H}_1 \rightarrow (0, 1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Q'(x, \cdot) &= p(x)\delta_0 + (1 - p(x))(q_1^*\delta_{y(1)} + q_2^*\delta_{y(2)}) = \\ &= p(x)\delta_0 + (1 - p(x))Q_1^*(x, \cdot), \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

где вероятности $q_1^* > 0$, $q_2^* > 0$ однозначно определяются уравнениями $q_1^* + q_2^* = 1$ и $q_1^*y^{(1)} + q_2^*y^{(2)} = 0$. Рассмотрим функцию выплат g определяемую посредством (8.5.2) и обозначим через $v(x)$ величину премии при условии $X_0 = x$, рассчитанную с использованием «вероятностного» подхода, основываясь на построенном вероятностном пространстве. Напомним, что величина $v(x)$ равна существенному супремуму по множеству эквивалентных мартингаловых мер для условного математического ожидания $g(X_0, X_1)$ при условии $X_0 = x$, где g определяется посредством (8.5.2) (см., например, [151, глава 7]). Чтобы найти эту величину, достаточно рассмотреть только случай $x \in \bar{H}_1$ и максимизировать, в соответствии с (8.5.4), выражение

$$\begin{aligned} p(x)f(0) + (1 - p(x)) \int f(y)Q_1^*(x, dy) = \\ = p(x)f(0) + (1 - p(x))[q_1^*f(x, y^{(1)}) + q_2^*f(x, y^{(2)})]. \end{aligned}$$

Учитывая (8.5.1), ясно, что для этой цели следует выбирать $p(x)$ поближе к нулю. В конечном итоге, используя (8.5.3) получаем $v(x) = v^*(x)$ для почти всех x относительно меры $P = P_{X_0}$, и функция v не имеет непрерывного варианта.

⁷¹Мы описываем вероятность в стиле Кассиуса Ионеску Тулча, ссылаясь на теорему из [174] (хотя эта теорема про счетные произведения измеримых пространств, она справедлива также и для конечных произведений), а не на теорему Фубини, как это почему-то делается в работах посвященных робастному подходу к суперхеджированию, начиная с [105].

⁷²Данный пример, таким образом, относится к неполным рынкам [177, теорема 6].

Замечание 8.5.1. Мы заметили, что предложение про непрерывность цены суперхеджирования как функции предистории цен, не является справедливым, если не усилить предположения [115, раздел 3.2, предложение 3.7]. Используя нашу терминологию, мы можем сформулировать результат этого утверждения в эквивалентной форме следующим образом. В [115] рассматривается модель без торговых ограничений. Начальные цены предполагается фиксированными, $X_0 = x_0$; это частный случай нашей постановки, в которой мы предполагаем, что вектор начальных цен и принимает значения в множестве $F_0 = K_0$. Обозначим

$$F_t(x) = x + K_t(x), \quad x \in B_{t-1}, \quad t = 1, \dots, N. \quad (8.5.5)$$

Смотрим семейства многозначных отображений $F_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$ и семейство \mathcal{P}_t стохастических ядер P_t , $t = 1, \dots, N$; мера $P_t(\bar{x}_{t-1}, \cdot)$ интерпретируется как условное распределение вектора X_t при известной предистории цен $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$. Мера P_0 интерпретируется как маргинальное распределение X_0 . Соответствующая вероятность \mathbb{P} может быть определена при помощи конструкции Ионеску Тулча. Будем говорить что выполняются условия сопоставимости (соотношение между стохастическими и детерминистскими моделями) если

$$\text{supp}(P_t(x, \cdot)) = F_t(x), \quad x \in B_{t-1}, \quad t = 1, \dots, N \quad \text{и} \quad \text{supp}(P_0) = F_0. \quad (8.5.6)$$

Предположения из [115, предложение 3.7] заключаются в следующем.

- 1° Многозначные отображения $F_t(\cdot)$ принимают компактные значения и равномерно ⁷³ непрерывны.
- 2° Функция выплат g по европейскому опциону является непрерывной;
- 3° Выполняется условие отсутствия арбитража квази-наверное (quasi-sure)⁷⁴ по отношению к семейству \mathcal{P}_t , состоящему из всех ядер удовлетворяющих условию сопоставимости (8.5.6), для $t = 1, \dots, N$.

Утверждение из [115, предложение 3.7] состоит в том, что при выполненных условиях 1°, 2°, и 3°, и

- а) Цена суперхеджирования V_t , $t = 0, \dots, N$, понимаемая квази-наверное, совпадает с ценой суперхеджирования, понимаемой почти наверное;
- б) Функции $V_t = v_t(\bar{X}_t)$ являются непрерывными⁷⁵ для $t = 1, \dots, N$.

⁷³Предположение о *равномерной* непрерывности многозначных отображений избыточно. На самом деле, оно используется лишь для аргументов из множества возможных траекторий B_{t-1} , которое является компактным;

⁷⁴В рассматриваемом случае это условие равносильно условию NDAO, в нашей терминологии.

⁷⁵Это вербальное выражение из [115]; более корректно в данном случае говорить о том, что функция $v_t(\cdot)$ допускает непрерывный вариант.

Наш пример 8.5.1 проясняет природу ошибки* в данном утверждении и показывает, что условия NDAO недостаточно для непрерывности цены суперхеджирования. С другой стороны, при отсутствии торговых ограничений, если предположение 1° усилить до условия RNDAO, т. е. потребовать структурную устойчивость, предполагая также, что функции (потенциальных) выплат для американского опциона⁷⁶ g_t и многозначные отображения $K_t(\cdot)$ непрерывны⁷⁷, $t = 1, \dots, N$, то по теореме 3.2.2 (а также по теореме 4.2.1 и предложению 4.2.2, доказанным более конструктивным образом, с оценкой модуля непрерывности) решения v_t^* уравнений Беллмана—Айзекса (БИ) непрерывны для $t = 1, \dots, N$. При тех же предположениях (гарантирующих непрерывность v_t^* для $t = 1, \dots, N$), по теореме 9.2.1 решения v_t^* уравнений (БИ) совпадает с ценой суперхеджирования американского опциона для вероятностной модели, удовлетворяющей условию сопоставимости 8.5.6. В качестве следствия получаем⁷⁸, что при сделанных выше предположениях цена суперхеджирования для вероятностной постановки задачи допускает непрерывный вариант. Отметим также что предложение 3.8 из [115] справедливо, потому что условие RNDAO выполнено.

В исправлениях (Erratum) [114] к статье [115], для того чтобы получить (в предположении NDAO) непрерывность цены суперхеджирования (как функции от предьстории цен) авторы предложили дополнительное предположение к [115, предложение 3.7], касающееся многозначного отображения $L_t(\cdot) = \text{lin}(K_t(\cdot))$:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} L(x_k) \subseteq L(x) \text{ если } x_k \rightarrow x. \quad (8.5.7)$$

Здесь верхний предел понимается в смысле Куратовского. Заметим, что в метрических пространствах предположение (8.5.7) равносильно замкнутости многозначного отображения⁷⁹ $L_t(\cdot)$.

Сформулируем этот результат в наших терминах и обозначениях.

Теорема 8.5.1 (Карассюс—Обой—Висел).

Предположим, что выполняются следующие условия.

- 1° *Компактозначные отображения $K_t(\cdot)$ непрерывны; начальная цена лежит в компакте K_0 ;*
- 2° *Функция выплат $g(\cdot)$ по европейскому опциону непрерывна;*

⁷⁶В частности, чтобы включить рассмотрение европейского опциона, как частный случай американского опциона, можно положить $g_t \equiv 0$ для $t = 1, \dots, N$ — для этого достаточно выполнения условия NDSA, вытекающего из NDAO, а тем более из RNDAO.

⁷⁷Непрерывность для многозначных отображений $K_t(\cdot)$ и $F_t(\cdot)$, связанных посредством формулы (8.5.5), выполняется одновременно. Напомним также, что для компактозначных отображений непрерывность равносильна h -непрерывности (т. е. непрерывности по отношению к метрике Помпею—Хаусдорфа [171, глава 1, теорема 2.68]).

⁷⁸Наши доказательства длиннее, чем доказательство в [115, предложение 3.7], зато являются более конструктивными.

⁷⁹Напомним, что это означает замкнутость графика многозначного отображения.

3° Выполнено условие отсутствия арбитражных возможности NDAO;

4° Многозначное отображение $\text{lin}(K_t(\cdot))$ замкнуто.

Тогда цены суперхеджирования $v_t^*(\cdot)$, $t = 0, \dots, N$ европейского опциона является непрерывными.

Замечание 8.5.2. Легко видеть, что в примере 8.5.1 (с разрывной ценой суперхеджирования) предположения 1°, 2°, 3° теоремы 8.5.1 выполнены, а предположение 4° — нет.

Мы утверждаем, что теорема 8.5.1 является следствием теоремы 3.2.2 о непрерывности решений уравнений Беллмана—Айзека для модели рынка с торговыми ограничениями. Достаточно рассмотреть новую модель с вмененными «естественными» торговыми ограничениями, задаваемые посредством равенств $D_t(\cdot) = \text{lin}(K_t(\cdot))$, $t = 1, \dots, N$. Мы называем такие торговые ограничения естественными, поскольку невозможно добиться лучшего результата в хеджировании, используя стратегии, лежащие вне данных торговых ограничений.

Будем предполагать везде далее в этом разделе, что условия NDAO выполнено. В силу геометрического критерия Жакода—Ширяева (2.2.7) для NDAO, аффинная оболочка $K_t(\cdot)$ совпадает с ее линейной оболочкой $\text{lin}(K_t(\cdot))$; обозначим $L_t(\cdot) = \text{lin}(K_t(\cdot))$. Если размерность $\dim(L_t(\cdot))$ меньше чем n , рассмотрим представление стратегии $h \in \mathbb{R}^n$: $h = h' + h''$, где $h' \in L_t(\cdot)$, $h'' \in L_t^\perp(\cdot)$, а $L_t^\perp(\cdot)$ — ортогональное дополнение к $L_t(\cdot)$. Тогда для $h \in \mathbb{R}^n$, $y \in \text{conv}(K_t(\cdot))$ имеем⁸⁰ $hy = h'y$, так что постановка задачи с вмененными торговыми ограничениями $D_t(\cdot) \equiv L_t(\cdot)$ имеет такое же решение, как и (BI) без торговых ограничений.

Мы установим, как следствие теоремы 3.2.2⁸¹, результат, касающийся американских опционов, аналогичный теореме 8.5.1; отсюда можно легко получить теорему 8.5.1. Нам потребуется следующий простое утверждение.

Лемма 8.5.1. *Полунепрерывность снизу многозначного отображения $F(\cdot)$, определенного на хаусдорфовом топологическом пространстве, с ненулевыми значениями в топологическом векторном пространстве, влечет полунепрерывность снизу многозначного отображения $\text{lin}(F(\cdot))$.*

Доказательство. Рассмотрим направленность $x_\alpha \rightarrow x$ и вектор $z \in \text{lin}(F(x))$. Такой вектор представим виде линейной комбинации $\sum_{i=1}^k \lambda_i y^i$, where $y^i \in F(x)$.

⁸⁰Напомним, что hy обозначает скалярное произведение.

⁸¹Напомним, что в соответствии с этой теоремой, для непрерывности цены суперхеджирования американского опциона достаточно непрерывности компактозначных отображений $K_t(\cdot)$, непрерывности функций потенциальных выплат $g_t(\cdot)$, замкнутости и полунепрерывности снизу торговых ограничений $D_t(\cdot)$ и выполнения робастного условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP.

В соответствии с [171, глава 1, предложение 2.6, пункт (е)], найдутся направленности $y_\alpha^i \in F(x_\alpha)$, такие что $y_\alpha^i \rightarrow y^i$ для $i = 1, \dots, k$. Поэтому для направленности $z_\alpha = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_\alpha^i \in \text{lin}(F(x_\alpha))$ имеет место сходимость $z_\alpha \rightarrow z$. Требуемый результат, таким образом, вытекает из цитированного выше предложения. \square

Теорема 8.5.2. *Предположим, что условия 1° , 3° и 4° , фигурирующие в теореме 8.5.1, выполнены. Кроме того, предположим, что выполнено следующее условие.*

$2^\circ a$) Функции потенциальных выплат $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$ по американскому опциону непрерывны.

Тогда цены суперхеджирования $v_t^(\cdot)$, $t = 0, \dots, N$ по американскому опциону будут непрерывны.*

Доказательство. Рассмотрим новую модель с вмененными торговыми ограничениями $D_t(\cdot) = L_t(\cdot)$. Тогда по предположению 4° многозначные отображения $D_t(\cdot)$ замкнуты, а по предположению 1° и лемме 8.5.1 эти многозначные отображения полунепрерывны снизу. В соответствии с замечанием 2.3.1, для конических торговых ограничений условия барьерный конус $\text{bar}(D_t(\cdot))$ совпадает с полярным конусом $D_t^\circ(\cdot)$; в рассматриваемом случае этот конус будет ортогональным дополнением $L_t^\perp(\cdot)$ к подпространству $L_t(\cdot)$. Нетрудно видеть, что условие NDAO для исходной модели влечет условие RNDSAUP для новой системы (с вмененными торговыми ограничениями). Это следует как из геометрического критерия (2.4.1), так и из альтернативного геометрического критерия, представленного в теореме 2.4.2 — трансверсальность пересечения $\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$ и $\text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot)))$ здесь особенно наглядна. Таким образом, мы проверили выполнение всех условий теоремы 3.2.2 для новой модели, с вмененными торговыми ограничениями. \square

Замечание 8.5.3. Откровенно говоря, структурная устойчивость новой модели (с вмененными торговыми ограничениями) носит формальный, искусственный характер. Условие RNDSAUP здесь необходимо просто для применения математического результата. На самом деле, в соответствии с нашей интерпретацией, множества $K_t(\cdot)$ должны описывать неопределенность движения цен, что может определяться как объективной информацией (например, статистического характера), так и субъективным мнением аналитика, так что естественно считать, что задание этих множеств не может носить точный характер. В то же время, по нашей интерпретации, торговые ограничения должны задаваться точно, на основе априорных правил. В случае же новой модели, вмененные торговые ограничения определяются через $K_t(\cdot)$ и значит, вообще говоря, изменяются вместе с изменениями $K_t(\cdot)$, тем самым, возможно, задаются неточно. Исключением будет случай, когда отображения $x \mapsto \text{lin}(K_t(x))$ постоянны; если при этом размерность данного подпространства меньше числа n рисков

активов, то в модели присутствуют избыточные активы, а после их удаления будет выполняться условие RNDAO, которое уже может быть интерпретировано как настоящая структурная устойчивость.

В соответствии с замечанием 5.2.8, при выполнении условия NDSA (которое вытекает из условия NDAO) задача суперхеджирования для европейского опциона сводится к соответствующей задаче для американского опциона. Для этого достаточно положить $g_t(\cdot) \equiv 0$ for $t = 1, \dots, N - 1$ и $g_N(\cdot) = g(\cdot)$. Тем самым, теорема 8.5.1 является непосредственным следствием теоремы 8.5.2, которая, в свою очередь, является простым следствием теоремы 3.2.2.

Нам потребуется несколько простых результатов, для того, чтобы установить определенные свойства размерности пространств $\text{lin}(K_t(\cdot))$.

Лемма 8.5.2. Пусть E — k -мерное евклидово пространство, а y^1, \dots, y^k — ортонормированный базис в E . Если для векторов $\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^k$ из E выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^k \|\tilde{y}^i - y^i\| < 1,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма, отвечающая скалярному произведению $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т. е. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, то система векторов $\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^k$ линейно независима.

Доказательство. Предположим противное — допустим, что вектора $\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^k$ линейно зависимы. Тогда найдется вектор $z \in E$, $z \neq 0$, такой что $\langle z, \tilde{y}^i \rangle = 0$, $i = 1, \dots, k$. Используя неравенство Коши—Буняковского—Шварца получаем

$$\|\tilde{y}^i - y^i\| \|z\| \geq \langle \tilde{y}^i - y^i, z \rangle^2 = \langle y^i, z \rangle^2, \quad i = 1, \dots, k$$

Просуммировав эти неравенства и разделив полученную сумму на величину $\|z\| \neq 0$ получим неравенство

$$\sum_{i=1}^k \|\tilde{y}^i - y^i\| \geq 1,$$

что является противоречием. □

Лемма 8.5.3. Пусть $L(\cdot)$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение, (определенное на хаусдорфовом топологическом пространстве), значениями которого являются линейные подпространства \mathbb{R}^n . Тогда функция $x \mapsto \dim(L(x))$ является полунепрерывной снизу, где $\dim(L)$ обозначает размерность линейного подпространства L .

Доказательство. Рассмотрим направленность $x_\alpha \rightarrow x$. Нам требуется показать справедливость неравенства

$$\liminf_{x_\alpha \rightarrow x} \dim(L(x_\alpha)) \geq \dim(L(x)) \quad (8.5.8)$$

Если $\dim(L(x)) = 0$, то это неравенство выполняется тривиальным образом. Пусть $\dim(L(x)) = k \geq 1$. Тогда существует k линейно независимых векторов y^1, \dots, y^k из $L(x)$; не ограничивая общности, можно считать, что эти вектора образуют ортонормированный базис $L(x)$. В силу полунепрерывности снизу многозначного отображения L , в соответствии с [171, глава 1, предложение 2.6, пункт (е)], найдутся направленности $y_\alpha^i \in L(x_\alpha)$, такие что $y_\alpha^i \rightarrow y^i$ для $i = 1, \dots, k$. Используя лемму 8.5.2, можно заключить, что найдется α^* , такое что для всех $\alpha \succeq \alpha^*$ вектора y_α^i , $i = 1, \dots, k$ линейно независимы, так что $\dim(L(x_\alpha)) \geq k$ для таких значений α , а значит выполняется неравенство (8.5.8). \square

Лемма 8.5.4. Пусть $L(\cdot)$ — замкнутое многозначное отображение, (определенное на хаусдорфовом топологическом пространстве), значениями которого являются линейные подпространства \mathbb{R}^n . Тогда функция $x \mapsto \dim(L(x))$ является полунепрерывной сверху.

Доказательство. Рассмотрим направленность $x_\alpha \rightarrow x$. Нам требуется показать справедливость неравенства

$$\limsup_{x_\alpha \rightarrow x} \dim(L(x_\alpha)) \leq \dim(L(x)) \quad (8.5.9)$$

Обозначим $d = \limsup_{x_\alpha \rightarrow x} \dim(L(x_\alpha)) \leq n$. Тогда найдется α^* , такое что $\dim(L(x_\alpha)) \leq d$ для всех $\alpha \succeq \alpha^*$ и существует поднаправленность x_{α_β} , для которой $\dim(L(x_{\alpha_\beta})) = d$. Пусть $y_\beta^1, \dots, y_\beta^d$ — ортонормированный базис для $L(x_{\alpha_\beta})$. Фиксируем ортонормированный базис e^1, \dots, e^n в \mathbb{R}^n . Существует ортогональное преобразование $U_\beta \in O(n)$, где $O(n)$ обозначает ортогональную группу размерности n , такое что $y_\beta^i = U_\beta e^i$, $i = 1, \dots, d$. Поскольку $O(n)$ компактно, то существует поднаправленность $U_{\beta_\gamma} \rightarrow W \in O(n)$; в частности, $y_{\beta_\gamma}^i \rightarrow W e^i$, $i = 1, \dots, d$. Поскольку многозначное отображение $L(\cdot)$ замкнуто, $W e^i \in L(x)$, $i = 1, \dots, d$ и эта система векторов является ортонормированной системой в $L(x)$, откуда $\dim(L(\cdot)) \geq d$, так что неравенство (8.5.9) выполняется. \square

Предложение 8.5.1. Предположим, что условия 1° и 4° (фигурирующие в теореме 8.5.1), касающиеся $K_t(\cdot)$, выполнены. Тогда размерность $\dim(\text{lin}(K_t(\cdot)))$ постоянна на каждой связной компоненте множества возможных траекторий B_{t-1} , $t = 1, \dots, N$.

Доказательство. С одной стороны, условие 4° , с учетом леммы 8.5.4, влечет полунепрерывность сверху функции $x \mapsto \dim(\text{lin}(K_t(x)))$. С другой стороны, условие 1° , с учетом леммы 8.5.1 и леммы 8.5.3, влечет полунепрерывность снизу функции $x \mapsto \dim(\text{lin}(K_t(x)))$. Следовательно, функция $x \mapsto \dim(\text{lin}(K_t(x)))$ непрерывна. Поскольку непрерывный образ связного множества связан, функция $x \mapsto \dim(\text{lin}(K_t(x)))$ постоянна на каждой связной компоненте множества B_{t-1} . \square

Замечание 8.5.4.

- 1) На самом деле, компактность множеств $K_t(x)$ для $x \in B_{t-1}$ не требуется для справедливости утверждения в предложении 8.5.1.
- 2) Поскольку для полунепрерывных сверху компактозначных отображений $K_t(\cdot)$, в соответствии с предложением 3.1.1, множество возможных траекторий B_t компактно, каждая компонента точки $x \in B_t$ совпадает с квазикомпонентой этой точки [72, теорема 6.1.22].

Глава 9. Соотношение детерминистской и вероятностной постановки при отсутствии торговых ограничений

Данная глава посвящена изучению связи между детерминистским и вероятностным подходом к задаче суперхеджирования, для моделей, удовлетворяющих условию сопоставимости: носители условных распределений приращений цен при заданной предыстории цен совпадает с компактозначным отображением, задающим детерминистскую динамику цен. Показано, что в предположении отсутствия торговых ограничений, при весьма общих условиях «вероятностная» функция Беллмана не превосходит «детерминистскую». Достаточные условия совпадения этих функций, даны в теореме 9.2.1, предположения которой совпадают с условиями непрерывности решений уравнений (VI), сформулированными в главах 3 и 4, в число которых входит структурная устойчивость модели.

Получены также результаты о сохранении структурной устойчивости для вероятностных моделей, близких в смысле различных вероятностных метрик, включая метрику Прохорова.

Основные результаты главы опубликованы в [49] и [237].

9.1 Конструктивный способ построения параметрического семейства эквивалентных мер с заданным барицентром, как параметром

Идея конструкции восходит к работе [211]. См. также [69, том 2, глава V, §2d].

Пусть Y — случайный вектор со значениями в \mathbb{R}^n , т. е. $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, с распределением $P_Y = P$ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Обозначим

$$M_Y(\theta) = \mathbb{E} e^{\theta Y} = \int e^{\theta y} P_Y(dy), \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \quad (9.1.1)$$

производящую функцию моментов, принимающую значения в $(0, +\infty]$;

$$\Theta = \{\theta : M_Y(\theta) < \infty\};$$

предположим, что внутренность Θ является непустой, т. е.

$$\text{int}(\Theta) \neq \emptyset. \quad (9.1.2)$$

Обозначим, кроме того,

$$K_Y(\theta) = \ln M_Y(\theta) \quad (9.1.3)$$

производящую функцию кумулянтов¹, а также распределение P^θ , имеющее относительно P плотность

$$\frac{dP^\theta}{dP} = \frac{e^{\theta y}}{M_Y(\theta)} > 0, \quad \theta \in \Theta; \quad (9.1.4)$$

говорят, что мера P^θ получена из P преобразованием Эшера [143]. Поскольку меры P^θ и P эквивалентны, они имеют одинаковый носитель. Предположим, также, что выполнено условие невырожденности распределения P :

$$\text{int}(\text{conv}(\text{supp}(P))) \neq \emptyset, \quad (9.1.5)$$

где $\text{conv}(A)$ — выпуклая оболочка множества A , $\text{supp}(P)$ — топологический носитель распределения P .

Отметим, что:

- 1) множество Θ выпукло;
- 2) производящая функция $M_Y(\theta)$ является аналитической функцией, если рассматривать ее продолжение на комплексную плоскость \mathbb{C} , в области

$$\Theta' = \{\theta \in \mathbb{C} : \text{re}(\theta) \in \text{int}(\Theta)\},$$

где $\text{re}(z)$ — вещественная часть комплексного числа z ;

- 3) производные функции $M_Y(\theta)$ по параметрам $\theta_1, \dots, \theta_n$ могут вычисляться посредством (последовательного) дифференцирования под знаком интеграла, т. е. имеют место формулы

$$\frac{\partial^{k_1, \dots, k_n} M_Y}{\partial \theta^{k_1}, \dots, \partial \theta^{k_n}}(\theta) = M_Y(\theta) \int y^{k_1} \dots y^{k_n} P^\theta(dy) = \mathbb{E} [Y_1^{k_1} \dots Y_n^{k_n} e^{\theta Y}], \quad (9.1.6)$$

см., например, [66, лемма 18.1]².

¹Называемых также семиринвариантами, причем смешанными в многомерном случае.

²Ряд результатов, приведенных далее, близки к представленным в §18 этой же книги (про экспонентные семейства распределений вероятностей), однако особенности изложения, терминологии и обозначений затрудняют ссылки на этот источник.

Нетрудно проверить, что для $\theta \in \Theta$

$$\nabla K_Y(\theta) = \int y P^\theta(dy), \quad (9.1.7)$$

т. е. правая часть (9.1.7) — среднее для распределения P^θ , где ∇ обозначает градиент,

$$\nabla^2 K_Y(\theta) = \int \left[y - \int y P^\theta(dy) \right] \left[y - \int y P^\theta(dy) \right]^T P^\theta(dy), \quad (9.1.8)$$

т. е. правая часть (9.1.8) — ковариационная матрица для распределения P^θ , где ∇^2 обозначает гессиан. Невырожденность ковариационной матрицы из (9.1.8) для некоторого $\theta \in \Theta$ (а, значит, что любого $\theta \in \Theta$) равносильна условию (9.1.5), поэтому из (9.1.5) следует строгая выпуклость функции $\theta \mapsto K_Y(\theta)$ на $\text{int}(\Theta)$. Сделаем теперь усиливающее (9.1.2) предположение

$$\Theta = \mathbb{R}^n, \quad (9.1.9)$$

и рассмотрим функцию Крамера³

$$I(y) = K_Y^*(y) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^n} [\theta y - K_Y(\theta)], \quad (9.1.10)$$

которая является сопряженной к функции $K_Y(\theta)$ (преобразованием Фенхеля). Все условия из [40, теорема 26.5] выполнены, так что функции K_Y^* и K_Y связаны преобразованием Лежандра:

$$K_Y^*(y) = (\nabla K_Y)^{-1}(y)y - K_Y(\nabla K_Y)^{-1}(y), \quad (9.1.11)$$

где $(\nabla K_Y)^{-1}$ — обратная функция к функции ∇K_Y , причем ∇K_Y гомеоморфно отображает $\text{int}(\text{dom}(K_Y)) = \mathbb{R}^n$ на $\text{int}(\text{dom}(K_Y^*))$ и

$$\nabla K_Y^* = (\nabla K_Y)^{-1}, \quad (9.1.12)$$

где $\text{dom}(f) = \{x : f(x) < \infty\}$ — эффективная область выпуклой функции f . Таким образом, максимум в (9.1.10) достигается в точке $\theta^* = (\nabla f)^{-1}(y)$.

Лемма 9.1.1. В предположении (9.1.9)

$$\text{int}(\text{conv}(\text{supp}(P))) \subseteq \text{dom}(K_Y^*) \subseteq \text{cl}(\text{conv}(\text{supp}(P))). \quad (9.1.13)$$

Доказательство. Обозначим $h = \frac{1}{\|\theta\|}\theta$ для $\theta \neq 0$, $\lambda = \|\theta\|$; тогда $\theta = \lambda h$, h лежит на единичной сфере с центром в нуле $S_1(0)$. Поскольку $0y - K(0) = 0$, то

$$0 \leq \sup_{\theta \in B_r(0)} [\theta y - K_Y(\theta)] < \infty$$

³В исторически первой работе, посвященной большим уклонениям [126], эта функция описывала показатель экспоненциального убывания «хвостов» распределений сумм независимых случайных величин.

и имеет смысл исследовать конечность точной верхней грани в (9.1.10) при $\|\theta\| \geq r$, для достаточно больших r .

$$\sup_{\theta: \|\theta\| \geq r} [\theta y - K_Y(\theta)] = \sup_{h \in S_1(0)} \sup_{\lambda \geq r} \lambda [hy - \frac{1}{\lambda} K(\lambda h)]. \quad (9.1.14)$$

Заметим, что функция

$$\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda} K(\lambda h) = \ln \left\{ \left[\mathbb{E} \left(e^{hY} \right)^\lambda \right]^{\frac{1}{\lambda}} \right\}$$

является монотонно возрастающей по неравенству Ляпунова, см., например, [68, глава II, §6, формула 27]. Более того⁴, при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\left[\mathbb{E} \left(e^{hY} \right)^\lambda \right]^{\frac{1}{\lambda}} \rightarrow \text{vrai max} \langle h, Y \rangle, \quad (9.1.15)$$

см. [162, глава VI, раздел 6.1, теорема 193]. Далее,

$$\text{vrai max } hY = \sup \{ hy, y \in F \} = \sigma_F(h) = \sigma_{\text{conv}(F)}(h), \quad (9.1.16)$$

где $F = \text{supp}(P)$. Неравенство $hy < \sigma_F(h)$, выполнено для всех $h \in S_1(0)$ равносильно $y \in \text{int}(\text{conv}(F)) \neq \emptyset$, с учетом предположения о невырожденности (9.1.5), см. [40, теорема 13.1]. В этом случае, из (9.1.14) получаем $I(y) < \infty$. Если же $y \notin \text{cl}(\text{conv}(F))$, по [40, теорема 13.1] найдется $h^* \in S_1(0)$, такое что $\langle h^*, Y \rangle > \sigma_F(h^*)$, поэтому из (9.1.13) для такого y получаем $I(y) = +\infty$. \square

Следствие 9.1.1. $\text{int}(\text{dom } K_Y^*) = \text{int}(\text{conv}(\text{supp}(P)))$.

Достаточно сослаться, с учетом (9.1.13), на [40, теорема 6.3], в соответствии с которой⁵ $\text{ri}(\text{cl}(C)) = \text{ri}(C)$ для выпуклого множества C , а в силу (9.1.5) имеет $\text{ri}(C) = \text{int}(C)$.

Резюмируя приведенные выше рассуждения и результаты, получаем конструктивный способ построения эквивалентной меры с заданным средним, как параметром, с непрерывной зависимостью от этого параметра.

Теорема 9.1.1. *Если выполнено условие (9.1.5) невырожденности распределения P , а также условие конечности всюду соответствующей производящей функции моментов M_Y , задаваемой (9.1.1), то для любого заданного $y^* \in \text{int}(\text{conv}(\text{supp}(P)))$ преобразование Эшера P^{θ^*} с параметром $\theta^* = (\nabla K_Y)^{-1}(y^*)$ имеет среднее $\int y P^{\theta^*}(dy) = y^*$, причем зависимость θ^* от y^* непрерывна.*

⁴Мы используем обозначение $\text{vrai max } X$, где X — случайная величина, и термин «эффективная верхняя грань X », что соответствует терминологии [162] (effective upper bound). Число $\text{vrai max } X$ из расширенной прямой $\mathbb{R} \cap \{+\infty\}$ можно определить как $\sup(\text{supp}(P_X))$, т. е. как максимальную точку роста распределения случайной величины X , если она ограничена, и $+\infty$ в противном случае. Название «существенный» *supremum*, которое зачастую используется в литературе, неудачно, поскольку оно используется для семейства случайных величин, и представляет из себя случайную величину (а не число).

⁵Здесь и далее $\text{ri}(A)$ обозначает относительную внутренность выпуклого множества A .

Замечание 9.1.1.

- 1) Условие конечности M_Y выполняется, если носитель $\text{supp}(P_Y) = \text{supp}(P)$ компактен.
- 2) Результат, сформулированный в теореме 9.1.1, позволяет конструктивно строить эквивалентную меру для произвольного распределения P , удовлетворяющего условию невырожденности (9.1.5). Для этого достаточно выбрать плотность $q > 0$ (т. е. $\int q(y)P(dy) = 1$) достаточно быстро убывающую на бесконечности, а именно, чтобы функции $y \mapsto q(y)e^{\theta y}$ были ограничены для каждого $\theta \in \mathbb{R}^n$; например, положить⁶ $q(y) = ce^{-\|y\|_2^2}$, где c — нормировочная константа, т. е. $c^{-1} = \int e^{-\|y\|_2^2} P(dy)$; распределение $P' \sim P$ с плотностью $\frac{dP'}{dP} = q$ удовлетворяет условию (9.1.10) и к нему применима доказанная теорема 9.1.1.
- 3) Если распределение P не удовлетворяет условию невырожденности (9.1.5), то, тем не менее, этот случай может быть также сведен к ситуации, когда теорема 9.1.1 будет применима. Пусть аффинное многообразие, на котором в этом случае сосредоточено P , имеет меньшую чем n размерность, т. е. $\text{aff}(\text{supp}(P)) = a + L$, где $a \in \mathbb{R}$, а L — линейное подпространство \mathbb{R}^n размерности $k < n$. Тогда для случайного вектора $\tilde{Y} = \varphi(Y - a)$, где $\varphi : L \mapsto \mathbb{R}^k$ изоморфизм линейных пространств, получаем, что $P_{\tilde{Y}}$ — невырожденное на \mathbb{R}^k распределение, так что, с учетом предыдущего пункта 2) замечания, предложенный конструктивный способ построения эквивалентной меры с заданным средним является универсальным, т. е. позволяет построить меру $Q_{y^*} \sim P$ такую что $\int y Q(dy) = y^*$ для любого $y^* \in \text{ri}(\text{conv}(\text{supp}(P)))$.

9.2 Связь «детерминистского» и «вероятностного» подходов к суперрепликации

Здесь мы ограничимся обсуждением случая, когда отсутствуют торговые ограничения и нет арбитражных возможностей.

В этом разделе возникает необходимость ввести вероятностную терминологию. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0, \dots, N}$, где $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, \dots, X_t)$ является σ -алгеброй, порожденной случайными векторами X_0, \dots, X_t со значениями в \mathbb{R}^n , описывающих эволюцию дисконтированных цен n рискованных активов. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N$. Меру \mathbb{P} будем называть референтной. Обозначим $\mathfrak{M}(X)$ — множество эквивалентных мартингалов, т. е. таких, что процесс X_t , $t = 0, \dots, N$ является мартингалом относительно меры $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)$ и

⁶Здесь $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма в \mathbb{R}^n .

$\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$. Отсутствие арбитражных возможностей, что мы и будем предполагать, равносильно тому, что $\mathfrak{M}(X) \neq \emptyset$ (см., например, [69, глава V, §2e]).

Пусть ξ_t — адаптированный процесс. Рассмотрим обобщенную оболочку Снелла — минимальную мажоранту U_t^* процесса ξ_t , являющуюся супермартингалом относительно любой меры $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)$. Это означает, что

- 1) $U_t^* \geq \xi_t$ для $t = 0, 1, \dots, N$ п. н.⁷;
- 2) если η — супермартингал относительно любой меры $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)$, являющийся мажорантой ξ_t , то $\eta \geq U_t^*$ п. н.

Нетрудно видеть, что процесс U_t^* задается рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned} U_N^* &= \xi_N, \\ U_{t-1}^* &= \xi_{t-1} \vee \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} U_t^*, \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

где $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^A$ обозначает условное математическое ожидание относительно σ -алгебры A для меры \mathbb{Q} (см. например, [151, теорема 6.52]).

Пусть теперь $\xi_t \geq 0$ — потенциальные выплаты для американского опциона; чтобы связать это с детерминистской постановкой задачи, предположим, что $\xi_t = g_t(x_0, \dots, x_t)$, $t = 1, \dots, N$. По теореме об опциональном разложении [150] (см. также [151, теорема 7.5]) найдется предсказуемый процесс H_t^* , такой что $\Delta U_t^* \leq H_t^* \Delta X_t$ п. н., $t = 1, \dots, N$ и H_t^* является суперхеджирующей стратегией с задаваемой (9.2.1) минимальной оценкой U_t^* необходимых средств на момент t , гарантирующей почти наверное исполнение обусловленных обязательств, возникающих при продаже опциона.

Европейский опцион с выплатами ζ в терминальный момент может быть рассмотрен как частный случай. Достаточно рассмотреть процесс $\xi_t = 0$ для $t = 0, \dots, N-1$ и $\xi_N = \zeta$, тогда

$$\begin{cases} \xi_N^* = \zeta, \\ \xi_{t-1}^* = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} \xi_t^*, \quad t = N, \dots, 1. \end{cases} \quad (9.2.2)$$

Для случая европейского опциона неотрицательная случайная величина $\Delta C_t = H_t^* \Delta X_t - \Delta U_t^*$ может быть интерпретирована как резервы, создаваемые на шаге t на покрытие неопределенности, связанной с неполнотой рынка. Полнота рынка, т. е. когда найдется реплицирующая стратегия (см. например, [69, глава V, §4f]), равносильна единственности эквивалентной мартингаловой меры, т. е. $\mathfrak{M}(X)$ содержит единственный элемент \mathbb{Q}^* . Очевидно, $U^* = \xi^*$ в (9.2.2) является мартингалом относительно $\mathbb{Q}^* \sim \mathbb{P}$, так что $\Delta C = 0$ п. н. Полнота равносильна также тому, что носители условных распределений приращений цен

⁷Почти наверное относительно любой меры из $\mathfrak{M}(X)$, поскольку меры эквивалентны, или же относительно референтной меры \mathbb{P} .

ΔX_t при заданном \mathcal{F}_{t-1} почти наверное являются множествами с конечным числом элементов, не превосходящим $n + 1$, см. [177].

Везде далее будем предполагать, что

$$\xi_t \leq C_1 \text{ п. н. } t = 0, \dots, N, \quad (9.2.3)$$

а также, что

$$\|\Delta X_t\| \leq C_2 \text{ п. н. } t = 1, \dots, N. \quad (9.2.4)$$

Требования (9.2.3) и (9.2.4) будем называть условиями сопоставимости («детерминистской» и «вероятностной» постановок задач). Кроме того, пусть

$$\xi_t = g_t(X_1, \dots, X_t) \text{ п. н.} \quad (9.2.5)$$

Будем везде далее предполагать, что функции v_t^* , решения уравнений (В1), где $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$ (отсутствие торговых ограничений), универсально измеримы.

Пусть переходное ядро $P_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$ — отвечающее мере \mathbb{P} регулярное условное распределение ΔX_t при известной предыстории цен X_0, \dots, X_{t-1} . Это означает, что для случайной величины $Y \geq 0$ измеримой относительно \mathcal{F}_t , т. е. когда $Y = \varphi(X_0, \dots, X_t)$ для некоторой универсально измеримой функции φ имеем⁸

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} \eta = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} \varphi(X_0, \dots, X_t) = \psi(X_0, \dots, X_{t-1})$$

для некоторой универсально измеримой функции ψ и

$$\psi(x_0, \dots, x_{t-1}) = \int \varphi(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) P_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy).$$

Мы предполагаем, как и отмечалось уже в главе 1, при установлении аналогий «детерминистского» и «вероятностного» подходов, что вероятностная мера $dy \mapsto P_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$ имеет компактный носитель $K_t(x_0, \dots, x_{t-1})$, что равносильно условию (9.2.4). Отметим, что при этом P_t , также как и K_t , определены с точностью до почти наверное относительно меры \mathbb{P} . «Вероятностное» условие отсутствия арбитражных возможностей при этом почти наверное влечет «детерминистское» условие отсутствия арбитражных возможностей NDAO см. [177], см. также [69], теорема A^* (расширенный вариант первой фундаментальной теоремы). Не ограничивая общности, можно считать⁹, что (9.2.3) и (9.2.4) выполняется всюду, $P_t(\bar{x}_{t-1}, \cdot)$ и $K_t(\bar{x}_{t-1}) = \text{supp}(P_t(\bar{x}_{t-1}, \cdot))$ определены всюду, причем $0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})))$ для всех $\bar{x}_{t-1} \in (\mathbb{R}^n)^t$.

Заметим, что многозначное отображение $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, где $K_t(\bar{x}_{t-1})$ (компактный) носитель условного распределения $A \mapsto P(\bar{x}_{t-1}, A)$ измеримо¹⁰,

⁸Равенства и неравенства, где фигурирует условное математическое ожидание, следует понимать \mathbb{P} — почти наверное.

⁹Выбирая соответствующим образом новое вероятностное пространство.

¹⁰Пусть (X, \mathcal{A}) измеримое пространство, Y — метрическое пространство. Многозначное отображение $X \ni x \mapsto F(x) \subseteq Y$ измеримо, если $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$ для любого открытого множества $G \subseteq Y$. В терминологии [168] это названо слабой измеримостью, но для компактных многозначных отображений это совпадает с измеримостью [168, теорема 3.1]; измеримость там определяется как $\{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$ для всех замкнутых $B \subseteq Y$.

т. к. $\{\bar{x}_{t-1} : K_t(\bar{x}_{t-1}) \cap G\} = \{\bar{x}_{t-1} : P(\bar{x}_{t-1}, G) > 0\}$ (условные распределения берутся относительно референтной меры \mathbb{P}).

Аналогично определяются $Q_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$ — переходные ядра для регулярного условного распределения ΔX_t при известной предыстории цен, отвечающего мере $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$.

Обозначим плотность (производную Радона—Никоидима)

$$Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \text{ для } \mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)$$

и локальные плотности

$$Z_t = \frac{d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}, \quad t = 0, 1, \dots, N,$$

где $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}, \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$ — сужение мер \mathbb{Q} и \mathbb{P} на σ -алгебру $\mathcal{F}_t \in \mathcal{F}$. Процесс $Z_t, t = 0, 1, \dots, N$ является неотрицательным мартингалом относительно \mathbb{P} и $Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_t} Z$. При этом $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ равносильно $Z > 0$ п. н. Кроме того, нетрудно видеть, что¹¹

$$\{Z_t = 0\} \subseteq \{Z_{t+1} = 0\} \subseteq \{Z = 0\} \text{ п. н.,}$$

поэтому случайная величина

$$\eta_t = \frac{Z_t}{Z_{t-1}} \quad t = 1, 2, \dots$$

определена корректно, с точностью до почти на верное. При этом η_t является \mathcal{F}_t измеримой случайной величиной и почти на верное, $\eta_t > 0$ и $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \eta_t = 1$.

Для рассмотрения регулярных условных распределений удобно считать, что η_t определена для всех $\omega \in \Omega$ и $\eta_t > 0$ всюду; для тех ω для которых¹² $\eta_{t-1}(\omega) = 0$ достаточно положить $\eta_t(\omega) = \theta_t(\omega)$, где $\theta_t(\omega)$ некоторый адаптированный процесс, $\theta_t(\omega) > 0$, $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \theta_t = 1$ (например, выбрать процесс θ_t тождественно равный единице). Поскольку $\eta_t \in \mathcal{F}_t$, то для некоторой борелевски измеримой функции z_t имеем $\eta_t = z_t(X_0, \dots, X_t)$.

Если случайная величина $Y \geq 0$ измерима относительно \mathcal{F}_t , то

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} Y = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} (ZY)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} Z} = \frac{1}{Z_{t-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_t} (ZY) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} \left(\frac{Z_t}{Z_{t-1}} Y \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} z_t Y. \quad (9.2.6)$$

С учетом (9.2.6) и предыдущих замечаний нетрудно видеть, что переходные ядра

$$Q_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy) = z_t(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) P_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$$

¹¹Обозначение $A \subseteq B$ п. н. означает $\mathbb{P}(A \setminus B) = 0$, или, что равносильно, $I_A \leq I_B$ п. н., где I_A — индикатор события A .

¹²Событие $\{\omega : Z_{t-1}(\omega) = 0\}$ имеет нулевую меру.

могут быть определены всюду, так что $q_t(x_0, \dots, x_{t-1}, y) = z_t(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y)$ является вариантом плотности меры $dy \mapsto Q_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$ относительно меры $dy \mapsto P_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$, т. е. условной плотностью ΔX_t с нулевым средним при известной предыстории цен. При этом $Z_t > 0$ и носитель меры $dy \mapsto Q_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$ совпадает с носителем меры $dy \mapsto P_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$, т. е. с компактом $K_t(x_0, \dots, x_{t-1})$.

Пусть $\mathfrak{M}'(X)$ — класс мартингалов, абсолютно непрерывных относительно референтной меры, т. е. для $\mathbb{Q}' \in \mathfrak{M}'(X)$ процесс X_t , $t = 0, 1, \dots, N$ является мартингалом и $\mathbb{Q}' \ll \mathbb{P}$, а $\mathfrak{M}(X)$ — класс эквивалентных мартингалов мер.

Лемма 9.2.1. Пусть выполнено условие отсутствия арбитражных возможностей. Для произвольной ограниченной случайной величины Y

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_t} Y = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q}' \in \mathfrak{M}'(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}^{\mathcal{F}_t} Y.$$

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{M}(X) \subseteq \mathfrak{M}'(X)$, то

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_t} Y \leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q}' \in \mathfrak{M}'(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}^{\mathcal{F}_t} Y.$$

Отсутствие арбитражных возможностей равносильно $\mathfrak{M}(X) \neq \emptyset$. Пусть $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)$, $\mathbb{Q}' \in \mathfrak{M}'(X)$, z_t и z'_t — плотности, определяемые (9.2.6) соответственно для \mathbb{Q} и \mathbb{Q}' .

Для $\varepsilon \in (0, 1)$ положим $z_t^\varepsilon = (1 - \varepsilon)z'_t + \varepsilon z_t$. Поскольку мы договорились, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N$, то мера \mathbb{Q}^ε , имеющая плотность (т. е. производную Радона–Никодима) относительно меры \mathbb{P} вида

$$\frac{d\mathbb{Q}^\varepsilon}{d\mathbb{P}} = Z^\varepsilon = Z_N^\varepsilon = Z_0 \prod_{s=1}^N z_s^\varepsilon \geq \varepsilon^N \prod_{s=1}^N z_t = \varepsilon^N \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} > 0,$$

эквивалентна референтной мере, т. е. $\mathbb{Q}^\varepsilon \sim \mathbb{P}$; из конструкции \mathbb{Q}^ε очевидна ее мартингалность, т. е. $\mathbb{Q}^\varepsilon \in \mathfrak{M}(X)$.

В то же время, с учетом (9.2.6)

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\varepsilon}^{\mathcal{F}_t} Y = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_t} z_t^\varepsilon Y = (1 - \varepsilon)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_t} z'_t Y + \varepsilon\mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_t} z_t Y = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}^{\mathcal{F}_t} Y + \varepsilon(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_t} Y - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}^{\mathcal{F}_t} Y),$$

так что

$$\left| \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\varepsilon}^{\mathcal{F}_t} Y - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}^{\mathcal{F}_t} Y \right| \leq 2\varepsilon C,$$

где $|Y| \leq C$ п. н.; поэтому

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}'(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_t} Y \leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q}' \in \mathfrak{M}'(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}^{\mathcal{F}_t} Y + 2\varepsilon C,$$

откуда, в силу произвольности, ε получаем требуемое неравенство. \square

Предложение 9.2.1. Пусть выполняется условие отсутствия арбитражных возможностей, отсутствуют торговые ограничения, а также выполнены условия сопоставимости (9.2.3) и (9.2.4) и функции v_t^* , определенные посредством (VI) универсально измеримы¹³. Тогда для U_t^* , определяемого (9.2.1), и $V_t^* = v_t^*(\bar{X}_t)$, $t = 0, \dots, N$ справедливо неравенство

$$U_t^* \leq V_t^* \text{ п. н.}, t = 0, \dots, N. \quad (9.2.7)$$

Доказательство. Для $t = N$ неравенство (9.2.7), очевидно, выполняется (в действительности, даже равенство). Предположим, что неравенство (9.2.7) выполняется для $s = N, \dots, t$ и покажем, по индукции, что оно выполнено для $s = t - 1$. По предположению индукции получаем

$$U_t^* \leq V_t^* \text{ п. н.} \quad (9.2.8)$$

Пусть $Q_t(x, A)$ — переходная вероятность, равная регулярному условному распределению ΔX_t при условии $\bar{X}_{t-1} = x$ относительно меры $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X) \neq \emptyset$ в силу отсутствия арбитражных возможностей. Фиксируем произвольную меру $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)$. Из (9.2.8) следует

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} U_t^* \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* = f_t^{\mathbb{Q}}(\bar{X}_{t-1}) \text{ п. н.}^{14}, \quad (9.2.9)$$

где

$$f_t^{\mathbb{Q}}(x) = \int w_t(x, y) Q_t(x, dy).$$

Заметим, что функция $(x, y) \mapsto w_t(x, y)$ универсально измерима, поскольку v_t^* является таковой. Поэтому определены интегралы вида $\int w_t(x, y) Q(dy)$ и¹⁵

$$f_t^{\mathbb{Q}}(x) \leq \sup_{Q \in \mathcal{P}(K_t(\cdot)), m(Q)=0} \int w_t(x, y) Q(dy) = \rho_t'(x),$$

где $\rho_t'(x)$ определяется для допустимого смешанного расширения $Q \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))$ посредством формулы (5.2.13) (при отсутствии торговых ограничений), причем класс $\{Q \in \mathcal{P}(K_t(\cdot)) : \int y Q(dy) = 0\} \neq \emptyset$ в силу отсутствия арбитражных возможностей¹⁶. Поскольку $\rho_t' \leq \rho_t$ (см. (5.2.5)), а рекуррентные уравнения (VI) можно сокращенно записать в виде¹⁷

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot), t = N, \dots, 1,$$

то

$$g_{t-1}(x) \vee f_t^{\mathbb{Q}}(x) \leq g_{t-1}(x) \vee \rho_t(x) = v_{t-1}^*(x). \quad (9.2.10)$$

¹³Измеримость этих функций можно гарантировать при дополнительных предположениях, см., например, теорему 3.1.4.

¹⁴Относительно референтной меры \mathbb{P} .

¹⁵Класс всех распределений с носителем K обозначается $\mathcal{P}(K)$.

¹⁶Можно считать, что вариант $Q_t(x, \cdot)$ выбран так, что $0 \in \text{ri}(K_t^*(x))$ для всех x , где $K_t^*(x) = \text{conv}(K_t^*(x))$.

¹⁷Формально считаем $g_0(\cdot) \equiv 0$

Хорошо известно¹⁸, что найдется счетное семейство $\{\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2, \dots\} \subseteq \mathfrak{M}(X)$, такое что

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* = \sup_{i \in \{1, 2, \dots\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_i}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* = \sup_{i \in \{1, 2, \dots\}} f_t^{\mathbb{Q}_i}(\bar{X}_{t-1}) \text{ п. н.} \quad (9.2.11)$$

Применяя (9.2.9) и (9.2.10) для $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_i$, $i = 1, 2, \dots$, а также (9.2.11), получаем в соответствии с (9.2.1)

$$U_{t-1}^* = \xi_{t-1} \bigvee_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} U_t^* \leq g_{t-1}(\bar{X}_{t-1}) \bigvee \rho_t(\bar{X}_{t-1}) = v_{t-1}^*(\bar{X}_{t-1}) = V_{t-1}^* \text{ п. н.}$$

□

Замечание 9.2.1. Неравенство (9.2.7) может быть строгим. Например, рассмотрим (в предположении отсутствия арбитражных возможностей) следующую одномерную одношаговую задачу: начальная цена $x_0 > 1$ фиксирована; приращения цен лежат в компакте $K_1(x_0) = [-1, 1]$; вероятностная мера \mathbb{P} на $\Omega = [-1, 1]$ с носителем $[-1, 1]$ является неатомической (например, равномерное распределение); \mathcal{F} — борелевская σ -алгебра; цена рискового актива имеет вид $X_1(\omega) = \omega + x_0$. В этом случае мера \mathbb{P} «не видит» отдельные точки приращения цен, в том числе точку 0; более формально, мера¹⁹ δ_0 сингулярна относительно \mathbb{P} . Функция выплат $g_1(x) = I_{\{x_0\}}(x)$ полунепрерывна сверху и соответствующая точная верхняя грань достигается²⁰ на «мартингальной» мере, когда приращение ΔX_1 равно нулю, т. е. для условного распределения $Q = \delta_0$. Таким образом, $V_1^* = 1$; вместе с тем, очевидно, $U_1^* = 0$ п. н. Проблема заключается в том, что оптимальные смешанные стратегии, сосредоточенные не более чем в $n + 1$ точке \mathbb{R}^n (в случае n рисковых активов) типично сингулярны относительно референтной меры \mathbb{P} .

Нетрудно видеть, что в случае конечного пространства элементарных событий Ω «детерминистская» и «стохастическая» постановки задачи суперхеджирования приводят к одному и тому же результату. В общем случае, для совпадения U^* и V^* требуются определенные условия «гладкости»; достаточные условия дает следующее утверждение.

Теорема 9.2.1. Пусть в условиях отсутствия торговых ограничений выполнено грубое условие отсутствия арбитражных возможностей RND^{AO}²¹, функции потенциальных выплат g_t для $t = 1, \dots, N$ непрерывны, многозначные отображения $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, $t = 1, \dots, N$ непрерывны в метрике Помпею—

¹⁸Этот факт, т. е. что существенный супремум семейства случайных величин совпадает п. н. с супремумом по счетному подсемейству этих случайных величин, например, установлен в ходе доказательства в [151, теорема A.37].

¹⁹Здесь и далее δ_a обозначает вероятностную меру, сосредоточенную в точке a .

²⁰Достаточные условия для справедливости пунктов 2) и 3) а) теоремы 7.3.2 для данного примера выполняются.

²¹Это условие отсутствия торговых ограничений равносильно $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(K_t(\cdot)))$, $t = 1, \dots, N$, см. предложение 2.4.1; Теорема A^* из [69, глава V, §2e] влечет $\mathfrak{M}(X) \neq \emptyset$.

Хаусдорфа. Тогда функции v_t^* , определенные (VI), непрерывны, $t = 0, \dots, N$ и выполнено равенство

$$U_t^* = V_t^* = v_t^*(X_1, \dots, X_t), \quad t = 0, \dots, N. \quad \text{п. н.} \quad (9.2.12)$$

Доказательство. Непрерывность и даже равномерная непрерывность v_t^* с оценкой модуля непрерывности установлена в теореме 4.2.1 и предложении 4.2.2. Покажем по индукции, что $U_t^* \geq V_t^*$ п. н. Действительно, предположение индукции, очевидно, выполнено для $s = N$. Пусть это выполнено для $s = N, \dots, t$, где $t \geq 1$, и покажем, что это справедливо и для $s = t - 1$.

Пользуясь предположением индукции, т. е. $U_t^* \geq V_t^*$ п. н., а также леммой 9.2.1, получаем

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{P} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} U_t^* \geq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{P} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{P} \in \mathfrak{M}'(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^*, \quad \text{п. н.} \quad (9.2.13)$$

для произвольной меры $\mathbb{P}' \in \mathfrak{M}'(X)$. При этом

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* = \int w_t(\bar{X}_{t-1}, y) q_t'(\bar{X}_{t-1}, y) P_t(\bar{X}_{t-1}, dy), \quad (9.2.14)$$

где $y \mapsto q_t'(x, y) \geq 0$ — плотность (регулярного) условного распределения ΔX_t при условии $\bar{X}_{t-1} = x$, отвечающая мере $P' \in \mathfrak{M}(X)$, относительно регулярного условного распределения $P_t(x, \cdot)$ случайного вектора ΔX_t при условии $\bar{X}_{t-1} = x$ для референтной меры \mathbb{P} . Построим теперь условную плотность $y \mapsto q_t^j(x, y)$, для которой значения в (9.2.14) будут близко к «оптимальному».

Используя пункты 2) и 3а) теоремы 7.3.2, рассмотрим $Q_t^*(x, \cdot)$, $x \in B_{t-1}$ — оптимальную смешанную стратегию рынка на шаге t , сосредоточенную в $m_t(x)$ точках $K_t(x) = \operatorname{supp}(P_t(x, \cdot))$, причем $m_t(x) \leq n + 1$, т. е. меру, которая представима в виде

$$\begin{aligned} Q_t^*(x, \cdot) &= \sum_{j=1}^{n+1} q_t^j(x) \delta_{y_t^j(x)}, \\ q_t^j(x_{t-1}) &\geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} q_t^j(x) = 1, \\ \int y Q_t^*(x, dy) &= \sum_{j=1}^{n+1} y_t^j(x) q_t^j(x) = 0, \\ y_t^j(x) &\in K_t(x), \quad j = 1, n+1, \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

для которой²² выполняется равенство оптимальности:

$$g_{t-1}(x) \vee \int w_t(x, y) Q_t^*(x, dy) = g_{t-1} \vee \sum_{j=1}^{n+1} w_t(x, y_t^j(x)) q_t^j(x) = v_{t-1}^*(x). \quad (9.2.16)$$

²²Если мера $Q_t^*(x, \cdot)$ сосредоточена в $m(x) < n + 1$ точках $K_t(x)$, то «недостающие» $n + 1 - m(x)$ точек, для которых $q_t^j(x) = 0$, можно выбрать произвольным образом из $K_t(x)$, лишь бы при этом функции $x \mapsto y_t^j(x)$ были измеримы.

Учитывая, что переменные функции $q'_t = q'_t(x, y)$ лежат в разных пространствах: $x \in \mathbb{R}^{(t-1)n}$, $y \in \mathbb{R}^n$, то во избежание коллизии, будем далее в данном доказательстве использовать следующие обозначения: шары в пространстве $\mathbb{R}^{(t-1)n}$ обозначим жирной буквой \mathbf{B} , т. е. как $\mathbf{B}_r(x)$, а в пространстве \mathbb{R}^n — обычной буквой B , т. е. как $B_r(x)$.

Фиксируем произвольное $\delta > 0$. Поскольку функции v_{t-1}^* и g_t равномерно непрерывны на B_{t-1} , а функция v_t^* равномерно непрерывна на B_t , то найдутся $\varepsilon' = \varepsilon'(\delta, t) > 0$, $\varepsilon'' = \varepsilon''(\delta, t) > 0$, $\varepsilon''' = \varepsilon'''(\delta, t) > 0$ и $\delta' = \delta'(\delta, t) \in (0, \delta)$, такие что для всех $x \in B_{t-1}$ и $y \in K_t(x)$

$$\sup_{x' \in \mathbf{B}_{\varepsilon'}(x)} |g_{t-1}(x') - g_{t-1}(x)| \leq \delta, \quad (9.2.17)$$

$$\sup_{x' \in \mathbf{B}_{\varepsilon''}(x)} |v_{t-1}^*(x') - v_{t-1}^*(x)| \leq \delta, \quad (9.2.18)$$

$$\sup_{x' \in \mathbf{B}_{\varepsilon'''}(x), y' \in B_{\delta'}(y)} |w_t(x', y') - w_t(x, y)| \leq \delta. \quad (9.2.19)$$

Используя полунепрерывность снизу многозначного отображения $x \mapsto K_t(x)$, для каждого x и для соответствующих $y_t^j(x) \in K_t(x)$, $j = 1, \dots, n+1$, найдется $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, такое что для всех $j = 1, \dots, n+1$

$$\{x' : K_t(x') \cap B_{\delta}^j(y_t^j(x)) \neq \emptyset\} \supseteq \mathbf{B}_{\varepsilon(x)}(x). \quad (9.2.20)$$

Положим $\varepsilon^*(x) = \varepsilon(x) \wedge \varepsilon' \wedge \varepsilon'' \wedge \varepsilon'''$ и из открытого покрытия $\{\mathbf{B}_{\varepsilon^*(x)}(x), x \in B_{t-1}\}$ компакта B_{t-1} выделим конечное подпокрытие $\{\mathbf{B}_{\varepsilon^*(x_i)}(x_i), i = 1, \dots, k\}$.

Положим, далее

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbf{B}_{\varepsilon^*(x_1)}(x_1) \cap B_{t-1}, \\ A_{i+1} &= [\mathbf{B}_{\varepsilon^*(x_i)}(x_i) \setminus \bigcup_{l=1}^i A_l] \cap B_{t-1}, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (9.2.21)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что все A_i , $i = 1, \dots, k$ непустые (исключая, если нужно, те множества, которые оказались пустыми). Отметим, что множества A_i , $i = 1, \dots, k$ измеримы, попарно не пересекаются и в объединении дают B_{t-1} . Из (9.2.20), по построению, для любого $x' \in A_i$, $K_t(x') \cap B_{\delta}^j(y_t^j(x_i)) \neq \emptyset$ для всех $j = 1, \dots, n+1$, поэтому $P_t(x', B_{\delta}^j(y_t^j(x_i))) > 0$, $j = 1, \dots, n+1$; это позволяет корректно определить плотности: для $x \in B_{t-1}$ положим

$$q_t^*(x, y) = \sum_{i=1}^k I_{A_i}(x) \sum_{j=1}^{n+1} q_t^j(x_i) \frac{I_{B_{\delta}^j}(y_t^j(x_i))(y)}{P(x, B_{\delta}^j(y_t^j(x_i)))} \quad (9.2.22)$$

и обозначим

$$P_t^*(x, dy) = q_t^*(x, y) P_t(x, dy); \quad (9.2.23)$$

для переходного ядра $P_t^*(\cdot, \cdot)$, очевидно, выполнено условие нормировки.

Пусть

$$u_{t-1}(x') = g_{t-1}(x') \vee \int w_t(x', y) P_t^*(x, dy). \quad (9.2.24)$$

Когда $x' \in A_i \subseteq B_{\varepsilon^*(x_i)}(x_i)$, где $i \in \{1, \dots, k\}$, имеют место неравенства (9.2.17), (9.2.18) и (9.2.19), а носитель меры $P_t^*(x', \cdot)$ равен $K_t(x') \cap B_{\delta'}(y_t^j(x_i))$; поэтому для выражения (9.2.24), с учетом (9.2.22) и (9.2.16), для такого x' справедливы неравенства

$$\begin{aligned} u_{t-1}(x') &\geq (g_t(x_i) - \delta) \vee \left[\sum_{i=1}^{n+1} q_t^j(x_i) (w_t(x_i, y_t^j(x_i)) - \delta) \right] = \\ &= \left[g_t(x_i) \vee \sum_{i=1}^{n+1} q_t^j(x_i) w_t(x_i, y_t^j(x_i)) \right] - \delta = \\ &= v_{t-1}^*(x_i) - \delta \geq v_{t-1}^*(x') - 2\delta. \end{aligned} \quad (9.2.25)$$

Условное распределение $P_t^*(x, \cdot)$ приращения цен ΔX_t при условии $\bar{X}_{t-1} = x$ не обеспечивает, однако, чтобы случайные вектора ΔX_t , $t = 1, \dots, N$ образовывали бы мартингал-разности.

Обозначим для $x' \in A_i$, где $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$\hat{y}_i^j(x') = \int y \frac{I_{B_{\delta'}(y_t^j(x_i))}(y)}{P(x', B_{\delta'}(y_t^j(x_i)))} P_t(x, dy), \quad j = 1, \dots, n+1; \quad (9.2.26)$$

поскольку $\hat{y}_i^j(x') \in K_t(x') \cap B_{\delta'}(y_t^j(x_i))$, то справедливо неравенство

$$\|\hat{y}_i^j(x') - y_t^j(x_i)\| \leq \delta' < \delta, \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Учитывая, что в соответствии с (9.2.15)

$$\sum_{j=1}^{n+1} q_t^j(x_i) y_t^j(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, n+1,$$

а также что

$$\sum_{j=1}^{n+1} q_t^j(x_i) = 1,$$

получаем, что для среднего

$$y_t^*(x) = \int y P_t^*(x, dy) \quad (9.2.27)$$

имеет место неравенство

$$\|y_t^*(x)\| \leq \sum_{i=1}^k I_{A_i}(x) \sum_{j=1}^n q_t^j(x_i) \|\hat{y}_i^j(x_i) - y_t^j(x_i)\| \leq \delta' < \delta. \quad (9.2.28)$$

Построим «близкое» к ядру $P_t^*(x, dy) = q_t^*(x, y) P_t(x, dy)$ ядро $P'_t(x, dy) = q'_t(x, y) P_t(x, dy)$, обладающее свойством $\int y P'_t(x, dy) = 0$ для $x \in B_{t-1}$. Используя лемму 4.1.5, заметим, что непрерывная функция $x \mapsto r(K_t^*(x))$, где

$r(\cdot)$ определена посредством формулы $r(\cdot) = \min\{\sigma_K(h), \|h\| \leq 1\}$ и достигает минимума на компакте B_{t-1} , равного $R_t^* > 0$. Опираясь на конструкцию, использованную в доказательстве предложения 5.3.3, положим для $R_t \in (0, R_t^*)$

$$p_t(x) = \frac{\|y_t^*(x)\|}{\|y_t^*(x)\| + R_t}, \quad (9.2.29)$$

$$P_t'(x, \cdot) = (1 - p_t(x))P_t^*(x, \cdot) + p_t(x)\widehat{P}_t(x, \cdot),$$

где \widehat{P}_t — переходное ядро, $\widehat{P}_t(x, \cdot) \ll P_t(x, \cdot)$, $\widehat{P}_t(x, dy) = \hat{q}_t(x, y)P_t(x, dy)$ и \hat{q}_t обладает следующими свойствами:

если $y_t^*(x) = 0$, то

$$\hat{q}_t(x, y) = q_t^*(x, y), \quad (9.2.30)$$

а если $y_t^*(x) \neq 0$, то

$$\hat{y}_t(x) = \int y \hat{q}_t(x, y) P_t(x, dy) = -\frac{R_t}{\|y_t^*(x)\|} y_t^*(x) \in \text{int}(K^*(x)), \quad (9.2.31)$$

где $K_t^*(x) = \text{conv}(K_t(x))$.

Существование такого \hat{q}_t обеспечено благодаря теореме 9.1.1. Действительно, обозначим

$$\mu_t(x, \theta) = \int e^{-\theta y} P_t(x, dy) > 0, \quad (9.2.32)$$

$$\varkappa_t(x, \theta) = \ln \mu_t(x, \theta), \quad x \in B_{t-1}, \quad \theta \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, что эти функции борелевски измеримы по совокупности аргументов. Рассмотрим преобразование Эшера²³

$$P_t^\theta(x, dy) = q^\theta(x, y) P_t(x, dy). \quad (9.2.33)$$

Тогда градиент по θ

$$\nabla_\theta \varkappa_t(x, \theta) = \int y P_t^\theta(x, dy) = y_t(x, \theta) \in \text{int}(K_t^*(x)),$$

и гессиан по θ

$$\nabla_\theta^2 \varkappa_t(x, \theta) = \int [y - y_t(x, \theta)][y - y_t(x, \theta)]^T P_t^\theta(x, dy)$$

положительно определен в силу предположения о полноразмерности носителя $K_t(x)$, вытекающего из предположения RNDAO, в частности, функция $\theta \mapsto \varkappa_t(x, \theta)$ строго выпукла; сопряженная (по θ) к этой функции

$$\varkappa_t^*(x, z) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^n} (\theta z - \varkappa_t(x, \theta)), \quad \theta \in \mathbb{R}^n, \quad (9.2.34)$$

выпукла по z , измерима по Борелю по совокупности аргументов и непрерывна внутри эффективной области (по z), т. е. на множестве

$$\{z : \varkappa_t^*(x, z) < \infty\} = \text{int}(K_t^*(x)),$$

²³Пункт 2 замечания 9.1.1 применим и к условным распределениям.

по следствию 9.1.1, более того²⁴, непрерывно дифференцируема, и градиент (по z)

$$\nabla_z \varkappa_t^*(x, z) = F_{t,x}^{-1}(z), \quad (9.2.35)$$

где $F_{t,x}^{-1}$ — обратное к $F_{t,x}$ отображение, $F_{t,x}(\theta) = \nabla_\theta \varkappa_t(x, \theta)$.

Разумеется, функция $\nabla_z \varkappa_t^*$ измерима по совокупности аргументов.

Положим теперь

$$\theta_t^*(x) = \varkappa_t^*(x, \hat{y}_t(x)); \quad (9.2.36)$$

тогда функция θ_t^* измерима и, полагая

$$\widehat{P}_t(x, dy) = P^{\theta_t^*(x)}(x, dy),$$

имеем

$$\hat{q}_t(x, y) = q_t^{\theta_t^*(x)}(x, y),$$

а поскольку функция

$$f_t(\theta, x, y) = q_t^\theta(x, y),$$

где q_t^θ определена формулой (9.2.33), измерима по совокупности (трех) аргументов, а по θ непрерывна, то

$$\hat{q}_t(x, y) = f_t(\theta_t^*(x), x, y)$$

измерима по совокупности аргументов, то из (9.2.35) и (9.2.36) получаем

$$\int y \widehat{P}_t(x, dy) = \int y P^{\theta_t^*(x)}(x, dy) = \hat{y}_t(x). \quad (9.2.37)$$

Таким образом, используя предложение 5.3.3, получаем, с учетом (9.2.28), (9.2.29), (9.2.30), (9.2.31), (9.2.35) и (9.2.36), что

$$\begin{aligned} \int y P_t'(x, dy) &= 0, \\ \|P_t'(x, \cdot) - P_t^*(x, \cdot)\|_{TV} &\leq \frac{2\|y_t^*(x)\|}{\|y_t^*(x)\| + R_t} \leq \frac{2\delta}{\delta + R_t}, \quad x \in B_{t-1}, \end{aligned}$$

а в силу произвольности $R_t \in (0, R_t^*)$

$$\|P_t'(x, \cdot) - P_t^*(x, \cdot)\|_{TV} \leq \frac{2\delta}{\delta + R_t^*}. \quad (9.2.38)$$

С использованием неравенства (9.2.38)

$$\begin{aligned} &\left| g_t(x) \vee \int w_t(x, y) P_t'(x, dy) - g_t(x) \vee \int w_t(x, y) P_t^*(x, dy) \right| \leq \\ &\leq \left| \int w_t(x, y) P_t'(x, dy) - \int w_t(x, y) P_t^*(x, dy) \right| \leq C_t' \frac{2\delta}{\delta + R_t^*}, \end{aligned}$$

²⁴Речь идет о преобразовании Лежандра для фиксированного $x \in B_{t-1}$.

где $C'_t = \sup_{z \in \bar{B}_t} v_t^*(z) \leq C < \infty$, по предположению 1.2.2. Поэтому

$$u_{t-1}^*(x) = g_{t-1}(x) \vee \int w_t(x, y) P_t^*(x, dy) \geq u_{t-1}(x) - \frac{2C'_t \delta}{\delta + R_t^*} \geq v_{t-1}^* - 2\delta \left(1 + \frac{C'_t}{\delta + R_t^*}\right).$$

Пользуясь неравенством (9.2.13) имеем:

$$\begin{aligned} U_{t-1}^* &= g_{t-1}(\bar{X}_{t-1}) \vee \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{P} \in \mathfrak{M}(X)} U_t^* \geq g_{t-1}(\bar{X}_{t-1}) \vee \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}^{J_{t-1}} V_t^* = \\ &= u_{t-1}^*(\bar{X}_{t-1}) \geq V_{t-1}^* - 2\delta \left(1 + \frac{C'_t}{\delta + R_t^*}\right), \text{ п. н.} \end{aligned}$$

В силу произвольности $\delta > 0$

$$U_{t-1}^* \geq V_{t-1}^*.$$

Используя теперь предложение 9.2.1, получаем

$$U_t^* = V_t^*, \quad t = 0, \dots, N.$$

□

9.3 Сохранение структурной устойчивости для близких вероятностных моделей

Для монотонно неубывающей функции $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, определим верхнюю обобщенную обратную функцию посредством

$$f^{[-1]}(y) = \inf\{x \in [0, \infty) : f(x) > y\} = \sup\{x \in [0, \infty) : f(x) \leq y\},$$

которая является неубывающей непрерывной справа, а также нижнюю обобщенную обратную функцию посредством

$$f^{[-1]}(y) = \sup\{x \in [0, \infty) : f(x) < y\} = \inf\{x \in [0, \infty) : f(x) \geq y\},$$

которая является неубывающей непрерывной слева. Очевидно, $f^{[-1]}(y) \geq f^{[-1]}(y)$. Если f является строго возрастающей, то $f^{[-1]}(y) = f^{[-1]}(y)$, и эти совпадающие обобщенные обратные функции являются непрерывными.

Обозначим $H_u = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle u, y \rangle > 0\}$ открытые полупространство с нормальным вектором u .

Нам потребуются следующие расстояния/метрики на пространстве вероятностных мер²⁵ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$:

²⁵Расстояние, в отличие от метрики, может принимать бесконечные значения. Отметим, что l_∞ является минимальным расстоянием по отношению к расстоянию на пространстве случайных векторов $L_\infty(X', X) = \operatorname{vrai\,max} \rho(X', X)$, см., например, (7.5.15) в [208]. Метрика d_{UC} является обобщением метрики Колмогорова d_K , которая определена для распределений на вещественной прямой \mathbb{R} (с борелевской σ -алгеброй). На \mathbb{R} , эти две метрики эквивалентны, $d_K \leq d_{UC} \leq 2d_K$. Отметим, что метрики d_{UC} используется например, для оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, см., например, [91]. Метрика Прохорова d_P метризует слабую топологию на пространстве вероятностных мер на сепарабельном метрическом пространстве.

– метрика Прохорова, задаваемая формулой (6.4.1);

– метрика

$$l_\infty(Q', Q) = \inf\{\epsilon > 0 : Q(B) \leq Q'(B^\epsilon), Q'(B) \leq Q(B^\epsilon) \text{ для всех } B \in \mathcal{B}^n\},$$

где $B^\epsilon = [B]^\epsilon$, что определено формулой (4.1.7);

– метрика

$$d_{UC}(Q', Q) = \sup_{A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n)} |Q'(A) - Q(A)|, \quad (9.3.1)$$

где $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n)$ — класс всех непустых выпуклых компактных подмножеств \mathbb{R}^n .

Замечание 9.3.1. Такое же значение точной верхней грани в (9.3.1) получится, если ее брать по всем борелевским²⁶ выпуклым подмножествам \mathbb{R}^n ; обозначим эту точную верхнюю грань через $d'_{UC}(Q', Q)$.

В самом деле, неравенство $d_{UC} \leq d'_{UC}$ очевидно. Фиксируем теперь произвольное $\epsilon > 0$ и выберем борелевское выпуклое множество $A_\epsilon \subseteq E$, такое что $|Q'(A_\epsilon) - Q(A_\epsilon)| > d'_{UC}(Q', Q) - \epsilon$. Меры, определенные на борелевской σ -алгебре метрического пространства, являются регулярными, так что существует замкнутое множество $F_\epsilon \subseteq A_\epsilon$, такое что $Q'(A_\epsilon \setminus F_\epsilon) < \epsilon$ и $Q(A_\epsilon \setminus F_\epsilon) < \epsilon$. Кроме того, \mathbb{R}^n является польским пространством, и по свойству плотности найдется компакт $K_\epsilon \subseteq E$, такой что $Q'(E \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ и $Q(E \setminus K_\epsilon) < \epsilon$. Обозначим $N_\epsilon = \text{conv}(F_\epsilon \cap K_\epsilon)$. Тогда N_ϵ является выпуклым компактом, $A_\epsilon \supseteq N_\epsilon \supseteq (F_\epsilon \cap K_\epsilon)$ и $d_{UC}(Q', Q) \geq |Q'(N_\epsilon) - Q(N_\epsilon)| > d'_{UC}(Q', Q) - 5\epsilon$. В силу произвольности $\epsilon > 0$ получаем $d_{UC} \geq d'_{UC}$, откуда $d_{UC} = d'_{UC}$.

Теорема 9.3.1. Пусть Q_t — переходное ядро исходной модели, отвечающее условному распределению приращений цен при известной предьстории цен, а \tilde{Q}_t — возмущенной модели. Предположим, что для исходной модели выполнено условие RNDAO для носителей переходных ядер, используя соотношение согласованности (вероятностной и детерминистской модели) (6.1.1)

1) Тогда²⁷ $p_t^*(x) = \inf_{u \in S_1(0)} Q_t(x, H_u) > 0$ и возмущенная модель с переходными ядрами \tilde{Q}_t удовлетворяет условию RNDAO, если она достаточно близка к исходной модели в следующем в смысле:

$$d_{UC}(\tilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < p_t^*(x).$$

²⁶Выпуклое подмножество \mathbb{R}^n может быть неизмеримо, если по умолчанию принимается аксиома выбора. Рассмотрим объединение открытого шара в \mathbb{R}^2 и множества Витали, построенного как подмножество единичного круга (см., например, [196], страницы 100 and 101). Полученное множество является выпуклым, но не измеримым по Борелю.

²⁷В этом случае носители для $Q_t(x, \cdot)$ и $\tilde{Q}_t(x, \cdot)$ не обязаны быть компактными.

- 2) Предположим, что носители мер $\widetilde{Q}_t(x, \cdot)$ и $Q_t(x, \cdot)$ компактны. Тогда возмущенная модель с ядрами \widetilde{Q}_t удовлетворяет RNDAO, если она достаточно близка к исходной модели в следующем в смысле²⁸:

$$l_\infty(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < s_t^*(x),$$

где $s_t^*(x) = r(K_t(x)) > 0$ и r определено посредством (4.1.8).

- 3) Найдется число $d_t^*(x) \in (0, 1)$, которое определяется заданием меры $Q_t(x, \cdot)$, такое что для возмущенной модели с ядрами \widetilde{Q}_t выполняется условие RNDAO, если²⁹

$$d_P(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < d_t^*(x).$$

Если, кроме того, носители мер $Q_t(x, \cdot)$ компактны, достаточно положить

$$d_t^*(x) = \phi_{t,x}^{[-1]}(r(K_t(x))), \quad (9.3.2)$$

где r задается (4.1.8),

$$\phi_{t,x}(z) = z + \psi_{t,x}^{[-1]}(z),$$

и

$$\psi_{t,x}(u) = \inf_{y \in K_t(x)} Q(x, \bar{B}_u(y)). \quad (9.3.3)$$

Доказательство.

- 1) Нетрудно видеть, используя соотношение согласованности (вероятностной и детерминистской модели) (6.1.1), что геометрическое условие (2.4.8) для RNDAO равносильно условию $Q_t(x, H_u) > 0$ для любого $u \in S_1(0)$. Рассмотрим $O(n)$, ортогональную группу³⁰ для пространства размерности n . Действие этой группы непрерывных преобразований транзитивно на единичной сфере $S_1(0)$, так что если мы зафиксируем какой-нибудь вектор $e \in S_1(0)$, то³¹

$$\inf_{u \in S_1(0)} Q_t(x, H_u) = \inf_{\Theta \in O(n)} \Theta \circ Q_t(x, H_e).$$

Поскольку $O(n)$ является компактной топологической группой, отображение $\Theta \mapsto \Theta \circ Q_t(x, \cdot)$ непрерывно по отношению к слабой топологии на

²⁸Условие RNDAO (для исходной модели) равносильно $r(K_t(x)) > 0$ для любых x и t .

²⁹В этом случае не требуется компактность носителей мер $Q_t(x, \cdot)$ и $\widetilde{Q}_t(x, \cdot)$.

³⁰Это группа изометрических преобразований Евклидова пространства размерности n , с одной неподвижной точкой, которую мы выберем равной началу координат, т. е. равной 0. Эквивалентным образом, можно представить $O(n)$ как группу ортогональных матриц размерности $n \times n$ с операцией матричного умножения.

³¹Для двух измеримых пространств (X, \mathcal{A}) и (Y, \mathcal{B}) , а также $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -измеримого отображения $f : X \rightarrow Y$, образ меры π на (X, \mathcal{A}) индуцируемый отображением f обозначается $f \circ \pi$ (или $\pi \circ f^{-1}$) и определяется посредством соотношения $f \circ \pi(B) = \pi(f^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}$.

пространстве вероятностных мер. Множество H_e открыто и, стало быть, по теореме Александра [74], функция $\Theta \mapsto \Theta \circ Q_t(x, H_e)$ является непрерывной снизу и, следовательно, достигает минимума для некоторого $\Theta^* = \Theta_{t,x}^* \in O(n)$. Обозначим $u^* = \Theta^*(e)$; тогда $p_t^*(x) = Q_t(x, H_{u^*}) > 0$ и используя Замечание 9.3.1 имеем неравенства

$$\begin{aligned} \left| \inf_{u \in S_1(0)} \widetilde{Q}_t(x, H_u) - \inf_{u \in S_1(0)} Q_t(x, H_u) \right| &\leq \sup_{u \in S_1(0)} |\widetilde{Q}_t(x, H_u) - Q_t(x, H_u)| \leq \\ &\leq d_{UC}(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)), \end{aligned}$$

откуда

$$\inf_{u \in S_1(0)} \widetilde{Q}_t(x, H_u) \geq p_t^*(x) - d_{UC}(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) > 0.$$

Тем самым, мы получили требуемый результат.

2) Непосредственно из определения метрики вытекает l_∞ неравенство

$$h_\rho(\widetilde{K}_t(x), K_t(x)) \leq l_\infty(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)),$$

где $\widetilde{K}_t(x) = \text{supp}(\widetilde{Q}_t(x, \cdot))$ и $K_t(x)$ определено посредством (6.1.1). Условие RNDAO (для исходной модели) влечет $r(K_t(\cdot)) > 0$. Напомним, что функция $K \mapsto r(K)$ является липшицевой, с константой Липшица равной единице, на пространстве $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ непустых выпуклых компактов в \mathbb{R}^n с метрикой Помпею—Хаусдорфа, см. лемму 4.1.4. Следовательно, $|r(\widetilde{K}_t(x)) - r(K_t(x))| \leq h_\rho(\widetilde{K}_t(x), K_t(x))$, и значит

$$r(\widetilde{K}_t(x)) \geq r(K_t(x)) - h_\rho(\widetilde{K}_t(x), K_t(x)) \geq r(K_t(x)) - l_\infty(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot))$$

откуда и следует требуемый результат.

3) Фиксируем некоторые t и x . Благодаря условию RNDAO, $\text{conv}(K_t(x)) \supseteq \bar{B}_{r(K_t(x))}(0)$. В случае, когда множество $K_t(x)$ является бесконечным, выберем произвольное $\delta \in (0, r(K_t(x)))$. Найдется выпуклый многогранник $P_\delta \subseteq \bar{B}_{r(K_t(x))}(0) \subseteq \text{conv}(K_t(x))$, такой что $h_\rho(P_\delta, \bar{B}_{r(K_t(x))}(0)) < \delta$, см., например, [26, теорема 14.6]. Тем самым, $P_\delta \supseteq \bar{B}_{r(K_t(x))-\delta}(0)$. Выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой конечного множества своих вершин, а поскольку вершины принадлежат $\text{conv}(K_t(x))$, он может быть представлен как выпуклая комбинация конечного числа векторов из $K_t(x)$ (на самом деле, достаточно рассматривать выпуклые комбинации $n + 1$ векторов, по теореме Каратеодори). Таким образом, вне зависимости от того, является ли множество $K_t(x)$ конечным или нет, существует (зависящее от δ) конечное множество $\{y_1, \dots, y_m\} \subseteq K_t(x)$, такое что $\text{conv}(\{y_1, \dots, y_m\}) \supseteq \bar{B}_{r(K_t(x))-\delta}(0)$; ясно, что $m \geq n + 1$.

Введем две неубывающие функции³²

$$\zeta_{t,x}(u) = \min_{i=1,\dots,m} Q_t(x, \bar{B}_u(y_i)) > 0$$

и

$$\eta_{t,x}(z) = z + \zeta_{t,x}^{[-1]}(z).$$

Предположим что

$$d_P(\bar{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < \eta_{t,x}^{[-1]}(r(K_t(x)) - \delta).$$

Выберем $\delta^* > 0$, такое что

$$\delta^* < \eta_{t,x}^{[-1]}(r(K_t(x)) - \delta) - d_P(\bar{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot))$$

и выберем ϵ , такое что

$$d_P(\bar{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < \epsilon < \eta_{t,x}^{[-1]}(r(K_t(x)) - \delta) - \delta^*.$$

Поскольку $\epsilon > d_P(\bar{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot))$, имеем $\bar{Q}_t(x, \bar{B}_{u+\epsilon}(y)) \geq Q_t(x, \bar{B}_u(y)) - \epsilon$ для любого $y \in K_t(x)$ и произвольного $u \geq 0$. Следовательно, $\bar{Q}_t(x, \bar{B}_{u+\epsilon}(y_i)) \geq \zeta_{t,x}(u) - \epsilon$ для всех $i = 1, \dots, m$. Если мы выберем u , такое что $u \in (\zeta_{t,x}^{[-1]}(z), \zeta_{t,x}^{[-1]}(z) + \delta')$, где $\delta' < \delta^*$, то $\zeta_{t,x}(u) > \epsilon$ и $\bar{K}_t(x) \cap \bar{B}_{u+\epsilon}(y_i) \neq \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, m$, так что мы можем выбрать $\tilde{y}_i \in \bar{K}_t(x) \cap \bar{B}_{u+\epsilon}(y_i)$, $i = 1, \dots, m$. Благодаря выбору ϵ и u , получаем

$$r(K_t(x)) - \delta > \eta(\epsilon + \delta^*) \geq \epsilon + \zeta_{t,x}^{[-1]}(\epsilon) + \delta^* \geq u + \epsilon.$$

Поэтому $r(K_t(x)) - \delta - u - \epsilon > 0$ и

$$\text{conv}(\bar{K}_t(x)) \supseteq \text{conv}(\{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m\}) \supseteq B_{r(K_t(x)) - \delta - u - \epsilon}(0).$$

Таким образом, условие RNDAO выполняется для возмущенной модели, когда $d_P(\bar{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < d_t^*(x)$, где $d_t^*(x) = \eta_{t,x}^{[-1]}(r(K_t(x)) - \delta)$.

Теперь рассмотрим случай, когда множество $\text{supp}(K_t(x))$ компактно. Функция $y \mapsto Q_t(x, B_u(y)) > 0$ полунепрерывна снизу по теореме Александрова, так что $\inf_{y \in K_t(x)} Q_t(x, B_u(y)) > 0$ для $u > 0$. Отметим, что для функции $\psi_{t,x}$, определенной посредством (9.3.3), выполняется неравенство $\psi_{t,x}(u) > 0$ для $u > 0$. Поскольку отображение $y \mapsto Q_t(x, \bar{B}_u(y)) > 0$ полунепрерывно сверху, функция $\psi_{t,x}$ также полунепрерывна сверху; она является неубывающей и, значит, непрерывной справа; кроме того,

³²Отметим, что функции $\zeta_{t,x}$, а значит и $\eta_{t,x}$, зависят от выбора δ .

$\psi_{t,x}(u) = 1$ для достаточно больших значений u . Для малых положительных значений u имеем

$$\begin{aligned}\psi_{t,x}(0) &= \lim_{u \downarrow 0} \psi_{t,x}(u) = \inf_{u > 0} \inf_{y \in K_t(x)} Q_t(x, \bar{B}_u(y)) = \\ &= \inf_{y \in K_t(x)} \inf_{u > 0} Q_t(x, \bar{B}_u(y)) = \inf_{y \in K_t(x)} Q_t(x, \{y\}).\end{aligned}$$

Следовательно, величина $\psi_{t,x}(0)$ положительна если и только если $K_t(x)$ является конечным множеством и равна нулю в противном случае. Отметим, что функция $\phi_{t,x}$, определенная посредством (9.3.2), строго монотонно возрастает, поэтому функция $\phi_{t,x}^{[-1]}(\cdot)$ непрерывна, $\phi_{t,x}^{[-1]}(0) = 0$, а $\phi_{t,x}^{[-1]}(u) > 0$ для $u > 0$. Условие RNDAO для исходной модели равносильно $r(K_t(\cdot)) > 0$, так что $\phi_{t,x}^{-1}(r(K_t(x))) > 0$. Если $d_P(\bar{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < \phi_{t,x}^{[-1]}(r(K_t(x)))$, выберем $\delta^* > 0$, такое что $\delta^* < \phi^{[-1]}(r(K_t(x))) - d_P(\bar{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot))$ и выберем ϵ_0 , такое что

$$d_P(\bar{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < \epsilon_0 < \phi^{[-1]}(r(K_t(x))) - \delta^*.$$

Обозначим $\delta_0 = u - \psi_{t,x}^{[-1]}(\epsilon_0)$; если $\delta_0 > 0$, т. е. $u > \psi_{t,x}^{[-1]}(\epsilon_0)$, то $\psi_{t,x}(u) \geq \epsilon_0$ и $\bar{Q}_t(x, \bar{B}_{u+\epsilon_0}(y)) \geq \psi_{t,x}(u) - \epsilon_0 > 0$ для любого $y \in K_t(x)$, откуда $\bar{K}_t(x) \cap \bar{B}_{u+\epsilon_0}(y) \neq \emptyset$ для любого $y \in K_t(x)$. Напомним, что для произвольного $\delta > 0$, существует (зависящее от δ) конечное множество $\{y_1, \dots, y_m\} \subseteq K_t(x)$, такое что $\text{conv}(\{y_1, \dots, y_m\}) \supseteq \bar{B}_{r(K_t(x))-\delta}(0)$; выберем $\delta > 0$ и $\delta_0 > 0$, такие что $\delta + \delta_0 < \delta^*$. Тогда мы можем выбрать (зависящие от δ) точки $\tilde{y}_i \in \bar{K}_t(x) \cap \bar{B}_{u+\epsilon_0}(y_i)$, $i = 1, \dots, m$. Благодаря выбору параметров имеем

$$r(K_t(x)) > \phi(\epsilon_0 + \delta^*) \geq \delta^* + \epsilon_0 + \psi_{t,x}^{[-1]}(\epsilon_0) > \delta + u + \epsilon_0.$$

Следовательно, $r(K_t(x)) - \delta - u - \epsilon_0 > 0$ и $\text{conv}(\bar{K}_t(x)) \supseteq \text{conv}(\{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m\}) \supseteq B_{r(K_t(x))-\delta-u-\epsilon_0}(0)$. Таким образом, условие RNDAO выполняется для возмущенной модели, когда $d_P(\bar{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < d_t^*(x)$, где $d_t^*(x) = \phi_{t,x}^{[-1]}(r(K_t(x)))$.

□

Замечание 9.3.2. Отметим, что метрика d_{UC} порождает более сильную топологию³³, чем слабая топология. Отметим также что, $d_{UC}(Q', Q) \leq \frac{1}{2} \|Q' - Q\|_{TV}$, так что сходимость по норме полной вариации сильнее. Поэтому результат из работы [205] вытекает из первой части теоремы 9.3.1; кроме того, наше доказательство короче.

³³Если $d_{UC}(Q_n, Q) \rightarrow 0$, то имеет место слабая сходимость; принимая во внимание замечание 9.3.1, это вытекает, например, из [100, Пример 2.3]. С другой стороны, если последовательность неатомических мер Q_n сходится к мере Дирака δ_a , то $d_{UC}(Q_n, \delta_a) \equiv 1$.

Кроме того, для метрики Прохорова имеет место неравенство $d_P \leq l_\infty$. Сходимость распределений по метрике l_∞ влечет слабую сходимость и, нетрудно видеть, является более сильной.

Пункт 3 теоремы 9.3.1 может быть использован и для других метрик, например с использованием неравенств (6.4.2).

Глава 10. Численное решение на основе аппроксимирующей модели с оценкой точности

В главе введено новое понятие — порога структурной устойчивости модели, представляющего собой при заданной предыстории цен максимальное возмущение (в метрике Помпею—Хаусдорфа) компактов, описывающих динамику цен, сохраняющее структурную устойчивость модели (грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью). Выражение для порога структурной устойчивости дано в теореме 10.1.1.

Опираясь на результаты касающиеся порога структурной устойчивости, в теореме 10.2.1 получены оценки чувствительности решений уравнений (VI) Беллмана—Айзекса по отношению к равномерно малым возмущением компактов, описывающих динамику цен исходной модели для случая торговых ограничений, представимыми в виде разложения Моцкина.

Показано, что без условия структурной устойчивости модели, при равномерно малой аппроксимации компактов, описывающих динамику цен исходной модели, нельзя гарантировать равномерную близость решений уравнений Беллмана—Айзекса даже в случае отсутствия торговых ограничений и сохранения при аппроксимации свойства отсутствия арбитражных возможностей. Кроме того, показано, что нарушение условия структурной устойчивости может приводить к потере непрерывности решений уравнений Беллмана—Айзекса.

Подробно обсуждается проблема выбора адекватных численных методов, как для задачи ценообразования, так и для задачи хеджирования. Описаны предварительные вычисления перед решением уравнения Беллмана для упомянутых выше двух классов моделей, с целью определения ограничений на погрешность вычислений, гарантирующих заданную точность вычисления премии по опциону.

Подобраны тестовые модельные примеры, в которых модель динамики рынка задается обобщенной моделью Колокольцова, с множеством мультипликаторов в виде прямоугольника или эллипса; рассматриваются статические торговые ограничения, заключающиеся в запрете коротких позиций (модель относится к типу с неограниченными торговыми ограничениями), а также динамические торговые ограничения, описанные в примере 1.1.4; в качестве опционов выбираются европейский опцион “Put on Max”, функция выплат по которому

не является выпуклой и европейский опцион “Call on Max”, функция выплат по которому является выпуклой.

Для этих модельных примеров проведен численный эксперимент, подтверждающий работоспособность выбранных численных методов и алгоритмов.

Описана структура разработанного комплекса программ и перспективы его развития [54].

Основные результаты главы опубликованы в [52] (английская версия [233]), [228], [229] и [75].

10.1 Порог структурной устойчивости

Как уже отмечалось в параграфе 2.4, обычно торговые ограничения, описываемые при помощи многозначных отображений $D_t(\cdot)$, задаются точно, т. е. не подвержены ошибкам измерений¹. То же относится и к функциям выплат по опциону. Будем поэтому предполагать далее, что функции выплат по американскому опциону $g_t(\cdot)$, а также торговые ограничения, описываемые посредством $D_t(\cdot)$, известны точно, и сконцентрируем внимание на описывающих неопределенность движения цен компактозначных отображениях $K_t(\cdot)$, задание которых естественно считать приближенным, учитывая неизбежную статистическую погрешность стохастического описания рыночных цен (на основе чего могут быть, в принципе, определены компакты $K_t(\cdot)$).

Одним из естественных способов приближенного решения задачи² для исходной модели рынка является построение возмущенной модели рынка, для которой компакты, описывающие неопределенность движения цен устроены проще (например, представляют собой конечные множества). Чтобы решение задачи для возмущенной модели рынка не потеряло бы экономического смысла (обладало бы качественными свойствами, аналогичными свойствам исходной системы), необходимо сохранение условий структурной устойчивости. Таким образом, при численном решении с заданной погрешностью, использующем возмущенную модель рынка, когда приращение цен лежит в компакте $\tilde{K}_t(\cdot)$, для нее следует убедиться в выполнении RNDSAUP, грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. С этой целью ниже мы формализуем понятие порога структурной прочности модели.

Заметим, что в условиях безарбитражности фигурирует всегда выпуклая оболочка $\text{conv}(K_t(\cdot))$ компактов $K_t(\cdot)$, а не сами эти компакты. Поэтому, с точки зрения анализа свойств безарбитражности, для описания близости компактов $K_t(\cdot)$, описывающих динамику рынка, разумно использовать полуметрику³

¹Речь идет о статистической погрешности.

²Напомним, что речь идет о нахождении минимального уровня средств, необходимых для гарантированного покрытия обусловленного обязательства по проданному опциону, и надлежащей стратегии хеджирования (зависящих от предьстории цен).

³Можно модифицировать и определения грубости для того или иного свойства безарбитражности, используя полуметрику p_ρ из (10.1.1) вместо метрики h_ρ . Неравенство (7.2.14) свидетельствует о том, что модифицированные таким образом определения будут основаны на

на классе $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ непустых компактных подмножеств \mathbb{R}^n :

$$p_\rho(A_1, A_2) = h_\rho(\text{conv}(A_1), \text{conv}(A_2)); \quad (10.1.1)$$

при этом для непустых компактов A_1 и A_2 справедливо неравенство [36, предложение 5.2, формула 5.12]:

$$h_\rho(\text{conv}(A_1), \text{conv}(A_2)) \leq h_\rho(A_1, A_2). \quad (10.1.2)$$

Не ограничивая общности можно считать, что выпуклые множества $D_t(\cdot)$ являются замкнутыми (что мы и будем предполагать везде далее), поскольку критерии безарбитражности могут быть сформулированы в терминах опорной функции множества $D_t(\cdot)$.

Будем предполагать, что торговые ограничения $D_t(\cdot)$ для исходной и возмущенной модели одни и те же, так что они отличаются лишь описывающими неопределенность движения цен компактами, соответственно $K_t(\cdot)$ и $\tilde{K}_t(\cdot)$.

Определение 10.1.1. Если для исходной модели выполняется грубое условие безарбитражности RNDSAUP, то будем называть порогом структурной устойчивости модели в момент t (при известной предыстории цен) величину $p_t(K_t(\cdot)) > 0$, которая принимает значение $+\infty$, если условие безарбитражности RNDSAUP выполняется при любых возмущениях $\tilde{K}_t(\cdot)$ модели, а в противном случае определяется посредством двух условий:

- а) для любой возмущенной модели, такой что $p_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)) < p_t(K_t(\cdot))$, выполняется условие RNDSAUP;
- б) найдется такая возмущенная модель, для которой $p_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)) > p_t(K_t(\cdot))$ и условие RNDSAUP не выполняется.

Нам потребуются вспомогательные результаты⁴.

Определение 10.1.2. Множества A и B назовем устойчиво пересекающимися, если найдется $\varepsilon > 0$, такое что $\bar{B}_\varepsilon(0) \subseteq \{z \in \mathbb{R}^n : (z + A) \cap B \neq \emptyset\}$.

Непосредственно из определения следует симметричность свойства устойчивого пересечения по отношению к двум множествам, а также $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$. Отметим, что геометрический критерий грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP, приведенного в пункте 1) теоремы 2.4.1, т. е. (2.4.1), можно, таким образом, сформулировать как устойчивость пересечения множеств $\text{conv}(K_t(\cdot))$ и $\text{bar}(D_t(\cdot))$.

более слабой (но релевантной для этой цели) формализации близости компактов. Отметим, что на классе $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n)$ непустых выпуклых компактных подмножеств \mathbb{R}^n данная полуметрика становится метрикой (совпадающей с метрикой Помпею–Хаусдорфа).

⁴Далее мы примем конвенцию $\inf \emptyset = +\infty$ и конвенцию $+\infty + a = a + (+\infty) = +\infty$ для $a \in \mathbb{R}$.

Оказывается, что для двух множеств $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$ отрицание свойства устойчивого пересечения равносильно свойству, введенному в работе [197]⁵, в которой предлагается говорить, такие множества образуют экстремальную систему. Пункт (i) доказанный в этой работе теоремы 2.2 можно сформулировать в терминах свойства устойчивого пересечения следующим образом: множества A и B являются устойчиво пересекающимися если и только если $0 \in f(A - B)$; кроме того, выполнение условия $\text{int}(A) \cap B \neq \emptyset$ (или же $\text{int}(B) \cap A \neq \emptyset$) влечет устойчивость пересечения.

Обозначим⁶

$$n(A, B) = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-B}(l) = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{B-A}(l). \quad (10.1.3)$$

Отметим, что $A \cap B \neq \emptyset$ равносильно $0 \in A - B$ и это влечет $n(A, B) \geq 0$.

Лемма 10.1.1. Пусть множества A и B — непустые выпуклые множества. Тогда величина $n(A, B)$ положительна тогда и только тогда, когда множества A и B устойчиво пересекаются и в этом случае

$$n(A, B) = l(A, B), \quad (10.1.4)$$

где

$$l(A, B) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : \bar{B}_\varepsilon(0) \subseteq \{z \in \mathbb{R}^n : (z + A) \cap B \neq \emptyset\}\}. \quad (10.1.5)$$

Доказательство. Из определения (10.1.5) непосредственно следует, что положительность величины $l(A, B)$ равносильна тому, что множество $\{z \in \mathbb{R}^n : (z + A) \cap B \neq \emptyset\}$ имеет непустую внутренность, содержащую точку 0, а значит тому, что множества A и B устойчиво пересекаются.

Предположим, что $l(A, B) > 0$. Заметим, что $(z + A) \cap B \neq \emptyset$ равносильно $0 \in z + A - B$, что влечет для всех $u \in \mathbb{R}^n$

$$\sigma_{z+A-B}(u) = \langle z, u \rangle + \sigma_{A-B}(u) \geq 0. \quad (10.1.6)$$

Выберем произвольное $\delta \in (0, l(A, B))$. Если неравенство (10.1.6) выполняется для всех сдвигов z , таких что $\|z\| \leq \delta$, то для всех $u \in \mathbb{R}^n$

$$\sigma_{A-B}(u) \geq \sup_{z \in \bar{B}_\delta(0)} \langle -z, u \rangle = \delta \|u\|,$$

что, в силу произвольности $\delta \in (0, l(A, B))$, влечет

$$n(A, B) = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-B}(l) \geq l(A, B) > 0. \quad (10.1.7)$$

⁵ Авторы статьи развивают вариационный геометрический подход к изучению выпуклых множеств в локально выпуклых топологических векторных пространствах (вообще говоря, бесконечномерных) без каких-либо предположений о полноте и замкнутости.

⁶ Минимум в (10.1.3) достигается, поскольку минимизируется полунепрерывная снизу функция на компактном множестве. Здесь не исключается случай $n(A, B) = +\infty$.

Обратно, пусть

$$n(A, B) = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-B}(l) = \varepsilon^* > 0.$$

Для всех $u \in \mathbb{R}^n$

$$\sigma_{A-B}(u) \geq \varepsilon^* \|u\| = \sigma_{\bar{B}_{\varepsilon^*}(0)}(u),$$

поэтому $\bar{B}_{\varepsilon^*}(0) \subseteq \text{cl}(A-B)$ [36, предложение 9.5]. Отсюда следует, что $\text{cl}(A-B)$ имеет непустую внутренность. Поскольку сумма Минковского $A - B = A + (-B)$ выпуклых множеств является выпуклой, то $\text{int}(\text{cl}(A - B)) = \text{int}(A - B)$ [40, теорема 6.3]. В частности, открытый шар $B_{\varepsilon^*}(0) \subseteq f(A - B) \subseteq A - B$. Следовательно, выбирая произвольный вектор $z \in B_{\varepsilon^*}(0)$, имеем $-z \in A - B$, т. е. $(z + A) \cap B \neq \emptyset$, а значит $\varepsilon^* \leq l(A, B)$. С учетом противоположного неравенства (10.1.7), получаем требуемое равенство (10.1.4). \square

Теорема 10.1.1. Пусть для исходной модели выполняется RNDSAUP, грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. Тогда

1) Порог структурной устойчивости положителен и равен⁷

$$p_t(K_t(\cdot)) = n(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))), \quad (10.1.8)$$

а также⁸

$$p_t(K_t(\cdot)) = \inf_{l \in S_1(0) \cap (-\text{rec}(D_t(\cdot)))} \sigma_{K_t(\cdot)}(l). \quad (10.1.9)$$

2) В случае, когда множество $D_t(\cdot)$ ограничено⁹, порог структурной устойчивости принимает бесконечное значение, $p_t(K_t(\cdot)) = +\infty$.

3) В случае, когда множество $D_t(\cdot)$ является неограниченным, точная верхняя грань в формуле (10.1.9) достигается и имеет место неравенство

$$|p_t(K_t(\cdot)) - p_t(\tilde{K}_t(\cdot))| \leq p_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)). \quad (10.1.10)$$

Доказательство. Если множества $D_t(\cdot)$ компактные, то $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \mathbb{R}^n$ и из геометрического критерия (2.4.1) для RNDSAUP вытекает, что условие безарбитражности RNDSAUP выполняется при любых возмущениях $\tilde{K}_t(\cdot)$ модели, так что, по определению порога структурной устойчивости, $p_t(K_t(\cdot)) = +\infty$, а также $n(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))) = +\infty$. Кроме того, в этом случае рецессивный конус множества $D_t(\cdot)$ сводится к одноточечному множеству, содержащему

⁷Напомним, что не ограничивая общности, можно считать множества $D_t(\cdot)$ замкнутыми (что мы и будем делать), поскольку замыкание $D_t(\cdot)$ не изменяет барьерный конус $\text{bar}(D_t(\cdot))$.

⁸Согласно [40, теорема 8.4] непустое замкнутое выпуклое множество ограничено тогда и только тогда, когда его рецессивный конус состоит лишь из нулевого вектора. Кроме того, напомним, что принята конвенция $\inf \emptyset = +\infty$.

⁹Конкретные модели, для которых компактность торговых ограничений выполняется, приведены в примерах 1.1.1–1.1.4.

нулевой вектор и, в соответствии с принятой конвенцией про пустое множество, справедливо (10.1.9).

Если же множество $D_t(\cdot)$ неограниченное, то его рецессивный конус имеет хотя бы один луч $\{\lambda h^*, \lambda \geq 0\}$, содержащийся в этом конусе¹⁰. Точная верхняя грань в (10.1.9) достигается благодаря замкнутости рецессивного конуса множества $D_t(\cdot)$ (которое замкнуто по сделанному выше предположению), непрерывности опорной функции компакта и компактности единичной сферы.

Поскольку RNSAUP равносильно условию (2.4.1), то

$$n(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))) > 0,$$

что позволяет использовать лемму 10.1.1 (формулу (10.1.4)), полагая $A = \text{conv}(K_t(\cdot))$ и $B = \text{bar}(D_t(\cdot))$. Учитывая, что опорная функция выпуклого конуса (замкнутость которого не требуется)¹¹ равна индикаторной функции полярного к нему конуса (автоматически замкнутого) [40, теорема 14.1], а полярный конус к барьерному конусу непустого замкнутого выпуклого множества равен рецессивному конусу этого множества [40, следствие 14.2.1], имеем

$$\begin{aligned} n(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))) &= \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{\text{conv}(K_t(\cdot)) - \text{bar}(D_t(\cdot))}(l) = \\ &= \min_{l \in S_1(0)} [\sigma_{\text{conv}(K_t(\cdot))}(l) + \sigma_{-\text{bar}(D_t(\cdot))}(l)] = \quad (10.1.11) \\ &= \min_{l \in S_1(0) \cap (-\text{rec}(D_t(\cdot)))} \sigma_{\text{conv}(K_t(\cdot))}(l) = \min_{l \in S_1(0) \cap (-\text{rec}(D_t(\cdot)))} \sigma_{K_t(\cdot)}(l). \end{aligned}$$

Рассмотрим далее случай, когда множества $D_t(\cdot)$ неограниченные. Используя представление метрики Помпею—Хаусдорфа для выпуклых множеств через разность опорных функций [26, теорема 14.1], получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \min_{l \in S_1(0) \cap (-\text{rec}(D_t(\cdot)))} \sigma_{\text{conv}(K_t(\cdot))}(l) - \min_{l \in S_1(0) \cap (-\text{rec}(\tilde{K}_t(\cdot)))} \sigma_{\text{conv}(\tilde{K}_t(\cdot))}(l) \right| \leq \\ & \leq \sup_{l \in S_1(0) \cap (-\text{rec}(D_t(\cdot)))} |\sigma_{\text{conv}(K_t(\cdot))}(l) - \sigma_{\text{conv}(\tilde{K}_t(\cdot))}(l)| \leq \\ & \leq \sup_{l \in S_1(0)} |\sigma_{\text{conv}(K_t(\cdot))}(l) - \sigma_{\text{conv}(\tilde{K}_t(\cdot))}(l)| = h_\rho(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{conv}(\tilde{K}_t(\cdot))) = p_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)). \quad (10.1.12) \end{aligned}$$

Из (10.1.11) и (10.1.12) следует, что неравенство $p_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)) < n(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot)))$ влечет

$$n(\text{conv}(\tilde{K}_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))) > 0,$$

а значит, для возмущенной модели выполняется условие RNSAUP. Таким образом,

$$n(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))) \leq p_t(K_t(\cdot)).$$

¹⁰Отметим, что если торговые ограничения $D_t(\cdot)$ — замкнутые конусы (содержащие точку 0), то $\text{rec}(D_t(\cdot)) = D_t(\cdot)$.

¹¹Отметим, что барьерный конус не обязан быть замкнутым.

С другой стороны, выберем (произвольно малое) $\delta > 0$; тогда из определения (10.1.5) следует, что для $r = n(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot)) + \delta)$ найдется сдвиг $z = z(\delta, t, \cdot)$, такой что $\|z\| = r$ и $(z + \text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) = \emptyset$. Для возмущенной модели $\widetilde{K}_t(\cdot) = z + K_t(\cdot)$ имеем $\text{conv}(\widetilde{K}_t(\cdot)) = z + \text{conv}(K_t(\cdot))$ и $p_\rho(K_t(\cdot), \widetilde{K}_t(\cdot)) = h_\rho(\text{conv}(K_t(\cdot)), z + \text{conv}(K_t(\cdot))) = \max_{l \in S_1(0)} |\langle l, z \rangle| = \|z\| = r$.

Отсюда вытекает неравенство

$$n(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))) \geq p_t(K_t(\cdot)),$$

так что равенство (10.1.8), с учетом (10.1.11), установлено. Неравенство (10.1.10) теперь вытекает из (10.1.12). \square

Для приложений представляет интерес условия, при которых порог структурной устойчивости $p_t(K_t(\cdot))$ является ограниченной снизу положительной константой, равномерно по множеству возможных траектории B_t , т. е.

$$\inf_{x \in B_{t-1}} p_t(K_t(x)) = p_t^* > 0. \quad (10.1.13)$$

Для получения достаточных условий свойства (10.1.13) будет полезно ввести величину

$$m(A, B) = \sup_{b \in B} \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-b}(l) = \sup_{b \in B} \min_{l \in S_1(0)} [\sigma_A(l) - \langle b, l \rangle]. \quad (10.1.14)$$

Предложение 10.1.1.

1) *Имеет место неравенство*

$$m(A, B) \leq n(A, B). \quad (10.1.15)$$

2) *Если A_1 и A_2 — непустые компакты, то справедливо неравенство*

$$|m(A_1, B) - m(A_2, B)| \leq p_\rho(A_1, A_2). \quad (10.1.16)$$

3) *Множество B пересекается с внутренностью $\text{int}(A)$ выпуклого множества A тогда и только тогда, когда $m(A, B) > 0$.*

Доказательство.

1) Заметим, что

$$\begin{aligned} m(A, B) &= \sup_{b \in B} \min_{l \in S_1(0)} [\sigma_A(l) - \langle b, l \rangle] \leq \\ &\leq \min_{l \in S_1(0)} \sup_{b \in B} \sup_{a \in A} \langle a - b, l \rangle = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-B}(l) = n(A, B). \end{aligned}$$

- 2) Поскольку A_1 и A_2 — непустые компакты, то их опорные функции ограничены. Поэтому для любого $b \in B$

$$\begin{aligned} & |\mathfrak{m}(A_1, B) - \mathfrak{m}(A_2, B)| \leq \\ & \leq \sup_{b \in B} \left[\min_{l \in S_1(0)} [\sigma_{A_1}(l) - \langle b, l \rangle] - \min_{l \in S_1(0)} [\sigma_{A_2}(l) - \langle b, l \rangle] \right] \leq \\ & \leq \sup_{l \in S_1(0)} |\sigma_{A_1}(l) - \sigma_{A_2}(l)| = p_\rho(A_1, A_2). \end{aligned}$$

- 3) Заметим, что $\mathfrak{m}(A, B) > 0$ равносильно тому, что для некоторого $b^* \in B$ выполнено

$$\min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-b^*}(l) = \varepsilon > 0.$$

В свою очередь, это эквивалентно включению $A - b^* \supseteq B_\varepsilon(0)$, что равносильно $A \supseteq B_\varepsilon(b^*)$.

□

Приведем некоторые вспомогательные результаты. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое выпуклое множество, полноразмерное¹² и не совпадающее¹³ с \mathbb{R}^n .

Тогда $x \in \text{cl}(A)$ равносильно $\sigma_A(l) - \langle x, l \rangle \geq 0$ для любого $l \in S_1(0)$, где $S_1(0) = \{l : \langle l, l \rangle = 1\}$ — единичная сфера с центром в точке 0, а $x \in \text{int}(A)$ равносильно $\sigma_A(l) - \langle x, l \rangle > 0$ для любого $l \in S_1(0)$ [40, теорема 13.1]. Введем полезную для дальнейших рассмотрений функцию:

$$d_A(x) = \min_{l \in S_1(0)} [\sigma_A(l) - \langle x, l \rangle] = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-x}(l). \quad (10.1.17)$$

Из (10.1.17) следует, что функция $x \mapsto d_A(x)$ является вогнутой. Кроме того, эта функция ограничена сверху аффинной функцией, благодаря сделанному предположению $A \neq \mathbb{R}^n$, поскольку найдется вектор $l^* \in S_1(0)$, такой что $\sigma_A(l^*) < \infty$, а значит $d_A(x) \leq \sigma_A(l^*) - \langle x, l^* \rangle$.

Для $x \notin \text{cl}(A)$ справедливо равенство $d_A(x) = -\rho(x, A)$, где $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$, $\rho(x, y) = \|x - y\|$, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Действительно, в этом случае для любого $y \in \text{cl}(A)$ имеет место неравенство

$$d_A(x) = \min_{l \in S_1(0)} [(\sigma_A(l) - \langle y, l \rangle) + (\langle y, l \rangle - \langle x, l \rangle)] \geq \min_{l \in S_1(0)} [\langle y, l \rangle - \langle x, l \rangle] = -\|x - y\|,$$

откуда получаем оценку снизу $d_A(x) \geq -\rho(x, A)$. С другой стороны, $\rho(x, A) = \rho(0, A - x) = \min\{\rho(0, z) : z \in \text{cl}(A - x)\}$, а минимум достигается в единственной точке¹⁴ $z^* \in \text{cl}(A - x)$ и равен $\|z^*\| > 0$, поскольку по предположению

¹²Мы называем множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ полноразмерным, если его аффинная оболочка $\text{aff}(A)$ совпадает со всем пространством \mathbb{R}^n , что равносильно наличию непустой внутренней его выпуклой оболочки, $\text{int}(\text{conv}(A)) \neq \emptyset$.

¹³В этом случае множество A имеет непустую границу.

¹⁴Единственность точки, ближайшей к замкнутому множеству, является характеристическим свойством выпуклых множеств [26, теорема 9.3].

$0 \notin \text{cl}(A) - x = \text{cl}(A - x)$. Согласно [40, теорема 27.4] минимум функции $z \rightarrow \|z\|^2$ на множестве $\text{cl}(A - x)$ достигается в точке $z^* \in \text{cl}(A - x)$ если и только если градиент в этой точке, взятый со знаком минус, т. е. $-2z^*$, нормален к множеству $\text{cl}(A - x)$. Иными словами, $-2z^*$ лежит в нормальном конусе к $\text{cl}(A - x)$, т. е. $\langle z - z^*, -2z^* \rangle \leq 0$ для всех $z \in \text{cl}(A - x)$. Выберем $l^* = -\|z^*\|^{-1}z^* \in S_1(0)$, тогда из последнего неравенства следует $\langle z, l^* \rangle \leq \langle z^*, l^* \rangle$ для любого $z \in \text{cl}(A - x)$. Тем самым, $\sigma_{A-x}(l^*) = \langle z^*, l^* \rangle = -\|z^*\|$. Но в силу (10.1.17) имеет место неравенство $d_A(x) \leq \sigma_{A-x}(l^*) = -\rho(x, A)$.

Всюду конечная вогнутая функция $d_A(\cdot)$ непрерывна; поскольку $d_A(x) > 0$ когда $x \in f(A)$ и $d_A(x) < 0$ когда $x \notin \text{cl}(A)$, то $d_A(x) = 0$ когда $x \in \text{bd}(A)$.

Для $x \in f(A)$ величина $d_A(x)$ является максимальным радиусом содержащегося в множестве $\text{cl}(A)$ замкнутого шара с центром в точке x . В самом деле, найдется $\varepsilon > 0$, такое что $\text{cl}(A) \supseteq \bar{B}_\varepsilon(x)$. Далее, $\text{cl}(A) \supseteq \bar{B}_\delta(x)$ равносильно $\text{cl}(A - x) \supseteq \bar{B}_\delta(0)$, что в свою очередь равносильно $\sigma_{A-x}(z) \geq \delta\|z\|$ [36, предложение 9.5]. Последнее неравенство равносильно $d_A(x) \geq \delta$, в силу (10.1.17).

Величину $d_A(x)$ можно охарактеризовать как знакопеременное расстояние от точки x до границы множества A — положительное при $x \in \text{int}(A)$, нулевое при $x \in \text{bd}(A)$ и отрицательное при $x \notin \text{cl}(A)$. Для $x \notin \text{cl}(A)$ и $x \in \text{bd}(A)$ это очевидно. Для $x \in f(A)$ рассмотрим шары $\bar{B}_{d_A(x)+\varepsilon_k}(x)$, где $\varepsilon_k > 0$ и $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Выберем точки $y_k \in \bar{B}_{d_A(x)+\varepsilon_k}(x)$, такие что $\|y_k - x\| = d_A(x) + \varepsilon_k$ и $y_k \notin \text{cl}(A)$, и выберем сходящуюся подпоследовательность $y_{k_m} \rightarrow y^*$. Тогда $\|y^* - x\| = d_A(x)$, так что $y^* \in \bar{B}_{d_A(x)} \subseteq \text{cl}(A)$, а в любой окрестности точки y^* будут иметься точки из дополнения множества $\text{cl}(A)$, т. е. $y^* \in \text{bd}(A)$. Тем самым $\rho(x, \text{bd}(A)) \leq d_A(x)$; обратное неравенство вытекает из включения $\bar{B}_{d_A(x)} \subseteq \text{cl}(A)$.

Наконец, функция $x \mapsto d_A(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой, равной единице. Если точки x_1 и x_2 обе лежат в $\text{cl}(A)$, или же обе лежат в $\mathbb{R}^n \setminus f(A)$, то это вытекает из [36, лемма 5.1]. Пусть теперь $x_1 \in f(A)$ и $x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \text{cl}(A)$. Соединим эти точки отрезком $[x_1, x_2]$. Одна из точек в относительной внутренности этого отрезка, x^* , лежит на границе $\text{bd}(A)$ и $\|x_2 - x_1\| = \|x_2 - x^*\| + \|x^* - x_1\|$. Поэтому

$$\begin{aligned} |d_A(x_2) - d_A(x_1)| &\leq |d_A(x_2) - d_A(x^*)| + |d_A(x^*) - d_A(x_1)| \leq \\ &\leq \|x_2 - x^*\| + \|x^* - x_1\| = \|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

Для выпуклого множества A с непустой внутренностью, не совпадающего с \mathbb{R}^n , и непустого множества $B \subseteq \mathbb{R}^n$ из (10.1.14) вытекает, что

$$m(A, B) = \sup_{b \in B} d_A(b), \quad (10.1.18)$$

где $d_A(\cdot)$ задается формулой (10.1.17). Резюмируя изложенные выше свойства знакопеременного расстояния $d_A(\cdot)$, получаем следующее утверждение.

Предложение 10.1.2. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое выпуклое множество, полноразмерное и не совпадающее с \mathbb{R}^n .

1) Если множество B пересекается с $\text{int}(A)$, то $\mathfrak{m}(A, B)$ — «наибольший»¹⁵ радиус открытого шара, содержащегося в множестве A , когда его центр выбирается из множества $B \cap \text{int}(A)$, или, что равносильно, расстояние до $\text{bd}(A)$, границы множества A , «наиболее удаленной» от нее точки из $B \cap \text{int}(A)$.

2) Если $\mathfrak{m}(A, B) \leq 0$, то

$$\mathfrak{m}(A, B) = -\text{dist}(A, B).$$

Далее будем предполагать, что неопределенная динамика цен задается невырожденной моделью¹⁶ — когда компакты $K_t(\cdot)$ являются полноразмерными, т. е. выполняется условие (2.4.2). В этом случае грубое условие безарбитражности RNDSAUP равносильно геометрическому условию (2.4.3).

Теорема 10.1.2. Пусть выполняется условие безарбитражности RNDSAUP, динамика цен задается невырожденной моделью, т. е. выполняется условие (2.4.2), для каждого $t = 1, \dots, N$ многозначные отображения $\text{conv}(K_t(\cdot))$ и $\text{bar}(D_t(\cdot))$ полунепрерывны снизу, а компактозначные отображения $K_t(\cdot)$ полунепрерывны сверху¹⁷. Тогда для $t = 1, \dots, N$ функции $x \mapsto \mathfrak{m}(\text{conv}(K_t(x)), \text{bar}(D_t(x)))$ полунепрерывны снизу и

$$\inf_{x \in B_{t-1}} \mathfrak{p}_t(K_t(x)) > 0. \quad (10.1.19)$$

Доказательство. Заметим, что для компактозначного отображения $K_t(\cdot)$ полунепрерывность сверху сохранится при переходе к (замыканию¹⁸) выпуклой оболочки $\text{conv}(K_t(\cdot))$, по [171, предложению 2.42]. Поэтому компактозначное отображение $K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$ непрерывно, а для компактозначного отображения непрерывность и h -непрерывность равносильны [171, следствие 2.69].

Используя пункт 2 предложения 10.1.1 и то, что функция $x \mapsto d_A(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой, равной единице, получаем

$$\begin{aligned} & |d_{K_t^*(x_1)}(y_1) - d_{K_t^*(x_2)}(y_2)| \leq \\ & \leq |d_{K_t^*(x_1)}(y_1) - d_{K_t^*(x_2)}(y_1)| + |d_{K_t^*(x_2)}(y_1) - d_{K_t^*(x_2)}(y_2)| \leq \\ & \leq h_\rho(K_t^*(x_1), K_t^*(x_2)) + \|y_1 - y_2\|. \end{aligned} \quad (10.1.20)$$

¹⁵Имеется в виду точная верхняя грань. Если множество B замкнуто, то точная верхняя грань в (10.1.18) достигается в силу непрерывности функции $d_A(\cdot)$; при этом максимизатор, вообще говоря, не является единственным.

¹⁶Невырожденность модели в исходной постановке задачи является вполне естественной. Однако вырожденные модели динамики цен могут возникнуть, если перейти к (математически) эквивалентной задаче, где компакты $K_t(\cdot)$ заменены на носители наиболее неблагоприятных смешанных стратегий рынка (в случае, когда они достигаются), сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке, см. пример 8.4.1. Кроме того, вырожденность может возникнуть при (неудачной) численной аппроксимации модели.

¹⁷Для полунепрерывности снизу многозначного отображения $\text{conv}(K_t(\cdot))$ достаточно полунепрерывности снизу многозначного отображения $K_t(\cdot)$ [171, предложение 2.42].

¹⁸Выпуклая оболочка компакта в \mathbb{R}^n сама компактна.

Из неравенств (10.1.20) вытекает непрерывность функции $(x, y) \mapsto d_{K_t^*(x)}(y)$ по совокупности аргументов. По теореме Бержа 3.1.1 в формулировке из пункта 1° замечания 3.1.5, с учетом полунепрерывности снизу многозначного отображения $\text{bar}(D_t(\cdot))$, функция

$$x \mapsto \mathfrak{m}(\text{conv}(K_t(x)), \text{bar}(D_t(x))) = \sup_{y \in \text{bar}(D_t(x))} d_{K_t^*(x)}(y)$$

полунепрерывна снизу. В силу полунепрерывности сверху компактозначного отображения $K_t(\cdot)$ множество траекторий B_{t-1} является компактным, см. предложение 3.1.1, поэтому полунепрерывная снизу функция $x \mapsto \mathfrak{m}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot)))$ достигает в некоторой точке $x_{t-1}^* \in B_{t-1}$ минимального значения, положительного благодаря критерию безарбитражности (2.4.3) и пункту 1 предложения 10.1.2. Используя теперь пункт 1 предложения 10.1.1, т. е. неравенство (10.1.15), и равенство (10.1.8) из пункта 1 теоремы 10.1.1, получаем требуемый результат. \square

Замечание 10.1.1. Проверка полунепрерывности снизу многозначного отображения $\text{bar}(D_t(\cdot))$ в терминах свойств многозначного отображения $D_t(\cdot)$ может быть затруднительной. Исключение составляют:

- Случай статических торговых ограничений $D_t(\cdot) \equiv D$, (в частности, случай отсутствия торговых ограничений, т. е. когда $D = \mathbb{R}^n$);
- Случай, когда $D_t(\cdot)$ — компактозначное отображение (в этом случае $\text{bar}(D_t(\cdot)) \equiv \mathbb{R}^n$).

В этих двух случаях полунепрерывность снизу многозначного отображения $\text{bar}(D_t(\cdot))$ автоматически выполняется.

Замечание 10.1.2. Случай отсутствия торговых ограничений, т. е. когда $D_t(\cdot) = \mathbb{R}^n$, соответствует равенствам $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$ и $\text{rec}(D_t(\cdot)) = \mathbb{R}^n$, а условие RNDSAUP эквивалентно RNDAO, грубому условию отсутствия арбитражных возможностей, критерий для которого приведен в (2.4.8). Таким образом, если выполнено условие безарбитражности RNDSAUP, то условие невырожденности динамики цен (2.4.2) автоматически выполнено. Порог структурной устойчивости в данном случае равен

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) &= \mathfrak{n}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \{0\}) = \inf_{l \in S_1(0)} \sigma_{K_t(\cdot)}(l) = \\ &= d_{\text{conv}(K_t(\cdot))}(0) = \mathfrak{m}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \{0\}) \end{aligned} \quad (10.1.21)$$

и совпадает с максимальным радиусом шара с центром в точке 0, содержащегося в множестве $\text{conv}(K_t(\cdot))$, или, что равносильно, с расстоянием от точки 0 до $\text{bd}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, границы множества $\text{conv}(K_t(\cdot))$ — положительным благодаря условию RNDAO.

Таким образом, в случае отсутствия торговых ограничений порог структурной устойчивости $\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot))$ совпадает с $r(K_t(\cdot))$, где r задается (4.1.8), а

наилучшая равномерная (по предыстории цен) оценка снизу порога структурной устойчивости r_t^* (см. формулу (10.1.13)) совпадает с величиной r_t^* , определенной посредством (4.2.17) и фигурирующей в оценке модуля непрерывности функции Беллмана—Айзекса, см. предложение 4.2.2.

Пример 10.1.1. В качестве примера, где можно явно посчитать порог структурной устойчивости, рассмотрим обобщенную модель Колокольцова, с динамикой цен, задаваемой формулами (8.4.1), где

$$C^* = \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]; \quad 0 < \alpha_i < \beta_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

и с торговыми ограничениями вида (7.1.5), в данном случае с полным запретом коротких позиций, т. е.

$$D_t(\cdot) \equiv D = [0, \infty)^n, \quad t = 1, \dots, N. \quad (10.1.22)$$

Поскольку множества D является конусом, то его барьерный конус $\text{bar}(D)$ совпадает с полярным конусом D° , в данном случае совпадающим с конусом $-D$. Поэтому условие NDSAUP для данной модели (10.5.12), можно записать в виде $C' \cap (-\infty, 0]^n \neq \emptyset$, где $C' = C^* - e$, а $e = (1, \dots, 1)$. Это равносильно неравенствам $\alpha_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$. Ясно при этом, что если хотя бы одно значение α_j равно единице, то условие RNDSAUP не выполняется, поскольку сколь угодно малый сдвиг множества $K_t(\cdot)$ на вектор εe_i , где $\varepsilon > 0$, а e_i — вектор, у которого i -я компонента равна единице, а остальные — нулю, уже имеет пустое пересечение с $\text{bar}(D) = -D$. Таким образом, для выполнения условия RNDSAUP в данном случае необходимы неравенства

$$\alpha_i < 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.1.23)$$

Фиксируем момент времени $t = 1, \dots, N$. В соответствии с формулой (4.2.23), имеем выражение для опорной функции:

$$\sigma_{K_t(x)}(z) = \sup_{y \in K(x)} \sum_{i=1}^n z^i y^i = \sup_{L \in C'} \sum_{i=1}^n z^i L^i x^i = \sigma_{C'}((z^1 x^1, \dots, z^n x^n)) = \sigma_{C'}(\Lambda(z)x),$$

где $\Lambda(z)$ — диагональная матрица:

$$\Lambda(z)_{ij} = \begin{cases} z^i, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Заметим, что $\Lambda(z)x = \Lambda(x)z$, так как i -я компонента этого вектора равна $z_i x_i$. Для статического торгового ограничения, задаваемого формулой (10.1.22), D — замкнутый выпуклый конус, так что $\text{rec}(D) = D$.

Будем считать, что начальный вектор цен известен: $X_0 = x_0$ (и компоненты его положительны). Используя формулу (10.1.9), полученную в теореме 10.1.1 для вектора возможных значений цен в момент времени $t - 1$ имеем $x \in \prod_{i=1}^n [x_0^i \alpha_i^{t-1}, x_0^i \beta_i^{t-1}]$ и

$$p_t(K_t(x)) = \min_{l \in S_1(0) \cap (-\infty, 0]^n} \sigma_{K_t(x)}(l) = \min_{l \in S_1(0) \cap (-\infty, 0]^n} \sigma_{C'}(\Lambda(x)l). \quad (10.1.24)$$

Опорная функция $\sigma_{C'}$ параллелепипеда C' в точке $u = (u_1, \dots, u_n)$ равна

$$\sigma_{C'}(u) = \sum_{i=1}^n (\alpha'_i u_i) \vee (\beta'_i u_i)$$

где $\alpha'_i = \alpha_i - 1$ и $\beta'_i = \beta_i - 1$. При этом для вектора $u \in (-\infty, 0]^n$

$$\sigma_{C'}(u) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i u_i. \quad (10.1.25)$$

При этом $\alpha'_i < 0$ в соответствии с (10.1.23). Учитывая положительность компонент вектора x , из (10.1.24) и (10.1.25) получаем

$$p_t(K_t(x)) = \min_{l \in S_1(0) \cap (-\infty, 0]^n} \sum_{i=1}^n \alpha'_i x_i l_i. \quad (10.1.26)$$

Сделаем замену переменных

$$l_i = -\sqrt{q_i}, \quad (q_1, \dots, q_n) \in S_{n-1},$$

где S_{n-1} обозначает $(n - 1)$ -мерный симплекс, т. е.

$$S_{n-1} = \{q = (q_1, \dots, q_n) : q_i \geq 0, i = 1, \dots, n; \sum_{i=1}^n q_i = 1\}.$$

Тогда задача минимизации (10.1.26) может быть переписана в виде

$$p_t(K_t(x)) = \min_{q \in S_{n-1}} \sum_{i=1}^n (-\alpha'_i) x_i \sqrt{q_i}. \quad (10.1.27)$$

Вогнутая функция (10.1.27) достигает минимума в крайних точках симплекса S_{n-1} , т. е. при $q = e_i$, $i = 1, \dots, n$. Таким образом, для данного примера порог структурной устойчивости равен

$$p_t(K_t(x)) = \bigwedge_{i=1}^n (1 - \alpha_i) x_i, \quad (10.1.28)$$

и

$$\inf_{x \in B_{t-1}} p_t(K_t(x)) = \bigwedge_{i=1}^n (1 - \alpha_i) x_0^i \alpha_i^{t-1}. \quad (10.1.29)$$

Замечание 10.1.3. Пример 10.1.1 носит в значительной степени иллюстративный характер, поскольку ответ интуитивно понятен. Однако если в примере заменить прямоугольный параллелепипед на эллипсоид, то ответ уже отнюдь не очевиден: для этого придется решать (вообще говоря, численно) задачу нелинейного программирования.

Рассмотрим эллипсоид

$$C^* = \{m = (m^1, \dots, m^n) : \langle \Gamma^{-1}(m - \mu), m - \mu \rangle \leq 1\}, \quad (10.1.30)$$

где Γ — симметрическая положительно определенная (тем самым, невырожденная) матрица¹⁹, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Его опорная функция

$$\sigma_{C^*}(h) = \langle \mu, h \rangle + \sqrt{\langle \Gamma h, h \rangle}.$$

Параметры эллипсоида E выбираются таким образом, чтобы $E \subseteq (0, \infty)^n$, что равносильно системе неравенств

$$\langle \mu, e_i \rangle > \sqrt{\langle \Gamma e_i, e_i \rangle}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.1.31)$$

где e_i — вектор, все координаты которого нулевые, кроме i -ой координаты, равной единице. Поскольку

$$\sigma_{K_t(x)}(z) = \sigma_{C^*}(z) = \langle \Lambda(x)(\mu - e), z \rangle + \sqrt{\langle \Lambda(x)\Gamma\Lambda(x)z, z \rangle},$$

то $K_t(x)$ также представляет собой эллипсоид и порог структурной устойчивости в этом случае имеет вид²⁰

$$p_t(K_t(x)) = \min_{l \in S_1(0) \cap (-\infty, 0]^n} \left[\langle \Lambda(x)(\mu - e), l \rangle + \sqrt{\langle \Lambda(x)\Gamma\Lambda(x)l, l \rangle} \right]. \quad (10.1.32)$$

10.2 Чувствительность к малым возмущениям компактов, описывающих неопределенность движения цен

Как отмечалось в разделе 2.4, обычно торговые ограничения, описываемые при помощи многозначных отображений $D_t(\cdot)$ известны точно, то есть не подвержены ошибкам измерений. Исключением могла бы считаться модель из примера 1.1.4, где торговые ограничения устанавливаются риск-менеджментом финансового института (берущего на себя обусловленные обязательства, возникающие в результате продажи опциона). Подразделение риск-менеджмента задает

¹⁹Нам будет удобно интерпретировать Γ как некоторую ковариационную матрицу, а Γ^{-1} , ее обратную, как соответствующую матрицу точности.

²⁰Заменой переменных нахождение порога структурной устойчивости в этом случае может быть сведено к задаче (условной) минимизации положительно определенной квадратичной формы при смешанных квадратичных и линейных ограничениях.

ограничения на определенный показатель²¹ рыночного риска для хеджирующего портфеля — конкретно в нашем примере выбран общепринятый показатель Value-at-Risk (VaR) и модель Башелье динамики рыночных цен. Фактически, на практике используется та или иная статистическая оценка этого показателя, то есть показатель определяется с некоторой статистической погрешностью. Однако обычно правила расчета показателя риска по предыстории цен \bar{x}_t зафиксированы, как, например, это сделано посредством (10.5.14) и (10.5.15), так что в действительности $D_t(\bar{x}_t)$ определяется по предыстории цен точно.

Мы будем предполагать далее, что функции выплат по американскому опциону $g_t(\cdot)$, а также торговые ограничения, описываемые посредством $D_t(\cdot)$, известны точно и сконцентрируем внимание на описывающих неопределенность движения цен компактнозначных отображениях $K_t(\cdot)$, задание которых естественно считать приближенным, учитывая неизбежную статистическую погрешность стохастического описания рыночных цен (на основе чего могут быть, в принципе, определены компакты $K_t(\cdot)$, $t = 0, \dots, N$).

В этом случае имеет смысл рассматривать приближенные системы с точностью, сопоставимой с известной погрешностью. Однако необходимо позаботиться о сохранении структурной устойчивости, возможно это потребует корректировки исходной модели неопределенной динамики цен. Поэтому может оказаться целесообразным «заглубить» описание исходной динамики рынка²², задаваемой компактами $K_t(\cdot)$, заменив эти компакты на расширенные²³, полагая для заданного $\delta_t(\cdot) \geq 0$

$$\check{K}_t(\cdot) = [K_t(\cdot)]^{\delta_t(\cdot)}, \quad t = 1, \dots, N. \quad (10.2.1)$$

Будем называть новую динамику рынка, отвечающую (10.2.1), *регуляризующим заглублением на уровне $\delta_t(\cdot)$* исходной динамики рынка.

Лемма 10.2.1. *Опорные функции множеств $A \neq \emptyset$ и $[A]^\delta$ связаны соотношением²⁴*

$$\sigma_{[A]^\delta}(h) = \sigma_A(h) + \delta \|h\|. \quad (10.2.2)$$

Кроме того,

$$\mathbf{n}([A]^\delta, B) = \mathbf{n}(A, B) + \delta, \quad (10.2.3)$$

$$\mathbf{m}([A]^\delta, B) = \mathbf{m}(A, B) + \delta. \quad (10.2.4)$$

²¹Также называемый «мерой риска».

²²Интуитивно понятно, что для полноразмерных компактов $K_t(\cdot)$ переход к «заглубленной» модели должен увеличивать порог структурной устойчивости, поскольку внутренность $\text{conv}(K_t(\cdot))$ расширится и геометрическое условие (2.4.3) сохранится при более сильном возмущении системы, если оно было выполнено для исходной системы. Более точный результат представлен ниже, в предложении 10.2.1.

²³Напомним, что мы используем обозначения $[A]^\delta = A + \bar{B}_\delta(0)$, $\delta \geq 0$, а также конвенцию $+\infty + a = +\infty$ для $a \in \mathbb{R}$.

²⁴Отметим, что для непустого выпуклого множества A , не совпадающего со всем пространством \mathbb{R}^n , операция $[A]^\delta$ приводит к сглаживанию, в определенном смысле, границы множества A : нормальный конус к $[A]^\delta$ в произвольной граничной точке множества $[A]^\delta$ состоит из единственного луча [37, теорема 6.1].

Доказательство. Используя свойства сумм Минковского, имеем

$$\begin{aligned} \text{conv}([A]^\delta) &= \text{conv}(A + B_\delta(0)) = \text{conv}(A) + \text{conv}(B_\delta(0)) = \\ &= \text{conv}(A) + B_\delta(0) = [\text{conv}(A)]^\delta, \end{aligned}$$

откуда следует (10.2.2); используя это равенство, а также лемму 10.1.1, формулу (10.1.4), получаем

$$\mathfrak{n}([A]^\delta, B) = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{[A]^\delta - B}(l) = \min_{l \in S_1(0)} [\sigma_{[A]^\delta}(l) + \sigma_{-B}(l)] = \mathfrak{n}(A, B) + \delta.$$

В соответствии с (10.1.17) и (10.1.18), используя (10.2.2), получаем

$$\mathfrak{m}([A]^\delta, B) = \sup_{b \in B} \min_{l \in S_1(0)} [\sigma_{[A]^\delta}(l) - \langle x, l \rangle] = \mathfrak{m}(A, B) + \delta.$$

□

Предложение 10.2.1. Пусть выполняется условие RNSAUP и $\delta_t(\cdot) \geq 0$. Тогда имеет место равенство

$$\mathfrak{p}_t([K_t(\cdot)]^{\delta_t(\cdot)}) = \mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) + \delta_t(\cdot), \quad t = 1, \dots, N; \quad (10.2.5)$$

это означает, что если порог структурной устойчивости модели в момент t (при известной предыстории цен) конечен, то загроуление исходной динамики рынка на уровне $\delta_t(\cdot) > 0$ увеличивает порог структурной устойчивости на $\delta_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$. При этом

$$p_\rho([K_t(\cdot)]^{\delta_t(\cdot)}, K_t(\cdot)) = \delta_t(\cdot). \quad (10.2.6)$$

Доказательство. Формула (10.2.5) следует из формулы (10.1.8) из теоремы 10.1.1 и формулы (10.2.3) из леммы 10.2.1. Формула (10.2.6) следует из (10.2.2). □

Зададим множества возможных траекторий \check{B}_t на временных интервалах $[0, t]$ посредством соотношений

$$\begin{aligned} \check{B}_0 &= [K_0]^{\delta_0}; \\ \check{B}_t &= \{(\bar{x}_{t-1}, x_t) : \bar{x}_{t-1} \in \check{B}_{t-1}, x_t \in x_{t-1} + [K_t(\bar{x}_{t-1})]^{\delta_t(\bar{x}_{t-1})}\} = \\ &= \{\bar{x}_t : x_0 \in \check{K}_0, \Delta x_1 \in \check{K}_1(x_0), \dots, \Delta x_t \in \check{K}_t(\bar{x}_t)\}, \quad t = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (10.2.7)$$

Обозначим²⁵

$$\check{\delta}_t = \inf\{\delta_t(x), x \in \check{B}_{t-1}\}; \quad (10.2.8)$$

Следующее утверждение непосредственно вытекает из определения (10.1.19) и предложения 10.2.1.

²⁵Можно интерпретировать $\check{\delta}_t$ как наименьший уровень регуляризации на шаге t .

Следствие 10.2.1. Пусть выполняется условие RNDSAUP. Тогда для $\check{K}_t(\cdot)$, регуляризирующего закругления на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка, ее равномерный (по предыстории цен) порог структурной устойчивости \check{p}_t^* не меньше $p_t^* + \check{\delta}_t$.

Допустим, что из некоторых соображений (например, из статистических оценок на ретроспективных данных или экспертных оценок) известны $\delta(\cdot) = (\delta_1(\cdot), \dots, \delta_N(\cdot))$, где $\delta_t(\cdot)$ — погрешность в определении $K_t(\cdot)$ на шаге²⁶ t . В этом случае если условие RNDSAUP выполняется для исходной модели, то можно использовать регуляризирующее закругление исходной системы на уровне, совпадающим с погрешностью данных²⁷. Если же условие RNDSAUP не выполняется, это может свидетельствовать о некорректной постановке задачи. Возможной причиной может также быть несогласованность наблюдаемых рыночных данных в рамках модели; отметим, что идея «закругления точности данных», для достижения корректной постановки, использовалась в [236]. Кроме того, потеря структурной устойчивости может возникнуть в результате (некорректной) численной аппроксимации исходной динамики рынка. Представленный ниже результат может оказаться полезным с практической точки зрения — как исправить модель, данные или численный метод.

Следствие 10.2.2. Пусть выполняется условие невырожденности динамики цен (2.4.2) и множество $E_t = \{x \in B_{t-1} : m(\text{conv}(K_t(x), \text{bar}(D_t(x))) \leq 0) \neq \emptyset$. Тогда для исходной модели условие RNDSAUP не выполняется, но к выполнению условия RNDSAUP приводит регуляризирующее закругление исходной динамики рынка на уровне $\delta_t(x) > -m(\text{conv}(K_t(x), \text{bar}(D_t(x))))$ для $x \in E_t$, $t = 1, \dots, N$.

Это утверждение вытекает из пунктов 1 и 2 предложения 10.1.2 и формулы (10.2.4).

С другой стороны, для иной постановки задачи, при численной аппроксимации $K_t(\cdot)$ «приближенным» компактозначным отображением $\tilde{K}_t(\cdot)$ в момент времени t , можно интерпретировать $\delta_t(\cdot)$ иначе — как требование на шаге t (при заданной предыстории цен) к величине ошибки вычислений:

$$h_p(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)) \leq \delta_t(\cdot). \quad (10.2.9)$$

Отметим, что описание динамики цен «возмущенной» модели, отвечающей «приближенным» компактозначным отображением $\tilde{K}_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, порождает новое множество возможных траекторий

$$\tilde{B}_t = \{\tilde{x}_t : x_0 \in \tilde{K}_0, \Delta x_1 \in \tilde{K}_1(x_0), \dots, \Delta x_t \in \tilde{K}_t(\tilde{x}_{t-1})\},$$

²⁶При данной интерпретации логично считать, что в начальный момент погрешность отсутствует, т. е. $\delta_0 = 0$.

²⁷Для закругленной системы условие RNDSAUP сохраняется, если оно было выполнено для исходной системы, более того, порог структурной устойчивости будет увеличен на $\delta_t(\cdot)$, см. предложение 10.2.1.

Далее мы будем использовать включение²⁸ $\widetilde{K}_t(\cdot) \subseteq \check{K}_t(\cdot) = K_t^{\delta(\cdot)}(\cdot)$; при этом²⁹ $h_\rho(K_t(\cdot), \check{K}_t(\cdot)) = e_\rho(\check{K}_t(\cdot), K_t(\cdot)) = \delta_t(\cdot)$. Поэтому множество возможных траекторий возмущенной модели \widetilde{B}_t содержится в множестве \check{B}_t , задаваемом посредством соотношений (10.2.7).

Напомним, что постановка задачи изначально предполагает задание многозначных отображений $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функции $x \mapsto g_t(x)$ для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$. Это же касается и динамики приближенной модели, т. е. $x \mapsto \widetilde{K}_t(x)$ определено для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$. Для приближенного решения задачи нам будет достаточно, однако, рассматривать на шаге t лишь аргументы $x \in \check{B}_t$.

Лемма 10.2.2. Пусть компактозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ полунепрерывны сверху на B_{t-1} и функции $\delta_t(\cdot)$ полунепрерывны сверху, $t = 1, \dots, N$. Тогда многозначные отображения $x \mapsto \check{K}_t(x) = K_t^{\delta(x)}(x)$ полунепрерывны сверху на \check{B}_{t-1} , а множества \check{B}_t , $t = 0, \dots, N$ компактны.

Доказательство. Заметим, что множества $\check{K}_t(\cdot) = K_t^{\delta(\cdot)}(\cdot)$ компактны. Докажем утверждение по индукции. Для начального момента времени $s = 0$ множество \check{B}_0 компактно. Предположим, что для $s = t \geq 0$ множество \check{B}_t компактно и рассмотрим для $s = t + 1$, опираясь на критерий полунепрерывности сверху компактозначных отображений [171, глава 1, предложение 2.19], последовательность³⁰ пар (x_n, y_n) , таких что $y_n \in K_{t+1}^{\delta(x_n)}(x_n)$ и $x_n \rightarrow x$. Выберем $y'_n \in K_{t+1}(x_n)$, такое что $\|y'_n - y_n\|_2 \leq \delta(x_n)$ и выберем подпоследовательность $y'_{n_k} \rightarrow y' \in K_{t+1}(x)$, которая существует по критерию [171, глава 1, предложение 2.19]. Тогда $\limsup \|y' - y_{n_k}\|_2 \leq \limsup \delta(x_{n_k}) \leq \delta(x)$. Поэтому можно выделить сходящуюся подпоследовательность $y_{n_{k_m}} \rightarrow y$, причем $\|y' - y\|_2 \leq \delta(x)$, т. е. $y \in K_t^{\delta(x)}(x)$. Тем самым, отображение $\check{K}_t(\cdot)$ полунепрерывно сверху. Поэтому, отображение $x \mapsto F(x) = x + \check{K}_t(x)$ также полунепрерывно сверху. Учитывая, что множество B_t компактно по индуктивному предположению, по пункту замечания 3.1.4 образ $F(B_t)$ компактен. Поскольку замкнутое (в соответствии с замечанием 3.1.3) множество B_{t+1} содержится в компакте $B_t \times F(B_t)$, то множество \check{B}_{t+1} компактно. \square

Наша цель состоит в получении оценок чувствительности решений уравнений (VI) Беллмана—Айзека по отношению к равномерно малым возмущением компактов $K_t(\cdot)$, описывающих динамику цен исходной модели. При этом мы не накладываем никаких условий, касающихся гладкости или даже измеримости для компактозначных отображений $\check{K}_t(\cdot)$, описывающих динамику цен возмущенной модели.

²⁸Напомним, что используются обозначения $[A]^\delta = A + \overline{B}_\delta(0)$, $\delta \geq 0$.

²⁹Отклонение Помпею $e_\rho(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B)$; в нормированном пространстве (в нашем случае в \mathbb{R}^n) для евклидовой метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|_2$ отклонение Помпею равно $e_\rho(A, B) = \text{int}\{r \geq 0 : A \subseteq B + B_r(0)\}$; расстояние Помпею-Хаусдорфа определяется как $h_\rho(A, B) = e_\rho(A, B) \vee e_\rho(B, A)$.

³⁰В данном случае нет необходимости использовать направленности, поскольку речь идет о метрических пространствах.

Рассмотрим два класса моделей с торговыми ограничениями специального вида, которые могут возникать на практике³¹ (см., в частности, примеры 1.1.1–1.1.5). Будем далее предполагать, что множества $D_t(\cdot)$ замкнуты.

1) *Модели с коническими торговыми ограничениями:*

для $t = 1, \dots, N$ и любой предыстории цен x множества $D_t(x)$, описывающие торговые ограничения, являются выпуклыми конусами.

2) *Модели с ограниченными торговыми ограничениями:*

для $t = 1, \dots, N$ и любой предыстории цен x множества $D_t(x)$, описывающие торговые ограничения, являются ограниченными.

Оба эти класса могут быть рассмотрены как частные случаи класса моделей с более общей формой торговых ограничений, а именно, когда множества $D_t(\cdot)$ представимы в виде разложения Моцкина. Это класс выпуклых множеств, представимых в виде суммы Минковского замкнутого выпуклого конуса и компактного выпуклого множества (такие множества автоматически замкнуты)³²; обозначим класс таких подмножеств \mathbb{R}^n через $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Класс выпуклых множеств, представимых в виде разложения Моцкина, было введен в работе [157]; свойства множеств из класса $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ изучались также в [159] и [158], а обобщение этого класса предложено в [176].

Конус, входящий в разложение Моцкина некоторого замкнутого выпуклого множества, определяется однозначно, а именно, это рецессивный конус этого множества [40, следствие 9.1.2]. Что касается компактной компоненты в разложении Моцкина, то она, вообще говоря, определена неоднозначно. Однако те множества из $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, в разбиении которых конусы имеют нулевую линейную размерность³³, допускают минимальное разложение (т. е. с минимальной компактной компонентой); такие множества из $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ допускают наглядную геометрическую интерпретацию: это замкнутые выпуклые множества, у которых множество крайних точек ограничено, что установлено в [159, теорема 11.(i)]. Отметим, что в общем случае можно применить процедуру выделения линейного подмножества³⁴, описанного [40, глава II, §8].

Тем самым, модели с коническими торговыми ограничениями получаются из разложения Моцкина в случае, если рецессивный конус не сводится к вектору

³¹ Отметим, что нам неизвестны содержательные с экономической точки зрения примеры моделей, т. е. имеющих какую-либо практическую интерпретацию, для которой торговые ограничения $D_t(\cdot)$ могли бы быть неограниченными для одних предысторий цен и ограниченными для других предысторий цен.

³² Сумма Минковского замкнутого и компактного выпуклых множеств замкнута (это утверждение следует из [171, глава 1, предложение 2.16]).

³³ Т. е. конус, не содержащий линейных подпространств — здесь мы придерживаемся терминологии книги [40, глава II, §8].

³⁴ Это максимальное линейное подпространство, содержащееся в рецессивном конусе. Такой случай торговых ограничений, например, может возникнуть, если по части активов торговые ограничения отсутствуют.

0 для любой предыстории цен, а модели с ограниченными торговыми ограничениями возникают, когда рецессивный конус сводится к вектору 0 для любой предыстории цен.

Замечание 10.2.1. Барьерный конус для торговых ограничений $D_t(\cdot)$, представимых в виде разложения Моцкина $D_t(\cdot) = D_t^1(\cdot) + D_t^2(\cdot)$, где первая компонентов в сумме Минковского является конической, а вторая — компактной, совпадает с полярным конусом $(D_t^1(\cdot))^\circ$.

Действительно, с учетом пункта 2 примера 7.1.1

$$\text{bar}(D_t^1(\cdot) + D_t^2(\cdot)) = \text{bar}(D_t^1(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t^2(\cdot)) = (D_t^1(\cdot))^\circ \cap \mathbb{R}^n = (D_t^1(\cdot))^\circ.$$

Пример 10.2.1. Приведем пример модели с торговыми ограничениями, представимыми в виде разложения Моцкина, имеющую определенную экономическую интерпретацию. Допустим, что риск-менеджмент компании рассчитывает статистическую оценку меру риска на основе предыстории цен, как это, например, сделано в примере 1.1.4, причем порождаемые торговые ограничения $D_t^i(\cdot)$ являются компактными выпуклыми множествами, содержащими точку 0; естественно считать, что точка 0 является внутренней точкой $D_t^2(\cdot)$, а зависимость от предыстории является непрерывной. Торговые стратегии из множества $D_t^2(\cdot)$ являются допустимыми. Риск-менеджмент компании стремится избежать лишь занятие трейдерами чрезмерно рискованных коротких позиций, поэтому считает, что добавление длинных позиций к допустимым торговым стратегиям приводит к новым допустимым торговым стратегиям. Таким образом, результирующие торговые ограничения представимы в виде разложения Моцкина:

$$D_t(\cdot) = D_t^1(\cdot) + D_t^2(\cdot), \quad t \in \{1, \dots, N\},$$

где множество $D_t^1(\cdot) = \text{rec}(D_t(\cdot)) \equiv [0, \infty)^n$ является рецессивным конусом для $D_t(\cdot)$, а компактозначные отображения $D_t^2(\cdot)$ непрерывны³⁵.

Для того, чтобы решение (BI) для возмущенной системы, рассматриваемое как приближенное решение (BI) для исходной системы, не потеряли бы экономический смысл (обладали бы свойствами, аналогичными решениям (BI) для исходной системы) необходимо выполнение условий структурной устойчивости. Для моделей с ограниченными торговыми ограничениями это выполняется автоматически.

Для моделей с неограниченными торговыми ограничениями следует убедиться в выполнении грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP. Для этого достаточно, чтобы на каждом шаге эта погрешность была бы меньше порога структурной устойчивости, введенного в параграфе 10.1.

В соответствии с леммой 3.2.1, в которой предполагается, что выполнено условие RNDSAUP и множества $D_t(\cdot)$ замкнуты, для любого $a \geq C_t^*$, где C_t^*

³⁵ Отметим, что множества $D_t^2(\cdot)$ в примере не являются минимальными в разложении Моцкина.

задается (4.2.1)

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] = \inf_{h \in \widehat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]; \quad (10.2.10)$$

множество $\widehat{D}_t^a(\cdot)$ задается формулой (3.2.4), причем оно компактно. Нам, однако, в определенных случаях (в частности, в данном параграфе) удобнее будет использовать обозначения (3.2.12) и (3.2.11):

$$\begin{aligned} E_t^a(x) &= \{h \in \mathbb{R}^n : \sigma_{K_t(x)}(h) \leq a\}, \\ \widehat{D}_t^a(x) &= D_t(x) \cap E_t^a(x). \end{aligned} \quad (10.2.11)$$

Это, в частности, позволяет облегчить обозначения для возмущенной модели:

$$\widetilde{E}_t^a(x) = \{h \in \mathbb{R}^n : \sigma_{\widetilde{K}_t(x)}(h) \leq a\}. \quad (10.2.12)$$

Лемма 10.2.3. Пусть для некоторой предьстории цен x замкнутое множество $D_t(x)$ является неограниченным, порог структурной устойчивости $\mathfrak{p}_t(K_t(x)) > 0$ и $a > 0$. Тогда³⁶

$$\|\text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x)\|_2 \leq \frac{a}{\mathfrak{p}_t(K_t(x))}. \quad (10.2.13)$$

Доказательство. Поскольку множество $D_t(x)$ является неограниченным, то рецессивный конус $\text{rec}(D_t(x))$ не сводится к нулю, т. е. содержит хотя бы один луч. Заметим, что для $a > 0$ множество

$$\frac{1}{a} E_t^a(x) = \{h : \sigma_{K_t(x)}(-h) \leq 1\} = \{h : \sigma_{-K_t^*(x)}(h) \leq 1\}$$

является полярным (по Минковскому) для $-K_t^*(\cdot)$ [26, формула 70], [26, теорема 12.2]. Согласно [26, теорема 6.6, пункт а)], точка 0 является внутренней точкой полярного к $-K_t^*(x)$ множества, поскольку оно ограничено (в силу компактности [26, теорема 2.6]). Поэтому $0 \in f(E_t^a(x))$, а значит выпуклое множество $\text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x)$ содержит точки, отличные от точки 0. Следовательно, при достаточно малом $\theta > 0$

$$[\theta^{-1}(\text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x))] \cap S_1(0) \neq \emptyset. \quad (10.2.14)$$

Фиксируем $\theta > 0$, удовлетворяющие условию (10.2.14), и рассмотрим множество

$$F_t^a(x, \theta) = \{h \in \text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x) : \|h\| = \theta\}. \quad (10.2.15)$$

Заметим, что $h \in F_t^a(x, \theta)$ равносильно $h = \theta l$, где $l \in [\theta^{-1}(\text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x))] \cap S_1(0)$, так что $F_t^a(x, \theta) \neq \emptyset$. Для любого вектора $h \in \text{rec}(D_t(x)) \cap$

³⁶Напомним, что мы используем обозначение $\|A\|_2 = \sup\{\|z\|_2 : z \in A\}$, где $\|h\|_2$ — евклидова норма.

$E_t^a(x)$ имеем $\sigma_{K_t(x)}(-h) \leq a$, поэтому справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
 a &\geq \sup_{h \in F_t^a(x, \theta)} \sigma_{K_t(x)}(-h) = \theta \sup_{l \in [\theta^{-1}(\text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x))] \cap S_1(0)} \sigma_{K_t(x)}(-l) \geq \\
 &\geq \theta \inf_{l \in [\theta^{-1}(\text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x))] \cap S_1(0)} \sigma_{K_t(x)}(-l) \geq \\
 &\geq \theta \inf_{l \in [\theta^{-1}(\text{rec}(D_t(x)))] \cap S_1(0)} \sigma_{K_t(x)}(-l) = \\
 &= \theta \inf_{l \in -\text{rec}(D_t(x)) \cap S_1(0)} \sigma_{K_t(x)}(l) = \theta \mathfrak{p}_t(K_t(x)).
 \end{aligned} \tag{10.2.16}$$

Таким образом, мы получили $\theta \leq \frac{a}{\mathfrak{p}_t(K_t(x))}$, откуда и следует требуемое неравенство. \square

Замечание 10.2.2. 1) Замкнутое выпуклое множество содержащее, начало координат, содержит свой рецессивный конус [40, следствие 8.3.2], так что $D_t(\cdot) \supseteq \text{rec}(D_t(\cdot))$.

2) Напомним, что по теореме 10.1.1 условие RNDSAUP влечет $\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) > 0$.

3) Принимая естественную конвенцию $\frac{a}{0} = +\infty$ для $a > 0$, получим, что неравенство (10.2.13) будет тривиальным образом выполнено и в случае $\mathfrak{p}_t(K_t(x)) = 0$. Кроме того, принимая естественную конвенцию $\frac{a}{+\infty} = 0$ для $a \in \mathbb{R}$, получим, что неравенство (10.2.13) будет тривиальным образом выполнено еще и в случае, когда замкнутое множество $D_t(x)$ является ограниченным.

Обозначим

$$\check{\mathfrak{p}}_t^* = \inf_{x \in \check{B}_{t-1}} \mathfrak{p}_t(K_t(x)) \tag{10.2.17}$$

и

$$\check{\delta}_t^* = \sup_{x \in \check{B}_{t-1}} \delta_t(x), \tag{10.2.18}$$

где $\delta_t(x)$ — требования к погрешности вычислений, см. формулу (10.2.9).

Теорема 10.2.1. Пусть для исходной модели функции $g_t(\cdot)$, компактозначные отображения $K_t(\cdot)$ непрерывны, функции $\delta_t(\cdot)$ полунепрерывны сверху, $t = 1, \dots, N$, а многозначные отображения $D_t(\cdot)$ замкнуты и полунепрерывны снизу³⁷, причем $D_t(\cdot)$ представимо в виде разложения Моцкина

$$D_t(\cdot) = D_t^1(\cdot) + D_t^2(\cdot), \quad t \in \{1, \dots, N\}, \tag{10.2.19}$$

где множество $D_t^1(\cdot) = \text{rec}(D_t(\cdot))$ является рецессивным конусом для $D_t(\cdot)$, а компактозначные отображения $D_t^2(\cdot)$ непрерывны. Кроме того, функции $\delta_t(\cdot)$

³⁷Эти условия на $g_t(\cdot)$ и $K_t(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$ вместе с условием RNDSAUP (которое следует как из предположения 1), так и из предположения 2) сформулированных ниже) гарантируют непрерывность решений уравнений Беллмана–Айзекса, по теореме 3.2.2.

полу непрерывны сверху, $t = 1, \dots, N$ и на погрешности вычислений наложены ограничения³⁸

$$\inf_{x \in \check{B}_{t-1}} [\mathbf{p}_t(K_t(x)) - \delta_t(x)] = \gamma_t > 0, \quad t = 1, \dots, N. \quad (10.2.20)$$

Тогда погрешности приближенного решения уравнений Беллмана—Айзекса допускают оценку³⁹

$$\sup_{x \in \check{B}_t} |v_t^*(x) - \check{v}_t^*(x)| \leq \sum_{s=t+1}^N [\omega_{v_s^*}^{\check{B}_s}(\check{\delta}_s^*) + R_s^* \check{\delta}_s^*], \quad (10.2.21)$$

где автоматически $\check{\delta}_t^* < \infty$;

$$R_t^* = \frac{\check{C}_t^* + \check{b}_t^* + \check{\delta}_t^* \check{d}_t^*}{\gamma_t} + \check{d}_t^*; \quad (10.2.22)$$

$$\check{C}_t^* = \bigvee_{s=t}^N \check{C}_s, \quad (10.2.23)$$

$$\check{C}_t = \sup_{x \in \check{B}_t} g_t(x);$$

$$\check{b}_t^* = \max_{x \in \check{B}_{t-1}} \max_{h \in -D_t^2(x)} \sigma_{K_t(x)}(h); \quad (10.2.24)$$

$$\check{d}_t^* = \max_{x \in \check{B}_{t-1}} \|D_t^2(x)\|_2, \quad (10.2.25)$$

а модули непрерывности $\omega_{v_t^*}^{\check{B}_t}(\cdot)$ в (10.2.21) могут быть рекуррентно оценены по формулам⁴⁰ (4.2.4).

Доказательство. В соответствии с леммой 10.2.2 множества \check{B}_t компактны, а значит полунепрерывная сверху функция $\delta_t(x)$ достигает на \check{B}_t максимального значения $\delta_t^* < \infty$.

Аргументы решений уравнений Беллмана—Айзекса $v_t^*(\cdot)$ и $\check{v}_t^*(\cdot)$ для исходной и возмущенной системы соответственно, будем рассматривать из множества \check{B}_{t-1} , задаваемого посредством (10.2.7), поскольку $B_t \subseteq \check{B}_t$ и $\bar{B}_t \subseteq \check{B}_t$, $t = 0, \dots, N$. Обозначим

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \quad (10.2.26)$$

³⁸Из неравенств (10.2.20) вытекает $\check{\mathbf{p}}_t^* \geq \gamma_t > 0$. В свою очередь, из неравенства $\check{\mathbf{p}}_t^* > 0$ вытекает условие RNSAUP; достаточные условия для выполнения неравенства $\check{\mathbf{p}}_t^* > 0$ сформулированы в теореме 10.1.2. Кроме того, для справедливости неравенства (10.2.20) достаточно, чтобы $\check{\delta}_t^* < \check{\mathbf{p}}_t^*$.

³⁹Принимаем конвенцию, что сумма по пустому множеству индексов равна нулю.

⁴⁰Отсюда можно сделать вывод, что правая часть неравенства (10.2.21) стремится к нулю при $\check{\delta}_t^* \rightarrow 0$, $t = 0, \dots, N$, т. е. решение уравнений Беллмана—Айзекса для возмущенной модели равномерно приближается к соответствующему решению исходной модели.

и

$$\tilde{\rho}_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy], \quad (10.2.27)$$

где $\tilde{w}_t(\tilde{x}_{t-1}, y) = \tilde{v}_t^*(\tilde{x}_{t-1}, x_{t-1} + y)$.

Уравнения Беллмана—Айзекса для исходной и возмущенной моделей соответственно можно записать в виде:

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot), \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned} \quad (10.2.28)$$

(для исходной модели) и

$$\begin{aligned} \tilde{v}_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \tilde{\rho}_t(\cdot), \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned} \quad (10.2.29)$$

(для возмущенной модели). Поэтому

$$|v_N^*(\cdot) - \tilde{v}_N^*(\cdot)| = 0,$$

а для $t = N, \dots, 1$, используя следствие из леммы 4.1.1, формулу (4.1.3), из неравенств (10.2.28) и (10.2.29) вытекает

$$\begin{aligned} |v_{t-1}^*(\cdot) - \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot)| &\leq |g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot) - g_{t-1}(\cdot) \vee \tilde{\rho}_t(\cdot)| \leq \\ &\leq |\rho_t(\cdot) - \tilde{\rho}_t(\cdot)|, \quad t = N, \dots, 1. \end{aligned} \quad (10.2.30)$$

Допустим, что для $t = 1, \dots, N$ удалось найти такие компактные множества $D_t^*(\cdot) \subseteq D_t(\cdot)$, такие что

$$\sup_{x \in \tilde{B}_t} \|D_t^*(x)\|_2 = R_t^* < \infty, \quad (10.2.31)$$

а для любого $x \in \tilde{B}_{t-1}$ одновременно выполняются включения

$$D_t(x) \cap E_t^{C_t^*}(x) \subseteq D_t^* \quad (10.2.32)$$

и

$$D_t(x) \cap \tilde{E}_t^{\tilde{C}_t^*}(x) \subseteq D_t^*, \quad (10.2.33)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_t^* &= \bigvee_{s=t}^N \tilde{C}_s, \\ \tilde{C}_t &= \sup_{x \in \tilde{B}_t} g_t(x). \end{aligned}$$

Тогда

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t^*} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \quad (10.2.34)$$

и

$$\tilde{\rho}_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t^*} \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy], \quad (10.2.35)$$

С учетом (10.2.30) и леммы 4.1.1, формула (4.1.1), имеем неравенство

$$|v_{t-1}^*(\cdot) - \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot)| \leq \sup_{h \in D_t^*(\cdot)} \left| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy] \right|. \quad (10.2.36)$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \left| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy] \right| \leq \\ & \leq \left| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \right| + \\ & + \left| \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy] \right|. \end{aligned} \quad (10.2.37)$$

Первое из слагаемых в правой части неравенства (10.2.37) оценивается при помощи леммы 4.1.3, пункт 2, используя оценки модуля непрерывности⁴¹ функции $y \mapsto w_t(\cdot, y) + hy$, а также учитывая, что для $h \in D^*(\cdot)$ по сделанному предположению (10.2.31) имеет место неравенство $\|h\|_2 \leq R_t^*$:

$$\begin{aligned} & \left| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \right| \leq \\ & \leq \omega_{w_t}^{\check{B}_t}(h_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot))) + \|h\|_2 h_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)) \leq \omega_{w_t}^{\check{B}_t}(\check{\delta}_t^*) + R_t^* \check{\delta}_t^* \end{aligned} \quad (10.2.38)$$

в неравенстве использована равномерная на компактном⁴² множестве \check{B}_t функций v_t^* (или, что равносильно, функций w_t), которая имеет место благодаря теореме 4.2.1.

Второе слагаемое в правой части неравенства (10.2.37) не превосходит

$$\sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} |w_t(\cdot, y) - \tilde{w}_t(\cdot, y)| \leq \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} |w_t(\cdot, y) - \tilde{w}_t(\cdot, y)|. \quad (10.2.39)$$

Из (10.2.36)–(10.2.39) следует

$$\begin{aligned} & \sup_{\bar{x}_{t-1} \in \check{B}_{t-1}} |v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) - \tilde{v}_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1})| \leq \\ & \leq \omega_{w_t}^{\check{B}_t}(\check{\delta}_t^*) + R_t^* \check{\delta}_t^* + \sup_{\bar{x}_{t-1} \in \check{B}_{t-1}} \sup_{y \in \tilde{K}_{t-1}} |v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - \tilde{v}_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y)| = \\ & = \omega_{w_t}^{\check{B}_t}(\check{\delta}_t^*) + R_t^* \check{\delta}_t^* + \sup_{\bar{x}_t \in \check{B}_t} |v_t^*(\bar{x}_t) - \tilde{v}_t^*(\bar{x}_t)|, \end{aligned}$$

⁴¹Здесь мы используем обозначения для модуля непрерывности отображения, введенные в формуле (4.1.4).

⁴²В силу леммы 10.2.2.

Обозначая

$$\varepsilon_t = \sup_{x \in \check{B}_t} |v_t^*(x) - \check{v}_t^*(x)|, \quad (10.2.40)$$

получаем рекуррентные неравенства:

$$\begin{aligned} \varepsilon_N &= 0; \\ \varepsilon_{t-1} &\leq [\omega_{w_t}^{\check{B}_t}(\check{\delta}_t^*) + R_t^* \check{\delta}_t^*] + \varepsilon_t, \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned} \quad (10.2.41)$$

откуда

$$\varepsilon_t \leq \sum_{s=t+1}^N [\omega_{w_s}^{\check{B}_s}(\check{\delta}_s^*) + R_s^* \check{\delta}_s^*]. \quad (10.2.42)$$

Теперь построим компактные множества $D_t^*(\cdot) \subseteq D_t(\cdot)$, такие что выполняется (10.2.31). Функция

$$x \mapsto \max_{h \in -D_t^2(x)} \sigma_{K_t(x)}(h)$$

полу непрерывна сверху, а значит, достигает максимального значения на компакте \check{B}_{t-1} , которое мы обозначили в (10.2.24) через \check{b}_t^* . Если $h \in D_t(x) \cap E_t^a(x)$, то этот вектор представим виде $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in D_t^1(x)$ и $h_2 \in D_t^2(x)$, поэтому

$$\sigma_{K_t(x)}(h_1) = \sigma_{K_t(x)}(h - h_2) \leq \sigma_{K_t(x)}(h) + \sigma_{K_t(x)}(-h_2) \leq a + \check{b}_t^*,$$

так что $h_1 \in E^{a+\check{b}_t^*}(x)$.

Используя лемму 10.2.3 и принимая конвенцию из пункта 3 замечания 10.2.2 получаем, что для любого $a > 0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|D_t(x) \cap E_t^a(x)\|_2 &\leq \|D_t^1(x) \cap E_t^{a+\check{b}_t^*}(x)\|_2 + \check{d}_t^* \leq \\ &\leq \frac{a + \check{b}_t^*}{\mathfrak{p}_t(K_t(x))} + \check{d}_t^* \leq \frac{a + \check{b}_t^*}{\check{\mathfrak{p}}_t^*} + \check{d}_t^* \leq \frac{a + \check{b}_t^*}{\gamma_t} + \check{d}_t^*. \end{aligned} \quad (10.2.43)$$

Функция

$$x \mapsto \max_{h \in -D_t^2(x)} \sigma_{\tilde{K}_t(x)}(h)$$

достигает максимального значения на компакте \check{B}_{t-1} , которое, нетрудно видеть, не превосходит $\check{b}_t^* + \check{\delta}_t^* \check{d}_t^*$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|D_t(x) \cap \tilde{E}_t^a(x)\|_2 &\leq \|D_t^1(x) \cap E_t^{a+\check{b}_t^*+\check{\delta}_t^*\check{d}_t^*}(x)\|_2 + \check{d}_t^* \leq \\ &\leq \frac{a + \check{b}_t^* + \check{\delta}_t^* \check{d}_t^*}{\mathfrak{p}_t(K_t(x))} + \check{d}_t^* \leq \frac{a + \check{b}_t^* + \check{\delta}_t^* \check{d}_t^*}{\gamma_t} + \check{d}_t^*. \end{aligned} \quad (10.2.44)$$

При $a \geq \check{C}_t^*$ для исходной модели можно, в соответствии с формулой (10.2.10), заменить торговые ограничения $D_t(x)$ на компактные, $D_t(x) \cap E_t^a(x)$; аналогично, для приближенной модели можно заменить торговые ограничения $D_t(x)$ на

компактные, $D_t(x) \cap \widetilde{E}_t^a(x)$. Достаточно теперь выбрать $R_t^* = \frac{\check{c}_t + \check{b}_t + \check{\delta}_t \check{d}_t}{\gamma_t} + \check{d}_t^*$ и положить $D_t^*(\cdot) = D_t(\cdot) \cap B_{R_t^*}(0)$ — тогда наряду с (10.2.31) выполняются включения (10.2.32) и (10.2.33).

Таким образом, мы доказали требуемый результат. \square

Замечание 10.2.3.

- 1) Если в теореме усилить требования к «гладкости» функций $g_t(\cdot)$ и многозначных отображений $K_t(\cdot)$ — потребовать, чтобы они удовлетворяли условию Липшица с константами L_{g_t} и L_{K_t} соответственно, тогда, в соответствии с предложением 4.2.1 функции Беллмана v_t^* для исходной модели также удовлетворяют условиям Липшица с константами $L_{v_t^*}$, которые могут быть определены из рекуррентных соотношений (4.2.16).
- 2) Для случая исходной модели с коническими торговыми ограничениями можно получить оценку для R_t^* используя информацию о поведении динамики цен исходной модели только на B_t . С этой целью при численной аппроксимации $K_t(\cdot)$ «приближенным» компактозначным отображением $\widetilde{K}_t(\cdot)$ в момент времени t , установим требование к величине ошибки вычислений (см. (10.2.20)) на шаге t при заданной предыстории цен $x \in \check{B}_t \setminus B_t$ следующим образом⁴³: $\delta_t(x) \equiv \delta_t^*$, где

$$\delta_t^* = \sup_{x \in B_{t-1}} \delta_t(x); \quad (10.2.45)$$

тогда $\check{\delta}_t^* = \delta_t^*$. Рассмотрим произвольную точку $x \in \check{B}_t \setminus B_t$; для этой точки найдется точка $x' \in B_t$, такая что $\rho(x, x') \leq \delta_t(x') \leq \delta_t^*$. Используя неравенство (10.1.10) получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_t(K_t(x)) &\geq \mathfrak{p}_t(K_t(x')) - h_\rho(K_t(x), K_t(x')) \geq \\ &\geq \mathfrak{p}_t^* - L_{K_t} \rho(x, x') \geq \mathfrak{p}_t^* - L_{K_t} \delta_t^*, \end{aligned} \quad (10.2.46)$$

где

$$\mathfrak{p}_t^* = \inf_{x \in B_{t-1}} \mathfrak{p}_t(K_t(x)), \quad (10.2.47)$$

так что

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) - \delta_t(x) \geq \mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t}) \delta_t^*, \quad x \in \check{B}_t \setminus B_t. \quad (10.2.48)$$

Теперь рассмотрим точку $x \in B_t$; для нее справедливо аналогичное неравенство:

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) - \delta_t(x) \geq \mathfrak{p}_t^* - \delta_t^* \geq \mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t}) \delta_t^*, \quad x \in B_t.$$

Тем самым, для всех $x \in \check{B}_t$ имеет место неравенство

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) - \delta_t(x) \geq \mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t}) \delta_t^*.$$

⁴³Заметим, что если функция $\delta_t(\cdot)$ полунепрерывна сверху на B_t , то при таком продолжении этой функции на \check{B}_t полунепрерывность сверху сохраняется.

Достаточно теперь выбрать

$$\delta_t^* < \frac{\mathfrak{p}_t^*}{1 + L_{K_t}} \quad (10.2.49)$$

и тогда в (10.2.20) получаем оценку снизу

$$\gamma_t \geq \mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t})\delta_t^* > 0. \quad (10.2.50)$$

Кроме того,

$$\check{C}_t \leq C_t + L_{g_t}\delta_t^*,$$

а значит

$$\check{C}_t^* = \bigvee_{s=t}^N \check{C}_s \leq \bigvee_{s=t}^N [C_s + L_{g_s}\delta_s^*], \quad (10.2.51)$$

так что при условии (10.2.49)

$$R_t^* \leq \frac{\bigvee_{s=t}^N [C_s + L_{g_s}\delta_s^*]}{\mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t})\delta_t^*}. \quad (10.2.52)$$

Далее, для оценки модуля непрерывности мы воспользуемся предложением 4.2.1, в соответствии с которым функции Беллмана v_t^* удовлетворяют условиям Липшица с константами $L_{v_t^*}$, определяющимися из следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} L_{v_N^*} &= L_{g_N}, \\ L_{v_{t-1}^*} &= L_{g_{t-1}} \vee [L_{v_t^*}(L_{K_t} + 1) + \check{A}_t^* L_{K_t}], \quad t = N, \dots, 1. \end{aligned} \quad (10.2.53)$$

где величины \check{A}_t^* , $t = N, \dots, 1$ оцениваются аналогично R_t^* , при помощи (10.2.43) и (10.2.51):

$$\check{A}_t^* = \sup_{x \in \tilde{B}_{t-1}} \|D_t(x) \cap E_t^{\check{C}_t^*}(x)\|_2 \leq \frac{\bigvee_{s=t}^N [C_s + L_{g_s}\delta_s^*]}{\gamma} \leq \frac{\bigvee_{s=t}^N [C_s + L_{g_s}\delta_s^*]}{\mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t})\delta_t^*}. \quad (10.2.54)$$

Тем самым

$$\sup_{x \in \tilde{B}_t} |v_t^*(x) - \tilde{v}_t^*(x)| \leq \sum_{s=t+1}^N \delta_s^* [L_{v_s^*} + R_s^*]. \quad (10.2.55)$$

- 3) В предположении отсутствия торговых ограничений имеет место случай модели с коническими торговыми ограничениями. При этом, в соответствии с замечанием 10.1.2 порог структурной устойчивости $\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot))$ совпадает с максимальным радиусом шара с центром в точке 0, содержащегося в множестве $\text{conv}(K_t(\cdot))$, или, что равносильно, с расстоянием от точки 0 до границы множества $\text{conv}(K_t(\cdot))$ положительность которого эквивалентна условию RNDAO.

10.3 «Хрупкость» модели при отсутствии структурной устойчивости

В данном параграфе мы будем всюду предполагать отсутствие торговых ограничений.

Цель данного параграфа — показать тесные связи свойств непрерывности цены суперхеджирования и структурной устойчивости модели. Во-первых, мы показываем в теореме 10.3.1, что если структурная устойчивость не имеет места, то непрерывная цена суперхеджирования (полученная как решение уравнений Беллмана—Айзека (BI)) может быть хрупкой. Под этим мы понимаем следующее: сколь угодно близкая в равномерном смысле (по отношению к предистории цен) динамика цен возмущенной модели, даже при *сохранении безарбитражности*⁴⁴ не влечет равномерную близость решений (BI) для исходной и возмущенной моделей, в отличие от результата теоремы 10.2.1, опирающейся на предположение о структурной устойчивости модели. Напомним, что в разделе 8.5 была показана важность предположения о структурной устойчивости модели для непрерывности цены суперхеджирования — отказ от структурной устойчивости модели (в рассматриваемом случае, замена условия RNDAO на условие NDAO) может привести к разрывности цены суперхеджирования, причем это касается и вероятностной модели, сопоставимой (это касается условия на носители распределений) с детерминистской.

Введем следующие подклассы⁴⁵ $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$: $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^*$ — класс всех непустых выпуклых компактных подмножеств \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^0 &= \{K \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^* : 0 \in K\}, \\ \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^{0'} &= \{K \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^* : 0 \in \text{ri}(K)\}, \\ \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^{0''} &= \{K \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^* : 0 \in \text{int}(K)\}. \end{aligned}$$

Отметим что $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n), h_\rho)$ является полным метрическим пространством [171, глава 1, предложение 1.6] и $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^*$ является замкнутым подмножеством $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ [171, глава 1, предложение 1.8] так что $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^*, h_\rho)$ также является полным метрическим пространством; более того, отображение $K \rightarrow \text{conv}(K)$ является сжимающим на $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, т. е. $h_\rho(\text{conv}(K_1), \text{conv}(K_2)) \leq h_\rho(K_1, K_2)$. Кроме того, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^0$ замкнуто⁴⁶ подмножество $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^*$.

Для выпуклых компактов $K \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^0$ будем использовать функцию r , определенную соотношением

$$r(K) = \min_{h \in S_1(0)} \sigma_K(h). \quad (10.3.1)$$

Отметим, что для таких значений аргумента, функция r принимает конечные неотрицательные значения.

⁴⁴Разумеется, при отсутствии структурной устойчивости модели возможно нарушение безарбитражности, что приводит к большому возмущением решения (BI). Неочевидным является тот факт, что проблема может возникнуть даже в случае возмущений модели, сохраняющих условие безарбитражности.

⁴⁵Напомним, что $\mathcal{K}(E)$ обозначает класс всех непустых компактных подмножеств топологического пространства E .

⁴⁶Это непосредственное следствие формулы Хёрмандера [26, теорема 14.1].

Определим оператор $\mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l} : \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}$ для $\delta \geq 0$, $\epsilon \geq 0$ и $l \in \mathbb{R}^n$ посредством

$$\mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K) = \text{conv}((\epsilon l + K) \cup \{-\delta l\}).$$

Отметим, что $\mathfrak{B}^{0, 0, l}(K) = K$.

Лемма 10.3.1.

- 1) Если $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$, то оператор $\mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K)$ отображает $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^0$ на $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^0$;
- 2) Пусть $l \in S_1(0)$, $l' \in S_1(0)$, $K \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}$ и $K' \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}$. Тогда

$$\begin{aligned} & h_\rho(\mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K), \mathfrak{B}^{\delta', \epsilon', l'}(K')) \leq \\ & \leq [h_\rho(K, K') + (|\epsilon - \epsilon'| + (\epsilon \wedge \epsilon')\|l - l'\|)] \vee (|\delta - \delta'| + (\delta \wedge \delta')\|l - l'\|). \end{aligned} \tag{10.3.2}$$

Доказательство.

- 1) Пусть $K \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^0$. Нетрудно видеть, что $y \in \mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K)$ равносильно представимости y в виде

$$y = qz + [q\epsilon - (1 - q)\delta]l, \quad z \in K, \quad q \in [0, 1];$$

рассмотрим такую точку. Для $z \in K$, учитывая, что $0 \in \text{ri}(K)$, найдется⁴⁷ $\alpha > 0$ такое что $-\alpha z \in K$ и поэтому $-\beta z \in K$ для всех $\beta \in (0, \alpha]$. Если $q\epsilon - (1 - q)\delta = 0$, выберем $\beta > 0$ такое что $\beta \leq \alpha \wedge 1$, а в противном случае выберем $\beta > 0$ такое что $\beta \leq \alpha \wedge \frac{\delta \wedge \epsilon}{|q\epsilon - (1 - q)\delta|}$. Для такого значения β и произвольного $z \in K$, $q \in [0, 1]$ вектор $-\beta\{qz + [q\epsilon - (1 - q)\delta]l\}$ может быть представлен в виде

$$q'z + [q'\epsilon - (1 - q')\delta]l \in \mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K)$$

для некоторого $q' \in [0, 1]$. Таким образом, $0 \in \text{ri}(\mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K))$.

- 2) Используя формулу Хёрмандера и формулу для носителя выпуклой оболочки объединения множеств [26] имеем

$$\begin{aligned} & h_\rho(\mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K), \mathfrak{B}^{\delta', \epsilon', l'}(K')) = \max_{u \in S_1(0)} |\sigma_{\mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K)} - \sigma_{\mathfrak{B}^{\delta', \epsilon', l'}(K')}| = \\ & = \max_{u \in S_1(0)} |(\sigma_K(u) + \epsilon \langle u, l \rangle) \vee (-\delta \langle u, l \rangle) - (\sigma_{K'}(u) + \epsilon' \langle u, l' \rangle) \vee (-\delta' \langle u, l' \rangle)| \leq \\ & \leq \max_{u \in S_1(0)} |\sigma_K(u) - \sigma_{K'}(u) + \epsilon \langle u, l \rangle - \epsilon' \langle u, l' \rangle| \vee |\delta \langle u, l \rangle - \delta' \langle u, l' \rangle| \leq \\ & \leq [h_\rho(K, K') + (|\epsilon - \epsilon'| + (\epsilon \wedge \epsilon')\|l - l'\|)] \vee (|\delta - \delta'| + (\delta \wedge \delta')\|l - l'\|) \end{aligned}$$

⁴⁷Мы используем критерий принадлежности относительные внутренности, сформулированный в [40, теорема 6.4].

□

Следствие 10.3.1. $h_\rho(\mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K), K) \leq \delta \vee \epsilon$.

Лемма 10.3.2. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, $K(\cdot)$ — непрерывное многозначное отображение с аргументами из X и значениями из $C_{\mathbb{R}^n}^0$, причем $\dim(\text{lin}(K(\cdot))) < n$. Тогда многозначное отображение L , определенное посредством

$$L(x) = (\text{lin}(K(x)))^\perp \cap S_1(0), \quad x \in X \quad (10.3.3)$$

является полунепрерывным сверху⁴⁸.

Доказательство. Заметим, что $L(x) \neq \emptyset$, поскольку по сделанному предположению размерность $\text{lin } K(\cdot)$ меньше чем n . Покажем, что если $K \in C_{\mathbb{R}^n}^0$, то $(\text{lin}(K))^\perp = \{h \in \mathbb{R}^n : \sigma_K(h) = 0\}$. В самом деле, $0 \in K$ влечет $\sigma_K \geq 0$; поскольку $0 \in \text{ri}(K)$, в случае когда ортогональная проекция h на $\text{lin}(K)$ отлична от нуля, имеем $\sigma_K(h) > 0$. Рассмотрим теперь сходящуюся направленность $x_\alpha \rightarrow x^*$ и направленность $h_\alpha \in L(x_\alpha)$. Поскольку единичная сфера $S_1(0)$ компактна, а $h_\alpha \in S_1(0)$, выберем сходящуюся поднаправленность $h_{\alpha_\beta} \rightarrow h^* \in S_1(0)$. Тогда $\sigma_{K(x_{\alpha_\beta})}(h_{\alpha_\beta}) = 0$; благодаря непрерывности $K(\cdot)$,

$$\rho_{RH}(K(x_{\alpha_\beta}), K(x^*)) = \max_{h \in S_1(0)} |\sigma_{K(x_{\alpha_\beta})}(h) - \sigma_{K(x^*)}(h)| \rightarrow 0,$$

откуда $\sigma_{K(x^*)}(h_{\alpha_\beta}) \rightarrow \sigma_{K(x^*)}(h^*) = 0$. Следовательно, $h^* \in L(x^*)$. Поскольку многозначное отображение $L(\cdot)$ принимает компактные значения, оно является полунепрерывным сверху, в соответствии с [171, глава 1, предложение 2.19]. □

Сформулируем теперь результат, показывающий «хрупкость» решений уравнений Беллмана—Айзекса, когда условие структурной устойчивости RNDAO не выполняется, на примере одношаговой модели (т. е. $N = 1$).

Теорема 10.3.1. Предположим, что $n \geq 2$, динамика рынка исходной одношаговой модели задается непрерывным многозначным отображением $K_1(\cdot)$ со значениями из $C_{\mathbb{R}^n}^0$, так что условие NDAO выполняется и множество

$$B_0^* = \{x \in B_0 : n - 1 \geq \dim(\text{lin}(K_1(\cdot))) > 0\}$$

является непустым.⁴⁹

Тогда найдется непрерывная функция выплат g_1 , число $\beta > 0$ и непустое борелевское подмножество B_0^{**} множества B_0^* , такое что для любого $\delta > 0$ найдется возмущенная модель, удовлетворяющая условию NDAO, для которой динамика рынка задается измеримым по Борелю многозначным отображением $\bar{K}_1(\cdot) = \bar{K}_1^{(\delta)}(\cdot)$ со значениями из $C_{\mathbb{R}^n}^0$, равномерно близким к исходной

⁴⁸Для любого замкнутого множества $C \subseteq \mathbb{R}^n$ множество $L^-(C) = \{x \in X : L(x) \cap C \neq \emptyset\}$ является замкнутым.

⁴⁹Тем самым, условие RNDAO не выполняется.

модели по метрике Помпею—Хаусдорфа: $\sup_{x \in B_t} h_\rho(\widetilde{K}_1(x), K_1(\cdot)) < \delta$, в то время как решения (В1) v_t^* и \tilde{v}_t^* для исходной и возмущенной моделей соответственно отличаются: $v_t^*(x) - \tilde{v}_t^*(x) \geq \beta$ для всех $x \in B_0^*$.

Доказательство. Пусть $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая неотрицательная функция (а, значит, непрерывная), строго выпуклая по второй переменной y в каждой точке (x, y) , где $x \in \mathbb{R}^n$, т. е. если $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = 1$, $q_1 y^{(1)} + q_2 y^{(2)} = 0$ и $y^{(1)} \neq 0$, то

$$q_1 f(x, y^{(1)}) + q_2 f(x, y^{(2)}) > f(x, 0). \quad (10.3.4)$$

Определим функцию выплат (также выпуклую) посредством соотношения $g_1(x_0, x_1) = f(x_0, x_1 - x_0)$.

Для одношаговой модели $B_0 = K_0$. Множество

$$B_0^{(n)} = \{x \in B_0 : r(K_1(x)) > 0\}$$

является открытым (возможно пустым) благодаря непрерывности многозначного отображения $K_1(\cdot)$ и непрерывности функции r , заданного посредством соотношения (10.3.1). Следовательно, множество

$$B_0^{(n-1)} = \{x \in B_0 : \dim(\text{lin}(K_1(x))) < n\}$$

замкнуто. Множество

$$B_0^{(0)} = \{x \in B_0 : \dim(\text{lin}(K_1(x))) = 0\} = \{x \in B_0 : K_1(x) = \{0\}\}$$

также является замкнутым (возможно пустым) в силу непрерывности $K_1(\cdot)$, поэтому множество $B_0^* = B_0^{(n-1)} \setminus B_0^{(0)}$ является борелевским, при этом непустым по предположению теоремы.

Заметим что для многозначного отображения $K_1(\cdot)$ со значениями из $C_{\mathbb{R}^n}^*$ условие NDAO равносильно тому, что это многозначное отображение принимает значения в $C_{\mathbb{R}^n}^{0'}$. Тем самым применима лемма 10.3.2, полагая $X = B_0^{(n-1)}$ с индуцированной топологией, получаем, что компактозначное отображение

$$L_1(x) = (\text{lin}(K_1(x)))^\perp \cap S_1(0), \quad x \in B_0^{(n-1)}$$

является полунепрерывным сверху и, следовательно, сильно измеримым (по Борелю). В нашем случае, поскольку многозначное отображение принимает компактные значения, это эквивалентно (просто) измеримости многозначного отображения L_1 . Применяя теорему Куратовского и Рыль—Нарджевского об измеримом выборе []Hu1997 к многозначному отображению L_1 и измеримому пространству $B_0^{(n-1)}$ с σ -алгеброй его борелевских подмножеств, получаем измеримый селектор $l_1(x) \in L_1(x)$, $x \in B_0^{(n-1)}$.

Зададим функцию l^* на B_0 : фиксируем некоторый вектор $e \in S_1(0)$ и положим $l^*(x) = e$ если $x \in B_0 \setminus B_0^*$ и $l^*(x) = l_1(x)$ если $x \in B_0^*$; функция $l^* : B_0 \rightarrow S_1(0)$ измерима по Борелю.

Для любого $z \in \mathbb{R}^n$ функция $\psi_z : \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n} \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times S_1(0) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, заданная посредством $\psi_z(K, \delta, \epsilon, l) = \rho(z, \mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K))$, является непрерывной функцией по совокупности четырех переменных, благодаря неравенству (10.3.2) и равенству

$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\rho(z, A) - \rho(z, A')| = h_\rho(A, A')$ [171, глава 1, теорема 1.15]. Для произвольного $\delta > 0$ положим $\epsilon^*(x) = \delta \rho(x, B_0^*)$ (заметим, что это непрерывная функция), $\widetilde{K}_1(x) = \mathfrak{B}^{\delta, \epsilon^*(x), l^*(x)}(K_1(x))$ и применим [171, глава 2, предложение 1.4]: многозначное отображение $\widetilde{K}_1(x), x \in B_0$ измеримо если (и только если) для любого $z \in \mathbb{R}^n$ функция $z \mapsto d(z, \widetilde{K}_1(x))$ является измеримой. Таким образом, многозначное отображение $\widetilde{K}_1(x), x \in B_0$ является измеримым по Борелю.

В соответствии с теоремой 5.3.1, в случае отсутствия торговых ограничений, в предположении что выполняется условие NDAO, а также условие ограниченности g_t игровое равновесие имеет место для смешанного расширения $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$, более того, точная нижняя грань в (VI) достигается для некоторого h и следующие уравнения имеет место для $x \in B_t, t = N, \dots, 1$:

$$\inf_{h \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in K_t(x)} [w_t(x, y) - hy] = \sup_{Q \in \mathcal{P}^*(\widetilde{K}_t(x))} \int w_t(x, y) Q(dy), \quad (10.3.5)$$

где w_t задается формулой (5.1.1), а $\mathcal{P}^*(K) \subseteq \mathcal{P}^*(K)$ обозначает класс всех вероятностных мер Q , сосредоточенных на конечных подмножествах K и имеющих нулевой барицентр, т. е. $\int y Q(dy) = 0$. В нашем случае $N = 1$ и $w_1(x, y) = f(x, y)$; Поскольку функция f является непрерывной и выпуклой на $K_1(x)$ в соответствии с леммой 8.4.2, правая часть (10.3.5) достигает максимума, равного $v_0^*(x)$, для некоторого распределения $Q_1^*(x, \cdot)$, сосредоточенного не более чем в $n + 1$ крайней точке множества $K_1(x)$.

Рассмотрим произвольную точку $x \in B_0^*$ и (зависящую от x) точку $y^{(1)} \in \text{supp}(Q_1^*(x, \cdot))$, отличную от 0; обозначим $q_1 = Q_1^*(x, \{y^{(1)}\}) > 0$ и $q_2 = 1 - q_1$. Отметим, что точка $y^{(1)}$ не может быть равной 0, поскольку $0 \in \text{ri}(K_1(x))$ не является крайней точкой $K_1(x)$; кроме того найдется (зависящее от x) число $\alpha > 0$, такое что $y^{(2)} = -\alpha y^{(1)} \in K_1(x)$ (откуда $q_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ и $q_2 = \frac{1}{1+\alpha}$). Следовательно,

$$\int f(x, y) Q_1^*(x, dy) \geq q_1 f(x, y^{(1)}) + q_2 f(x, y^{(2)}) > f(x, 0).$$

Из предложения 3.1.4 следует, что выражение в (10.3.5) (равняющееся $v_0^*(x) = \int f(x, y) Q_1^*(x, dy)$) является полунепрерывной снизу функцией x . Таким образом, множество $B_{0, \gamma} = \{x \in B_0 : v_0^*(x) - f(x, 0) \geq \gamma\}$ является замкнутым и для достаточно малого $\gamma > 0$ множество $B_0^{**} = B_{0, \gamma} \cap B_0^*$ является непустым борелевским.

С другой стороны, если мы положим $\widetilde{K}_t(x) = \mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l^*(x)}(K_t(x))$, то условие риск-нейтральности $\int y Q(dy) = 0$, для $Q \in \mathcal{P}^*(\widetilde{K}_1(x))$, $x \in B_0^*$, влечет $q_0 = Q(\{0\}) > 0$ и $q_0 \epsilon - (1 - q_0) \delta = 0$, откуда $q_0 = \frac{1}{1 + \epsilon/\delta}$. Поскольку множество

B_1 компактно, и f непрерывно, $C_1 = \max_{x \in B_1} f(x) > 0$ конечно, кроме того $C_1 > f(x, 0)$ для $x \in B_0^*$. Поэтому

$$\int f(x, y)Q(dy) \leq q_0 f(x, 0) + (1 - q_0)C_1.$$

Следовательно, решение \tilde{v}_0^* уравнений (VI) для возмущенной модели удовлетворяют неравенству $\tilde{v}_0^*(x) \leq q_0 f(x, 0) + (1 - q_0)C_1$. Выберем $\beta > 0$, такое что⁵⁰ $\beta < \gamma \wedge C_1$ и $\epsilon \leq \delta \left[1 \vee \frac{\beta/C_1}{1 - \beta/C_1} \right]$. Тогда для всех $x \in B_{0, \gamma}^*$ получаем неравенство $v_0^*(x) - \tilde{v}_0^*(x) \geq \beta$, а 10.3.1 влечет $h_\rho(\tilde{K}_t(x), K_t(x)) \leq \delta$ для всех $x \in B_0$. \square

10.4 Выбор численных методов

Решение задачи ценообразования

В рамках двухэтапного способа для решения задачи ценообразования при суперхеджировании обусловленных обязательств по проданному американскому опциону, описанному в разделе 7.1, возникает необходимость выбора подходящих численных алгоритмов построения вогнутой оболочки функции на первом этапе, а также максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве на втором этапе. Мы привлечем для этой цели соображения, которые будут полезны с точки зрения учета специфики нашей задачи.

Наиболее важное из них заключается в том, что поскольку, в соответствии с постановкой задачи, требуется получение гарантированного результата, то разумно использовать аналогичный подход и в численном решении. Этой тематике посвящена книга [58], причем наиболее релевантными являются главы 3 и 4. Глава 3 посвящена гарантированным результатам по восстановлению значений функции из заданного класса, удовлетворяющих условию Липшица с фиксированной константой, когда значения заданы на конечном множестве точек. По сути дела, эта проблема тесно связана, а иногда непосредственно пересекается с теорией приближения в функциональном анализе (например, следствие из теоремы 1.2 этой главы и результаты оценки поперечников из параграфа 4.2 из книги [61] дают одну и ту же гарантированную погрешность в классе липшицевых функций на интервале). Актуальность выбора класса липшицевых функций для нашего случая вытекает из теоремы 4.2.1, позволяющей дать оценки константы Липшица для решений уравнений (VI). В главе 4 изучается проблема гарантированного результата для поиска глобального экстремума функции из заданного класса, удовлетворяющих условию Липшица с фиксированной константой, когда значения заданы на конечном множестве точек. Обе главы показывают, что оптимальное решение задачи сводится к построению оптимального покрытия множества, на котором ищется гарантированное

⁵⁰Заметим, что выбор величины $\beta > 0$ никак не связан с выбором параметров ϵ и δ , определяющих $\tilde{K}_t(x)$.

приближение или же экстремум с гарантированной точностью, т. е. к нахождению конечного множества с заданным количеством точек, минимизирующего отклонение Помпею покрываемого множества от этого конечного множества⁵¹.

С другой стороны, в зависимости от конкретной формализации, в частности от выбора метрик и конкретного вида покрываемого множества, задача оптимального покрытия может быть весьма сложной. Так, например, алгоритм оптимального покрытия для евклидовой метрики на плоскости, предложенный в [63], вряд ли пригоден для генерации большого числа точек. Для теоретического решения сходной задачи под названием «гипотеза Кеплера» о плотнейшей упаковке шаров в трехмерном пространстве потребовалось более 400 лет, и то с применением компьютерного доказательства [160]. Однако при дополнительном предположении о симметрии, а именно, что точки лежат на решетке⁵², задача была решена Гауссом еще в 1831 году, нашедшим простое доказательство оптимальности гексагональной упаковки (среди упаковок на решетке).

В принципе, можно было бы использовать решетки с плотнейшей упаковкой, однако проблема заключается в том, что их поведение сильно отличается для разных размерностей⁵³ и нахождение оптимальных решеток для больших размерностей является трудной математической проблемой [124]. На сегодняшний день описано не так уж много оптимальных решеток — максимальная размерность 128, но для всех размерностей менее 128 известно решение⁵⁴; впрочем, для опционов rainbow характерно использование малых размерностей, т. е. количества базовых активов. Однако, по крайней мере для малых размерностей, представляется разумным, несколько потеряв в эффективности упаковки, выиграть в простоте алгоритма. Так, например, на плоскости взяв ячейки Вороного одинаковой площади для прямоугольной и гексагональной решеток, радиус описанных окружностей вокруг треугольников в триангуляции Делоне, соответствующей диаграмме Вороного (называемый также радиусом покрытия решетки), для прямоугольной решетки всего в $\frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt{3}}$ раз больше, чем для гексагональной решетки⁵⁵, т. е. больше примерно на 14%. Поэтому выбор прямоугольной решетки для евклидовой метрики не так уж плох, а для неевклидовой метрики, отвечающей норме $\|\cdot\|_\infty$, будет оптимальным в n -мерном кубе [58, глава 3, теорема 1.2].

Приняв эти соображения в расчет, для задач с небольшой размерностью нет

⁵¹Для евклидовой метрики на плоскости это максимальный радиус описанных окружностей вокруг треугольников в триангуляции Делоне, соответствующей диаграмме Вороного.

⁵²Под решеткой в \mathbb{R}^n понимается дискретная аддитивная подгруппа \mathbb{R}^n максимального ранга, изоморфная \mathbb{Z}^n , т. е. представимая в виде $\{\sum_{i=1}^n z_i v_i : z_i \in \mathbb{Z}\}$, где вектора $v_i \in \mathbb{R}^n$ линейно независимы (базис решетки).

⁵³Например, для размерностей 2, 3, 8 и 24 доказано, что плотнейшая упаковка достигается на некоторых решетках, а для размерностей 10, 11, 13, 18, 20, 22 и 30 имеются более плотные упаковки, чем на плотнейшие на решетках.

⁵⁴См. каталог известных решеток с плотнейшей упаковкой (проект Gabriele Nebe и Neil J. A. Sloane) на сайте <http://www.math.rwth-aachen.de/Gabriele.Nebe/LATTICES/density.html>.

⁵⁵Однако при увеличении размерности задачи подобное различие растёт и может оказаться существенным.

нужды искать оптимальное покрытие; для получения адекватного численного алгоритма достаточно выбрать субоптимальное покрытие для случая, когда точки лежат на решетке. С этой целью будем строить траектории приближенной системы таким образом, чтобы вектор цен активов в каждый момент времени лежал бы на одной и той же (аддитивной) решетке. Выберем решетку в простейшем, удобном для расчетов «прямоугольном» виде:

$$L_{\theta_1, \dots, \theta_n} = \{(k_1\theta_1, \dots, k_n\theta_n) : k_1 \in \mathbb{Z}, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}, \quad (10.4.1)$$

где $\theta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Для задания приближенного множества $\tilde{K}_t(\cdot)$ выберем конечное множество точек решетки $L_{\theta_1, \dots, \theta_n}$, попадающих в $\check{K}_t(\cdot)$, т. е.

$$\tilde{K}_t(\cdot) = L_{\theta_1, \dots, \theta_n} \cap \check{K}_t(\cdot) = \{y \in L_{\theta_1, \dots, \theta_n} : \rho(y, K_t(\cdot)) \leq \delta(\cdot)\}, \quad (10.4.2)$$

где множества $\check{K}_t(\cdot)$ — регуляризующее закругление на уровне $\delta_t(\cdot)$ исходной динамики рынка, задаваемое посредством (10.2.1).

Для модели с неограниченными торговыми ограничениями, или же модели с ограниченными торговыми ограничениями, достаточно малые шаги решетки обеспечат необходимую близость приближенной модели рынка к исходной — используя теорему 10.2.1, можно оценить погрешность, возникающую при замене исходной системы на приближенную, полученную путем малого в смысле метрики Помпею—Хаусдорфа возмущения $\tilde{K}_t(\cdot)$ компактов $K_t(\cdot)$. При этом следует выбирать шаги решетки (10.4.1) настолько малыми, чтобы в каждый момент времени t и любой траектории предистории цен (а таких траекторий будет конечное число) множество $\tilde{K}_t(\cdot)$ содержало бы не менее $n + 1$ аффинно независимых точек — в противном случае, невырожденность динамики цен потеряется. Выбор различных θ_i — шагов решетки по i -ой координате, может быть обусловлен различной волатильностью активов, если такая априорная информация имеется. В противном случае, можно взять одинаковые шаги $\theta_i = \theta$, $i = 1, \dots, n$, а решетку в этом случае можно обозначить через L_θ .

Для решения задачи (7.1.2), возникающей на первом из двух этапов, необходимо численно построить вогнутую оболочку функции Беллмана. Под вогнутой оболочкой числовой функции f , заданной на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, мы понимаем⁵⁶ функцию $\hat{f}(z)$, $z \in \text{conv}(X)$ является наименьшей вогнутой функцией среди вогнутых на $\text{conv}(X)$ функций, мажорирующих функцию f на множестве X . На относительной внутренней множестве $\text{conv}(X)$ функция f^* непрерывна и совпадает с поточечной точной нижней гранью аффинных функций, ее мажорирующих.

Построение вогнутой оболочки неотрицательной функции, заданной на конечном множестве $X = \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ (что соответствует выбранному выше способу построению приближенного решения задачи (7.1.2)) удобно свести к эквивалентной задаче — к построению выпуклой оболочки множества $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$,

⁵⁶Альтернативно, вогнутую оболочку функции f можно определить как функцию, чей подграфик является выпуклой оболочкой подграфика f (в частности, область ее определения — выпуклая оболочка области определения f).

состоящего из $2k$ точек:

$$A = \{(x_1, f(x_1)), \dots, (x_k, f(x_k)), (0, f(x_1)), \dots, (0, f(x_k))\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \quad (10.4.3)$$

что представляет собой выпуклый многогранник \hat{A} . Условимся называть последнюю координату высотой. У многогранника \hat{A} имеется нижняя грань, находящаяся в гиперплоскости в \mathbb{R}^{n+1} нулевой высоты. Проекция этой грани на \mathbb{R}^n , посредством удаления последней координаты (высоты), даст выпуклый многогранник \hat{X} — выпуклую оболочку множества X , а проекция крайних точек множества A , имеющих нулевую высоту, даст крайние точки множества X . Построение выпуклой оболочки конечного множества является хорошо разработанным разделом вычислительной геометрии [161]. Подробное обсуждение таких алгоритмов представлено в параграфе 10.5.

Решение задачи хеджирования

Нахождение хеджирующей стратегии было отделено от задачи ценообразования, как только мы перешли от решений уравнений Беллмана—Айзекса к уравнениям Беллмана (7.1.1). Отметим, что если та или иная постановка задачи ценообразования и хеджирования обусловленного обязательства по проданному опциону позволяет отделить задачу хеджирования от задачи ценообразования, то это является несомненным плюсом с практической точки зрения. Речь идет о подразделениях крупных инвестиционных компаний, занимающихся продажей (внебиржевых) опционов своим клиентам (derivative desk). Обычно клиент посылает запрос о стоимости опциона, который он желал бы приобрести, а для этого необходимо решить задачу ценообразования. Если на основе полученной котировки клиент примет решение о покупке этого опциона, то данное подразделение принимает обусловленное обязательство по этому опциону на себя и хеджирует его, а для этого нужно решать задачу хеджирования.

Если задача ценообразования решена, аналитически или численно, то это упрощает задачу нахождения соответствующей хеджирующей стратегии. Некоторые соображения по поводу способов решения задачи хеджирования, опирающиеся на знание носителя оптимальной смешанной стратегии рынка, уже обсуждались в конце параграфа 7.5. Кроме того, в конце параграфа 7.6 обсуждалось решение задачи хеджирования в частном случае отсутствия торговых ограничений (в этом случае задача хеджирования значительно упрощается).

Обозначим

$$\varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h) = \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy], \quad (10.4.4)$$

тогда задаваемую формулой (5.2.1) функцию $\rho_t(\cdot)$, с учетом (5.1.1), можно записать в виде

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \varphi_t(\cdot, h). \quad (10.4.5)$$

Напомним, что в соответствии с леммой 3.2.1, в которой предполагается, что выполнено условие RNSAUP и множества $D_t(\cdot)$ замкнуты, для любого $a \geq C_t^*$, где C_t^* задается (4.2.1)

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] = \inf_{h \in \widehat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]; \quad (10.4.6)$$

множество $\widehat{D}_t^a(\cdot)$ задается формулой (3.2.4), причем оно компактно, а также выпукло и $0 \in \widehat{D}_t^a(\cdot)$. Поэтому, по теореме 7.3.2, пункт 3° б), значение игры с компактными торговыми ограничениями $\widehat{D}_t^a(\cdot)$ на каждом временном шаге t достигается для некоторой седловой точки — оптимальной пары $h_t^*(\cdot) \in \widehat{D}_t^a(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$, где $Q_t^*(\cdot)$ — оптимальная смешанная стратегия рынка, причем значение игры конечно.

Можно, например, решать задачу минимизации, включая нахождение минимизатора, заменив в (10.4.5) множество $D_t(\cdot)$ на компактное множество $\widehat{D}_t^a(\cdot)$ с $a \geq C_t^*$, где минимизируемая функция $h \mapsto \varphi_t(\cdot, h)$ задается посредством (10.4.4). Это, однако, не всегда приводит к упрощению численного решения задачи — может оказаться, что решение задачи (условной) минимизации с исходными торговыми ограничениями $D_t(\cdot)$ все же проще.

С другой стороны, для определения хеджирующей стратегии достаточно знать барицентр оптимальной стратегии рынка $\int y Q_{t,\cdot}^*(dy)$, вычисление которого может проводиться в ходе описанной выше двухэтапной процедуры, см. (7.1.2) и (7.1.3). Рассмотрим седловую $h_t^*(\cdot), Q_t^*$ точку в динамической игре «хеджера» и «рынка» на шаге t в для функционала $F_{t,\cdot}(h, Q) = \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy)$:

$$F_{t,\cdot}(h_t^*(\cdot), Q_{t,\cdot}^*) = \min_{h \in D_t(\cdot)} F_{t,\cdot}(h, Q_{t,\cdot}^*) = \max_{Q \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))} F_{t,\cdot}(h_t^*(\cdot), Q) \quad (10.4.7)$$

Нахождение минимизаторов (по переменной h) в (10.4.7) равносильно нахождению множества максимизаторов $S_t(\cdot)$ для линейной функции $h \mapsto \int y Q_{t,\cdot}^*(dy)$ на замкнутом выпуклом множестве⁵⁷ $D_t(\cdot)$, а значение максимума такой функции есть значение опорной функции $\sigma_{D_t(\cdot)}$ множества $D_t(\cdot)$ в точке $\int y Q_{t,\cdot}^*(dy)$. В соответствии с [40, следствие 23.5.3]

$$S_t(\cdot) = \partial \sigma_{D_t(\cdot)}(\int y Q_{t,\cdot}^*(dy)),$$

где символ ∂ обозначает субдифференциал. Из [40, теорема 13.2], [40, теорема 23.5] следует, что $h \in S_t(\cdot)$ также равносильно тому, что $\int y Q_{t,\cdot}^*(dy)$ является нормальным вектором⁵⁸ к $D_t(\cdot)$ в точке h . В случае, когда $D_t(\cdot)$ — замкнутый выпуклый конус, по [40, следствие 23.5.4] $h \in S_t(\cdot)$ в том и только в том случае,

⁵⁷Множество $D_t(\cdot)$ непусто, поскольку $0 \in D_t(\cdot)$.

⁵⁸Иными словами, $\int y Q_{t,\cdot}^*(dy)$ лежит в нормальном конусе к $D_t(\cdot)$ в точке h .

если⁵⁹

$$h \in D_t(\cdot), \quad \int y Q_t^*(dy) \in D_t^\circ(\cdot), \quad h \int y Q_t^*(dy) = 0. \quad (10.4.8)$$

Для обеспечения устойчивости расчета хеджирующей стратегии и ее единственности можно применить к полученной вогнутой оболочке функции Беллмана сглаживающие преобразования. Причина заключается не только в регуляризации численного метода, но и в наличии модельного риска. Любая модель лишь приблизительно описывает реальность — что-то описывает хорошо, что-то не очень, а что-то вообще не учитывает. В нашей модели не учитываются транзакционные издержки, которые в действительности могут иметь существенное значение. Это в особенности относится к случаю, когда происходит перестройка портфеля, связанная с артефактами модели или численного метода.

Так, например, применение популярной на практике разностной схемы метода Кранка—Никольсона численного решения задачи ценообразования опционов в рамках модели Блэка—Шоулса (также не учитывающей транзакционные издержки) может вызвать паразитные колебания, приводящие к (необоснованной) перестройке хеджирующего портфеля, а на практике — к потерям на транзакционных издержках. В [147] и [31] на примере паспортного опциона показано, как эта проблема может быть снята посредством применения монотонных разностных схем.

В нашем случае негладкость функции Беллмана может возникать по существу постановки задачи, если она обусловлена конкретным видом модели динамики рынка, торговых ограничений и функций выплат по опциону. Однако в значительно большей мере негладкость будет связано со способом аппроксимации исходной динамики рынка $K_t(\cdot)$ приближенным компактозначным отображением, значения которого — конечные множества точек решетки L_θ . В последнем случае рекомендация по резкой смене хеджирующей стратегии в точках негладкости функции Беллмана будет связана с артефактом численного решения задачи.

Учитывая приведенные выше соображения, представляется разумным, с точки зрения здравого инженерного смысла, незначительно увеличивая требования к резервам, добиться гладкости приближенной функции Беллмана. Для этой цели мы можем использовать преобразование Моро⁶⁰ [198], или более общее преобразование, предложенное Бертсекасом [96]. Имея в виду, что в нашем случае эти преобразования производятся с вогнутыми, а не выпуклыми функциями, преобразование Моро $\mathfrak{M}_\mu f$ функции f определяется как супре-

⁵⁹Напомним, что мы используем обозначение введенное посредством формулы (2.2.4); для выпуклого конуса C обозначение C° совпадает с полярным к C конусом. При этом барьерный конус для выпуклого конуса C совпадает с полярным, т. е. $\text{bar}(C) = C^\circ$, так что условия NDSAUP и NDSA совпадают, а следовательно, совпадают также и условия RNDSAUP и RNDSA.

⁶⁰Преобразование Моро называют также огибающей Моро или же регуляризацией Моро—Иосиды; при этом, иногда вместо $\mu \|x\|_2^2$ используют положительно определенную квадратичную форму $\langle Bx, x \rangle$.

мальная конволюция⁶¹ функций f и g , где $g(x) = -\mu\|x\|_2^2$, $\mu > 0$, а преобразование Бертсекаса $\mathfrak{B}_{\mu,\lambda}f$ функции f — как супремальная конволюция функций f и \tilde{g} , где $\tilde{g}(x) = -\mu\|x\|_2^2 - \langle \lambda, x \rangle$, $\mu > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $g(0) = \tilde{g}(0) = 0$, то $\mathfrak{M}_{\mu}f \geq f$ и $\mathfrak{B}_{\mu,\lambda}f \geq f$. Легко видеть, что эти два преобразования связаны: с одной стороны, $\mathfrak{M}_{\mu}f = \mathfrak{B}_{\mu,0}f$, а с другой стороны $\mathfrak{B}_{\mu,\lambda}f(x) = -\langle \lambda, x \rangle + \mathfrak{M}_{\mu}[f(\cdot) + \langle \lambda, \cdot \rangle]$.

10.5 Алгоритм численного анализа и вычислительный эксперимент

Алгоритмы решения задачи ценообразования с построением выпуклой оболочки многогранника

Для нашей задачи представляют интерес следующая проблема выпуклой оболочки: получить описание многогранника, образованный выпуклой оболочкой конечного множества. В первую очередь, это описание посредством построения множества всех его вершин, или, что равносильно, крайних точек этого множества. Это означает, что требуется найти все точки заданного конечного множества $S \subseteq \mathbb{R}^k$, которые не являются избыточными⁶², в том смысле, что они не могут быть представлены в виде выпуклой комбинации остальных точек.

Что касается поиска вершин, то проверка того, является ли заданная точка из множества S избыточной, сводится к решению задачи линейного программирования с k переменными с $m - 1$ ограничениями, где m — число точек в S . Наивный метод последовательного тестирования точек приводит к не самому эффективному алгоритму с точки зрения вычислительной сложности. Описание более эффективных алгоритмов можно найти, например, в книге [161], в главах 26 и 49. Задача сравнения различных численных методов выходит за рамки данной работы, поэтому мы ограничимся ссылкой на дискуссионную статью [152]. Мы всего лишь задаемся целью подобрать пригодный на практике алгоритм, позволяющий решать типичные задачи суперхеджирования с торговыми ограничениями.

Одномерные задачи (с одним рисковым активом) могут, например, решаться при помощи дважды примененного преобразования Фенхеля⁶³, см. обзор [192,

⁶¹ Супремальная конволюция собственных вогнутых функций f_1 и f_2 определяется посредством формулы $f_1 \square f_2(x) = \sup\{f_1(x_1) + f_2(x_2) : x_1 + x_2 = x\}$. Более общим образом, супремальная конволюция функций f_1 и f_2 определяется в терминах сложения подграфиков: $f_1 \square f_2(x) = \sup\{y : (x, y) \in (\text{hpo } f_1 + \text{hpo } f_2)\}$. Супремальная конволюция \square связана с инфимальной конволюцией \square собственных выпуклых функций соотношением $f_1 \square f_2 = -((-f_1) \square (-f_2))$.

⁶² Интерпретация экономического характера, в терминах гарантированного подхода к суперхеджированию, заключается в том, что отбрасывание этих точек не приведет к потере возможных сценариев для наиболее неблагоприятных смешанных стратегий рынка, сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке.

⁶³ В нашем случае преобразование Фенхеля понимается как операция сопряжения для вогнутых функций, которое обычно определяется посредством формулы $f^*(y) = \inf\{\langle y, x \rangle - f(x) : x \in S\}$.

раздел 3.2.1], а также прикладную работу [123]. Однако нам интереснее случай опционов Rainbow (т. е. с несколькими рисковыми активами).

Нам представляется важным устойчивость численного решения по отношению к малым возмущениям исходных данных. В этом плане выглядит привлекательным алгоритм вычисления вершин выпуклой оболочки конечного множества точек S в случае многомерного пространства, предложенный в недавней работе [83] и названный авторами All Vertex Triangle Algorithm (AVTA). Алгоритм AVTA может вычислять аппроксимацию S , в частности, если входные данные являются возмущением⁶⁴ S . В этой связи нами была независимо выполнена программная реализация AVTA, однако алгоритм продемонстрировал более медленную работу на тестовых примерах, чем популярный алгоритм⁶⁵ Quickhull [85].

Во вторую очередь, нам потребуется описание всех граней размерности на единицу меньшей, чем размерность многогранника; договоримся такие грани называть гипергранями⁶⁶. Это необходимо для решения оптимизационной задачи (7.1.3) на втором этапе предложенного нами метода. Во-первых, проекция гиперграней посредством удаления последней координаты (высоты), даст разбиение⁶⁷ выпуклого многогранника \hat{X} на многогранники, на которых полученная выпуклая оболочка функции Беллмана для приближенной модели является аффинной⁶⁸. Во-вторых, максимальный наклон n -мерных граней выпуклого многогранника \hat{A} , прилежащих к $n - 1$ -мерным граням выпуклого многогранника \hat{X} , представляет собой константу Липшица выпуклой оболочки функции Беллмана для приближенной модели, что полезно для оценки точности решения приближенного решения задачи (7.1.3). При этом нас интересует не только описание всех n -мерных граней выпуклого многогранника \hat{A} (посредством соответствующих линейных неравенств), но и двойное описание, включая отношение инцидентности между вершинами и гипергранями (посредством матрицы инцидентности). К таким алгоритмам относится, например, примально-дуальный, предложенный в [106], позволяющий по описанию вершин строить описание гиперграней и наоборот. В работе [82] приведены результаты, сравнения работы параллельных и последовательных кодов в задаче перечисления вершин

$x \in \mathbb{R}^n$.

⁶⁴ Отметим, что множество возмущенных вершин S' (близкое к S в метрике Помпею—Хаусдорфа) может сильно отличаться от множества вершин выпуклой оболочки S' .

⁶⁵ Этот алгоритм реализован авторами в виде программного комплекса qhull, доступного на специальной веб-странице <http://www.qhull.org>, где также приводится подробная документация. Алгоритм Quickhull хорошо себя зарекомендовал для решения задач малой размерности, что характерно для проблемы суперхеджирования.

⁶⁶ Иногда в литературе их называют фасетами, от англ. facet.

⁶⁷ Пересечение любых двух многогранников этого разбиения либо равно общей их грани, либо пусто. Если все многогранники этого разбиения являются симплексами, то разбиение образует триангуляцию.

⁶⁸ Отметим, что для проекции грани, выпуклого многогранника \hat{A} , не являющейся симплексом, наиболее неблагоприятная смешанная стратегия рынка, сосредоточенная не более чем в $n + 1$, с заданным барьером, лежащем в проекции этой грани может быть определена неединственным образом.

/ граней для широкого диапазона выпуклых многогранников, от простых до вырожденных, на основе метода двойного описания. Результаты тестирования показывают, что вычислительная сложность решения задачи сильно различается в зависимости от алгоритма и входных данных. Отметим, что на наш взгляд представляет интерес недавно появившийся алгоритм [257], привлекательный своей интуитивной простотой. Для малых размерностей можно пользоваться одним из алгоритмов входящим в программной комплекс qhull.

Предварительные вычисления перед решением уравнений Беллмана

Далее мы будем рассматривать численное решение задачи ценообразования в предположении, что выполняются условия теоремы 10.2.1 (в частности, это включает задачи с ограниченными торговыми ограничениями и коническими торговыми ограничениями). Дополнительно предположим, что многозначные отображения $K_t(\cdot)$ и функции выплат $g_t(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица с константами L_{K_t} и L_{g_t} соответственно, для $t = 1, \dots, N$ ⁶⁹, а также, что (детерминистская) динамика цен является невырожденной, т. е. компакты $K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$ имеют непустую внутренность.

Выберем простейшую прямоугольную решетку L_θ , с одинаковыми шагами по координатам $\theta_i = \theta$, $i = 1, \dots, n$,

$$L_\theta = \{(k_1\theta, \dots, k_n\theta) : k_1 \in \mathbb{Z}, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}. \quad (10.5.1)$$

Опишем последовательность действий, предворяющих начало расчета значений функции Беллмана на выбранной решетке.

- 1° Если это возможно сделать аналитически (явно), найдем множество возможных траекторий исходной системы: $B_0 = K_0$, а для $t = 1, \dots, N$ рекуррентно построим

$$B_t = \{x_0, \dots, x_{t-1}, x_t) : \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}, x_t \in x_{t-1} + K_t(\bar{x}_{t-1})\}.$$

Если же это сделать невозможно аналитическим способом, найдем численно аппроксимирующие множества с пробным значением точности приближения, на решетке с шагом $\theta = \delta' > 0$, которая может быть выбрана достаточно мелкой, поскольку предназначена для предварительных вычислений, не столь трудоемких, как решение уравнений Беллмана — сначала построим $K'_0 = B'_0 = B_0 \cap L_\theta$, затем рекуррентно построим

$$B'_t = \{x_0, \dots, x_{t-1}, x_t) : \bar{x}_{t-1} \in B'_{t-1}, x_t \in [x_{t-1} + K_t(\bar{x}_{t-1})] \cap L_\theta\}.$$

⁶⁹Это позволяет использовать оценки, полученные в замечании 10.2.3

2° Для моделей с коническими торговыми ограничениями рассчитаем порог структурной устойчивости $p_t(K_t(x))$ для $x \in B_{t-1}$ используя, в зависимости от конкретного вида модели, формулу (10.1.8) или (10.1.9) — аналитически (явно), а если это сделать невозможно аналитическим способом, найдем численно $p_t(K_t(x))$ для $x \in B_{t-1}$, что можно вычислять одновременно с численным определением множества B'_{t-1} . Найдем минимум порога структурной устойчивости

$$p_t^* = \inf_{x \in B_{t-1}} p_t(K_t(x)),$$

который по теореме 10.1.2 является положительным — аналитически (явно), а если это сделать невозможно аналитическим способом, найдем численно. Например, можно найти минимум

$$p_t' = \min_{x \in B'_{t-1}} p_t(K_t(x)),$$

одновременно с расчетом $p_t(K_t(x))$ для $x \in B'_{t-1}$. При этом, используя формулу (10.1.10), получаем оценку $p_t^* \geq p_t' - L_{K_t} \delta' \sqrt{n}$. Если при этом величина в правой части последнего неравенства окажется отрицательной, то следует уменьшить величину шага предварительно выбранной решетки, взяв вместо δ' меньший шаг решетки⁷⁰ $0 < \delta'' < \frac{p_t'}{2\sqrt{n}L_{K_t}}$ и пересчитать требуемые параметры модели в описанных выше пунктах 1° и 2°.

3° Для моделей с коническими торговыми ограничениями воспользуемся оценкой (10.2.49) для величины R_t^* , фигурирующей в неравенстве (10.2.21). Для этого оценим константы C_t — максимальные значения функций выплат g_t на множестве возможных траекторий B_t , либо аналитическим способом, если это возможно, либо численно, находя

$$C_t' = \max_{x \in B_t'} g_t(x);$$

расчет этого значения можно делать одновременно с нахождением множества B_t' . При этом $C_t \leq C_t' + L_{g_t} \delta'''$, где $\delta''' = \delta'$, если при первоначальном выборе шага решетки и численном расчете p_t' оказалось $p_t' - L_{K_t} \delta' \sqrt{n} > 0$, а в противном случае, если потребовался пересчет для меньшего значения шага решетки, $\delta''' = \delta''$.

Для случая исходной модели с ограниченными торговыми ограничениями, величину R_t^* , фигурирующую в неравенстве (10.2.21), найдем либо аналитическим способом, если это возможно, либо численно. Полезным может оказаться равенство, справедливое для компактного множества A :

$$\|A\|_2 = \max_{y \in \mathbb{R}^n} |\sigma_A(y)|,$$

где σ_A — опорная функция множества A , поскольку множества $D_t(\cdot)$ могут быть заданы при помощи опорной функции.

⁷⁰Не ограничивая общности, можно считать что $L_{K_t} > 0$.

- 4° Для оценки модуля непрерывности необходимо, в соответствии с формулой (4.2.2) (применительно к нашему случаю), оценить величины

$$\check{A}_t^* = \sup_{x \in \check{B}_{t-1}} \|D_t(x) \cap E_t^a(x)\|_2, \quad (10.5.2)$$

где $E_t^a(\cdot)$ задается посредством формулы (10.2.11).

Для моделей с неограниченными торговыми ограничениями можно использовать неравенство (10.2.54), т. е.

$$\check{A}_t^* \leq \frac{\bigvee_{s=t}^N [C_t + L_{g_t} \delta_t^*]}{\mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t}) \delta_t^*}, \quad (10.5.3)$$

где используются обозначения (10.2.47) и (10.2.45).

Для моделей с ограниченными торговыми ограничениями можно воспользоваться включением $D_t(x) \cap E_t^a(x) \subseteq D_t(x)$, откуда $\check{A}_t^* \leq R_t^*$, а величина R_t^* находится также, как и в пункте 3°, либо аналитическим способом, если это возможно, либо численно.

- 5° Оценим константы Липшица решения уравнений Беллмана—Айзекса $L_{v_t^*}$ по рекуррентным формулам (4.2.16), заменяя в этих формулах A_t^* на \check{A}_t^* .
- 6° Фиксируем δ_t^* , $t = 1, \dots, N$. Используя неравенство

$$\omega_{w_t}^{\check{B}_t}(\delta) \leq L_{v_t^*} \delta,$$

оценим правую часть (10.2.21) для $\check{\delta}_t^* = \delta_t^*$:

$$\varepsilon_t^* = \sum_{s=t+1}^N [L_{v_t^*} \delta_t^* + R_t^* \delta_t^*], \quad t = 0, \dots, N-1. \quad (10.5.4)$$

Оценим в (10.5.4) величину R_t^* : для моделей с неограниченными торговыми ограничениями при помощи неравенства (10.2.52) (в этом случае оценка величины R_t^* зависит от δ_t^*), а для моделей с ограниченными торговыми ограничениями — как в пункте 3°; обозначим соответственно полученную оценку величины R_t^* через R_t , а оценку для ε_t^* , полученную в результате замены в (10.5.4) величин R_t^* на R_t , через ε_t . Выбор точности δ_t^* , $t = 1, \dots, N$ на каждом шаге может быть сделан эмпирически, на основе вычислительного эксперимента, учитывая, что вычислительная сложность экспоненциально растет с ростом времени.

Априорно δ_t^* , $t = 1, \dots, N$ можно, например, выбрать таким образом, чтобы оценки слагаемых в правой части (10.5.4) были равны, задавая δ_N^* . Для моделей с ограниченными торговыми ограничениями R_t не зависит

от δ_t^* и можно последовательно определить δ_t^* для $t = N - 1, \dots, 1$ при помощи формул:

$$\delta_t^* = \frac{L_{v_{t+1}^*} + R_{t+1}}{L_{v_t^*} + R_t} \delta_{t+1}^*; \quad (10.5.5)$$

Для моделей с неограниченными торговыми ограничениями зависимость $\delta \mapsto R_t(\delta)$ будет строго монотонно возрастающей функцией, см. правую часть (10.2.52). Поэтому уравнение относительно δ_t^*

$$[L_{v_t^*} + R_t(\delta_t^*)] \delta_t^* = [L_{v_{t+1}^*} + R_{t+1}(\delta_{t+1}^*)] \delta_{t+1}^* \quad (10.5.6)$$

имеет единственный корень, который нетрудно найти численно. При таком выборе δ_t^* , $t = 1, \dots, N$,

$$\varepsilon_t = (N - t) \varepsilon_{N-1}, \quad t = N - 1, \dots, 0.$$

Если задана желаемая точность вычисления премии при продаже опциона $\varepsilon > 0$, то достаточно выбрать

$$\delta_N^* = \frac{\varepsilon}{N(L_{v_N^*} + R_N)}.$$

Описание тестовых примеров

Опишем тестовые примеры, для которых будет проводиться численный эксперимент. Для этой цели мы задаем:

- 1) Модель динамики рынка;
- 2) Торговые ограничения;
- 3) Вид опциона и функции выплат.

Будем опираться на мультипликативное представление модели динамики цен (эквивалентное аддитивному), см. (1.1.10) и (1.1.10'). Мы будем рассматривать тестовые примеры, в которых⁷¹ динамика цен (торговые ограничения) относятся⁷² к марковскому типу и являются⁷³ однородными по времени. Эти свойства имеют место при выборе в (1.1.10) $C_t(\cdot) \equiv C^*$, где C^* является непустым компактным выпуклым подмножеством \mathbb{R}^n . Тогда можно опустить индекс t у K_t ; в соответствии с предложением 4.2.3 многозначное отображение

$$\mathbb{R}^n \ni x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto K(x) = \\ = \{y = (y^1, \dots, y^n) : y^i = (m^i - 1)x^i, i = 1, \dots, n, m = (m^1, \dots, m^n) \in E\}$$

⁷¹Терминология введена в главе 1.

⁷²Напомним, что в этом случае множества $K_t(\cdot)$ (соответственно $D_t(\cdot)$) зависят только от значения цен только в предыдущий момент времени.

⁷³Напомним, что в этом случае множества $K_t(\cdot)$ (соответственно $D_t(\cdot)$) не зависят от времени t .

принимая компактные выпуклые значения, удовлетворяет условию Липшица относительно метрики Помпею—Хаусдорфа:

$$h_\rho(K(x), K(x')) \leq \|C^* - e\|_2 \|x - x'\|_2,$$

где использованы обозначения $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $\|A\|_2 = \sup_{a \in A} \|a\|_2$. Конкретно, множество C^* выберем в двух вариантах.

- 1) Прямоугольный параллелепипед $C^* = \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$, где $0 < \alpha_i < \beta_i$, $i = 1, \dots, n$ (модель Колокольцова). Обозначая вершины этого прямоугольника v_i , $i = 1, \dots, 2^n$, опорная функция прямоугольника E может быть представлена в виде

$$\sigma_E(h) = \bigvee_{i=1}^{2^n} \langle v_i, h \rangle.$$

В соответствии с (4.2.25) константа Липшица не превосходит

$$\|C^* - e\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (|\alpha_i - 1| \vee |\beta_i - 1|)^2}.$$

- 2) Эллипсоид

$$C^* = \{m = (m^1, \dots, m^n) : \langle \Gamma^{-1}(m - \mu), m - \mu \rangle \leq 1\},$$

где Γ — симметрическая положительно определенная (тем самым, невырожденная) матрица⁷⁴, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Его опорная функция

$$\sigma_{C^*}(h) = \langle \mu, h \rangle + \sqrt{\langle \Gamma h, h \rangle}.$$

Параметры эллипсоида C^* выбираются таким образом, чтобы $C^* \subseteq (0, \infty)^n$, что равносильно системе неравенств

$$\langle \mu, e_i \rangle > \sqrt{\langle \Gamma e_i, e_i \rangle}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.5.7)$$

где e_i — вектор, все координаты которого нулевые, кроме i -ой координаты, равной единице. Задача нахождения константы Липшица $\|C^* - e\|_2$ сводится посредством замены переменных к условной максимизации

$$\|C^* - e\|_2 = \max_{x \in C^* - e} \|x\|_2 = \max_{\|z\|_2 \leq 1} \|\mu - e + \Gamma^{1/2} z\|_2.$$

Максимизация квадратичной формы $\|\mu - e + \Gamma^{1/2} z\|_2^2$ при квадратичном ограничении $\|z\|_2^2 \leq 1$ в общем случае представляет собой достаточно

⁷⁴Нам будет удобно интерпретировать Γ как некоторую ковариационную матрицу, а Γ^{-1} , ее обратную, как соответствующую матрицу точности.

сложную задачу, имеющую численное решение — частный случай [153, уравнение 10]. Однако для практических целей достаточно грубой оценки

$$\|C^* - e\|_2 \leq \|\mu - e\|_2 + \|\Gamma^{1/2}\|_2, \quad (10.5.8)$$

где $\|\Gamma^{1/2}\|_2 = \max_{\|z\|_2=1} \|\Gamma^{1/2}z\|_2 = \lambda_{max}^{1/2}$, а $\lambda_{max} > 0$ — максимальное собственное число для Γ .

Множество точек, в которых нужно рассчитывать значение функции Беллмана v_t^* в момент времени t явно задать не удастся, но можно его аппроксимировать снизу и сверху. Обозначим

$$\Psi(x) = (\ln x_1, \dots, \ln x_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in (0, \infty)^n.$$

Тогда

$$\Psi(x_t) = \Psi(x_0) + \sum_{s=1}^t \Psi(m_s), \quad (10.5.9)$$

откуда⁷⁵

$$\Psi(x_t) - \Psi(x_0) \in \Psi(C^*) + \dots + \Psi(C^*) \text{ (} t \text{ раз)} \supseteq t\Psi(C^*). \quad (10.5.10)$$

С другой стороны, используя свойства сумм Минковского, получаем включение

$$\begin{aligned} & \Psi(C^*) + \dots + \Psi(C^*) \text{ (} t \text{ раз)} \subseteq \\ & \text{conv}(\Psi(C^*) + \dots + \Psi(C^*) \text{ (} t \text{ раз)}) = \\ & = \text{conv}(\Psi(C^*)) + \dots + \text{conv}(\Psi(C^*)) \text{ (} t \text{ раз)} \\ & = t \text{conv}(\Psi(C^*)) = \text{conv}(t\Psi(C^*)). \end{aligned} \quad (10.5.11)$$

На самом деле, расстояние Помпею—Хаусдорфа

$$h_\rho(\text{conv}(\Psi(C^*) + \dots + \Psi(C^*) \text{ (} t \text{ раз)}), \Psi(C^*) + \dots + \Psi(C^*) \text{ (} t \text{ раз)})$$

не растет при $t \geq n$ и не превосходит⁷⁶ $\sqrt{1 \vee (n-1)} \tau(\Psi(C^*))$, где $\tau(A)$ — чебышевский радиус, т. е. радиус наименьшего шара⁷⁷ содержащего множество A [62]. К сожалению, количество точек расчета функции Беллмана момент времени t будет расти экспоненциально с увеличением t , что видно из включений (10.5.10) и (10.5.11), что приводит к значительной вычислительной сложности.

⁷⁵ Отметим, что для выпуклого множества E множество $\Psi(E)$ может оказаться невыпуклым.

⁷⁶ Эта оценка из [62] уточняет для случая одинаковых слагаемых в сумме Минковского и для размерности пространства $n \geq 2$ оценку из теоремы Шепли—Фолкмана [241, приложение 2]. В действительности, оценка может быть улучшена — вместо «внешнего» радиуса можно взять «внутренний», как было предложено Старром.

⁷⁷ Такой шар для ограниченного множества существует и он единственный. Кроме того, радиус описанного шара для множества E может быть оценен сверху через диаметр множества $\mathfrak{d}(E) = \sup\{\|x_2 - x_1\| : x_1, x_2 \in E\}$, при помощи неравенства Юнга $\tau(E) \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \mathfrak{d}(E)$ [26].

Для сопоставимости, с экономической точки зрения, результатов эксперимента⁷⁸ при разных вариантах выбора C^* , свяжем определяющие C^* параметры: выберем эллипсоид с центром $\mu_i = \frac{\beta_i + \alpha_i}{2}$ и полуосями $\sigma_i = \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}$, что соответствует некоторой формализации «тренда» и «волатильности» рынка. Тогда случай, когда C^* — эллипсоид, в отличие от параллелепипеда, дополнительно учитывает в сценариях поведения рынка априорную информацию о «корреляциях» цен.

При построении приближенной модели рынка удобно считать, что начальные цены лежат на выбранной для расчетов решетке L_θ .

Что касается торговых ограничений, выберем для тестирования два варианта.

- 1) *Статические торговые ограничения, модель относится к типу с неограниченными торговыми ограничениями.*

Ограничение заключается в запрете коротких позиций, т. е. $D_t(\cdot) \equiv [0, \infty)^n$. В этом случае модель относится к типу с неограниченными торговыми ограничениями. В данном случае опорная функция выпуклого конуса $D_t(\cdot)$ равна

$$\sigma_{D_t(\cdot)}(z) = \begin{cases} 0 & z \in (-\infty, 0]^n, \\ +\infty & z \notin (-\infty, 0]^n. \end{cases}$$

При таких торговых ограничениях барьерный конус $\text{bar}(D_t(\cdot)) \equiv (-\infty, 0]^n$ совпадает с полярным конусом $D_t^\circ(\cdot) = \{y : \sigma_{D_t(\cdot)}(y) \leq 0\}$, поэтому грубое условие отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью RNDSAUP в данном случае совпадает с грубым условием отсутствия гарантированного арбитража⁷⁹ ??.

Для модели динамики рынка, когда C^* — прямоугольник, это равносильно неравенствам⁸⁰ $\alpha_i < 1$, $i = 1, \dots, n$. Явное выражение для порога структурной устойчивости приведено в формуле (10.1.28). Для модели динамики рынка, когда C^* — эллипс, с параметрами, удовлетворяющими условиям (10.5.7), то поскольку матрица $\Lambda(x_{t-1})$ невырождена, имеем $\text{int}(\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))) = \text{int}(K^*(x_{t-1})) = \text{int}(\Lambda(x_{t-1})C^* - x_{t-1}) = \Lambda(x_{t-1})\text{int}(C^*) - x_{t-1}$. Для проверки условия RNDSAUP, используем

⁷⁸Для обеспечения сопоставимости, с точки зрения вычислительной трудоемкости, можно потребовать равенство объемов, т. е. $\det(\Gamma^{-1}) = \prod_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i)$, что обеспечит примерно равное число точек решетки, попадающих в $\tilde{K}_t(\cdot)$ в двух вариантах выбора множества C^* . Можно соединить экономичную и вычислительную сторону дела, модифицируя формализацию «тренда» и «волатильности» рынка — полагая $\mu_i = \varkappa \frac{\beta_i + \alpha_i}{2}$ и $\sigma_i = \varkappa \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}$, где параметр пропорциональности $\varkappa > 0$ выбирается из условия равенства объемов.

⁷⁹В этом нетрудно убедиться, используя геометрический критерий условия NDSA, а именно $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^\circ(\cdot) \neq \emptyset$.

⁸⁰Если в дополнение к неравенствам $\alpha_i < 1$, $i = 1, \dots, n$ выполняются также неравенства $\beta_i > 1$, $i = 1, \dots, n$, то это равносильно грубому условию отсутствия арбитражных возможностей RNDAO.

геометрический критерий (2.4.3): $\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$; в данном случае $\text{bar}(D_t(\cdot)) \equiv (-\infty, 0]^n$ и это условие приобретает вид $(m^i - 1)x_{t-1}^i \leq 0$, $i = 1, \dots, n$ для некоторого $m \in f(C^*)$. Таким образом, для данной модели условие RNDSAUP равносильно геометрическому условию

$$\text{int}(C^*) \cap (-\infty, 1]^n \neq \emptyset. \quad (10.5.12)$$

С учетом того, что $C^* \subseteq (0, +\infty)^n$ проверка условия (10.5.12) сводится к задаче квадратичного программирования — к проверке неравенства

$$\inf_{x \in (0,1]^n} \langle \Gamma^{-1}(x - \mu), x - \mu \rangle = \min_{x \in [0,1]^n} \langle \Gamma^{-1}(x - \mu), x - \mu \rangle < 1. \quad (10.5.13)$$

Для нахождения порога структурной устойчивости в этом случае требуется (численно) решать задачу условной оптимизации (10.1.32).

2) *Динамические торговые ограничения, модель относится к типу с ограниченными торговыми ограничениями.*

Торговые ограничения описаны в примере 1.1.4, где приведена модель, когда риск-менеджмент компании устанавливает лимиты на портфель хеджирующего подразделения, рассчитывая Value-at-Risk (VaR), исходя из предположений модели Башелье — в этом случае VaR портфеля с заданным уровнем значимости и горизонтом в один шаг пропорционален среднеквадратичному отклонению стоимости портфеля. Для удобства воспроизведем описание этой модели.

Предположим, что оценка Σ_t ковариационной матрицы для приращений ΔX_t рекуррентно рассчитывается с использованием экспоненциально взвешенных скользящих средних, причем начальные значения для эмпирического среднего ν_0 и эмпирической ковариационной матрицы Σ_0 заданы⁸¹. Считая, что к текущему моменту времени t известны значения цен из предыстории $\bar{X}_t = \bar{x}_t$, можно записать рекуррентные формулы⁸²:

$$\nu_t = \varkappa \Delta x_{t-1} + (1 - \varkappa) \nu_{t-1}, \quad (10.5.14)$$

$$\Sigma_t = \varkappa (\Delta x_{t-1} - \nu_t) (\Delta x_{t-1} - \nu_t)^T + (1 - \varkappa) \Sigma_{t-1}, \quad (10.5.15)$$

где $\varkappa \in (0, 1)$ — параметр экспоненциального взвешивания. Оценка ковариационной матрицы $\Sigma_t = \Sigma_t(x_1, \dots, x_{t-1}) = \Sigma_t(\cdot)$, тем самым, зависит от предыстории цен⁸³. Торговое ограничение имеет вид:

$$D_t(\cdot) = \{h \in \mathbb{R}^n : \gamma \sqrt{\langle \Sigma_t(\cdot) h, h \rangle} \leq \eta\}, \quad (10.5.16)$$

⁸¹ Например, начальные значения параметров могут быть определены по предшествующим рассматриваемому периоду историческим данным по ценам активов.

⁸² В формулах (10.5.14) и (10.5.15) мы интерпретируем Δx_t и ν_t в матричной форме, как векторы-столбцы; знак T используется как символ транспонирования матрицы.

⁸³ Можно сказать, что совместная динамика $K_t(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$ обладает «марковским свойством относительно состояния (x_t, ν_t, Σ_t) расширенного фазового пространства».

где η — устанавливаемый риск-менеджментом лимит, γ -квантиль стандартного нормального распределения, соответствующая заданному уровню значимости⁸⁴ VaR. Таким образом, для таких торговых ограничений случае множества $D_t(\cdot)$ представляют из себя эллипсоиды, зависящие от предыстории цен в силу определения Σ_t посредством соотношений (10.5.14) и (10.5.15). В силу компактности торговых ограничений $\text{bar}(D_t(\cdot)) \equiv \mathbb{R}^n$ и условие RNDSAUP выполняется автоматически.

Однако, по крайней мере теоретически, соответствующий эллипсоид может вырождаться. В этой связи, имеет смысл ввести (малый) параметр регуляризации⁸⁵ $\alpha > 0$ и в качестве оценки ковариационной матрицы взять $\tilde{\Sigma}_t = \Sigma_t + \alpha I$, где I — единичная матрица. Тогда опорная функция $D_t(\cdot)$ равна

$$\sigma_{D_t(\cdot)}(z) = \eta \gamma^{-1} \sqrt{\langle \tilde{\Sigma}_t^{-1}(\cdot) z, z \rangle}.$$

Наконец, мы выберем два варианта опциона европейского типа.

- 1) Опцион, называемый “Put on Max”, функция выплат по которому

$$\max(\chi - \max(x_N^1, \dots, x_N^n), 0), \quad \chi > 0. \quad (10.5.17)$$

не является выпуклой.

- 2) Опцион, называемый “Call on Max”, функция выплат по которому

$$\max(\max(x_N^1, \dots, x_N^n) - \chi, 0), \quad \chi > 0. \quad (10.5.18)$$

является выпуклой.

Обе функции выплат, (10.5.17) и (10.5.18), удовлетворяют условию Липшица с константой, равной единице.

Будем численно исследовать случай двух рисковых активов, т. е. когда $n = 2$, что удобно для графической иллюстрации результатов.

При этом, для выбора модели динамики рынка посредством постоянного множества значений мультипликаторов в варианте эллипсоида, выберем для матрицы Γ удобную параметризацию⁸⁶:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \sigma_1^2, \quad \Gamma_{22} = \sigma_2^2, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \rho \sigma_1 \sigma_2, \\ \sigma_1 &> 0, \quad \sigma_2 > 0, \quad \rho \in (-1, 1). \end{aligned}$$

⁸⁴Здесь VaR — показатель потенциальных потерь портфеля (Value-at-Risk).

⁸⁵Выбор параметра легализации может быть сделана, например, по принципу Тихонова (невязка должна быть порядка ошибки статистической оценки) или же методом кросс-валидации.

⁸⁶Тем самым, матрицу Γ можно интерпретировать как ковариационную матрицу некоторого двумерного случайного вектора, где $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ — среднеквадратические отклонения соответствующих компонент вектора, а $\rho \in (-1, 1)$ — коэффициент корреляции.

При такой параметризации обратная матрица Γ^{-1} имеет вид:

$$\Gamma_{11} = (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_1^{-2}, \quad \Gamma_{22} = (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_2^{-2}, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = -\rho(1 - \rho^2)^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}.$$

В терминах этой параметризации: условие (10.5.7) принимает вид

$$\mu_1 > \sigma_1, \quad \mu_2 > \sigma_2,$$

а правая часть неравенства (10.5.8) принимает вид

$$[(\mu_1 - 1)^2 + (\mu_1 - 1)^2]^{1/2} + \left\{ \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \left[\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - (1 - \rho^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}.$$

В случае выбора торговых ограничений в форме запрета коротких позиций, условие безарбитражности RNSAUP (в данном случае совпадающее с ??) условия для выполнения (10.5.13) можно выписать в явном виде, как ограничения на параметры эллипсоида. Обозначим⁸⁷

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \langle \Gamma^{-1} e_1, e_1 \rangle^{-1} \langle \Gamma^{-1} (e - \mu), e_1 \rangle = (1 - \mu_1) - (1 - \mu_2) \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \\ \eta_2 &= \langle \Gamma^{-1} e_2, e_2 \rangle^{-1} \langle \Gamma^{-1} (e - \mu), e_2 \rangle = -(1 - \mu_1) \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + (1 - \mu_2); \end{aligned} \quad (10.5.19)$$

тогда RNSAUP равносильно условиям следующего вида:

- 1) Либо имеет место неравенство⁸⁸ $\mu_1 \vee \mu_2 \leq 1$;
- 2) Либо имеет место неравенство $\mu_1 \vee \mu_2 > 1$ и дополнительно, в зависимости от значений η_1 и η_2 , выполняются условия
 - а) Если $\eta_1 \leq 0$ и $\eta_2 \leq 0$, то⁸⁹

$$\begin{aligned} &\langle \Gamma^{-1} (e - \mu), e - \mu \rangle = \\ &= \frac{(1 - \mu_1)^2 \sigma_2^2 + 2(1 - \mu_1)(1 - \mu_2) \rho \sigma_1 \sigma_2 + (1 - \mu_2)^2 \sigma_1^2}{(1 - \rho^2) \sigma_1^2 \sigma_2^2} < 1; \end{aligned} \quad (10.5.20)$$

- б) Если $\eta_1 \leq 0$ и $0 < \eta_2 \leq 1$, то⁹⁰

$$\langle \Gamma^{-1} (e - \mu), e - \mu \rangle - (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_2^{-2} \eta_2^2 < 1, \quad (10.5.21)$$

где $\langle \Gamma^{-1} (e - \mu), e - \mu \rangle$ выражено через параметры эллипса в формуле (10.5.20), а η_2 фигурирует в формуле (10.5.19);

⁸⁷Функция $x \rightarrow \langle \Gamma^{-1} (x - \mu), x - \mu \rangle$, суженная на прямую $\{x = e - \eta e_1 : \eta \in \mathbb{R}\}$, имеет минимум в точке $-\eta_1 e_1$, а суженная на прямую $\{x = e - \eta e_2 : \eta \in \mathbb{R}\}$ имеет минимум в точке $e - \eta_2 e_2$.

⁸⁸В этом случае $\mu \in (-\infty, 1]^2$.

⁸⁹В этом случае в (10.5.13) достигается минимум в точке $x = e$ и e — внутренняя точка эллипса C^* .

⁹⁰В этом случае в (10.5.13) достигается минимум в точке $x = e - \eta_2 e_2 = e_1 + (1 - \eta_2) e_2$ и эта точка — внутренняя точка эллипса C^* .

- в) Если $\eta_1 \leq 0$ и $\eta_2 > 1$, то⁹¹ этот случай может быть получен из предыдущего, полагая в формуле (10.5.21) $\eta_2 = 1$:

$$\langle \Gamma^{-1}(e_1 - \mu), e_1 - \mu \rangle = \langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle - (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_2^{-2} < 1;$$

- г) Если $0 < \eta_1 \leq 1$ и $\eta_2 \leq 0$, то⁹²

$$\langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle - (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_1^{-2} \eta_1^2 < 1; \quad (10.5.22)$$

- д) Если $\eta_1 > 1$ и $\eta_2 \leq 0$, то⁹³ этот случай может быть получен из предыдущего, полагая в формуле (10.5.22) $\eta_1 = 1$:

$$\langle \Gamma^{-1}(e_2 - \mu), e_2 - \mu \rangle = \langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle - (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_1^{-2} < 1;$$

- е) Если $\eta_1 > 0$ и $\eta_2 > 0$, то из (10.5.19) следует $\rho < 0$, а также альтернатива:

f1) Либо $\mu_1 > 1$ и $\mu_2 < 1$ и тогда⁹⁴ должно выполняться (10.5.21);

f2) Либо $\mu_2 > 1$ и $\mu_1 < 1$ и тогда⁹⁵ должно выполняться (10.5.22).

Представляет интерес рассмотреть несколько случаев выбора параметра ρ : в первом случае положительным, во втором — отрицательным, а в третьем — нулевым, что по смыслу отражает соответствующую корреляцию рисков активов.

Программная реализация и результаты численного эксперимента

Реализация численного эксперимента проводилась на языке Python 3.7 с использованием библиотеки `numpy` 1.15.4 для векторизации операций, для построения выпуклой оболочки множества использовался воспроизведенный в библиотеке `scipy` 1.1.0 алгоритм `qhull`.

Для сокращения числа вычислений функции цены при решении уравнения Беллмана—Айзекаса, предварительно рассчитывались точки сетки L_θ , в которых потребуется вычислять функцию, на основе формулы (10.5.9). При осуществлении операций над множествами точек сетки существенное ускорение было достигнуто при предварительном проецировании целочисленных координат точек на множество целых чисел с помощью биективного отображения, после

⁹¹В этом случае проверяется выполнение (10.5.13) в точке $x = e - e_2 = e_1$, т. е. требуется, чтобы эта точка была внутренней точкой эллипса C^* .

⁹²В этом случае в (10.5.13) достигается минимум в точке $x = e - \eta_1 e_1 = e_1 + (1 - \eta_1) e_1$ и эта точка — внутренняя точка эллипса C^* .

⁹³В этом случае проверяется выполнение (10.5.13) в точке $x = e - e_1 = e_2$, т. е. требуется, чтобы эта точка была внутренней точкой эллипса C^* .

⁹⁴В этом случае в (10.5.13) достигается минимум в точке $x = e - \eta_2 e_2 = e_1 + (1 - \eta_2) e_2$, причем $\eta_2 < (1 - \rho^2)(1 - \mu_2) < 1$ и эта точка — внутренняя точка эллипса C^* .

⁹⁵В этом случае в (10.5.13) достигается минимум в точке $x = e - \eta_1 e_1 = (1 - \eta_1) e_1 + e_2$, причем $\eta_1 < (1 - \rho^2)(1 - \mu_1) < 1$ и эта точка — внутренняя точка эллипса C^* .

чего операции по объединению и пересечению проводились уже с одномерными целочисленными множествами.

На рис. 10.1 приведено значение стоимости опционов “Put on Max” и “Call on Max” для разных горизонтов N в зависимости от начальных цен активов (для $N = 0$ график является функцией выплат и приведен для сравнения.) Как видно из графиков, с увеличением временного горизонта целевая функция (величина резервов) для опционов увеличивается, что соответствует экономическому смыслу — поскольку увеличивается неопределенность поведения «рынка», требуется увеличение резервов для гарантированного покрытия обязательств по опциону.

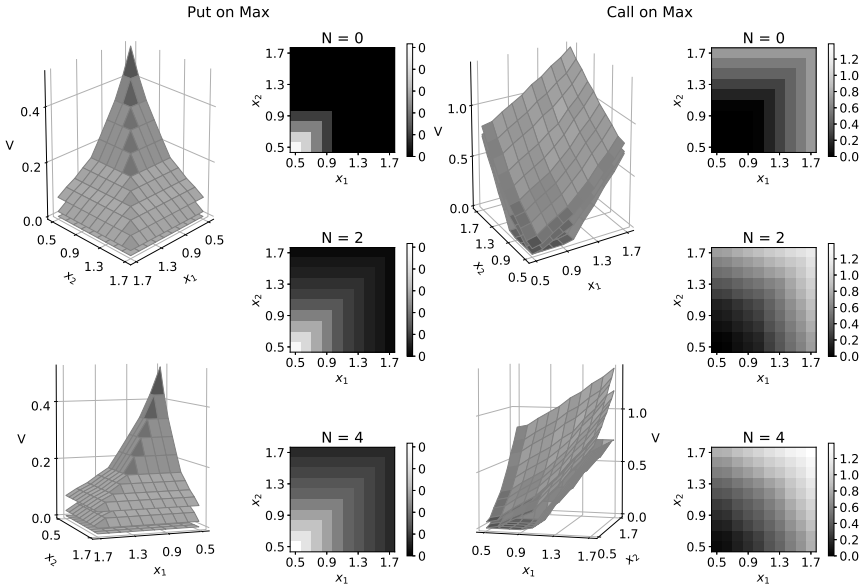


Рис. 10.1: Стоимость опциона “Put on Max” (слева) и “Call on Max” (справа) при прямоугольном множестве мультипликаторов цен, для горизонтов $N = 0, 2$ и 4 в зависимости от начальных цен активов. Для каждого опциона приведены графики в двух изометрических проекциях и соответствующие карты высот.

На рис. 10.2 и 10.3 приведены карты высот для стоимости опциона “Put on Max” и “Call on Max” соответственно для разных вариантов множества мультипликаторов цен C^* . Интересно сравнить стоимость опционов при прямоугольном C^* со стоимостью при эллипсоидальном C^* в зависимости от корреляции цен. Из графиков видно, что для “Put on Max” стоимости наиболее близки при положительной корреляции, в то же время для “Call on Max” графики больше

всего схожи при отрицательной корреляции. Этому факту можно дать следующее объяснение. Параллелепипед C^* содержит наиболее неблагоприятные сценарии рынка, при которых цены активов могут принимать минимально и максимально возможное значение независимо друг от друга. Для продавца опциона “Put on Max” наиболее неблагоприятным сценарием, согласно (10.5.17), является одновременное падение цен, что более вероятно при положительной корреляции. Для продавца “Call on Max” наиболее неблагоприятными сценариями, согласно (10.5.18), являются те, при которых растет цена хотя бы одного из активов. Это событие более вероятно при отрицательной корреляции, когда падение одной из цен способствует росту другой.

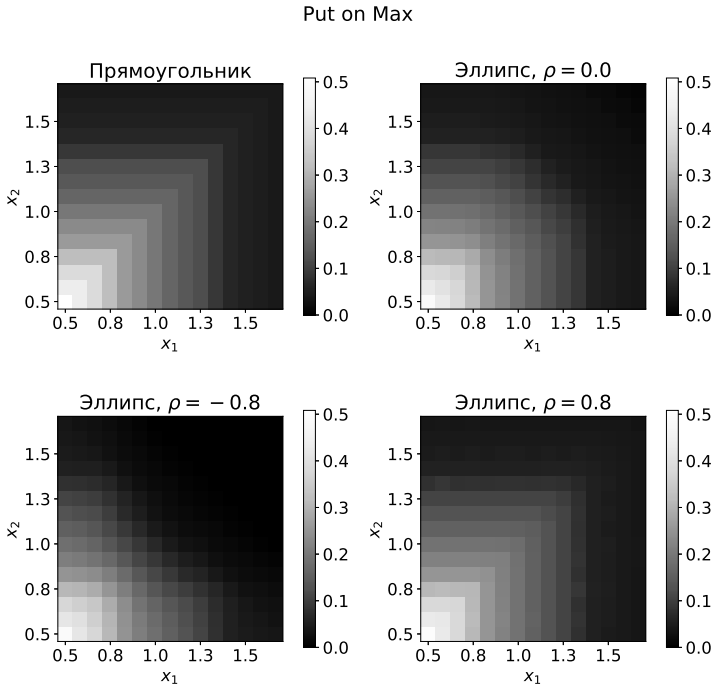


Рис. 10.2: Стоимость опциона “Put on Max” для прямоугольного и эллипсоидального множества мультипликаторов цен C^* . Для эллипсоидального множества приведены случаи нулевой, положительной и отрицательной корреляции цен.

Call on Max

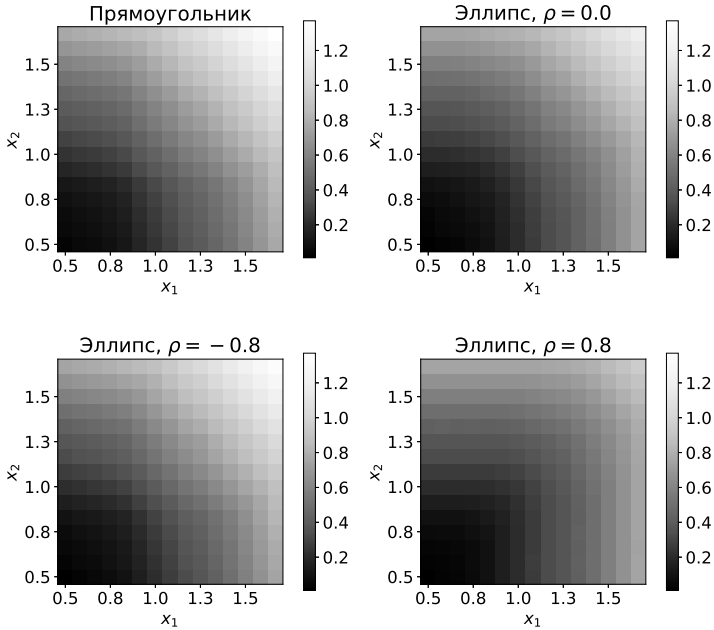


Рис. 10.3: Стоимость опциона “Call on Max” для прямоугольного и эллипсоидального множества мультипликаторов цен C^* . Для эллипсоидального множества приведены случаи нулевой, положительной и отрицательной корреляции цен.

Комплекс программ

Совместно с Н. Андреевым, В. Сливинским и В. Кузнецовым разработан программный комплекс robust financial portfolio management framework (robust-fpm framework). Комплекс представляет собой набор библиотек (package) для языка Python, которые позволяют численно решать задачу суперхеджирования — ценообразования портфеля опционов в рамках гарантированного детерминистского подхода для достаточно широкого класса производных инструментов. В перспективе комплекс будет расширен с целью решения задачи инвестирования в рамках гарантированного детерминистского подхода.

В рамках комплекса доступна работа с ограниченными и неограниченными множествами в \mathbb{R}^n , задаваемыми опорными функциями; поддерживается умно-

жение множества на число, сложение по Минковскому и умножение множеств. Кроме того, поддерживается дискретизация множества на заданную решетку (не обязательно равномерную), что позволяет дополнительно оптимизировать численную задачу за счет изменения шага решетки в зависимости от доступных ресурсов и требуемой точности. В рамках библиотек программного комплекса разработан и реализован (в виде абстрактных классов) интерфейс для работы с многозначными отображениями, динамикой цен и торговыми ограничениями. Представление динамики цен и торговых ограничений в виде многозначных отображений, возвращающих множество, позволяет сочетать эффективные дискретные численные методы с аналитическими. Это до определенной степени помогает избежать потери точности и ошибок округления, а также упрощает работу пользователя с комплексом.

В текущей версии комплекса реализованы прямоугольные, эллиптические, симплектические множества в \mathbb{R}^n , неограниченные множества \mathbb{R}^n и \mathbb{R}_+^n , постоянная аддитивная и мультипликативно-независимая динамика цен, торговые ограничения для запрета коротких позиций и симплектических ограничений (сочетающих запрет коротких позиций с ограничением на совокупные вложения в рисковые активы, а также случай отсутствия торговых ограничений). Задача ценообразования решается при помощи эффективного численного алгоритма, при этом дополнительно численно рассчитываются верхние оценки точности для полученного решения (функции цены). Центральным элементом комплекса является класс `Problem`, инкапсулирующий задачу ценообразования. Подобная структура позволяет без дополнительных усилий изменять отдельные параметры задачи (срок оптимизации, торговые ограничения и т. п.) и оценивать их влияние на функцию цены и ее эволюцию.

Применение принципов объектно-ориентированного программирования позволяет использовать программный комплекс для решения сторонних задач: исходный код находится в свободном доступе, реализованные классы и методы легко модифицируются. Для адаптации комплекса требуются минимальные знания программирования и языка Python, что облегчает использование и потенциальное внедрение комплекса в различных условиях. Дополнительно, исходный код дополнен подробной программной документацией на английском языке.

Ведется работа по распараллеливанию особо трудоемких подзадач, в основном использующих алгоритмы вычислительной геометрии.

В настоящее время комплекс применяется в учебных и научных целях, в том числе студентами и выпускниками кафедр системного анализа факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. В частности, программный комплекс внедрен для прохождения компьютерного практикума по курсу «Элементы финансовой математики» для студентов магистратуры.

Глава 11. Бинарные опционы

В настоящей главе рассматривается задача ценообразования при суперхеджировании бинарного опциона (европейского типа) для мультипликативной одномерной модели рынка, в предположении отсутствия торговых ограничений. Получен ряд свойств решений (BI), в частности, непрерывность всюду, кроме одной точки. Кроме того, предложен алгоритм получения «полуявного» решения (BI), представимого в виде кусочно-рациональной функции.

Интерес к данной задаче вызван тем, что функция выплат является разрывной, и потому результаты, касающиеся случая непрерывных функций выплат, приведенные в главах 3 и 4 здесь неприменимы.

Основные результаты опубликованы в [16] (английская версия [238]).

11.1 Общие результаты для моделей специального вида

Везде ниже речь идет исключительно о дисконтированных ценах. При этом цена безрискового актива (после дисконтирования), см. главу 1, тождественно равна единице.

Напомним, что в соответствии с терминологией, предложенной в главе 1, для рискованных активов динамика цен (торговые ограничения) относится к марковскому типу, если $K_t(\cdot)$ (соответственно $D_t(\cdot)$) зависят только от значения цен в предыдущий момент времени, т. е. $K_t(\cdot)$ (соответственно $D_t(\cdot)$) представимы в виде

$$K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = K_t^*(x_{t-1}), \quad (11.1.1)$$

соответственно

$$D_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = D_t^*(x_{t-1}) \quad (11.1.2)$$

для $t = 1, \dots, N$. В соответствии предложением 1.2.1, если динамика цен и торговые ограничения относятся к марковскому типу, а функции выплат зависят только от текущей цены, т. е. для $t = 1, \dots, N$ представимы в виде

$$g_t(x_0, \dots, x_t) = g_t^*(x_t), \quad (11.1.3)$$

то решения уравнений Беллмана—Айзекса также зависят только от текущей цены, т. е. для $t = 1, \dots, N$ представимы в виде

$$v_t^*(x_0, \dots, x_t) = v_t^*(x_t). \quad (11.1.4)$$

Сформулируем и докажем теперь несколько простых, но полезных утверждений.

Предложение 11.1.1. Пусть выполнены предположения (11.1.1) и (11.1.3), торговые ограничения отсутствуют¹, т. е. $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, и выполняется условие отсутствия арбитражных возможностей NDAO.

Тогда для европейского опциона решения уравнений Беллмана–Айзекса монотонно убывают по времени, т. е.

$$v_0^*(x) \geq v_1^*(x) \geq \dots \geq v_N^*(x). \quad (11.1.5)$$

Доказательство. В случае, когда торговые ограничения отсутствуют и выполняется условие отсутствия арбитражных возможностей NDAO, можно считать, что речь идет о частном случае американского опциона с функциями выплат²

$$g_t(x) \equiv 0, \quad t = 0, \dots, N-1, \quad g_N = g. \quad (11.1.6)$$

Используя предложение 1.2.1 и теорему 5.3.1, получаем, что для $t = 1, \dots, N$ имеет место представление (11.1.4) и справедливо равенство

$$v_{t-1}^*(x) = \sup \left\{ \int v_t^*(x+y)Q(dy), Q \in \mathcal{M}_t(x) \right\}, \quad (11.1.7)$$

где $\mathcal{M}_t(x)$ — множество вероятностных мер на $K_t^*(x)$ с конечным носителем (при этом достаточно ограничиться мерами с количеством точек носителя, не превосходящим $n+1$), удовлетворяющих условию «мартингалности»: $\int y Q(dy) = 0$. В частности, $\delta_0 \in \mathcal{M}_t(x)$, где δ_0 — вероятностная мера, сосредоточенная в точке 0, поэтому

$$v_{t-1}^*(x) \geq v_t^*(x).$$

□

Далее будем рассматривать одномерную модель рынка, когда в мультипликативном представлении динамика дисконтированной цены рискованного актива описывается соотношениями³

$$X_t = M_t X_{t-1}, \quad t = 1, \dots, N, \quad (11.1.8)$$

где мультипликатор

$$M_t \in [\alpha, \beta], \quad 0 < \alpha < \beta, \quad (11.1.9)$$

¹В этом случае условие (11.1.2), очевидно, выполняется.

²Напомним, что для этого достаточно выполнение более слабого условия — отсутствия гарантированного арбитража NDSA.

³В соответствии с терминологией, предложенной в главе, в данном случае динамика цен относится к мультипликативно-независимому типу.

а торговые ограничения отсутствуют, т. е. выполняется (1.1.8). Везде далее будем предполагать, что выполняется условие отсутствия арбитражных возможностей⁴ NDAO; в данном случае это условие равносильно неравенствам⁵

$$\alpha < 1 < \beta. \quad (11.1.10)$$

Предложение 11.1.2. Пусть модель динамики цен описывается соотношениями (11.1.8), (11.1.9), (11.1.10) и (1.1.8). Фиксируем $t \in \{1, \dots, N\}$; Тогда для европейского опциона имеют место следующие утверждения.

- 1) Если функция v_t^* удовлетворяет условию Липшица на некотором интервале $[a, b]$, то функция v_{t-1}^* также удовлетворяет условию Липшица на (более узком) интервале $\left[\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right]$, причем на этом интервале константа Липшица для v_{t-1}^* не превосходит константы Липшица для v_t^* на интервале $[a, b]$.
- 2) Если имеет место оценка сверху $v_t^*(x) \leq cx + d$ при $x \in [a, b]$, то $v_{t-1}^*(x) \leq cx + d$ при $x \in \left[\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right]$;
- 3) Если функции выплат g_s^* , $s = 1, \dots, N$ полунепрерывны сверху, то строгое неравенство $v_t^*(x) < cx + d$ при $x \in [a, b]$ влечет строгое неравенство $v_{t-1}^*(x) < cx + d$ при $x \in \left[\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right]$.
- 4) Если $x_1 > 0$, $x_1 < x_2$ и $\frac{x_2}{x_1} \leq \frac{\beta}{\alpha}$, то для $x \in \left[\frac{x_2}{\beta}, \frac{x_1}{\alpha}\right]$ имеет место неравенство $v_{t-1}^*(x) \geq cx + d$, где

$$c = \frac{v_t^*(x_2) - v_t^*(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad d = v_t^*(x_1). \quad (11.1.11)$$

Доказательство.

- 1) Воспользуемся мультипликативным аналогом формулы (11.1.7) для европейского опциона:

$$v_{t-1}^*(x) = \sup \left\{ \int v_t^*(mx) Q(dm), Q \in \mathcal{N} \right\}, \quad (11.1.12)$$

где \mathcal{N} — множество вероятностных мер на $[\alpha, \beta]$ с конечным носителем (при этом достаточно ограничиться мерами с количеством точек носителя, не превосходящим $n + 1$), удовлетворяющих «мультипликативному условию мартингалности»: $\int m Q(dm) = 1$.

⁴Модель такого вида (с предположением отсутствия арбитражных возможностей NDAO) была впервые предложена В. М. Колокольцовым в [185].

⁵Напомним, что в соответствии с замечанием 2.4.1 для одномерной модели условия NDAO и RNDAO совпадают.

Обозначим константу Липшица для v_t^* на интервале $[a, b]$ через L . Поскольку для $x \in \left[\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right]$ имеет место включение $[\alpha x, \beta x] \subseteq [a, b]$, то для точек x_1 и x_2 , таких что $\frac{a}{\alpha} \leq x_1 \leq x_2 \leq \frac{b}{\beta}$ имеем неравенства:

$$\begin{aligned} |v_{t-1}^*(x_2) - v_{t-1}^*(x_1)| &\leq \sup \left\{ \int |v_t^*(mx_2) - v_t^*(mx_1)| Q(dm), Q \in \mathcal{N} \right\} \\ &\leq L |x_2 - x_1| \int m Q(dm) = L |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

- 2) Учитывая включение $[\alpha x, \beta x] \subseteq [a, b]$ при $x \in \left[\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right]$, имеем для любого $Q \in \mathcal{N}$

$$\int v_t^*(mx) Q(dm) \leq cx \int m Q(dm) + d = cx + d,$$

откуда в соответствии с (11.1.12) получаем $v_{t-1}^*(x) \leq cx + d$.

- 3) Поскольку при сделанных предположениях точная верхняя грань в (11.1.12) достигается по предложению 7.2.1 для некоторой меры $Q_{t,x} \in \mathcal{N}$, то

$$\int v_t^*(mx) Q_{t,x}(dm) < cx \int m Q_{t,x}(dm) + d = cx + d.$$

- 4) Для $x \in \left[\frac{x_2}{\beta}, \frac{x_1}{\alpha}\right]$, полагая $m_1 = \frac{x_1}{x}$ и $m_2 = \frac{x_2}{x}$, имеем $\alpha \leq m_1 < m_2 \leq \beta$. Выбирая (зависящую от t, x, x_1 и x_2) меру $Q \in \mathcal{N}$, сосредоточенную в точках⁶ m_1 и m_2 , учитывая, что благодаря выбору (11.1.11) констант c и d функции $m \mapsto v_t^*(mx)$ и $m \mapsto cmx + d$ совпадают в точках носителя меры $Q \in \mathcal{N}$, получаем

$$\int v_t^*(mx) Q(dm) = cx \int m Q(dm) + d = cx + d,$$

откуда, с использованием (11.1.12), получаем требуемое неравенство. □

Предложение 11.1.3. Пусть Выполняются условия предложения 11.1.2. Тогда, если функции выплат g_t^* , $t = 1, \dots, N$ являются монотонно неубывающими (соответственно монотонно невозрастающими), то решения уравнений Беллмана–Айзека v_t^* , $t = 1, \dots, N$ также являются монотонно неубывающими (соответственно монотонно невозрастающими).

Доказательство. Непосредственно вытекает из уравнений Беллмана (11.1.12). □

Замечание 11.1.1. Модель динамики цен описываемая соотношениями (11.1.8), (11.1.9), (11.1.10) и (1.1.8) представляет собой частный случай (многомерной) модели, с динамикой цен 8.4.2 и торговыми ограничениями 8.4.6.

⁶Вероятности этих точек однозначно определяются из условий нормировки и «мартингалности».

Поэтому при более слабом предположении безарбитражности NDSA (что равносильно для рассматриваемой модели условию $1 \in [\alpha, \beta]$), но при дополнительном условии полунепрерывности сверху функций выплат, применим пункт 3) предложения 8.4.1 (о монотонности), причем выполнены предположения предложения 1.2.1. Тем самым, при таких предположениях, если функции выплат g_t^* , $t = 1, \dots, N$ являются монотонно неубывающими (соответственно монотонно невозрастающими), то решения уравнений Беллмана v_t^* , $t = 1, \dots, N$ также являются монотонно неубывающими (соответственно монотонно невозрастающими).

11.2 Бинарный опцион европейского типа

Общий случай носителя распределения неопределенного мультипликатора

В рамках модели динамики цен, описываемой соотношениями (11.1.8), (11.1.9) и (11.1.10), нас будет интересовать задача суперхеджирования в рамках гарантированного детерминистского подхода для бинарного опциона европейского типа. Не ограничивая общности, можно считать, что цена исполнения равна единице; для определенности⁷ рассмотрим бинарный опцион “call”, функция выплат которого g в терминальный момент равна

$$g(x) = \mathbb{I}_{[1, +\infty)}(x), \quad (11.2.1)$$

где \mathbb{I}_A — индикатор множества A .

Отметим, что в нашей модели применимо предложение 11.1.1, так что решения уравнений Беллмана—Айзекса монотонно убывают по времени.

В силу выполнения условия отсутствия арбитражных возможностей NDAO, как отмечалось выше, задача суперхеджирования европейского опциона сводится к задаче суперхеджирования американского опциона, с функциями выплат, описываемыми соотношениями (11.1.6), т. е. с нулевыми функциями выплат, кроме терминальной (11.2.1). Тем самым, применимо предложение 1.2.1 и для решения соответствующих уравнений Беллмана имеет место представление вида (11.1.4). Везде далее будем рассматривать нашу задачу как суперхеджирование американского опциона с нулевыми функциями выплат кроме терминальной.

Поскольку терминальная функция выплат является монотонно неубывающей, то применимо предложение 8.1.2. Таким образом, решения соответствующих уравнений Беллмана также являются монотонно неубывающими, или, что равносильно в силу обозначения (11.2.5), монотонно неубывающими являются функции v_s^* , $s = 0, \dots, N$. Поэтому эти функции могут иметь разрывы только первого рода (скачки).

⁷Случай бинарного опциона “put” может быть исследован аналогичными методами.

Поскольку функция выплат g полунепрерывна сверху, а многозначные отображения $K_t(\cdot)$ и $D_t(\cdot)$ непрерывны, то решения уравнений Беллмана—Айзека v_s^* , $s = 0, \dots, N$ также полунепрерывны сверху по теореме 3.1.4. Напомним, что для монотонно неубывающих функций полунепрерывность сверху равносильна их непрерывности справа.

В силу полунепрерывности сверху решения уравнений Беллмана—Айзека v_s^* , $s = 0, \dots, N$ имеется игровое равновесие (на каждом шаге), см. предложение 5.2.3. При этом, в соответствии с теоремой 7.3.2, для седловой точки наиболее неблагоприятные смешанные стратегии достигаются в классе распределений, сосредоточенных не более чем в двух точках. Для нахождения решения уравнений Беллмана (после отделения задачи ценообразования от задачи хеджирования), достаточно (см. параграфы 7.5 и 7.6) строить на каждом шаге $t = 1, \dots, N$ на отрезке $[\alpha x, \beta x]$ (полунепрерывные сверху) вогнутые оболочки⁸ \tilde{v}_t^* функций Беллмана v_t^* , полагая $v_{t-1}^*(x) = \tilde{v}_t^*(x)$.

Кроме того, применим пункт 2) теоремы 8.2.1, в соответствии с которой существует измеримые по Борелю переходные ядра, задающие условные распределения приращений цен, отвечающим оптимальным смешанным стратегиям «рынка», сосредоточенных в рассматриваемом случае не более в двух точках; мы будем использовать именно этот вариант зависимости оптимальных смешанных стратегий «рынка» от предыстории цен. Впрочем, для рассматриваемой модели упомянутые измеримые по Борелю переходные ядра строятся конструктивно.

Предположение Кокса—Росса—Рубинштейна о концах носителя неопределенного мультипликатора

Общий случай параметров α и β достаточно сложен для анализа в силу хаотического поведения (в том числе, взаимного расположения) произведений вида $\alpha^i \beta^j$, где i и j — целые неотрицательные числа, если только $\ln \alpha$ и $\ln \beta$ не являются рационально соизмеримыми. Мы выберем простейший случай рациональной соизмеримости $\ln \alpha$ и $\ln \beta$, предложенной в модели Кокса—Росса—Рубинштейна [125], а именно, положим

$$\beta = \alpha^{-1}; \quad (11.2.2)$$

в этом случае условие отсутствия арбитражных возможностей (11.1.10) автоматически выполняется для $\alpha < 1$. Отметим, что предположение (11.2.2) сильно упрощает анализ, поскольку если на шаге $s = 1, \dots, N$ точка x — значение цены в предыдущий момент времени — лежит в интервале вида $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$, $k = 0, \dots, s+1$, то границы интервала $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ возможных значений неопределенной величины X_s , при условии что $X_{s-1} = x$, т. е. точки αx и $\alpha^{-1}x$, лежат в смежных интервалах, соответственно $[\alpha^{k+1}, \alpha^k]$ и $[\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}]$. Будем говорить, что точки α^k , $k = 0, \dots, s$ образуют *остов* на шаге $s = 1, \dots, N$.

⁸Называемые также вогнутыми огибающими.

Наиболее неблагоприятные смешанные стратегии рынка на шаге t при заданной цене x на предыдущем шаге, могут быть неединственными. Так, например, при $x \in [1, \infty)$ таковым будет любое распределение с носителем, содержащемся в $[1, \infty)$ и барицентром x , а при $x \in (0, \alpha^{t-1})$ — любое распределение с носителем, содержащемся в $(0, \alpha^{t-1})$ и барицентром x . В точках x , где имеется неединственность наиболее неблагоприятной смешанной стратегии рынка, для фиксации единственной «оптимальной» смешанной стратегии рынка договоримся выбирать распределение с барицентром x , имеющее минимальное количество точек носителя. Таких точек будет всегда не более двух и потому, с учетом «мартингалности», соответствующее распределение определено единственным образом.

Принимая эту конвенцию, в качестве наиболее неблагоприятной смешанной стратегии рынка на шаге $s = 1, \dots, N$, когда достигается максимум в (11.1.12), будет выбрано условное распределение Q_x^s цены X_s , при условии что $X_{s-1} = x$, сосредоточенное не более чем в двух точках. Носитель распределения Q_x^s будем называть *сценарием*. В случае, когда сценарий представляет собой одноточечное множество, $Q_x^s = \delta_x$, где δ_a обозначает вероятностную меру, сосредоточенную в точке a . В случае, когда сценарий представляет собой множество из двух точек, Q_x^s имеет вид

$$Q_x^s = p_s(x)\delta_{a_s(x)} + q_s(x)\delta_{b_s(x)}, \quad (11.2.3)$$

при этом договоримся, что $a_s(x) < b_s(x)$. При заданном сценарии вероятности $p_s(x)$ и $q_s(x)$ однозначно определяются из условия нормировки

$$p_s(x) + q_s(x) = 1$$

и условия мартингалности цен:

$$a_s(x)p_s(x) + b_s(x)q_s(x) = x,$$

откуда

$$p_s(x) = \frac{b_s(x) - x}{b_s(x) - a_s(x)}; \quad q_s(x) = \frac{x - a_s(x)}{b_s(x) - a_s(x)}. \quad (11.2.4)$$

Для удобства везде далее будем использовать обозначения

$$u_s(x) = v_{N-s}^*(x), \quad s = 0, \dots, N, \quad (11.2.5)$$

в частности $u_0 = g$, где g задается формулой (11.2.1). Рекуррентные соотношения для u_s , $s = 1, \dots, N$ имеют вид

$$u_s(x) = p_s(x)u_{s-1}(a_s(x)) + q_s(x)u_{s-1}(b_s(x)). \quad (11.2.6)$$

Везде ниже, с использованием обозначений (11.2.5), будем исследовать свойства решения u_s , $s = 1, \dots, N$ задачи суперхеджирования европейского бинарного опциона “call”, с функцией выплат в терминальный момент, задаваемой формулой (11.2.1), для рынка, описываемого при помощи соотношений (11.1.8), (11.1.9), (11.1.10) и (11.2.2).

Решения уравнений Беллмана для первых двух шагов

Для $x < \alpha$ функция u_1 тождественно равна нулю, поскольку интервал $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ содержится в $(0, 1)$, где функция $u_0 = g$ равна нулю. Для $x \geq 1$ функция u_1 тождественно равна единице, поскольку (полу)непрерывная сверху) вогнутая оболочка \tilde{u}_0 функции u_0 на $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ в точке x равна единице.

Заметим, что на первом шаге для $x \in [\alpha, 1]$ в качестве наиболее неблагоприятной смешанной стратегии рынка можно выбрать условное распределение Q_x^1 , сосредоточенное в двух точках αx и 1, имеющих вероятности $p_1(x)$ и $q_1(x)$ соответственно; формула (11.2.28) в данном случае приобретает вид

$$p_1(x) = \frac{1-x}{1-\alpha x}; \quad q_1(x) = \frac{(1-\alpha)x}{1-\alpha x},$$

а по формуле (11.2.29) значения функции u_1 на отрезке $[\alpha, 1]$ задаются выражением

$$u_1(x) = p_1(x)g(\alpha x) + q_1(x)g(1) = q_1(x).$$

Тем самым, на интервале $[\alpha, 1]$ реализуется сценарий вида $\{\alpha x, 1\}$, функция u_1 имеет вид гиперболы

$$u_1(x) = \frac{(1-\alpha)x}{1-\alpha x}, \quad (11.2.7)$$

является строго монотонно возрастающей и (строго) выпуклой. В точке α функция u_1 имеет единственный разрыв (скачок), непрерывна справа и

$$u_1(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha}. \quad (11.2.8)$$

На правом конце интервала $[\alpha, 1]$ по формуле (11.2.7) получаем

$$u_1(1-0) = 1, \quad (11.2.9)$$

так что функция u_1 в точке 1 непрерывна.

Заметим, что прямая, проходящая через точки гиперболы (11.2.7) на плоскости, отвечающие аргументам α и 1, т. е. через точки с координатами $(\alpha, u_1(\alpha))$ и $(\alpha^{-1}x, u_1(\alpha^{-1}x))$, задаваемая функцией

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= u_1(\alpha) + \frac{u_1(\alpha^{-1}x) - u_1(\alpha)}{\alpha^{-1}x - \alpha}(z - \alpha) = \\ &= \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{z - \alpha}{(1+\alpha)(1-x)} = \\ &= \frac{z - \alpha x}{(1+\alpha)(1+x)}, \end{aligned} \quad (11.2.10)$$

имеет корень αx , т. е.

$$\omega_1(\alpha x) = 0. \quad (11.2.11)$$

В частности, при $x = \alpha$ получаем, что прямая, проходящая через концы гиперболы (11.2.7), отвечающим аргументам α и 1, имеет корень α^2 . Для полноты

геометрической картины отметим также, что касательная в точке α к сужению функции u_1 на интервал $[\alpha, 1)$, задаваемая функцией

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= u_1(\alpha) + (z - \alpha)u_1'(\alpha + 0) \\ &= \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{z - \alpha}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^2},\end{aligned}$$

имеет корень α^3 .

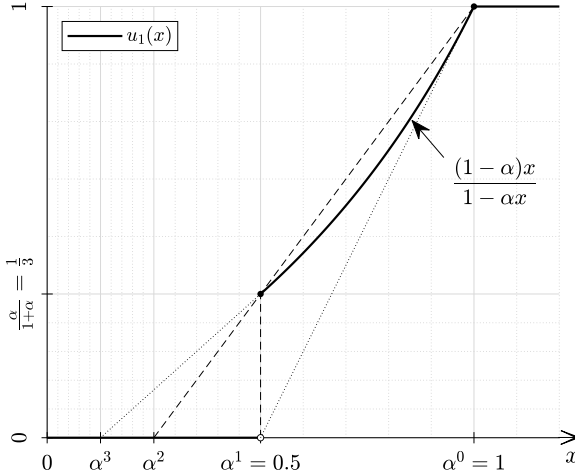


Рис. 11.1: $u_1(x)$ при $\alpha = 0.5$.

Из (11.2.10) и (11.2.11) следует, что для $x \in [\alpha^2, \alpha)$ отрезок прямой, задаваемой функцией (11.2.10), соединяющий точки с координатами $(\alpha x, 0)$ и $(\alpha^{-1}x, u_1(\alpha^{-1}x))$, представляет собой на отрезке $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ (полунепрерывную сверху) вогнутую оболочку \tilde{u}_1 функции u_1 , а значит

$$u_2(x) = \tilde{u}_1(x) = \frac{x - \alpha x}{(1 + \alpha)(1 - x)} \quad (11.2.12)$$

для $x \in [\alpha^2, \alpha)$. Отметим, что на правом конце гиперболы (11.2.12) выполняется равенство

$$u_2(\alpha - 0) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}. \quad (11.2.13)$$

Заметим теперь, что на втором шаге для $x \in [\alpha, 1)$ в качестве наиболее неблагоприятной смешанной стратегии рынка можно выбрать условное распре-

деление Q_x^2 , сосредоточенное в двух точках⁹ α и 1, имеющих вероятности $p_{2,1}(x)$ и $q_{2,1}(x)$ соответственно; формула (11.2.20) в данном случае приобретает вид

$$p_2(x) = \frac{1-x}{1-\alpha}; \quad q_2(x) = \frac{x-\alpha}{1-\alpha},$$

а по формуле (11.2.21) значения функции u_2 на отрезке $[\alpha, 1]$, с учетом (11.2.8), задаются аффинной функцией

$$u_2(x) = p_2(x)u_1(\alpha) + q_2(x)u_1(1) = \frac{x-\alpha^2}{1-\alpha^2}. \quad (11.2.14)$$

В частности,

$$u_2(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha},$$

так что, с учетом (11.2.13), функция u_2 непрерывна в точке α . Функция u_2 является не только непрерывной на $[\alpha^2, +\infty)$, но более того, в точке α имеет место гладкое сопряжение, т. е. в этой точке существует производная, равная $(1-\alpha^2)^{-1}$, так что функция u_2 дифференцируема на $[\alpha^2, 1)$.

Легко видеть, что для $x < \alpha^2$ функция u_2 тождественно равна нулю, а для $x \geq 1$ функция u_2 тождественно равна единице. Поскольку из (11.2.14) следует $u_2(1-0) = 1$, то функция u_2 непрерывна в точке 1, а значит функция u_2 непрерывна на $[\alpha^2, +\infty)$.

Решения уравнений Беллмана: рекуррентные свойства

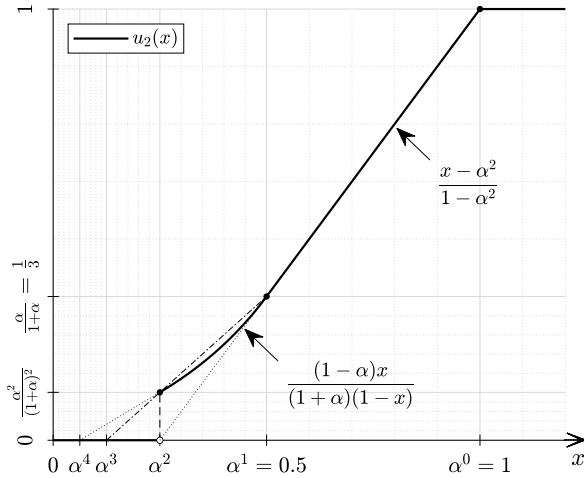
Фиксируем теперь $s \in \{1, \dots, N\}$.

Предложение 11.2.1. *Вне интервала $[\alpha^s, 1)$ функция u_s принимает следующие значения:*

$$\begin{aligned} u_s(x) &= 0 \text{ при } x < \alpha^s, \\ u_s(x) &= 1 \text{ при } x \geq 1. \end{aligned} \quad (11.2.15)$$

Доказательство. Соотношения (11.2.15) получаются по индукции, учитывая отмеченное в предыдущем разделе свойство, и то, что концы интервала $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ для $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 0, \dots, s+1$ лежат в смежных интервалах, т. е. $\alpha x \in [\alpha^{k+1}, \alpha^k)$ и $\alpha^{-1}x \in [\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2})$. Для $s = 1$ это свойство установлено в предыдущем разделе. Если (11.2.15) справедливы для $s = t$, то для $s = t+1$ при $x < \alpha^{t+1}$ функция u_t тождественно равна нулю, поскольку интервал $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ содержится в $(0, \alpha^t)$, где функция u_t равна нулю. Для $x \geq 1$ функция u_{t+1} тождественно равна единице, поскольку (полу)непрерывная сверху вогнутая оболочка \tilde{u}_t функции u_t на $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ в точке x равна единице. \square

⁹Отметим, что при $x = \alpha$ наиболее неблагоприятная смешанная стратегия рынка не будет единственной — это любое распределение с барцентром $x = \alpha$, сосредоточенное в не более чем в трех точках: α^2 , α и 1, т. е. распределение, представимое в виде смеси $p\delta_\alpha + (1-p)(\frac{1}{1+\alpha}\delta_{\alpha^2} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\delta_1)$, $p \in [0, 1]$.

Рис. 11.2: $u_2(x)$ при $\alpha = 0.5$.

Предложение 11.2.2. Функция u_s , $s = 1, \dots, N$ имеет разрыв (скачок) в точке α^s , в которой u_s непрерывна справа, а на интервале $[\alpha^s, \alpha^{s-1})$ функция u_s удовлетворяет свойству автомодельности:¹⁰

$$u_s(x) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{s-1} \cdot u_1(\alpha^{-(s-1)}x). \quad (11.2.16)$$

Доказательство. При $s = 1$ формула (11.2.16) является тождеством. Сделаем индуктивное предположение, что (11.2.16) имеет место для $s = t \geq 1$ и проверим, что оно выполняется для $s = t + 1$. Подставляя в (11.2.16) $s = t$ и выражение (11.2.7) для u_1 , имеем для $x \in [\alpha^t, \alpha^{t-1})$

$$u_t(x) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{t-1} \cdot u_1(\alpha^{t-1}x) = \frac{\alpha^{t-1}(\alpha^{t-1} - \alpha^t)x}{(1+\alpha)^{t-1}(1 - \alpha^t x)}. \quad (11.2.17)$$

Из геометрических соображений подобия ясно, что для $x \in [\alpha^{t+1}, \alpha^t)$ вогнутой оболочкой \tilde{u}_t функции u_t на интервале $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ является отрезок прямой, соединяющий точки с координатами $(\alpha x, 0)$ и $(\alpha^{-1}x, u_t(\alpha^{-1}x))$, задаваемой функцией

$$\omega_t(z) = \frac{u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha x)}{\alpha^{-1}x - \alpha x} (z - \alpha x), \quad (11.2.18)$$

¹⁰Благодаря свойствам функции u_1 , на интервале $[\alpha^s, \alpha^{s-1})$ функция u_s является строго монотонно возрастающей и строго выпуклой.

где $u_t(\alpha x) = 0$, а значит, для $x \in [\alpha^{t+1}, \alpha^t]$

$$u_{t+1}(x) = \tilde{u}_t(x) = \omega_t(x) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot u_t(\alpha^{-1}x), \quad (11.2.19)$$

откуда следует формула (11.2.16) для $s = t + 1$. С использованием предложения 11.2.1 имеем $u_s(\alpha^s - 0) = 0$, а полагая $x = \alpha^s$ в (11.2.19), получаем

$$u_s(\alpha^s) = \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^s > 0.$$

Тем самым, u_{s+1} имеет скачок в точке α^{s+1} (в которой u_{s+1} непрерывна справа). \square

Теорема 11.2.1.

- 1) Для $s = 1, \dots, N$ функция u_s является выпуклой на каждом из интервалов $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$.
- 2) Для $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$, достаточно рассматривать только четыре сценария, т. е. варианта расположения точек $a_s(x)$ и $b_s(x)$, введенных в разделе 2.2:

I) Сценарий $a_s(x) = \alpha^k$ и $b_s(x) = \alpha^{k-1}$;

II) Сценарий $a_s(x) = \alpha^k$ и $b_s(x) = \alpha^{-1}x$;

III) Сценарий $a_s(x) = \alpha x$ и $b_s(x) = \alpha^{k-1}$;

IV) Сценарий $a_s(x) = \alpha x$ и $b_s(x) = \alpha^{-1}x$.

При этом число возможных переключений сценариев на интервалах $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$ не превосходит двух.

- 3) Для $s = 1, \dots, N$ функция u_s является кусочно рациональной на интервале $(0, +\infty)$, точнее, рациональной на не более чем $m_s \leq 3s + 1$ смежных интервалах, которые мы будем называть интервалами рациональности¹¹, с границами $d_{s,i}$, $i = 0, \dots, m_s + 1$; все точки вида α^t , $t = 0, \dots, s$ являются границами интервалов рациональности для функции u_s . При этом разбиение на интервалы рациональности для функции u_{s+1} является измельчением разбиения на интервалы рациональности для функции u_s . Для заданных на интервалах рациональности рациональных функций, представленных в виде несократимой дроби полиномов, степень полиномов не выше s , причем эта степень на интервалах $(0, \alpha^s)$ и $[1, +\infty)$ равна нулю, где реализуется сценарий I) равна единице, а где реализуется сценарий IV) — не превосходит $s - 1$.

¹¹В частности, для $s = 1, \dots, N$ функция u_s является бесконечно дифференцируемой внутри интервалов рациональности.

4) Для $s = 1, \dots, N$ производная функции u_s положительна там, где определена¹². В частности, функция u_s является строго монотонной на интервале $[\alpha^s, 1)$.

Доказательство. Для удобства выпишем для сценариев I), II), III) и IV) конкретный вид формул, задаваемых в общем случае посредством (11.2.3), (11.2.4) и (11.2.6). Отметим, что для тех точек x , для которых выполняется один из сценариев I), II), III) и IV), точки носителя $a_s(x)$ и $b_s(x)$ распределения, задаваемого (11.2.3), а следовательно и вероятности $p_s(x)$ и $q_s(x)$ не зависят от s , поэтому для этих сценариев у точек носителя и вероятностей индекс s будет опускаться.

Для сценария I), когда $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$, а $a(x) = \alpha^k$ и $b(x) = \alpha^{k-1}$, вероятности $p(x)$ и $q(x)$ принимают вид аффинных функций

$$p(x) = \frac{\alpha^{k-1} - x}{\alpha^{k-1} - \alpha^k}; \quad q(x) = \frac{x - \alpha^k}{\alpha^{k-1} - \alpha^k}, \quad (11.2.20)$$

а значения функции u_s выражаются через значения функции u_{s-1} посредством формулы

$$u_s(x) = p(x)u_{s-1}(\alpha^k) + q(x)u_{s-1}(\alpha^{k-1}); \quad (11.2.21)$$

тем самым, в случае реализации сценария I) на интервале $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ функция u_s на этом интервале является аффинной; в случае выполнения данного сценария при $x \in (\alpha^k, \alpha^k + \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ имеют место соотношения «сопряжения»:

$$u_s(\alpha^k) = u_{s-1}(\alpha^k), \quad (11.2.22)$$

а в случае выполнения данного сценария при $x \in (\alpha^{k-1} - \varepsilon, \alpha^{k-1})$ для некоторого $\varepsilon > 0$ имеют место соотношения «сопряжения»:

$$u_s(\alpha^{k-1} - 0) = u_{s-1}(\alpha^{k-1} - 0). \quad (11.2.23)$$

Для сценария II), когда $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$, а $a(x) = \alpha^k$ и $b(x) = \alpha^{-1}x$, вероятности $p(x)$ и $q(x)$ принимает вид

$$p(x) = \frac{\alpha^{-1}x - x}{\alpha^{-1}x - \alpha^k}; \quad q(x) = \frac{x - \alpha^k}{\alpha^{-1}x - \alpha^k}, \quad (11.2.24)$$

а значения функции u_s выражаются через значения функции u_{s-1} посредством формулы

$$u_s(x) = p(x)u_{s-1}(\alpha^k) + q(x)u_{s-1}(\alpha^{-1}x); \quad (11.2.25)$$

в случае выполнения данного сценария при $x \in (\alpha^k, \alpha^k + \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ имеют место соотношения «сопряжения»:

$$u_s(\alpha^k) = u_{s-1}(\alpha^k), \quad (11.2.26)$$

¹²В точках, являющимися границами интервалов рациональности, может происходить скачок производной функции u_s , но не обязательно, как это видно на примере функции u_2 .

а в случае выполнения данного сценария при $x \in (\alpha^{k-1} - \varepsilon, \alpha^{k-1})$ для некоторого $\varepsilon > 0$ имеют место соотношения «сопряжения»:

$$u_s(\alpha^{k-1} - 0) = \frac{1}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^k - 0) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^{k-2} - 0). \quad (11.2.27)$$

Для сценария III), когда $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$, а $a(x) = \alpha x$ и $b(x) = \alpha^{k-1}$, вероятности $p(x)$ и $q(x)$ принимают вид

$$p(x) = \frac{\alpha^{k-1} - x}{\alpha^{k-1} - \alpha x}; \quad q(x) = \frac{x - \alpha x}{\alpha^{k-1} - \alpha x}, \quad (11.2.28)$$

а значения функции u_s выражаются через значения функции u_{s-1} посредством формулы

$$u_s(x) = p(x)u_{s-1}(\alpha x) + q(x)u_{s-1}(\alpha^{k-1}); \quad (11.2.29)$$

в случае выполнения данного сценария при $x \in (\alpha^k, \alpha^k + \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ имеют место соотношения «сопряжения»:

$$u_s(\alpha^k) = \frac{1}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^{k+1}) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^{k-1}), \quad (11.2.30)$$

а в случае выполнения данного сценария при $x \in (\alpha^{k-1} - \varepsilon, \alpha^{k-1})$ для некоторого $\varepsilon > 0$ имеют место соотношения «сопряжения»:

$$u_s(\alpha^{k-1} - 0) = u_{s-1}(\alpha^{k-1} - 0). \quad (11.2.31)$$

Для сценария IV), когда $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$, а $a_k(x) = \alpha x$ и $b_k(x) = \alpha^{-1}x$, вероятности $p(x)$ и $q(x)$ принимают вид

$$p(x) = \frac{1}{1 + \alpha}; \quad q(x) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad (11.2.32)$$

а значения функции u_s выражаются через значения функции u_{s-1} посредством формулы

$$u_s(x) = p(x)u_{s-1}(\alpha x) + q(x)u_{s-1}(\alpha^{-1}x); \quad (11.2.33)$$

в случае выполнения данного сценария при $x \in (\alpha^k, \alpha^k + \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ имеют место соотношения «сопряжения»:

$$u_s(\alpha^k) = \frac{1}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^{k+1}) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^{k-1}), \quad (11.2.34)$$

а в случае выполнения данного сценария при $x \in (\alpha^{k-1} - \varepsilon, \alpha^{k-1})$ для некоторого $\varepsilon > 0$ имеют место соотношения «сопряжения»:

$$u_s(\alpha^{k-1} - 0) = \frac{1}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^k - 0) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^{k-2} - 0). \quad (11.2.35)$$

Покажем по индукции, что для $s \geq 2$ и функция u_s удовлетворяет четырем свойствам из формулировки теоремы. Для $s = 2$ эти свойства выполнены¹³. Пусть это свойство выполнено для $s = t \geq 2$, проверим его выполнение для $s = t + 1$. Для x из интервала $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$, когда $k = s + 1$, это вытекает из формулы (11.2.16). Если $k \leq s$, а точка x лежит в интервале вида $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$, то как уже отмечалось выше, границы интервала $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$, т. е. точки αx и $\alpha^{-1}x$ лежат в смежных интервалах, соответственно $[\alpha^{k+1}, \alpha^k]$ и $[\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}]$. В точках α^k , $k = 1, \dots, s$ при этом, в принципе, возможен положительный скачок¹⁴ и имеет место непрерывность справа. При наличии скачка в точке α^{k-1} , функция сохраняет выпуклость на замкнутом интервале $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$, если она является выпуклой на интервале $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$. В силу выпуклости функции u_t на интервале $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$, для $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ можно не рассматривать точки открытого интервала (α^k, α^{k-1}) в качестве «кандидатов» точек носителя наиболее неблагоприятной смешанной стратегии рынка Q_x^s , достаточно из отрезка $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ оставить для такого рассмотрения крайние точки α^k и α^{k-1} .

Далее, фиксируем числа $a \leq \alpha^k$, $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ и рассмотрим распределение Q , сосредоточенное в точках a и $y \in [\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}]$ с вероятностями соответственно p и q , удовлетворяющее условию $pa + qy = x$; с учетом нормировки

$$p = \frac{y - x}{y - a}, \quad q = \frac{x - a}{y - a}. \quad (11.2.36)$$

Покажем, что интеграл $\int u_t dQ$, рассматриваемый как функция y , т. е. функция $y \mapsto pu_t(a) + qu_t(y) = V(y)$ является монотонно неубывающей на $[\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}]$, где p и q задаются (11.2.36) и рассматриваются как функции переменной $y \in [\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}]$.

Нам потребуется следующий результат из математического анализа: если функции f и g абсолютно непрерывны на отрезке $[a, b]$, а f' и g' (определенные почти всюду относительно меры Лебега) производные, то функции $f'g$ и fg' суммируемы¹⁵ и

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = \int_a^x f'(z)g(z) dz + \int_a^x f(z)g'(z) dz \quad (11.2.37)$$

для $x \in [a, b]$ [34, глава IX, §7, теорема 5]. Добавим к этому, что выпуклая функция абсолютно непрерывна, а для ее производной можно выбрать эквивалентную ей¹⁶ всюду монотонно неубывающую [40, теорема 24.2], а также [40,

¹³ Отметим, что для функции u_2 на интервале $[\alpha^2, \alpha]$ имеет место сценарий II), а на интервале $[\alpha, 1]$ имеет место сценарий I).

¹⁴ Ниже будет доказано, что в этих точках имеет место непрерывность.

¹⁵ При этом произведение fg абсолютно непрерывно на отрезке $[a, b]$, в чем, кстати, можно убедиться непосредственно по определению, учитывая ограниченность функций f и g .

¹⁶ Речь идет о функции, совпадающей с исходной почти всюду (относительно меры Лебега).

следствие 24.2.1] и [40, теорема 24.1].

$$\begin{aligned} V(y) - V(a^{k-1}) &= \int_{a^{k-1}}^y V'(z) dz = \\ &= \int_{a^{k-1}}^y [p'u_t(a) + q'u_t(z) + qu'_t(z)] dz = \\ &= \int_{a^{k-1}}^y \{q'[u_t(z) - u_t(a)] + qu'_t(z)\} dz. \end{aligned}$$

Используя равенство

$$q' = -\frac{x-a}{(y-a)^2} = -\frac{1}{y-a}q,$$

получаем, что для $y \in [\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}]$

$$V(y) - V(a^{k-1}) = \int_{a^{k-1}}^y q \left[u'_t(z) - \frac{u_t(z) - u(a)}{z-a} \right] dz. \quad (11.2.38)$$

В силу выпуклости (по индуктивному предположению) функции u_t выражение в квадратных скобках под интегралом в (11.2.38) почти всюду неотрицательно, откуда получаем, что функция V является монотонно неубывающей. Таким образом, из «кандидатов» для точек носителя распределения $Q_x^{s,k}$ из интервала $[\alpha^{k-1}, \alpha^{-1}x]$ можно оставить лишь точку $\alpha^{-1}x$.

Аналогично рассматриваются «кандидаты» для точек носителя распределения $Q_x^{s,k}$ слева, т. е. из интервала $[\alpha x, \alpha^k]$. Фиксируем теперь числа $b \geq \alpha^{k-1}$, $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ и рассмотрим распределение Q , сосредоточенное в точках $z \in [\alpha^{k+1}, \alpha^k]$ и b , с вероятностями соответственно p и q , удовлетворяющее условию $pz + qb = x$; с учетом нормировки

$$p = \frac{b-x}{b-z}, \quad q = \frac{x-z}{b-z}. \quad (11.2.39)$$

Покажем, что интеграл $\int u_t dQ$, рассматриваемый как функция z , т. е. функция $z \mapsto pu_t(z) + qu_t(b) = W(z)$, является монотонно невозрастающей на $[\alpha^{k+1}, \alpha^k]$, где p и q задаются (11.2.39) и рассматриваются как функции переменной z . Используя равенство

$$p' = \frac{b-x}{(b-z)^2} = \frac{p}{b-z},$$

нетрудно убедиться, что для $z \in [\alpha^{k+1}, \alpha^k]$

$$W(z) - W(a^{k+1}) = \int_{a^{k+1}}^z p \left[u'_t(y) - \frac{u_t(b) - u_t(y)}{b-y} \right] dy. \quad (11.2.40)$$

В силу выпуклости функции u_t выражение в квадратных скобках под интегралом в (11.2.40) почти всюду неположительно, откуда получаем, что функция V является монотонно невозрастающей. Таким образом, из «кандидатов» для точек носителя распределения $Q_x^{s,k}$ из интервала $[\alpha x, \alpha^k]$ можно оставить лишь точку αx .

Тем самым, для рассмотрения вариантов расположения точек носителя распределения $Q_x^{s,k}$ достаточно рассматривать лишь сценарии II), II), III) и IV).

Рассмотрим теперь различные варианты, приводящие к возникновению того или иного сценария в зависимости от взаимного расположения четырех точек плоскости, которые будем называть *ключевыми*, а именно $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$, $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$ и прямой, соединяющей точки $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$ и $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$, т. е. множества $\{(\xi, \varphi_{t,k}(\xi)) : \xi \in \mathbb{R}\}$, где

$$\varphi_{t,k}(\xi) = u_t(\alpha^k) + \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k} (\xi - \alpha^k). \quad (11.2.41)$$

- 1) Если точки плоскости $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$ и $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$ лежат не выше прямой, соединяющей точки $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$ и $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$, т. е. с использованием обозначений (11.2.41)

$$\begin{aligned} \varphi_{t,k}(\alpha^{k+1}) &\geq u_t(\alpha^{k+1}), \\ \varphi_{t,k}(\alpha^{k-2} - 0) &\geq u_t(\alpha^{k-2} - 0), \end{aligned}$$

то реализуется сценарий I), для любого $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}]$.

- 2) Если точка плоскости $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$ лежит не выше, а точка $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$ — выше прямой, соединяющей точки $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$ и $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$, т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_{t,k}(\alpha^{k+1}) &\geq u_t(\alpha^{k+1}), \\ \varphi_{t,k}(\alpha^{k-2} - 0) &< u_t(\alpha^{k-2} - 0), \end{aligned}$$

то обозначая

$$y_k = \inf \{x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}] : \varphi_{t,k}(\alpha x) < u_t(\alpha x)\}, \quad (11.2.42)$$

получаем, что для $x \in [\alpha^k, y_k]$ реализуется сценарий I), а для $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$ реализуется сценарий II).

- 3) Если точка плоскости $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$ лежит выше, а точка $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$ — не выше прямой, соединяющей точки $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$ и $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$, т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_{t,k}(\alpha^{k+1}) &< u_t(\alpha^{k+1}), \\ \varphi_{t,k}(\alpha^{k-2} - 0) &\geq u_t(\alpha^{k-2} - 0), \end{aligned}$$

то обозначая

$$z_k = \sup \{x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}) : \varphi_{t,k}(\alpha^{-1}x) < u_t(\alpha^{-1}x)\}, \quad (11.2.43)$$

получаем, что для $x \in [\alpha^k, z_k)$ реализуется сценарий III), а для $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$ реализуется сценарий I).

- 4) Если точки плоскости $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$ и $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$ обе лежат выше прямой, соединяющей точки $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$ и $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$, т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_{t,k}(\alpha^{k+1}) &< u_t(\alpha^{k+1}), \\ \varphi_{t,k}(\alpha^{k-2} - 0) &< u_t(\alpha^{k-2} - 0), \end{aligned}$$

тогда могут возникнуть три возможных случая.

- 4а) Если $y_k < z_k$, где y_k и z_k задаются (11.2.42) и (11.2.43) соответственно, для $x \in (y_k, z_k)$ реализуется сценарий IV), для $x \in [\alpha^k, y_k)$ реализуется сценарий III), а для $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$ реализуется сценарий II);
- 4б) Если $y_k = z_k$, то для $x \in [\alpha^k, y_k)$ реализуется сценарий III), а для $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$ реализуется сценарий II);
- 4в) Если же $y_k > z_k$, то для $x \in [\alpha^k, z_k)$ реализуется сценарий III), для $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$ реализуется сценарий II), а для $x \in [z_k, y_k]$ реализуется сценарий I).

Будем называть точки y_k и z_k , задаваемые (11.2.42) и (11.2.43) соответственно, точками переключения сценариев (на шаге t). Отметим, что точки переключения сценариев, а также некоторые из точек α^k , $k \in \{0, \dots, t\}$, могут быть отнесены одновременно к двум сценариям. Приведенный выше анализ вариантов расположения четырех ключевых точек плоскости позволяет заключить, что интервал $[0, +\infty)$ можно разбить на непересекающиеся смежные интервалы, на которых реализуется один из четырех сценариев; эти интервалы будем называть сценарными на шаге t ; такой интервал может подразбиваться на несколько интервалов рациональности.

Границы интервалов рациональности на шаге t — это точки α^k , $k \in \{0, \dots, t\}$ и, возможно, точки переключения сценариев на всех шагах до t включительно, если таковые имеются. Добавляя точку α^{t+1} и, возможно, точки переключения сценариев на шаге t (если таковые имеются, то в количестве не более $2t$) к множеству $\{d_{t,i}, i = 0, \dots, m_t + 1\}$, получаем множество $\{d_{t+1,i}, i = 0, \dots, m_{t+1} + 1\}$ границ интервалов рациональности для функции u_{t+1} . То, что функция u_{t+1} является кусочно-рациональной на каждом из сценарных интервалов — рациональна на интервалах рациональности, образующих разбиение данного сценарного интервала, легко проверить по индукции, учитывая что для u_0 это утверждение справедливо, используя рекуррентные соотношения (11.2.21), (11.2.25), (11.2.29) и (11.2.33) для четырех сценариев и

соответствующие выражения вероятностей, задаваемых формулами (11.2.20), (11.2.24), (11.2.28) и (11.2.32). В частности, функция u_{t+1} является бесконечно дифференцируемой на внутренности интервалов рациональности.

Поскольку выражения для вероятностей представляют собой рациональные функции, представимые в виде несократимой дроби полиномов степени единица, то на интервалах рациональности соответствующие рациональные функции, представленные в виде несократимой дроби полиномов, имеют степень не выше s^{17} .

В случае реализации сценария I) формулы (11.2.20) и (11.2.21) влекут на $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ аффинность функции u_{t+1} , а значит, и выпуклость, а по индуктивному предположению о строгой монотонности u_t , строгую монотонность¹⁸ u_{t+1} .

На интервале рациональности, содержащемся в $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, на котором реализуется сценарий IV), формулы (11.2.32) и (11.2.33) непосредственно влекут строгую монотонность и выпуклость u_{t+1} , в силу строгой монотонности и выпуклости u_t (по индуктивному предположению).

Внутри интервала рациональности, содержащегося в $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, где реализуется сценарий II) и функция u_t бесконечно дифференцируема; используя (11.2.25), имеем

$$\begin{aligned} u'_{t+1}(x) &= p'(x)u_t(\alpha^k) + q'(x)u_t(\alpha^{-1}x) + q(x)\alpha^{-1}u'_t(\alpha^{-1}x) = \\ &= q'(x)[u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha^k)] + q(x)\alpha^{-1}u'_t(\alpha^{-1}x) > 0, \end{aligned} \quad (11.2.44)$$

используя положительность производной функция u_t (по индуктивному предположению) и то, что

$$q'_k(x) = \frac{\alpha^{k-1} - \alpha^k}{(\alpha^{-1}x - \alpha^k)^2} > 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} q''_k(x) &= -\frac{2\alpha^{-1}(\alpha^{k-1} - \alpha^k)}{(\alpha^{-1}x - \alpha^k)^3} = -\frac{2\alpha^{-1}q'_k(x)}{\alpha^{-1}x - \alpha^k}, \\ u''_{t+1}(x) &= q''_k(x)[u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha^k)] + 2\alpha^{-1}q'_k(x)u'_t(\alpha^{-1}x) + q_k(x)\alpha^2u''_t(\alpha^{-1}x) = \\ &= 2\alpha^{-1}q'_k(x)\left[u'_t(\alpha^{-1}x) - \frac{u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{-1}x - \alpha^k}\right] + q_k(x)\alpha^2u''_t(\alpha^{-1}x) \geq 0, \end{aligned}$$

поскольку, в силу предположения о выпуклости функции u_t , ее вторая производная и выражение в квадратных скобках неотрицательны.

Внутри интервала рациональности, содержащегося в $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, где реализуется сценарий III) и функция u_t бесконечно дифференцируема, используя (11.2.29) имеем

$$\begin{aligned} u'_{t+1}(x) &= p'_k(x)u_t(\alpha x) + p_k(x)\alpha u'_t(\alpha x) + q'_k(x)u_t(\alpha^{k-1}) = \\ &= -p'(x)[u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha x)] + p(x)\alpha u'_t(\alpha x) > 0, \end{aligned}$$

¹⁷Нетрудно заметить, что эта степень на интервалах $(0, \alpha^s)$ и $[1, +\infty)$ равна нулю, где реализуется сценарий I) равна единице, а где реализуется сценарий IV) — не превосходит $s - 1$.

¹⁸Напомним, что в соответствии с предложением 8.1.2 решения уравнений Беллмана являются неубывающими (для неубывающей функции выплат).

используя положительность производной функция u_t (по индуктивному предположению) и то, что

$$p'(x) = -\frac{\alpha^{k-1} - \alpha^k}{(\alpha^{k-1} - \alpha x)^2} < 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} p''(x) &= -\frac{2\alpha(\alpha^{k-1} - \alpha^k)}{(\alpha^{k-1} - \alpha x)^3} = \frac{2\alpha p'_k(x)}{\alpha^{k-1} - \alpha x}, \\ u''_{t+1}(x) &= -p''(x) [u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha x)] + 2\alpha p'(x) u'_t(\alpha x) + p(x) \alpha^2 u''_t(\alpha x) = \\ &= 2\alpha p'(x) \left[u'_t(\alpha x) - \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha x)}{\alpha^{k-1}x - \alpha x} \right] + q(x) \alpha^2 u''_t(\alpha^{-1}x) \geq 0, \end{aligned}$$

так как, в силу выпуклости функция u_t , ее вторая производная неотрицательна, а выражение в квадратных скобках неположительно.

Необходимо еще исследовать поведение функции u_{t+1} в точках переключения сценариев y_k и z_k для вариантов 2) 3) и 4), приводящих к возникновению того или иного сценария и, возможно, к их переключению.

Если имеет место вариант 2) расположения ключевых точек, а производная справа¹⁹ функции u_t в точке α^{k-1} не меньше наклона прямой, соединяющей точки $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$ и $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$, т. е.

$$u'_t(\alpha^{k-1} + 0) \geq \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k}, \quad (11.2.45)$$

то сценарий II) реализуется для любого $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$.

Если же

$$u'_t(\alpha^{k-1} + 0) < \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k},$$

то в точке $y_k \in (\alpha^k, \alpha^{k-1})$, задаваемой (11.2.42), имеет место трансверсальное пересечение графика выпуклой функции u_t и прямой — графика функции $\varphi_{t,k}$, так что $u_t(\alpha^{-1}y_k) = \varphi_{t,k}(\alpha^{-1}y_k)$ и

$$u'_t(\alpha^{-1}y_k + 0) > \varphi'_{t,k}(\alpha^{-1}y_k) = \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k},$$

поэтому

$$\begin{aligned} u'_{t+1}(y_k + 0) &= q'_t(y_k) [u_t(\alpha^{-1}y_k) - u_t(\alpha^k)] + q_t(y_k) \alpha^{-1} u'_k(\alpha^{-1}y_k + 0) > \\ &> \frac{\alpha^{k-1} - \alpha^k}{(\alpha^{-1}y_k - \alpha^k)^2} [\varphi_{t,k}(\alpha^{-1}y_k) - \varphi_{t,k}(\alpha^k)] + \frac{(y_k) - \alpha^k}{\alpha^{-1}y_k - \alpha^k} \alpha^{-1} \varphi'_{t,k}(\alpha^{-1}y_k) = \\ &= \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k} = u'_{t+1}(y_k - 0); \end{aligned}$$

¹⁹На левом конце интервала, где имеет место непрерывность справа функции u_t , производная справа совпадает с пределом справа производной, в силу непрерывности производных (благодаря индуктивному предположению).

Тем самым, в точке $y_k \in (\alpha^k, \alpha^{k-1})$ выпуклость функции u_{t+1} не нарушается, однако функция u_{t+1} недифференцируема в этой точке — имеется скачок производной.

Аналогично может быть исследован вариант 3) расположения ключевых точек; в этом случае, если

$$u'_t(\alpha^k - 0) \leq \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k}, \quad (11.2.46)$$

то сценарий III) реализуется для любого $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, а если (11.2.46) не выполняется, то имеет место трансверсальное пересечение графика выпуклой функции u_t и прямой — графика функции $\varphi_{t,k}$ в точке $z_k \in (\alpha^k, \alpha^{k-1})$, задаваемой (11.2.43), причем в точке $y_k \in (\alpha^k, \alpha^{k-1})$ выпуклость функции u_{t+1} нарушается, однако функция u_{t+1} недифференцируема в этой точке (имеется скачок производной).

Для варианта 4) расположения четырех ключевых точек проверяется оба условия (11.2.45) и (11.2.46). Когда оба эти неравенства выполняются, то сценарий IV) реализуется для любого $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, а в противном случае возникают одна или две точки переключения сценариев, поведение функции u_{t+1} в которых аналогично рассмотренным выше случаям; при этом необходимо учитывать их взаимное расположение (случаи 4а), 4б) и 4в)). \square

Теорема 11.2.2. *Функция u_s является непрерывной²⁰ на интервале $[\alpha^s, +\infty)$, для $s = 0, \dots, N$.*

Доказательство. Проверим это свойство по индукции. Для $s \in \{0, 1, 2\}$ это свойство выполнено. Пусть это выполнено для $s = t \geq 2$, покажем, что это выполнено для $s = t + 1$. На открытых интервалах (α^k, α^{k-1}) , $k = 0, \dots, t + 1$ функция u_{t+1} непрерывна в силу выпуклости. До поэтому достаточно проверить ее непрерывность в точках α^k , $k = 0, \dots, t$. Фиксируем $k \in \{0, \dots, t - 1\}$ и рассмотрим интервал вида $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, который будем называть левым (по отношению к точке α^{k-1}), соответствующие четыре ключевых точки для этого интервала (с абсциссами $\alpha^{k+1}, \alpha^k, \alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}$ и ординатами — значениями функции u_t в этих точках), и смежный интервал $[\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2})$, который будем называть правым, соответствующие четыре ключевых точки (с абсциссами $\alpha^k, \alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}, \alpha^{k-3}$ и ординатами — значениями функции u_t в этих точках).

Если для левого интервала имеет место вариант 1) расположения ключевых точек, то для правого интервала возможными вариантами будут 1) или 2); условия сопряжения на правом конце левого интервала задаются соотношениями для сценария I), (11.2.23), т. е.

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1} - 0) = u_t(\alpha^{k-1} - 0),$$

²⁰Тем самым, с учетом предложений 11.2.1 и 11.2.2, функция u_s является непрерывной на интервале $(0, +\infty)$, за исключением единственной точки α^s , в которой она испытывает скачок и является непрерывной справа.

а на левом конце правого интервала — соотношениями для сценариев I) и II), (11.2.22) и (11.2.26), т. е.

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1}) = u_t(\alpha^{k-1}),$$

откуда, используя индуктивное предположение о непрерывности u_t , получаем непрерывность u_{t+1} в точке α^{k-1} .

Если для левого интервала имеет место вариант 2) расположения ключевых точек, то для правого интервала возможными вариантами будут 3) или 4); условия сопряжения на правом конце левого интервала задаются соотношениями для сценария II), (11.2.27), т. е.

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1} - 0) = \frac{1}{1 + \alpha} u_t(\alpha^k - 0) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k-2} - 0),$$

а на левом конце правого интервала — для сценария III), (11.2.30), т. е.

$$u_{t+1}(\alpha^k) = \frac{1}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k+1}) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k-1}),$$

откуда следует непрерывность u_{t+1} в точке α^{k-1} .

Если для левого интервала имеет место вариант 3) расположения ключевых точек, то для правого интервала возможными вариантами будут 1) или 2); условия сопряжения на правом конце левого интервала задаются соотношениями для сценария I), (11.2.23), т. е.

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1} - 0) = u_t(\alpha^{k-1} - 0),$$

а на левом конце правого интервала — соотношениями для сценариев I) и II), (11.2.22) и (11.2.26), т. е.

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1}) = u_t(\alpha^{k-1}),$$

откуда следует непрерывность u_{t+1} в точке α^{k-1} .

Если для левого интервала имеет место вариант 4) расположения ключевых точек, то для правого интервала возможными вариантами будут 3) или 4); условия сопряжения на правом конце левого интервала задаются соотношениями для сценария II), (11.2.27), т. е.

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1} - 0) = \frac{1}{1 + \alpha} u_t(\alpha^k - 0) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k-2} - 0),$$

а на левом конце правого интервала — соотношениями для сценария III), (11.2.30), т. е.

$$u_{t+1}(\alpha^k) = \frac{1}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k+1}) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k-1}),$$

откуда следует непрерывность u_{t+1} в точке α^{k-1} .

Таким образом, установлена непрерывность u_{t+1} в точках²¹ $\alpha^{t-1}, \alpha^{t-2}, \dots, 1$.

Рассмотрим теперь интервал $[\alpha^t, \alpha^{t-1})$ и заметим, что благодаря свойствам функции u_1 и автомодельности, установленной в предложении 11.2.1, точки

$$(\alpha^{t+1}, u_t(\alpha^{t+1})), \quad (\alpha^t, u_t(\alpha^t)) \text{ и } (\alpha^{t-1}, u_t(\alpha^{t-1}))$$

лежат на одной прямой. Поэтому, в зависимости от положения точки $(\alpha^{t-2}, u_t(\alpha^{t-2}))$, для интервала $[\alpha^t, \alpha^{t-1})$ возможными вариантами будут 1) или 2); на левом конце интервала $[\alpha^t, \alpha^{t-1})$ условия сопряжения задаются соотношениями для сценариев I) и II), (11.2.22) и (11.2.26), т. е.

$$u_{t+1}(\alpha^t) = u_t(\alpha^t).$$

Из (11.2.16) и (11.2.8) имеем

$$u_t(\alpha^t) = \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^t,$$

а из (11.2.16) и (11.2.9) имеем

$$u_{t+1}(\alpha^t - 0) = \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^t,$$

откуда следует непрерывность u_{t+1} в точке α^t . □

Утверждение теоремы 11.2.2 может быть усилено — функция u_s является даже липшицевой на интервале $[\alpha^s, +\infty)$, для $s = 0, \dots, N$ (см. теорему 11.2.3 ниже). Однако, по нашему мнению, доказательство теоремы 11.2.2 представляет самостоятельный интерес, поскольку хорошо проясняет существо проблемы.

Для функции f на $[a, b]$ обозначим

$$L(f, [a, b]) = \sup \left\{ \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{x_2 - x_1} : x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \right\}. \quad (11.2.47)$$

Если $L(f, [a, b])$ в (11.2.47) конечно, то это константа Липшица функции f на $[a, b]$.

Теорема 11.2.3. *Функция u_s удовлетворяет условию Липшица на интервале $[\alpha^s, +\infty)$, для $s = 1, \dots, N$, причем константы Липшица $L(u_s, [\alpha^s, +\infty))$ по s являются невозрастающими, а $L(u_1, [\alpha, +\infty)) = (1 - \alpha)^{-1}$.*

Доказательство. Заметим сначала, что если для $r \geq 2$ заданы точки $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{r-1} < c_r = b$, то, с использованием обозначений (11.2.47), имеет место равенство:

$$L(f, [a, b]) = \bigvee_{j=1}^r L(f, [c_{j-1}, c_j]). \quad (11.2.48)$$

²¹ Отметим, что для интервала $[\alpha, 1)$ возможными вариантами расположения ключевых точек могут быть только 1) или 2).

Проверим справедливость пункта 2 теоремы по индукции. Для $s = 1$ это утверждение выполняется, причем в этом случае константа Липшица

$$L(u_1, [\alpha, +\infty)) = u'_1(1 - 0) = (1 - \alpha)^{-1}.$$

Предположим, что для $s = t$ константа Липшица $L(u_t, [\alpha^t, +\infty)) < \infty$. Применяя предложение 11.1.2 с параметрами $a = \alpha^t$, $b = \alpha^{-1}$, $\beta = \alpha^{-1}$, получаем, с учетом (11.2.48), что

$$L(u_{t+1}, [\alpha^{t-1}, +\infty)) = L(u_{t+1}, [\alpha^{t-1}, 1]) \leq L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{-1}]) = L(u_t, [\alpha^t, +\infty)) < \infty.$$

В силу автомодельности (11.2.16), установленной в предложении 11.2.2, а также доказанной выше непрерывности, для $x \in [\alpha^{t+1}, \alpha^t]$ имеет место соотношение

$$u_{t+1}(x) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{-1}x),$$

откуда

$$L(u_{t+1}, [\alpha^{t+1}, \alpha^t]) \leq \frac{1}{1 + \alpha} L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]). \quad (11.2.49)$$

Как было замечено выше при доказательстве непрерывности, точки

$$(\alpha^{t+1}, u_t(\alpha^{t+1})), \quad (\alpha^t, u_t(\alpha^t)) \quad \text{и} \quad (\alpha^{t-1}, u_t(\alpha^{t-1}))$$

лежат на одной прямой, так что, в зависимости от положения точки $(\alpha^{t-2}, u_t(\alpha^{t-2}))$, для интервала $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$ возможными вариантами расположения ключевых точек будут 1) или 2).

В случае варианта 1) на интервале $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$ реализуется сценарий I), так что, с учетом непрерывности, функция u_{t+1} будет аффинной на $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$ и

$$L(u_{t+1}, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) = \frac{u_t(\alpha^{t-1}) - u_t(\alpha^t)}{\alpha^{t-1} - \alpha^t},$$

а в силу выпуклости функции u_t на интервале $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$ и ее непрерывности

$$\frac{u_t(\alpha^{t-1}) - u_t(\alpha^t)}{\alpha^{t-1} - \alpha^t} \leq u'_t(\alpha^{t-1} - 0) = L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]), \quad (11.2.50)$$

так что

$$L(u_{t+1}, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) \leq L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]). \quad (11.2.51)$$

В случае варианта 2) на интервале $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$ реализуется сценарий I), так что на нем производная функции u_{t+1} задается (11.2.44) для $k = t$; замечая, что

$$q'_t(x) = \frac{\alpha^{t-1} - \alpha^t}{(x - \alpha^t)(\alpha^{-1}x - \alpha^t)} q_t(x),$$

получаем

$$u'_{t+1}(x) = q_t(x) \left[\frac{\alpha^{t-1} - \alpha^t}{x - \alpha^t} \cdot \frac{u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha^t)}{\alpha^{-1}x - \alpha^t} + \alpha^{-1}u'_t(\alpha^{-1}x) \right].$$

С учетом (11.2.50) и выпуклости функции u_{t+1} на интервале $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$ и ее непрерывности

$$\begin{aligned} L(u_{t+1}, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) &= u'_{t+1}(\alpha^{t-1} - 0) \leq \\ &\leq \frac{\alpha}{1+\alpha} \left[L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) + \alpha^{-1} u'_t(\alpha^{t-2} - 0) \right] = \\ &= \frac{\alpha}{1+\alpha} L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) + \frac{1}{1+\alpha} L(u_t, [\alpha^{t-1}, \alpha^{t-2}]) \leq \\ &\leq L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) \vee L(u_t, [\alpha^{t-1}, \alpha^{t-2}]) = \\ &= L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-2}]). \end{aligned} \tag{11.2.52}$$

Таким образом, из (11.2.49), (11.2.51) и (11.2.52) вытекает требуемое утверждение. \square

11.3 Алгоритм численного решения

Для получения «полуявного» решения уравнения Беллмана, резюмируя полученные выше результаты, можно предложить следующий рекуррентный алгоритм.

Пусть на шаге $s \geq 1$ получено разбиение отрезка $[\alpha^s, 1]$ на интервалы рациональности $[d_{s,i}, d_{s,i+1})$, $i = 0, \dots, m_s$, причем в число границ этих интервалов $d_{s+1,i}$, $i = 0, \dots, m_{s+1} + 1$ входят точки α^k , $k = 0, \dots, s$. Предположим, что на интервалах $[d_{s,i}, d_{s,i+1})$, $i = 0, \dots, m_s$ найдены явные (аналитические) выражения функции u_s в виде рациональных функций и их производные.²²

Для нахождения функции u_{s+1} производятся следующие действия.

- 1) Вычисляются значения функции u_s в точках α^k , $k = 0, \dots, s$, определяются варианты расположения ключевых точек для интервалов вида $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$ и возможные сценарии для данного варианта.
- 2) Определяется наличие точек переключения сценариев для интервалов вида $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$, а в случае их наличия точки переключения сценариев находятся численно.²³

Для варианта 1) расположения ключевых точек реализуется сценарий I), для любого $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$.

Для варианта 2) расположения ключевых точек вычисляется производная $u'_s(\alpha^{k-1} + 0)$ и

- если неравенство (11.2.45) выполняется, то реализуется сценарий I), для любого $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$;

²²Это, в частности, может быть найдено с использованием символьных вычислений.

²³Что, на самом деле, равносильно отысканию корня многочлена степени не выше $s + 1$.

- если неравенство (11.2.45) не выполняется, то численно находится точка переключения сценариев y_k как единственный на интервале (α^k, α^{k-1}) корень уравнения

$$\varphi_{s,k}(\alpha x) = u_s(\alpha x), \quad (11.3.1)$$

где функция $\varphi_{t,k}$ задается посредством (11.2.41); при этом для $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$ реализуется сценарий II), а для $x \in (\alpha^k, y_k]$ реализуется сценарий I).

Для варианта 3) расположения ключевых точек вычисляется производная $u'_s(\alpha^k - 0)$ и

- если неравенство (11.2.46) выполняется, то реализуется сценарий III), для любого $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$;
- если неравенство (11.2.46) не выполняется, то численно находится точка переключения сценариев z_k как единственный на интервале (α^k, α^{k-1}) корень уравнения

$$\varphi_{s,k}(\alpha^{-1}x) = u_s(\alpha^{-1}x); \quad (11.3.2)$$

при этом для $x \in [\alpha^k, z_k)$ реализуется сценарий III), а для $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$ реализуется сценарий I).

Для варианта 4) расположения ключевых точек вычисляются обе производные $u'_s(\alpha^{k-1} + 0)$ и $u'_s(\alpha^k - 0)$, проверяются два неравенства (11.2.45) и (11.2.46), причем

- если оба неравенства (11.2.45) и (11.2.46) выполняются, то реализуется сценарий IV), для любого $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$;
- если неравенство (11.2.45) выполняется, а неравенство (11.2.46) не выполняется, то численно находится точка переключения сценариев z_k как единственный на интервале (α^k, α^{k-1}) корень уравнения (11.3.2); при этом для $x \in [\alpha^k, z_k)$ реализуется сценарий III), а для $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$ реализуется сценарий IV);
- если неравенство (11.2.46) выполняется, а неравенство (11.2.45) не выполняется, то численно находится точка переключения сценариев y_k как единственный на интервале (α^k, α^{k-1}) корень уравнения (11.3.1); при этом для $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$ реализуется сценарий II), а для $x \in (\alpha^k, y_k]$ реализуется сценарий I);
- если оба неравенства (11.2.45) и (11.2.46) не выполняются, то численно находятся две точки: точка переключения сценариев z_k как единственный на интервале (α^k, α^{k-1}) корень уравнения (11.3.2) и точка переключения сценариев y_k как единственный на интервале (α^k, α^{k-1}) корень уравнения (11.3.1); в зависимости от взаимного расположения y_k и z_k могут возникнуть три возможных случая.

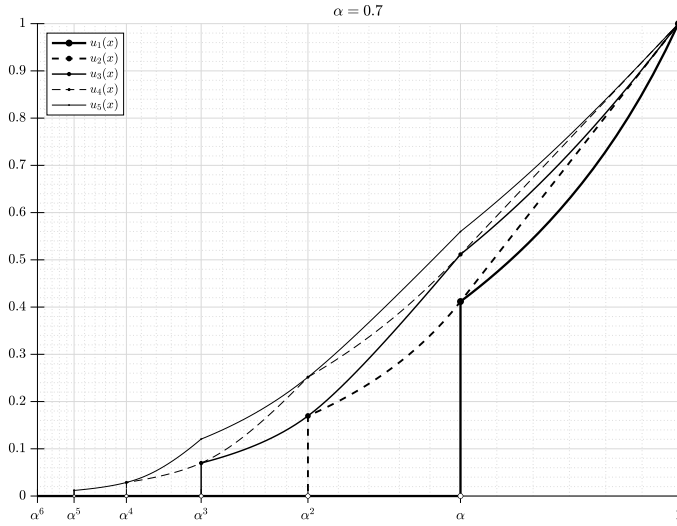
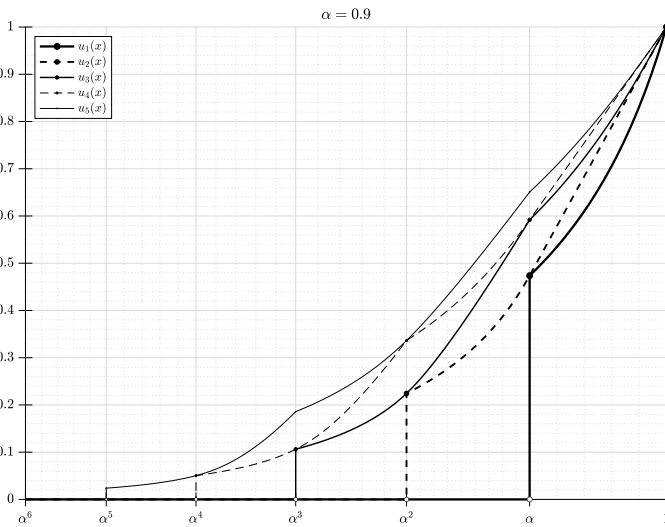
- 4а) Если $y_k < z_k$, где y_k и z_k задаются (11.2.42) и (11.2.43) соответственно, для $x \in (y_k, z_k)$ реализуется сценарий IV), для $x \in [\alpha^k, y_k)$ реализуется сценарий III), а для $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$ реализуется сценарий II);
- 4б) Если $y_k = z_k$, то для $x \in [\alpha^k, y_k)$ реализуется сценарий III), а для $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$ реализуется сценарий II);
- 4в) Если же $y_k > z_k$, то для $x \in [\alpha^k, z_k)$ реализуется сценарий III), для $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$ реализуется сценарий II, а для $x \in [z_k, y_k]$ реализуется сценарий I).

Тем самым, на шаге t получаем разбиение для $[0, +\infty)$ на смежные интервалы, на которых реализуется один из четырех сценариев, причем границы этих интервалов — точки α^k , $k \in \{0, \dots, s\}$ и, возможно, точки переключения сценариев на шаге t (если таковые имеются).

- 3) Строится измельчение разбиения на интервалы рациональности: с целью получения множества $\{d_{s+1,i}, i = 0, \dots, m_{s+1} + 1\}$ границ интервалов рациональности для функции u_{s+1} к множеству $\{d_{s,i}, i = 0, \dots, m_s + 1\}$ добавляется точка α^{s+1} и, возможно, точки переключения сценариев на шаге s (если таковые имеются, то в количестве не более $2t$). Договоримся, что конечная последовательность $d_{s,i}$, $i = 0, \dots, m_s + 1$ является возрастающей (по i). На каждом интервале полученного разбиения $[d_{s+1,i}, d_{s+1,i+1})$, $i = 0, \dots, m_{s+1}$ реализуется один сценарий на шаге s и заданы явные выражения для функции u_s , а для четырех возможных сценариев имеются явные рекуррентные формулы (11.2.21), (11.2.25), (11.2.29) и (11.2.33), выражающие функцию u_{s+1} через функции u_s и сохраняющие рациональность. Используя явное выражение для функцию u_{s+1} в виде рациональной функции, вычисляется производная u'_{s+1} на каждом интервале разбиения $[d_{s+1,i}, d_{s+1,i+1})$, $i = 0, \dots, m_{s+1}$.

На основе описанного алгоритма были проведены расчеты для различных значений параметра α . Результаты показаны на рис. 11.3 и рис. 11.4.

Из закономерностей, обнаруженных в результате проведенных вычислений, отметим отсутствие переключений сценариев и гладкое сопряжение кусочно-выпуклых рациональных функций на парах интервалов вида $[\alpha^{k+1}, \alpha^k]$.

Рис. 11.3: Первые пять итераций, $\alpha = 0.7$.Рис. 11.4: Первые пять итераций, $\alpha = 0.9$.

Глава 12. Гарантированный детерминистский подход к маржированию на срочном рынке

В главе обсуждается современный подход к риск-менеджменту центрального контрагента, в первую очередь вопрос о достаточности его финансовых ресурсов, включая обеспечение участников клиринга, капитал центрального контрагента и фонд солидарной ответственности. Особое внимание уделено системе маржирования, отвечающей за адекватный уровень обеспечения участников клиринга и играющей критическую роль в риск-менеджменте.

Описывается система маржирования портфеля из опционов и фьючерсов на срочном рынке, с дефолт-менеджментом, основанным на методологии, изобретения [55]. Для этой системы строится математическая модель маржирования, т. е. определения требуемого уровня депозитной маржи (гарантийного обеспечения), основанная на идеологии гарантированного детерминистского подхода к суперхеджированию и теоретико-игровой интерпретации. Из экономического смысла задачи непосредственно выводятся уравнения Беллмана—Айзека для требуемого уровня маржи. Изучаются свойства этих уравнений, в частности, доказано свойство субаддитивности маржи портфеля, — важное с экономической точки зрения требование к системе маржирования. Полученные уравнения приведены форме, удобной для вычислений. На модельных примерах проведен численный эксперимент, подтверждающий эффективность работы системы.

Основные результаты главы опубликованы в [57] и [56].

12.1 Управление рисками центрального контрагента

После глобального финансового кризиса, начавшегося в 2007 году, сформировалась международная тенденция, заключающаяся в повышении роли клиринга через центрального контрагента (central counterparty, CCP) — унифицированного финансового института, замещающего стороны¹ по сделке, с целью

¹ Тем самым, центральный контрагент берет на себя кредитный риск контрагента между сторонами сделки.

снижения риска неисполнения участниками торгов своих обязательств². Центральный контрагент может предоставлять клиринговые услуги³ по сделкам с иностранной валютой, ценными бумагами, биржевыми товарами, производными финансовыми инструментами, как биржевыми (срочный рынок), так и внебиржевыми, допускающими стандартизацию⁴. В силу своей системной значимости для финансовых рынков центральные контрагенты подлежат особо строгому регулированию, с жесткими требованиями к качеству риск-менеджмента.

В соответствии с российским законодательством и регулированием клиринговые функции должны выполняться отдельным юридическим лицом. Ведущим центральным контрагентом в России (и одним из крупнейших в Европе) является небанковская кредитная организация — центральный контрагент «Национальный Клиринговый Центр» (Акционерное общество), сокращенно НКО НКЦ (АО), входящая в состав группы биржевого холдинга «Московская биржа».

Клиринговая организация должна рассчитывать требования к депозитной марже⁵ членов биржи, т. е. уровень средств, который необходимо поддерживать на клиринговом счете для обеспечения части или всех обязательств по портфелю участника биржи. Обеспечение может быть внесено как в денежной форме, так в виде приемлемых ценных бумаг и других высоколиквидных активов, связанных с соответствующими инструментами. Клиринговая организация осуществляет контроль за соблюдением требований по депозитной марже. При этом требования по депозитной марже в течение срока действия контракта могут изменяться клиринговой организацией, но член биржи — участник торгов обязан поддерживать количество средств на своем клиринговом счете на требуемом уровне. В случае, если участник торгов не удовлетворяет требованиям по депозитной марже, клиринговая организация производит урегулирование ситуации с дефицитом маржи. В мировой практике общепринятым способом урегулирования является ликвидация (полная или частичная) портфеля участника, не удовлетворяющего требованиям по депозитной марже (дефолтера), по текущим рыночным ценам. В особых случаях, при недостаточной ликвидности рынка (в частности, при крупных позициях дефолтера) может проводиться аукцион, однако, по нашему мнению, дизайн аукциона должен быть тщательно продуман и подробно описан в правилах клиринга. Так, например, в качестве основы можно использовать альтернативу классическому аукциону Викри,

² Исторически был возможен также другой вариант, когда биржа совмещала функции организатора торгов с клиринговыми функциями в одном юридическом лице, как это было сделано на Чикагской товарной бирже (Chicago Mercantile Exchange), до образования CME Group в результате слияния в 2007 году Chicago Mercantile Exchange (CME) и Chicago Board of Trade (CBOT).

³ Подробно тематика клиринга изложена в книге [27].

⁴ К таким внебиржевым производным финансовым инструментам относятся процентные свопы (interest rate swaps, IRS) и кредитные дефолтные свопы (credit default swaps, CDS) в простейшем (допускающем стандартизацию) варианте.

⁵ Терминология, использовавшаяся на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ). На Московской бирже, образованной в 2011 году в результате слияния бирж ММВБ и РТС, принят термин «гарантийное обеспечение», использовавшийся на срочном рынке РТС.

предложенную в статье [79] и изобретении [80].

При этом возникающие убытки портфеля дефолтера должны в первую очередь покрываться за счет обеспечения (депозитной маржи), внесенного данным участником, — это первый эшелон защиты центрального контрагента. Если этих средств окажется недостаточно, то используют его взнос в фонд солидарной ответственности членов клиринга. Если этого также недостаточно, то используют фонд, формируемый из капитала (собственных средств) центрального контрагента, — второй эшелон защиты. А если и этого недостаточно, то убытки погашаются за счет фонда солидарной ответственности участников клиринга (в этом случае участникам клиринга предлагают впоследствии пополнить этот фонд). Таким образом, создаются несколько эшелонов защиты контрагента, совокупность которых на английском языке принято называть “default waterfall”; на русском языке терминология не сформировалась, мы будем использовать термин «дефолтное эшелонирование». Капитал центрального контрагента, используемый на покрытие убытков, так называемый “skin-in-the-game” (SITG), и фонд солидарной ответственности участников клиринга играют дополняющую роль к депозитной марже участников клиринга⁶. В соответствии с международными рекомендациями капитала центрального контрагента должно быть достаточно как минимум для покрытия убытков в случае дефолта участника с крупнейшей экспозицией; соответственно, стресс-тестирование должно проводиться по крайней мере, двух участников, в отношении которых центральный контрагент имеет наибольшую экспозицию [120]. Для определения достаточности капитала используется стресс-тестирование, основанное на сценариях, являющихся экстремальными, но реалистичными.

Участники рынка, которых относят к “buy side”⁷, ратуют за увеличение доли капитала центрального контрагента в дефолтном эшелонировании, полагая, что это способствует финансовой устойчивости центрального контрагента и позволит избежать использования фонда солидарной ответственности в случае дефолтов с крупными убытками. Вместе с тем, ряд экспертов придерживается мнения, что увеличение доли капитала центрального контрагента не решает проблему кредитного риска этих участников, но приведет к более дорогостоящему обслуживанию, как за счет тарифной политики, так и в результате ответной реакции центрального контрагента, выражающейся в увеличении требования к размеру фонда солидарной ответственности. Центральное место в дискуссии о достаточности финансовых ресурсов центрального контрагента, активно ведущейся в настоящее время, занимает вопрос о стимулах, создаваемых структурой дефолтного эшелонирования [111; 122].

⁶В действительности, дефолтное эшелонирование может быть устроено сложнее. Его структура определяется требованиями регулятора (с целью ограничения системного риска) и аппетитом центрального контрагента (уровнем риска, принимаемым им для достижения своих стратегических целей) [35].

⁷Термин, используемый для обозначения финансовых институтов, занимающихся покупкой инвестиционных услуг (например, паевые инвестиционные фонды, компании по страхованию жизни, паевые инвестиционные фонды, хедж-фонды и пенсионные фонды, фонды непубличных инвестиций).

Одной из первых работ, описывающих статическую структуру рационального дефолтного эшелонирования центрального контрагента (на инженерном уровне строгости) стала работа [155]. В последнее время стали появляться и динамические модели [98]. Однако, на наш взгляд, предлагаемая в [98] модель слишком примитивна с экономической точки зрения, поскольку не учитывает взаимодействие между центральным контрагентом и участниками клиринга, имеющее особенно выраженный характер в стрессовые периоды. Мы согласны с авторами работы [146], что это взаимодействие потенциально может привести к дестабилизирующей обратной связи, так что следует учитывать риски участников клиринга и центрального контрагента совместно, а не по отдельности.

12.2 Роль системы маржирования в риск-менеджменте центрального контрагента

Маржирование не только выступает в роли авангарда в дефолтном эшелонировании, но и, являясь наиболее чувствительным к риску эшелоном защиты, играет критическую роль в риск-менеджменте центрального контрагента. Поэтому проблеме маржирования уделяется особое внимание регуляторов; исторически первый документ, [247], определявший международные принципы регулирования, был разработан IOSCO еще в 1996 году. Регулирование центральных контрагентов, с упором на практику управления рисками, было кардинально усовершенствовано после мирового финансового кризиса. Это отражено в документе «Принципы инфраструктуры финансового рынка» [119], имеющем характер глобального руководства для национальных регуляторов; в Европейском союзе роль такого регулирования играет EMIR⁸. В частности, EMIR требует, чтобы степень покрытия депозитной маржей была «достаточной для покрытия экспозиции к риску, которая, по оценкам центрального контрагента, может возникнуть вплоть до *ликвидации*⁹ соответствующих позиций»¹⁰. Мы же считаем более корректным использовать расширенное толкование критерия качества системы портфельного маржирования, из принципа 6 в «Принципах инфраструктуры финансового рынка»; незначительно перефразируя¹¹, можно сформулировать это следующим образом: требуемый уровень депозитной маржи должен корректно и адекватно отражать риск портфеля участника клиринга, а именно, обеспечивать заданную степень¹² покрытия потерь, которые могут возникнуть в результате *закрытия* всех позиций в портфеле. Особо отметим, что закрытие позиций может происходить по определенной центральный контр-

⁸The European Market Infrastructure Regulation. Действует с 2012 года.

⁹Курсив наш.

¹⁰The EMIR RTS No. 153/2013.

¹¹В оригинале: “. . . initial margin models and parameters that are risk-based and generate margin requirements sufficient to cover its potential future exposure to participants in the interval between the last margin collection and the close out of positions following a participant default.”

¹²К сожалению, «заданная степень», как правило, воспринимается буквально, как (статистический) доверительный уровень.

агентом процедуре дефолт-менеджмента, отличной от простой ликвидации. Подробно современные требования к системе риск-менеджмента центрального контрагента изложены в [121]; этот документ фокусируется на ключевых аспектах, таких как корпоративное управление, стресс-тестирование к кредитному риску и к ликвидности, покрытие обязательств, маржирование, аллокация собственных средств центрального контрагента. Сравнительно недавний случай, произошедший в сентябре 2018 года показал, что даже сравнительно небольшие позиции одного трейдера могут спровоцировать существенные потери в дефолтном эшелонировании. По нашему мнению, это явилось следствием недостатков в организации клиринга — несоответствия требуемого уровня маржи *реальному риску портфеля с учетом возможных потерь при избранной процедуре закрытия позиций* (в данном случае, при проведении аукциона). Речь идет о случае на товарном рынке, клирингуемом центральным контрагентом Nasdaq Clearing AB в Швеции: трейдер торговал спред между ценами на электричество в Скандинавии и в Германии (посредством фьючерсных позиций на Nasdaq Oslo ASA); обычно наблюдается выраженная корреляция между этими ценами, однако изменения в политике Германии, касающиеся выброса углекислого газа, а также прогноз погоды привели к расхождению цен, что резко и существенно понизило стоимость позиций, так что трейдер не смог внести дополнительное обеспечение в должном объеме. Ликвидность рынка оказалась недостаточной для стандартной ликвидации позиций, первый аукцион не удался, а второй проведенный аукцион привел к тому, что победившая на аукционе заявка привела к потерям в размере 114 миллионов евро сверх обеспечения трейдера. Был исчерпан капитал центрального контрагента в размере 7 миллионов евро, отведенный для покрытия потерь на товарном рынке¹³, а также было использовано 107 миллионов евро из фонда солидарной ответственности участников клиринга¹⁴. При обсуждении данного случая профессионалами рынка основными вопросами являются: следует ли хеджировать портфель дефолтера перед аукционом и кого следует пригласить для участия в торгах аукциона. Nasdaq Clearing AB был обвинен в неудовлетворительном принятии решений по обоим пунктам. Центральный контрагент решил не проводить хеджирование перед первым (неудачным) аукционом, опасаясь сдвинуть рынок при выполнении транзакций хеджирования в низко-ликвидном сегменте рынка, но решил выполнить некоторые операции по снижению риска до второго аукциона, который был «успешным». Произошедший в сентябре 2018 года случай убытков с Nasdaq Clearing AB в связи с неадекватным маржированием послужил одной из причин появления, а также документа [173], касающегося наилучших практик центрального контрагента.

В данной главе нас будут интересовать системы портфельного маржирования для торговли биржевыми производными финансовыми инструментами, фьючерсами и опционами. Наиболее популярной из систем портфельного

¹³Nasdaq Clearing AB обслуживает три рынка, на каждом из которых выделен определенный капитал.

¹⁴Из имевшихся 166 миллионов евро, т. е. свыше 64% фонда.

маржирования, которые используются в мировой практике, является система SPAN¹⁵, разработанная еще в 1988 году на Чикагской товарной бирже (CME); в настоящее время используется более чем в 50 биржевых и клиринговых организациях по всему миру¹⁶. Методология, называемая теперь CME SPAN, основана на определении потерь портфеля для наиболее неблагоприятного сценария из фиксированного списка сценариев движения цены и изменения волатильности рынка. Подробное изложение особенностей построения системы SPAN можно найти в [14]. Отметим, что в SPAN, и в SPAN-подобных (основанных на схожих принципах) системах, в качестве основы для расчетов обычно используются стандартные модели ценообразования опционов, основанные на классических работах Блэка—Шоулса [102], Блэка [101] и Кокса—Росса—Рубинштейна [125].

Несмотря на определяющую роль системы маржирования в качестве первого эшелона защиты центрального контрагента, как справедливо отмечают авторы статьи [118], научных работ по тематике маржирования не так уж много. Отметим интересное исследование, проведенное в [142] на эмпирических данных. Биржа Тель-Авива изначально приняла систему маржирования SPAN, устанавливающую требуемые уровни маржи портфеля в соответствии с наиболее пессимистичным из 16 возможных результатов, а в 2001 году биржа перешла на более детальную систему маржирования, основанную на наиболее неблагоприятном из 44 сценариев¹⁷. Это уникальное изменение дало возможность эмпирического тестирования влияния повышения чувствительности к риску системы маржирования на эффективность торговли опционами. Оказывается, что более точная оценка риска увеличивает эффективность рынка по некоторым показателям, включая неявную волатильность (*implied volatility*) торгуемых опционов.

Однако осуществление стандартной процедуры урегулирования дефицита маржи — ликвидации портфеля участника, может встретить существенные затруднения при низкой ликвидности рынка, что в особенности актуально на развивающихся рынках.¹⁸

С нашей точки зрения, на сегодняшний день наиболее продвинутой является система CORE, разработанная на бразильской бирже BM&FBovespa. Система CORE обобщает классический метод стресс-сценариев SPAN путем явного включения рыночной ликвидности финансовых инструментов посредством

¹⁵Standard Portfolio ANalysis of risk.

¹⁶Вместе с тем, CME Group разработала следующее поколение системы маржирования — CME SPAN 2, внедрение которой началось в 2020 году. Ожидается, что полное развертывание продлится до четырех лет, в течение которого SPAN и SPAN 2 будут параллельно доступны для конечных пользователей. Методология системы не раскрывается.

¹⁷Для сравнения — исследуемая нами система маржирования оперирует с континуумом сценариев и основана на встроженной *активной*, в отличие от SPAN, системе дефолт-менеджмента).

¹⁸Построение системы маржирования на вышеупомянутых стандартных принципах с учетом возможной потери ликвидности рынка приводит к чрезмерно высокому уровню депозитной маржи, неприемлемому для участников рынка. Общепринятая практика, состоящая, в случае дефицита депозитной маржи, в требовании внесения дополнительных средств на клиринговый счет в до клиринговой сессии, может оказаться чересчур жесткой, в частности, для развивающихся рынков. Кроме того, использование стандартных моделей ценообразования опционов может давать неудовлетворительные результаты в условиях низкой ликвидности рынка.

моделирования профиля ликвидности инструментов и механизма ликвидации на аукционе. Главным компонентом методологии CORE является определение стратегии закрытия позиций для портфеля дефолтера, ликвидации или урегулирования портфеля, от возможно простейшей стратегии закрытия — скорейшей ликвидации всех позиций портфеля (что можно назвать наивной стратегией), до более сложного формата, основанного на определенных правилах. Наиболее важная особенность CORE состоит в интерпретации закрывающих процессов как динамических, так что риск портфеля будет изменяться по мере того, как позиции меняются во времени. Признание того, что процессы управления по умолчанию являются динамическими, позволяет определить стратегию закрытия на основе модели, которая учитывает торговые ограничения, особенности расчетов и ликвидность рынка. Это формализуется посредством максимизации целевой функции, которая включает в себя потенциальные транзакционные издержки (реализованные и на рынке), предназначенной для снижения требований к ликвидности фондирования центрального контрагента в течение периода ликвидации. С математической точки зрения это сводится к решению задачи линейного программирования при выпуклых ограничениях. Идеология системы описана в [81], технические аспекты в [254]; см. также изобретение [253], касающееся процесса оценки риска при закрытии позиций портфеля.

При разработке нами нового подхода к организации торгов срочными инструментами — фьючерсами и опционами, на основе правил клиринга с оригинальной процедурой урегулирования ситуации с дефицитом маржи и системой портфельного маржирования, была использована идея детерминистского гарантированного оценивания опционов; соответствующий способ моделирования неопределенности движения цен был опубликован значительно позже, в статье [44]. Близкие идеи стали активно развиваться лет через десять-пятнадцать в работах ряда авторов, в виде направления интервального оценивания, см. [95] и модного сейчас направления робастного суперхеджирования, см., например, [109] и [115], что стало признаваться альтернативой традиционному вероятностному подходу (современное изложение которого можно найти в книге [151]).

Разработанная нами методика¹⁹ прошла апробацию в 2002 году в департаменте риск-менеджмента Чикагской товарной биржи (CME), а в 2004 году был получен патент РФ на изобретение [55]. Наш подход совместим с методологией CORE; достаточно прочитать Abstract на первой странице изобретения [253], чтобы увидеть сходство идеологии изобретений [253] и [55]. Можно сделать вывод, что изобретение [55] опередило время лет на десять — в финансовой индустрии стали внимательно относиться к качеству математических моделей лишь после (и вследствие) глобального финансового кризиса. Вместе с тем, изобретение [55] конкретнее и детальнее по сравнению с [253], поскольку относится к более узкой предметной области (срочный рынок).

¹⁹Изначально методика создавалась в начале 2000-х годов с целью внедрения на фондовой бирже «Российская торговая система» — РТС, но в связи с уходом президента биржи И. А. Тырышкина в феврале 2003 года проект не был реализован.

12.3 Описание системы маржирования, основанной на детерминистском гарантированном подходе

Предлагаемая в [55] методика организации биржевых торгов производными финансовыми инструментами с оригинальной системой портфельного маржирования и процедурой урегулирования разработана с целью обеспечить устойчивую работу не только в случае нормального, но и в случае низко-ликвидного рынка. Один из простейших вариантов реализации системы основан на урегулировании ситуации с дефицитом маржи путем управления портфелем *assignora*²⁰ при помощи фьючерсных сделок, оставляя опционные позиции неизменными. Таким образом достигается устойчивость работы системы в условиях низкой ликвидности рынка, поскольку опционы обладают значительно меньшей ликвидностью по сравнению с фьючерсами.

Система предназначена для электронной формы организации биржевых торгов. Каждая новая заявка участника торгов проверяется в режиме реального времени на допустимость²¹: это означает, что с учетом всех активных заявок и текущего портфеля участника торгов исполнение какой-либо части заявок не может привести к возникновению *дефицита маржи*. Тем самым гарантируется, что дефицит маржи не может возникнуть между клиринговыми сессиями. Перестройка портфеля, связанная с исполнением заявки, приводит к перерасчету требований к депозитной марже и, возможно, к изменению количества средств на клиринговом счете. По окончании торговой сессии проводится клиринговая сессия, по итогам которой определяется расчетная цена (цена закрытия) основы²², эта цена используется для определения новых требований по депозитной марже. Во время клиринговой сессии могут быть изменены параметры системы, такие как, например, *дневные лимиты изменения фьючерсной цены*, которые также влияют на требования по депозитной марже участников рынка.

Дефицит маржи определяется у участников торгов по результатам клиринговой сессии и подлежит урегулированию начиная со следующего торгового дня. Предлагаемая процедура урегулирования ситуации с дефицитом маржи у участника торгов — если участник не смог самостоятельно урегулировать ситуацию путем перестройки портфеля или внесения необходимых средств на

²⁰Участник торгов на срочном рынке с дефицитом депозитной маржи, потерявший право управления портфелем (поскольку участник не урегулировал самостоятельно ситуацию с дефицитом маржи в отведенное правилами клиринга время). Портфель переходит под управление клиринговой организации, осуществляющей (в соответствии с правилами биржи) корректирующие фьючерсные сделки от имени и по поручению этого участника по заранее определенному в правилах клиринга алгоритму. Данный термин является неологизмом (от англ. assignor), введенным нами, поскольку это понятие связано с оригинальной конструкцией предлагаемой системы. Означает лицо, передающее права или собственность (в нашем случае право). "Assignor is a person who assigns a right or property".

²¹В таком режиме в настоящее время работает торговая система на срочном рынке Московской биржи.

²²На английском языке "underlying" — базовый актив или ценовой индекс.

клиринговый счет в установленный правилами биржи срок (обычно несколько часов после открытия торгов) — использует переход права на управление портфелем, состоящим из фьючерсов и опционов, ко клиринговой организации. При этом управление портфелем заключается в проведении понижающих риск портфеля корректирующих операций с фьючерсами от имени и по поручению участника рынка по алгоритму, заранее и полностью описанному в правилах клиринга центрального контрагента. Ситуация с дефицитом маржи ассигнора может быть урегулирована в результате:

- 1) Исполнения контрактов (возможно, с использованием капитала центрального контрагента и средств фонда солидарной ответственности членов клиринга);
- 2) Полного закрытия позиций участника (возможно, с использованием капитала центрального контрагента и средств фонда солидарной ответственности членов клиринга);
- 3) частичного закрытия позиций участника, приводящего к устранению дефицита маржи;
- 4) Устранения дефицита маржи в результате управления центральным контрагентом портфелем ассигнора или изменения параметров торговой системы, например, дневных лимитов изменения цены;
- 5) Внесения участником необходимых средств на клиринговый счет.

В случаях 3, 4 и 5 участнику клиринга, имевшего статус ассигнора, возвращается право на проведение операций со своим портфелем, начиная со следующего торгового дня.

Уровень депозитной маржи определяется исходя из оптимального управления портфелем ассигнора при помощи *фьючерсной коррекции* (заключения центральным контрагентом фьючерсных контрактов от имени и по поручению ассигнора) без изменения его опционных позиций. Оптимизация портфеля ассигнора основана на применении метода динамического программирования для получения гарантированных оценок маржи и приводит к рекуррентным уравнениям Беллмана—Айзекса, с учетом возможных (детерминистских) сценариев поведения рынка на всем временном горизонте управления портфелем ассигнора, определяемого правилами центрального контрагента²³. Это одно из существенных отличий от систем типа SPAN, поведение которых можно назвать близоруким, поскольку там учитываются сценарии поведения рынка только лишь на день вперед. Предлагаемая процедура урегулирования ситуации с дефицитом маржи, в отличие от общепринятого способа управления, заключающегося в полной или частичной ликвидации портфеля, приводит к более щадящему с точки зрения участников рынка способу — к сохранению опционных позиций

²³Пример формализации задачи для случая европейских опционов приведен в следующем разделе.

и поддержанию сбалансированных портфелей, с точки зрения их риска. Для того, чтобы осуществить корректирующее управление портфелем ассигнора, необходимо рассчитать количество длинных или коротких фьючерсных позиций, которые необходимо открыть за торговый день. При этом заключение этих контрактов целесообразно производить постепенно небольшими порциями с тем, чтобы минимизировать влияние на формирование рыночных цен.

Для обеспечения системной устойчивости рынка способ определения уровня депозитной маржи должен удовлетворять *принципу децентрализации*, что означает выполнение свойства субаддитивности требуемого обеспечения для портфелей из опционов и фьючерсов, что обеспечивается конструкцией предлагаемой системы. При этом к брокерам должно применяться правило, обязывающее их требовать со своих клиентов депозитную маржу в размере не ниже уровня, устанавливаемого системой маржирования клиринговой организации (обычно такое правило устанавливается регулятором рынка [247]). Те члены клиринга, которые имеют клиентов, т. е. выполняют брокерские функции, в случае возникновения дефицита маржи у клиента, когда клиент не урегулирует данную ситуацию в течение времени, отведенного правилами клиринга, обязаны открыть клиенту *ассигнорский торговый счет* и *ассигнорский клиринговый счет*, на которые переводятся соответственно его позиции и его средства. Каждому такому клиенту открываются отдельные счета, т. е. соблюдается принцип сегрегации счетов с целью защиты клиентских средств. Далее центральный контрагент производит действия с этими клиентскими счетами таким же образом, как и со счетами ассигнора, являющегося членом клиринга.

В случае наличия лимитов изменения базового актива возможен гарантированный (безрисковый) вариант системы, который обеспечивает покрытие обязательств участников рынка при всех сценариях поведения рынка, включая полную потерю ликвидности; разумеется, это подразумевает высокий уровень депозитной маржи, возможно неприемлемый для участников клиринга. Это означает полное отсутствие рыночных и кредитных рисков для центрального контрагента и участников рынка²⁴. При такой конструкции капитал центрального контрагента и фонд солидарной ответственности членов клиринга покрывают лишь операционный риск.

Другой вариант предлагаемой системы отвечает случаю, когда центральный контрагент принимает часть рисков на себя. При дефолте участника клиринга покрытие его обязательств может производиться с частичным использованием капитала центрального контрагента и фонда солидарной ответственности членов клиринга. Достоинством предлагаемой в [55] системы является то, что сценарии неполного покрытия могут быть конструктивно описаны, то есть центральный контрагент имеет возможность осознанно принимать риски, а также

²⁴ Отметим, что исторически система, действовавшая с ноября 2000 года на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ) являлась гарантированной, однако обеспечивала торговлю только фьючерсами. Что касается гарантированной портфельной системы торговли фьючерсами и опционами, которую можно рассматривать и как один из вариантов реализации изобретения [253], то она не имеет прецедентов и аналогов.

регулировать их путем изменения параметров системы²⁵.

В зависимости от выбора конкретных спецификаций опционов (американского или европейского типа, расчетные или поставочные, *традиционное маржирование опционов* или *фьючерсный стиль маржирования опционов*), а также в зависимости от наличия или отсутствия лимитов на дневное изменение фьючерсных цен, возможны различные варианты реализации системы.

Хеджирующая (корректирующая) стратегия системы маржирования в [55] может быть встроена в стандартную процедуру клиринга различными способами. Так, например, для одной из реализаций предлагается выделение этапа корректирующего управления портфелем участника в течение заранее заданного срока, если сам участник не смог вовремя урегулировать ситуацию с дефицитом маржи. Если в течение этого срока корректирующее управление позволило устранить дефицит, а срок исполнения еще не наступил, портфель возвращается участнику. В противном случае участник меняет статус с ассигнора на дефолтера, а портфель переходит клиринговой организации безвозвратно. Клиринговая организация проводит процедуру финализации²⁶, которая отличается от корректирующего управления тем, что хеджирование производится всеми имеющимися на рынке средствами (в том числе с проведением сделок с опционами, снижающими риск портфеля) с целью минимизировать функцию выплат портфеля в течение всего срока, оставшегося до исполнения или полного закрытия позиций портфеля. В случае корректирующего управления используются наиболее ликвидные инструменты — фьючерсы, а целью является устранение дефицита маржи. Процедуру можно упростить, оставив лишь финализацию, т. е. если участник не смог устранить дефицит самостоятельно в отведенный срок, он сразу становится дефолтером.

12.4 Математическая модель маржирования с фьючерсной коррекцией

Математическая модель определения требуемого уровня депозитной маржи строится по аналогии с идеологией гарантированного детерминистского подхода к суперхеджированию, аналогично подходу, изложенному в главе 1: из экономического смысла задачи выводятся уравнения Беллмана—Айзекса. Идею изобретения [55], описывающую способ определения уровня депозитной маржи и способ урегулирования ситуации с дефицитом маржи, основанный на фьючерсной коррекции, можно проиллюстрировать на конкретной реализации, представленной ниже.

Предположим, что клиринговая сессия производится один раз в день и в системе маржирования предписано проведение фьючерсных корректирующих

²⁵В результате описанного выше случая с Nasdaq Clearing AB было значительно подорвано доверие к проведению аукционов для закрытия позиций дефолтера.

²⁶Терминология наша.

сделок один раз²⁷ каждый торговый день, вплоть до экспирации, одинаковой для всех финансовых инструментов в портфеле, а срок корректирующего управления равен числу дней до экспирации. По существу, фьючерсную коррекцию, проводимую клиринговой организацией с целью уменьшения потенциальных потерь и взимания средств, необходимых для покрытия потенциальных убытков, можно интерпретировать как разновидность хеджирования²⁸ опционных позиций при помощи фьючерсных сделок.

Опишем метод расчета маржи на примере рынка европейских опционов на фьючерс (европейский опцион характеризуется тем, что объем выплат определяется на основе цены закрытия дня исполнения данной серии опционов). На движение фьючерсных цен в модели наложены ограничения: изменение цены внутри дня не должно выводить цену за пределы коридора-интервала²⁹ $I(x) = [x - \Delta^d, x + \Delta^u]$, где x — цена закрытия предыдущего торгового дня, $\Delta^d > 0$ и $\Delta^u > 0$ — нижний и верхний лимиты изменения цен фьючерсной цены соответственно³⁰. Величины этих лимитов являются параметрами системы, в частности, могут зависеть от конкретного инструмента от предыстории цен. Как правило, лимиты изменения цен фьючерсной цены устанавливаются как определенный процент цены закрытия предыдущего торгового дня; предположим в нашей модели, что $\Delta^d = \alpha x$, а $\Delta^u = \beta x$, где $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$ (на практике α и β бывают порядка нескольких процентов, причем поскольку опасения падения обычно сильнее роста, то разумно выбирать $\alpha > \beta$). Случаи потери ликвидности фьючерсного рынка, следует относить к крайне маловероятным и экстремальным, так что на покрытие убытков, если они возникают, разумно использовать средства из фондов “default waterfall”, начиная с капитала клиринговой организации³¹. При условии ликвидности фьючерсного рынка строится гарантированная система маржирования, при которой взимаемая с участника клиринга маржа гарантированно покрывает возможные потери биржи при неисполнении этим участником своих обязательств. Это достигается за счет исполнения биржей предписанной процедуры урегулирования ситуации с дефицитом маржи и непосредственной связью требуемого уровня депозитной маржи с этой процедурой.

Предположим, что корректирующая фьючерсная сделка, производящаяся

²⁷ На самом деле, можно проводить такие сделки несколькими порциями, если предположить, что цены остаются в течении торгового дня в заданном коридоре — тогда и средневзвешенная цена также будет находиться в этом коридоре. Наличие коридора как раз предполагается в модели, описанной ниже. Однако имеется определенные отличия от традиционной постановки задачи хеджирования, которые подробно описаны ниже, поэтому мы предпочитаем называть такие сделки корректирующими.

²⁸ Однако имеется определенные отличия от традиционной постановки задачи хеджирования, которые подробно описаны ниже, поэтому мы предпочитаем называть такие сделки корректирующими.

²⁹ В предположении риск-нейтральности участников рынка в классической работе [107] показано, что ценовые лимиты могут способствовать снижению риска дефолта, сократить маржинальное требование и снизить общую стоимость контракта.

³⁰ Тем самым, в модели отсутствуют арбитражные возможности, см. главу 2.

³¹ На русском языке терминология не сложилась.

один раз в день, происходит по цене, входящей интервал $I(x)$, однако точное значение этой цены заранее неизвестно, так что в модели возникают косвенные транзакционные издержки, описывающие наиболее неблагоприятный сценарий при совершении этой сделки. С учетом этого обстоятельства, рассмотрим $V_t, T(x, k)$ количество денежных средств на счете в момент времени $t \leq T$, которое должна быть неотрицательным, необходимых для покрытия потенциальных потерь портфеля участника, для которого будут проводиться корректирующие сделки раз в день вплоть до исполнения, зависящее не только от цены x , но и от количества фьючерсов³² k в корректируемом портфеле по итогам закрытия предыдущего торгового дня. Будем далее называть $V_{t,T}(x, k)$ целевой функцией и для облегчения обозначений в последующих выкладках будем опускать индекс T , т. е. будем использовать обозначение $V_t(x, k)$ для целевой функции.

Рыночный риск портфеля опционов европейского типа определяется функцией выплат по портфелю $f(x)$ — величиной средств, который получает (в случае положительного значения) или же выплачивает (в случае отрицательного значения) владелец данного портфеля в момент исполнения через срок T , в зависимости от цены закрытия x основы (фьючерсной цены) в этот момент. Эта функция будет предполагаться липшицевой, что на самом деле вполне естественно, так как в случае комбинации опционов call и put (с одним сроком экспирации и разными ценами исполнения) она будет кусочно-линейной с конечным числом интервалов линейности.

В терминальный момент должно выполняться $V_T(x, k) \geq -f(x)$, так что положим

$$V_T(x, k) = (-f(x))^+ = (f(x))^- . \quad (12.4.1)$$

Для получения рекуррентных соотношений для целевой функции предположим, что на шаге $t < T$ после клиринговой сессии на счете имеется (неотрицательная) сумма v и открыта позиция в размере k фьючерсов (это число отрицательно для коротких позиций и положительно для длинных). Если корректирующая фьючерсная сделка покупки/продажи m фьючерсов происходит по цене y , входящей интервал $I(x)$, а цена закрытия следующего дня $t+1$, также входящая в интервал $I(x)$, равна z , то вариационная маржа составит величину $k(z-x) + m(z-y)$, а для покрытия потерь в терминальный момент необходимо, чтобы

$$v + k(z-x) + m(z-y) \geq V_{t+1}(z, k+m)$$

для любых $y \in I(x)$ и $z \in I(x)$. При этом m , объем сделки (со знаком) можно выбрать оптимальным образом, так что³³

$$V_t(x, k) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} \max_{y \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) + kx - (k+m)z + my]^+ . \quad (12.4.2)$$

³²Поскольку от количества корректирующих фьючерсов в портфеле зависят косвенные транзакционные издержки.

³³Здесь и далее используются $a^+ = \max(0, a)$ и $a^- = \max(0, -a)$, для $a \in \mathbb{R}$, а \mathbb{Z} обозначает множество всех целых чисел.

Нетрудно упростить формулу (12.4.2), явно находя максимум по y выражения my , который равен

$$\max_{y \in I(x)} my = mx + (m^- \Delta^d + m^+ \Delta^u) = mx + (\alpha m^- + \beta m^+) x; \quad (12.4.3)$$

с экономической точки зрения неотрицательная величина $c(x, m)$, задаваемая посредством

$$c(x, m) = m^- \Delta^d + m^+ \Delta^u = u(m)x, \quad (12.4.4)$$

где

$$u(m)x = (\alpha m^- + \beta m^+) x, \quad (12.4.5)$$

представляет собой косвенные транзакционные издержки³⁴, максимально возможные за торговый день при сделанных предположениях относительно эволюции фьючерсной цены. Используя (12.4.3) и (12.4.4), рекуррентные соотношения для целевой функции приобретают вид следующих уравнений Беллмана—Айзекса:

$$V_t(x, k) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k + m) - (k + m)(z - x) + c(x, m)]^+, \quad (12.4.6)$$

$$t = T - 1, \dots, 0.$$

При этом, в действительности, нет необходимости производить операцию взятия положительной части от квадратных скобок в (12.4.6), т. е. для целевой функции имеют место уравнения

$$V_T(x, k) = (f(x))^-,$$

$$V_t(x, k) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k + m) - (k + m)(z - x) + c(x, m)], \quad (12.4.7)$$

$$t = T - 1, \dots, 0.$$

Действительно, $V_T(x, k) = (f(x))^- \geq 0$, а для $t < T$, предполагая, что в (12.4.7) выполняется $V_{t+1}(x, k) \geq 0$ и учитывая неравенство

$$\begin{aligned} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k + m) - (k + m)(z - x) + c(x, m)] &\geq \\ &\geq \max_{z \in I(x)} [-(k + m)(z - x) + c(x, m)] = \\ &= c(x, -(k + m)) + c(x, m) \end{aligned} \quad (12.4.8)$$

получаем, что для $V_t(x, k)$ из (12.4.7) выполняется неравенство

$$V_t(x, k) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k + m) - (k + m)(z - x) + c(x, m)] \geq 0. \quad (12.4.9)$$

³⁴Более реалистичная модель определяла бы косвенные транзакционные издержки на основе книги заявок.

Поскольку

$$\left\{ \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)] \right\}^+ = \\ = \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)]^+,$$

то с учетом (12.4.9), т. е. неотрицательности целевой функции имеют место, определяемой уравнениями (12.4.7), рекуррентные уравнения (12.4.6) равносильны уравнениям (12.4.7).

Уравнения (12.4.7) позволяют дать интерпретацию задаче фьючерсной коррекции как специальную задачу суперхеджирования для европейского опциона с функцией выплат $(f(x))^-$, с транзакционными издержками (12.4.4) и дискретной (целочисленной) стратегией хеджирования фьючерсами с нулевым количеством фьючерсов в начальный момент, рассматривая количество средств на счете как безрисковый актив с торговым ограничением — запретом овердрафта.

Использование в (12.4.7) максимума, а не точной верхней грани оправдано благодаря предположению о липшицевости функции f , поскольку в этом случае целевая функция $x \mapsto V_t(x, k)$ также удовлетворяет условию Липшица. В следующем разделе, касающемся численного решения, приведены оценки константы липшицевости для функций $x \mapsto V_t(x, k)$.

Имея решения уравнений (12.4.7) с терминальным условием (12.4.1), в качестве требуемого уровня депозитной маржи в текущий момент $t = 0$ при фьючерсной цене x_0 для портфеля с функцией выплат $f(x)$ через срок T можно выбрать величину

$$M(f, T, x_0) = V_0(x_0, 0). \quad (12.4.10)$$

При этом, очевидно,

$$M(f, T-s, x) = V_s(x, 0). \quad (12.4.11)$$

Обозначим

$$A_{T-s}(x_s) = \max_{x \in I_{T-s}(x_s)} (f(x))^- , \quad (12.4.12)$$

где

$$I_{T-s}(x_s) = [(1-\alpha)^T x_s, (1+\beta)^T x_s]. \quad (12.4.13)$$

Множество возможных значений фьючерсной цены в момент экспирации, при условии, что фьючерсная цена X_s в момент времени $s \in \{0, \dots, T-1\}$ принимает значение x , будет $I_{T-s}(x)$ и имеет место неравенство

$$M(f, T-s, x) \leq A_{T-s}(x_s), \quad (12.4.14)$$

поскольку в случае перехода владельца портфеля в состояние ассигнора³⁵. в момент времени $s \in \{0, \dots, T-1\}$, выбирая в качестве корректирующей страте-

³⁵В соответствии с изобретением [55, приложение] ассигнор — участник торгов на срочном рынке с дефицитом депозитной маржи, потерявший право управления портфелем (поскольку самостоятельно не урегулировал ситуацию с дефицитом маржи в отведенное правилами клиринга время). Портфель переходит под управление биржи, осуществляющей (в соответствии с правилами биржи) корректирующие фьючерсные сделки от имени и по поручению этого участника по заранее определенному в правилах клиринга алгоритму.

гии отсутствие коррекции (т. е. сделок со фьючерсами), обеспечение в размере $A_{T-s}(x_s)$ покрывает любые возможные потери по портфелю.

Оценим сверху величину $V_t(x, k)$, определяемую соотношениями (12.4.7). Используем тот факт что минимум по m в (12.4.7) не превосходит значения выражения

$$\max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)]$$

для конкретного значения $m = -k$ и получим неравенство

$$\begin{aligned} V_t(x, k) &\leq \max_{z \in I(x)} V_{t+1}(z, 0) + c(x, -k) = \\ &= \max_{z \in I(x)} M(f, T - (t+1), z) + c(x, -k) \leq \\ &\leq \max_{z \in I(x)} A_{T-(t+1)}(z) + c(x, -k) = \\ &= A_{T-t}(x) + c(x, -k); \end{aligned} \quad (12.4.15)$$

здесь были использованы (12.4.10), (12.4.12), (12.4.13) и (12.4.14). с учетом неравенства (12.4.8), те значения m для которых $c(x, -(k+m)) + c(x, m) > A_{T-t}(x) + c(x, -k)$, не могут доставлять минимум в (12.4.7). Таким образом, если в момент времени t заданы фьючерсная цена x и количество k корректирующих фьючерсов в портфеле, то минимум по m достаточно искать на ограниченном множестве

$$D_t(x, k) = \{m : c(x, -(k+m)) + c(x, m) \leq A_{T-t}(x) + c(x, -k)\}. \quad (12.4.16)$$

Тем самым, уравнения (12.4.7) можно переписать в виде

$$V_T(x, k) = (f(x))^-,$$

$$\begin{aligned} V_t(x, k) &= \min_{m \in D_t(x, k)} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)], \\ & \quad t = T-1, \dots, 0, \end{aligned} \quad (12.4.17)$$

где $D_t(x, k)$ задается при помощи (12.4.16). Для дальнейшего также будет удобно использовать уравнения Беллмана—Айзекса (12.4.17) с заменой переменных, полагая $k' = k + m$ (это количество фьючерсных позиций в следующий момент времени, когда в настоящий момент количество корректирующих фьючерсов равно k). Уравнения (12.4.17) перепишутся в виде

$$V_T(x, k) = (f(x))^-,$$

$$\begin{aligned} V_t(x, k) &= \min_{k' \in E_t(x, k)} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k') - k'(z-x) + c(x, k' - k)], \\ & \quad t = T-1, \dots, 0, \end{aligned} \quad (12.4.18)$$

где ограниченное множество $E_t(x, k)$ задается при помощи

$$E_t(x, k) = \{k' : c(x, -k') + c(x, k' - k) \leq A_{T-t}(x) + c(x, -k)\}. \quad (12.4.19)$$

В соответствии с постановкой задачи, параметры m и k являются целочисленными. Предположим, однако, на некоторое время, что они могут изменяться непрерывным образом, т. е. принимают вещественные значения, и покажем, что функция $k \mapsto V_t(x, k)$ является выпуклой³⁶. Для терминального момента времени это выполнено в силу формулы (12.4.1). Предположим, что это выполнено для момента времени $t + 1$, где $t < T$, тогда выражение под знаком минимума в (12.4.4) является выпуклым по совокупности переменных m и k (как максимум выпуклых функций), поэтому ее минимум по переменной m будет выпуклой функцией; аргумент этой функции, доставляющий минимум может быть неединственными, минимизаторы образуют интервал при фиксированных t и x .

В уравнениях Беллмана—Айзека (12.4.17) можно перейти к смешанным стратегиям «рынка», если в момент времени t заданы фьючерсная цена x и количество k корректирующих фьючерсов в портфеле. А именно, можно рассмотреть класс распределений (вероятностных мер) $\mathcal{P}(x)$ на интервале $I(x)$, являющийся смешанным расширением, т. е. удовлетворяющий свойствам:

- 1) Топологический носитель распределений из $\mathcal{P}(x)$ должен содержаться в $I(x)$,
- 2) Класс $\mathcal{P}(x)$ содержит все распределения, сосредоточенные в единственной точке из $I(x)$.

Легко видеть, что для любой функции φ такой что определены интегралы (в смысле Лебега) $\int \varphi(u)Q(du)$ для всех распределений $Q \in \mathcal{P}(x)$ имеет место равенство

$$\max_{u \in I(x)} \varphi(u) = \max_{Q \in \mathcal{P}(x)} \int \varphi(u)Q(du).$$

Можно использовать классические результаты об игровом равновесии из теории антагонистических игр, дополнительно предполагая

- 3) Замкнутость $\mathcal{P}(x)$ относительно образования смесей распределений, т. е. выпуклость класса $\mathcal{P}(x)$.

Конкретно, выберем в качестве $\mathcal{P}(x)$ класс всех распределений³⁷ на $I(x)$; в случае свойства 1), 2) и 3), очевидно, выполняются. Тогда для функции

$$\psi_{t,k,x}(m, z) = V_{t+1}(z, k+m) - (k^* + m)(z - x) + c(m),$$

³⁶Понятие выпуклости имеет смысл и для функций целочисленного аргумента; одно из возможных определений состоит в возможности продолжения такой функции до выпуклой функции вещественного аргумента. Необходимое и достаточное условие для этого состоит в требовании, чтобы значение функции в каждой точке не превосходило бы значения аффинной функции, значения которой в соседних точках совпадают со значениями данной функции.

³⁷Заданных на σ -алгебре борелевских подмножеств $I(x)$.

фигурирующей в формуле (12.4.7), выпуклой по аргументу m (здесь мы опять предполагаем, что m изменяется непрерывным образом), применима теорема 7.2.1, в соответствии с которой игровое равновесие достигается для смешанных стратегий $Q_{t,k,x}^*$ по второй переменной функции $\psi_{t,k,x}$, сосредоточенных не более чем в двух точках из $I(x)$ — это наиболее неблагоприятный (стохастический) сценарий поведения цен на рынке в момент времени $t + 1$, если в момент времени t заданы фьючерсная цена x и количество k корректирующих фьючерсов в портфеле.

Поскольку в реальности эволюция, вообще говоря, цен не следует экстремальным (наиболее неблагоприятным) сценариям, то средства в размере $V_i(x, k)$ на счете в момент времени t при фьючерсной цене x и k корректирующих фьючерсов в портфеле, по своему смыслу представляющие резерв, необходимый при оптимальной корректирующей стратегии для покрытия потенциальных потерь портфеля участника для всех допустимых сценариев (в том числе для наиболее неблагоприятного стохастического сценария поведения цен на рынке), могут оказаться избыточными на некотором шаге s корректирующей фьючерсной стратегии.

В этом случае ассигнору может быть возвращен его портфель. В принципе, условие возврата портфеля может быть формализовано разными способами. Наиболее естественным условием представляется наличие на клиринговом счете ассигнора в момент s , где $t < s < T$, средств v_s (сформировавшихся в результате движения фьючерсных цен и проведения корректирующих сделок), достаточных, начиная с момента $s + 1$, для гарантированного покрытия транзакционных издержек по ликвидации корректирующих позиций по фьючерсам и при этом гарантированного соблюдения требований по обеспечению. Таким образом, принять решение о возврате портфеля по результатам клиринговой сессии³⁸ в конце периода s , можно при выполнении следующего условия:³⁹

$$v_s \geq \max_{z \in I(x)} M(f, T - (s + 1), z) + c(x, -k). \quad (12.4.20)$$

Этот эффект продемонстрирован на модельном примере ниже, в следующем разделе.

В работе [76], где впервые были введены аксиомы показателя риска портфеля⁴⁰, фигурирует аксиома субаддитивности, которую мы считаем основной и, с практической точки зрения, существенным требованием к системе маржирования, обеспечивающим корректность при маржировании нескольких кли-

³⁸Тем самым, участник клиринга получает право возобновить операции на рынке с возвращенным портфелем на следующий торговый день. При желании, этот участник клиринга может ликвидировать позиции по корректирующим фьючерсам (которые снижают риск портфеля и, как следствие уровень требуемой маржи), получая, тем самым, портфель с исходной функцией выплат. После ликвидации позиций по корректирующим фьючерсам у него должно гарантированно остаться достаточно средств для поддержания требований по депозитной марже.

³⁹Отметим, что правая часть неравенства (12.4.20) не меньше $V_{s,T}(x, k)$, см. неравенство (12.4.15).

⁴⁰Также называемого мерой риска (risk measure).

ентских портфелей, а также переносимость позиций несегрегированных портфелей (portability) в случае дефолта члена клиринга. Если обозначить через $\varrho(V)$ — неотрицательный показатель риска для текущей стоимости портфеля V то субаддитивность означает неравенство

$$\varrho(V_1 + V_2) \leq \varrho(V_1) + \varrho(V_2).$$

Предложение 12.4.1. *Требуемый уровень депозитной маржи удовлетворяет условию субаддитивности, т. е.*

$$M(f_1 + f_2, T, x_0) \leq M(f_1, T, x_0) + M(f_2, T, x_0). \quad (12.4.21)$$

Доказательство. Установим более общее неравенство, из которого (12.4.21) вытекает по определению (12.4.10). Пусть $V_t^i(x, k)$ — целевые функции, отвечающие портфелям с функциями выплат f_i , $i = 1, 2, 3$, где $f_3 = f_1 + f_2$, тогда

$$V_t^3(x, k_1 + k_2) \leq V_t^1(x, k_1) + V_t^2(x, k_2). \quad (12.4.22)$$

Покажем справедливость (12.4.22) по индукции; для $t = T$ это вытекает из (12.4.1) и неравенства $(a + b)^- \leq (a)^- + (b)^-$. Пусть (12.4.22) выполняется для $t = T, \dots, s+1$, где $s \in \{0, \dots, T-1\}$. Из (12.4.4) и (12.4.5) следует неравенство

$$c(x, m_1 + m_2) \leq c(x, m_1) + c(x, m_2);$$

с использованием этого неравенства и индуктивного предположения имеем

$$\begin{aligned} V_s^3(x, k_1 + k_2) &= \\ &= \min_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{s+1}^3(x, k_1 + k_2 + m_1 + m_2) - \\ &- (k_1 + k_2 + m_1 + m_2)(z - x) + c(x, m_1 + m_2)] \leq \\ &\leq \min_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \left\{ \max_{z \in I(x)} [V_{s+1}^1(x, k_1 + m_1) - (k_1 + m_1)(z - x) + c(x, m_1)] + \right. \\ &+ \left. \max_{z \in I(x)} [V_{s+1}^2(x, k_2 + m_2) - (k_2 + m_2)(z - x) + c(x, m_2)] \right\} = \\ &= \min_{m_1 \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{s+1}^1(x, k_1 + m_1) - (k_1 + m_1)(z - x) + c(x, m_1)] + \\ &+ \min_{m_2 \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{s+1}^2(x, k_2 + m_2) - (k_2 + m_2)(z - x) + c(x, m_2)] = \\ &= V_s^1(x, k_1) + V_s^2(x, k_2). \end{aligned}$$

Отметим, что свойство (12.4.22) имеет интересную экономическую интерпретацию, заключающейся в возможности использования центральным контрагентом в его процедуре дефолт-менеджмента в случае нескольких ассигноров (с одинаковым сроком до исполнения опционов в их портфелях) оптимальную стратегию коррекции совокупного портфеля всех таких ассигноров. Эта особенность системы маржирования продемонстрирована на модельном примере ниже, в следующем разделе.

Аксиома монотонности, — когда неравенство $V_1 \leq V_2$ влечет $\varrho(V_1) \geq \varrho(V_2)$, также представляется разумным требованием к системе маржирования и выполняется в нашем случае. Пусть $V_t^i(x, k)$ — целевые функции, отвечающие портфелям с функциями выплат $f_i, i = 1, 2$ и $f_1 \leq f_2$. Поскольку функция $u \mapsto (u)^-$ является монотонно невозрастающей, то $V_T^1(x, k) \geq V_T^2(x, k)$. По индукции, непосредственно из соотношений (12.4.7), получаем неравенства $V_t^1(x, k) \geq V_t^2(x, k)$ для $t = T - 1, \dots, 0$, откуда $M(f_1, T, x_0) \geq M(f_2, T, x_0)$. \square

Что касается свойства положительной однородности, т. е. свойство $\varrho(\lambda V) = \lambda \varrho(V)$, $\lambda \geq 0$, то, по нашему мнению, оно не является естественным с экономической точки зрения и вполне может не выполняться для малых портфелей⁴¹; в нашем случае это связано с целочисленными позициями по фьючерсам. Если показатель риска ϱ удовлетворяет свойству аддитивности, то последовательность $\frac{\varrho(nV)}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ сходится по лемме Фекете [148] к пределу $\rho^* = \inf\{\frac{\varrho(nV)}{n}, n = 1, 2, \dots\}$. Если кроме того, функция $\lambda \mapsto \varrho(\lambda V)$, $\lambda \geq 0$ является монотонно неубывающей, то нетрудно видеть, что $\frac{\varrho(\lambda V)}{\lambda} \rightarrow \rho^*$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Таким образом, для больших портфелей $\varrho(\lambda V)$ ведет себя асимптотически как $\lambda \rho^*$, т. е. можно говорить об асимптотической положительной однородности; при этом $\varrho(\lambda V) \geq \lambda \rho^*$ для всех $\lambda \geq 0$, так что асимптотический эффект можно интерпретировать как снижение роли гранулированности для большого портфеля.

В нашем случае, в силу неотрицательности и положительной однородности функции $u \mapsto (u)^-$, функция $\lambda \mapsto M(\lambda f, T, x_0)$, $\lambda \geq 0$ является монотонно неубывающей, что проверяется по индукции аналогично приведенным выше рассуждениям, касающимся свойства монотонности. При этом, если бы параметры m и k принимали не целочисленные, а вещественные значения, то свойство положительной однородности, нетрудно видеть, было бы выполнено.

12.5 Свойства решений уравнений Беллмана—Айзекса, полезные при численном решении

При численном решении уравнений Беллмана—Айзекса (12.4.18) полезно иметь явный вид множества $E_t(x, k)$, задаваемого соотношением (12.4.19). Учитывая (12.4.4) и (12.4.5), нетрудно убедиться, что

$$E_t(x, k) = [-a_t(x), k + a_t(x)] \quad \text{при } k \geq 0, \quad (12.5.1)$$

⁴¹При этом типично на срочном (биржевом) рынке преобладают малые или средние портфели. По этой причине большие портфели на срочном рынке представляют риск, связанный с ограниченной ликвидностью рынка; классическим примером является случай с банком Société Générale, который в январе 2008 года потерял несколько миллиардов евро, закрывая позиции (в основном на Eufex) за три дня торгов в период после значительного падения фондовых индексов на рынке.

$$E_t(x, k) = [k - a_t(x), a_t(x)] \quad \text{при } k < 0, \quad (12.5.2)$$

где

$$a_t(x) = \frac{A_{T-t}(x)}{(\alpha + \beta)x}; \quad (12.5.3)$$

можно также записать (12.5.1) и (12.5.2) в виде

$$E_t(x, k) = [-k^- a_t(x), k^+ + a_t(x)]. \quad (12.5.4)$$

Из (12.5.4) следует, что для

$$k' \in E_t(x, k) \quad (12.5.5)$$

выполняется неравенство

$$|k'| \leq |k| + a_t(x). \quad (12.5.6)$$

Обозначим через k_t возможное количество корректирующих фьючерсов в портфеле, если использовать ограничение (12.5.5) на шаге t , а через x_t — возможную цену на шаге t . Используя неравенство (12.5.6), имеем для

$$k_0 = 0,$$

$$|k_{t+1}| \leq |k_t| + a_t(x_t), \quad x_t \in I_t(x_0); \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (12.5.7)$$

В силу (12.5.3)

$$a_t(x_t) \leq \frac{\max_{x_t \in I_t(x_0)} A_{T-t}(x_t)}{(\alpha + \beta) \min_{x_t \in I_t(x_0)} x_t} = \frac{A_T(x_0)}{(\alpha + \beta)(1 - \alpha)^t x_0}. \quad (12.5.8)$$

Из (12.5.7) и (12.5.8) следует, что для $t = 0, \dots, T$

$$|k_t| \leq \frac{A_T(x_0)}{(\alpha + \beta)x_0} \sum_{s=0}^{t-1} \frac{1}{(1 - \alpha)^s} = \frac{A_T(x_0)(1 - \alpha)}{(\alpha + \beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^t - 1 \right). \quad (12.5.9)$$

Таким образом, решая (12.4.18) последовательно для $t = T - 1, \dots, 0$, достаточно находить значения целевой функции $V_t(x, k)$ для значений аргументов

$$x \in I_t(x_0),$$

$$k \in \left[-\frac{A_T(x_0)(1 - \alpha)}{(\alpha + \beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^t - 1 \right), \frac{A_T(x_0)(1 - \alpha)}{(\alpha + \beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^t - 1 \right) \right], \quad (12.5.10)$$

где $I_t(x_0)$ задается формулой (12.4.13).

Аналогично рассуждениям из главы 4 оценим константы Липшица для целевых функций

$$x \mapsto V_t(x, k) = v_{t,k}(x), \quad t = T, \dots, 1, \quad (12.5.11)$$

когда аргументы удовлетворяют ограничениям (12.5.10), что полезно при оценке точности приближенного решения, в частности при определении шага сетки

(по ценовой переменной целевой функции), обеспечивающего заданную погрешность.

Будем обозначать через L_g константу Липшица функции $g : X \rightarrow Y$, где X и Y -метрические пространства, в том числе и для многозначной функции с компактными значениями, с метрикой Помпею—Хаусдорфа на множестве компактов. Для функции $v_{T,k}(\cdot)$ задаваемой (12.5.11), константа Липшица равна $L_{f^-} \leq L_f$. Предположим, что для $s = t + 1$, где $t < T$, функция $v_{t+1,k}(x)$ липшицева с константой Липшица равной $L_{v_{t+1,k}}$ на множестве аргументов $I_t(x_0)$. Запишем уравнения (12.4.18) в виде

$$V_t(x, k) = \min_{k' \in E_t(x, k)} [c(x, k' - k) + M_{t,k'}(x)], \quad (12.5.12)$$

где

$$M_{t,k}(x) = \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k') - k'(z - x)] = \max_{y \in K(x)} [V_{t+1}(x + y, k') - k'y], \quad (12.5.13)$$

$$K(x) = [-\alpha x, \beta x]. \quad (12.5.14)$$

Для $x, x' \in I_t(x_0)$ имеем

$$|v_{t+1,k}(x) - v_{t+1,k}(x')| \leq \max_{k' \in E_t(x, k)} [|c(x, k' - k) - c(x', k' - k)| + |M_{t,k'}(x) - M_{t,k'}(x')|]. \quad (12.5.15)$$

С учетом (12.4.4), (12.4.5) и (12.5.4) для аргументов, удовлетворяющих ограничениям (12.5.10), имеем

$$\begin{aligned} & \max_{k' \in E_t(x, k)} |c(x, k' - k) - c(x', k' - k)| = \\ & = [\alpha(k^+ + a_t(x))] \vee [\beta(k^- + a_t(x))] |x - x'| \leq (\alpha \vee \beta) (|k| + a_t(x)) |x - x'| \leq \\ & \leq \left[(\alpha \vee \beta) \frac{A_T(x_0)(1 - \alpha)}{(\alpha + \beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^{t+1} - 1 \right) \right] |x - x'|. \quad (12.5.16) \end{aligned}$$

Выражение $|M_{t,k'}(x) - M_{t,k'}(x')|$ оценивается аналогично доказательству теоремы 4.2.1, см. формулу (4.2.12):

$$\begin{aligned} |M_{t,k'}(x) - M_{t,k'}(x')| & \leq L_{v_{t+1,k}} L_K |x - x'| + |k'| L_K |x - x'| + L_{v_{t+1,k}} |x - x'| = \\ & = [(L_{v_{t+1,k}}(L_K + 1) + |k'| L_K) |x - x'|, \end{aligned}$$

где

$$L_K = \alpha \vee \beta,$$

поскольку расстояние Помпею—Хаусдорфа между интервалами $K(x)$ и $K(x')$, определяемых посредством (12.5.14), равно $(\alpha \vee \beta) |x - x'|$. С использованием (12.5.9) получаем

$$\max_{k' \in E_t(x, k)} |M_{t,k'}(x) - M_{t,k'}(x')| \leq$$

$$\leq \left[(L_{v_{t+1,k}}(L_K + 1) + \frac{A_T(x_0)(1-\alpha)}{(\alpha+\beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^{t+1} - 1 \right) L_K \right] |x - x'|. \quad (12.5.17)$$

Таким образом, из (12.5.13), (12.5.16) и (12.5.17) получаем

$$L_{v_{t,k}} \leq \left[(L_{v_{t+1,k}}((\alpha \vee \beta) + 1) + 2 \frac{A_T(x_0)(1-\alpha)}{(\alpha+\beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^{t+1} - 1 \right) (\alpha \vee \beta) \right], \quad (12.5.18)$$

Проведенные индуктивные рассуждения, кроме того, позволяют нам убедиться, что полученные оценки в (12.5.18) не зависят от k , что позволяет для аргументов, удовлетворяющих (12.5.10), рекуррентно оценивать константы Липшица. Отметим, что последовательно находя решение уравнений Беллмана—Айзекса для $t = T - 1, \dots, 0$, размер интервалов (12.5.10) экспоненциально убывает, однако это компенсируется возрастающими экспоненциально требованиями к числу точек сетки, в силу роста оценок констант Липшица в (12.5.18).

Кроме того, напомним, что на самом деле функции $v_{t,k}$ зависят от T (мы это умышленно не учитывали для облегчения обозначений, опуская T в обозначении целевой функции $V_{t,T}(x, k)$, т. е. обозначая ее через $V_t(x, k)$); положим $v_{t,k} = W_{t,T,k}$ и обозначим

$$\Lambda_{t,T} = L_{W_{t,T,k}}, \quad (12.5.19)$$

При расчете оптимальной корректирующей стратегии, отвечающая переходу владельца портфеля в состояние ассигнора в момент времени 0, с обеспечением, определяемым (12.4.10), можно сначала решать задачу минимизации (12.5.12) для непрерывных значений аргумента k' (что может быть разумным, поскольку минимизируемая функция является выпуклой), а потом выбрать одно из ближайших целочисленных значений.

12.6 Расчеты на модельных примерах, демонстрирующие эффективность системы маржирования с фьючерсной коррекцией

Для численного расчета требуемого уровня депозитной маржи, задаваемого в начальный момент времени соотношением (12.4.10), а в последующие моменты времени — соотношениями (12.4.11), будем вычислять значения целевой функции цены $V_{t,T}(x, k)$ на целочисленной сетке по k и равномерной сетке по x с шагом δ_t , учитывая (12.5.10). При этом, значения функции цены в промежуточных точках $I_t(x_0)$ при необходимости рассчитываются путем линейной интерполяции. Заметим, что в силу терминального условия (12.4.1) общая ошибка вычисления ε_t не превосходит суммы ошибок линейной интерполяции на шаге t и всех последующих шагах. Оценивая ошибку интерполяции на каждом шаге и учитывая липшицевость функций цены по аргументу x , можно прийти

к выводу, что для обеспечения заданной точности⁴² $\varepsilon = \varepsilon_0$ достаточно на шаге $t = 1, 2, \dots, T - 1$ выбрать шаг сетки $\delta_t = \frac{2\varepsilon_0}{T \cdot \Lambda_{t,T}}$, где $\Lambda_{t,T}$ — оценки для констант Липшица (12.5.19) рассчитываемые рекуррентно согласно (12.5.18). Задача является вычислительно сложной, однако может быть оптимизирована как за счет решения *непрерывной* задачи минимизации по аргументу k' , так и за счет распараллеливания по различным целочисленным значениям k' .

Приведенные на рисунках 12.1, 12.5 и 12.2 результаты расчетов носят иллюстративный характер и призваны продемонстрировать основные положения предлагаемого подхода. Для начала исследуем динамику изменения уровня депозитной маржи в зависимости от времени до экспирации (рис. 12.1). Заметим, что с увеличением числа T дней до экспирации уровень депозитной маржи возрастает. При этом наблюдаются своеобразные «ступеньки», обусловленные возможностью применения фьючерсной коррекции (и дискретностью такого управления портфелем).

Небольшой наклон «ступенек» обусловлен потенциальным наихудшим финансовым результатом фьючерсной коррекции, и связан с лимитами изменения цен. В данном примере (рис. 12.1) тангенс угла наклона графика для «ступенек» равен $-\alpha$. Вид маржи для опциона типа “butterfly” приведен на рис. 12.5. Здесь маржа найдена для большего промежутка времени до исполнения, что позволяет увидеть эволюцию ее формы.

Увеличение дневных лимитов изменения цен, а, следовательно, и большее потенциальное отклонение цены в наиболее неблагоприятном случае (рис. 12.2), ожидаемо приводит как к росту абсолютного значения требуемого уровня депозитной маржи, так и к смещению «ступенек». Более того, изменяются также длина и наклон «ступенек». В этом случае тангенс угла наклона графика для «ступенек» равен $-\beta$, так как наихудший результат на «ступеньках» достигается на правой границе. Длина «ступенек» изменяется в зависимости от ограничений на динамику цен и близка к длине максимального скачка в неблагоприятную с точки зрения коррекции сторону.

Далее, рассмотрим два портфеля для иллюстрации свойства *субаддитивности*. С этой целью на рис. 12.6 изображены функции выплат для каждого из двух портфелей. Совокупная функция выплат объединенного портфеля и уровни депозитной маржи на горизонте в 2 торговых дня: для объединенного портфеля и сумма уровней для каждого портфеля по отдельности. Заметим, что условие субаддитивности выполняется, при этом на интервале [29, 31] изменения цены основы объединение портфелей позволяет учитывать их особенности (рост потенциальных убытков по одному из портфелей сопровождается уменьшением потенциальных убытков по второму), что приводит к более эффективному расчету маржи, которая оказывается меньше, чем в случае, когда каждый портфель рассматривается независимо.

Обсудим теперь возможность возврата портфеля ассигнору в случае вы-

⁴²Погрешность вычисления целевой функции $V_{t,T}(x, k)$ понимается в равномерном смысле — по переменным x и k .

полнения условия (12.4.20). Если в момент времени t , где $0 < t < T - 1$, сумма средств v_t на клиринговом счете участника клиринга меньше требуемого размера обеспечения⁴³, т. е. $v_t = \varkappa M(f, T - t, x_t)$ и⁴⁴ $\varkappa \in [0, 1)$, где x_t — цена базового актива в момент t , и по результатам клиринговые сессии в этот момент времени участник клиринга переходит в состояние ассигнора, то с момента времени $t + 1$ центральным контрагентом от его имени осуществляются корректирующие сделки в соответствии с описанной в ([57]) методикой. Предположим также, что (возможное) устранение дефицита маржи осуществляется лишь за счет лишь реализации корректирующих сделок и эволюции рыночных цен, т. е. не происходит доведения средств и/или ликвидации портфеля (как частичной, так и полной). Подобное предположение позволяет проанализировать роль коррекций в устранении дефицита маржи.

С использованием имитационного моделирования методом Монте-Карло, произведем генерацию возможной динамики цен и посчитаем долю портфелей, которые удалось вернуть ассигнору в зависимости от размера начального дефицита маржи (величины $1 - \varkappa$). Существенную роль играет характер условного распределения приращений цен в следующий момент времени при известной текущей цене, равной x . Приведенные на рис. 12.3 графики соответствуют цензурированному нормальному, равномерному и U-образному распределениям⁴⁵, симметричным, с одинаковым с носителем $[-\alpha x, \beta x]$, где $\alpha = \beta$. Числом испытаний для каждого из трех вариантов одинаково, $N = 10^4$.

Из результатов проведенного эксперимента (рис. 12.3) можно сделать вывод, что при малом дефиците портфеля ситуация возврата весьма вероятна, в том числе из-за возможного благоприятного движения цены. Резкие падения в частотах возврата для U-образного распределения объясняются видом распределения приращений цены. При таком распределении бывает достаточно нескольких «удачных» скачков для резкого уменьшения маржи. Характерные падения связаны с увеличением числа необходимых для возврата портфеля скачков. Падение частоты возврата для других распределений обусловлено, в том числе, гарантированностью подхода к возврату портфеля. Велика доля случаев, когда наихудшая (в гарантированном смысле) возможная цена ликвидации позиций по фьючерсным коррекциям оказывается настолько неблагоприятной, что возврат портфеля не производится. Однако реальные значения цен, особенно при стабильной ситуации на рынке, редко достигают своих крайних

⁴³Напомним, что f — функция выплат портфеля участника торгов, а T — число дней до экспирации опционов.

⁴⁴Иными словами, в этот момент времени наблюдается дефицит маржи в размере $(1 - \varkappa) \cdot 100\%$.

⁴⁵При цензурированном нормальном распределении приращения цен распределены согласно нормальному закону при условии что случайная величина попадает в $[-\alpha x, \beta x]$ с вероятностью 0.99. Это распределение описывает стабильное движение цен с низкой волатильностью. Плотность $p_{\alpha x, \beta x}$ для U-образного распределения выбирается так, чтобы точка 0 была бы медианой, на $[-\alpha x, 0]$ плотность равна $p_{\alpha x, \beta x}(z) = \gamma_{\alpha x}^- z^2$, а на $[0, \beta x]$ равна $p_{\alpha x, \beta x}(z) = \gamma_{\beta x}^+ z^2$, напоминая таким образом букву «U». Это распределение характеризует ситуацию высокой неопределенности на рынке, когда цена может как резко вырасти, так и резко упасть.

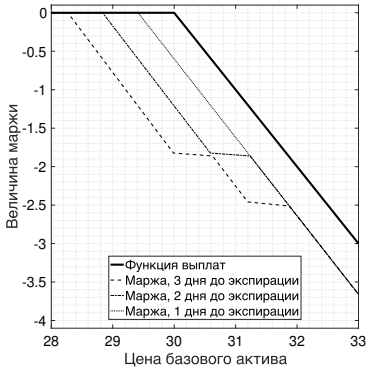


Рис. 12.1: Уровни депозитной маржи (со знаком минус) для опциона «call» с ценой исполнения 30; лимиты изменения цен $\alpha = \beta = 2\%$, точность $\varepsilon = 10^{-3}$.

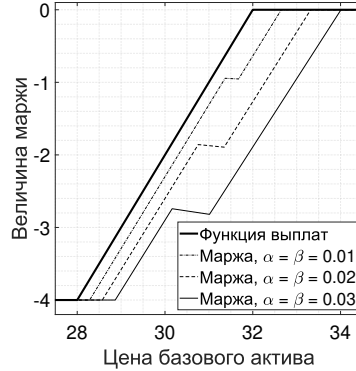


Рис. 12.2: Депозитная маржа (со знаком минус) для опциона «медвежий с-спред» с разными лимитами изменения цен на горизонте в 2 дня до экспирации, точность $\varepsilon = 10^{-3}$.

значений, что позволяет выдвинуть гипотезу о разумности подхода к возврату не на основе гарантированного финансового результата, а с использованием вероятностно-статистического подхода, например, используя квантили возможного финансового результата.

Целесообразность использования коррекций подтверждают результаты, показанные на рис. 12.4: в зависимости от цены актива здесь отображены значения целевой функции $V_{i,T}(x, k)$ для портфеля из трех опционов «call» со с ценой исполнения 30 при разном числе коррекций $k \in \mathbb{Z}$ (цвет столбцов отвечает разным значениям цены актива). Видно, что при увеличении цены x функция $k \mapsto V_{i,T}(x, k)$ достигает минимума уже не при $k = 0$ (случай отсутствия коррекций), а при $k = 1, 2$ и 3 соответственно. Таким образом, использование коррекций позволяет снизить потенциальные убытки по портфелю, а, следовательно, уменьшить требуемый уровень депозитной маржи, при этом (в силу гарантированности оценки) средств в таком меньшем объеме все еще достаточно для покрытия потенциальных убытков.

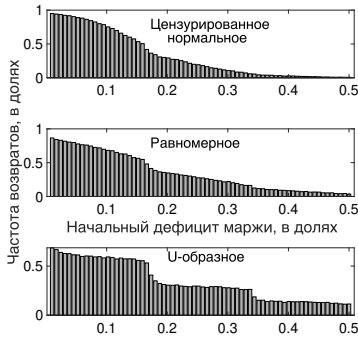


Рис. 12.3: Частоты возврата для опциона “call” с ценой исполнения 30 для разных распределений приращений цен. Параметры: $x_0 = 32$, $\alpha = 0.02$, $T = 6$, число испытаний $N = 10^4$.

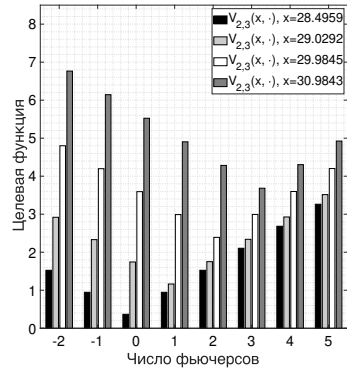


Рис. 12.4: Значения целевой функции для трех опционов “call” для разных текущих цен. Параметры: $\alpha = \beta = 0.02$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

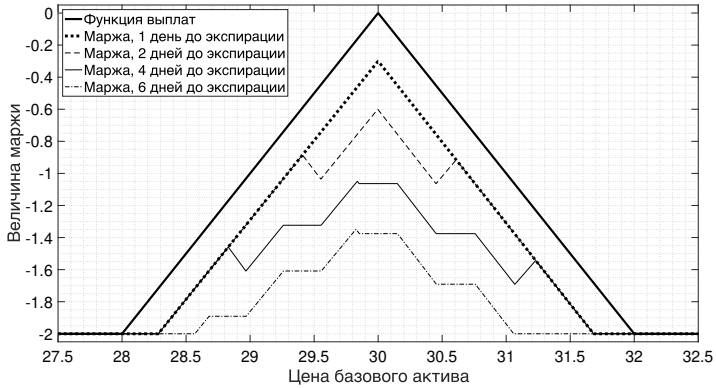


Рис. 12.5: Уровни депозитной маржи (со знаком минус) для опциона “butterfly” для разных сроков до исполнения; лимиты изменения цен $\alpha = \beta = 0.01$, точность $\varepsilon = 10^{-2}$.

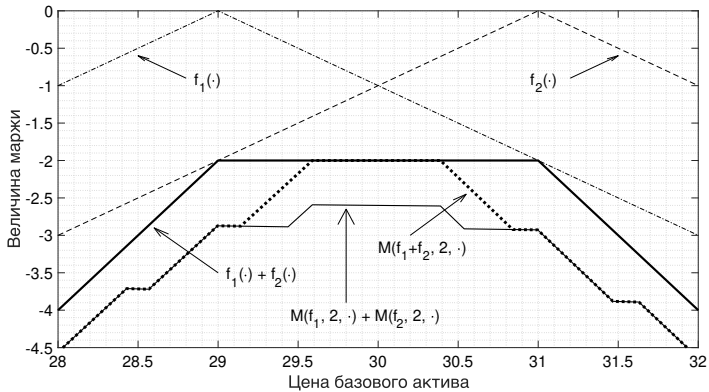


Рис. 12.6: Уровни депозитной маржи (со знаком минус) для двух портфелей $M(f_1, 2, \cdot)$ и $M(f_2, 2, \cdot)$ (функции выплат f_1 и f_2 соотв.) и для объединенного портфеля $M(f_1 + f_2, 2, \cdot)$ (функция выплат $f_1 + f_2$); лимиты изменения цен $\alpha = \beta = 0.01$, горизонт 2 дня до экспирации, точность $\varepsilon = 10^{-3}$.

Заключение

Итоги исследования

Многие идеи и результаты автора родились еще во второй половине 90-х годов, докладывались на международных конференциях и семинарах, использовались в лекциях и в изобретении, зарегистрированном в 2004 году, по теме финансовой инженерии, — первому в нашей стране по такой тематике. Предложенный подход опередил время лет на пятнадцать, но не был тогда опубликован. И только несколько лет автору назад удалось вернуться к интенсивным математическим исследованиям и опубликовать как старые, так и новые результаты, возникшие в ходе этой работы. Теперь наш подход формально примыкает к новому, можно сказать модному направлению математических финансов — «робастных» моделей с дискретным временем, активно развивающимся в последние годы, однако не совпадает с этим направлением по своей интерпретации.

Центральное место в исследованиях решения задачи суперхеджирования⁴⁶ в рамках гарантированного детерминистского подхода занимают введенные в главе 1 рекуррентные уравнения Беллмана—Айзекса (BI) — изучаются свойства уравнений и способы численного решения. Достоинством подхода является теоретико-игровая интерпретация, прозрачная с экономической точки зрения⁴⁷.

⁴⁶Задача суперхеджирования (суперрепликации) заключается в таком хеджировании обусловленного обязательства по проданному опциону, т. е. проведении операций на соответствующем финансовом рынке, допустимых с учетом торговых ограничений, которое позволяет *наилучшим образом покрыть обязательства* (в отличие от других видов хеджирования) при минимальном начальном капитале (премии, взимаемой с покупателя опциона). Выплаты по опциону определяются на основании эволюции цен определенных торгуемых активов, фьючерсов или рыночных индексов, а сами моменты выплат и их величина определяются типом контракта.

⁴⁷Используя обозначения, введенные в главе 1, неформальным экономическим языком смысл уравнений (BI) можно пояснить следующим образом, считая для упрощения, что точные верхние и нижние грани в (BI) достигаются. Пусть $t \leq N$; к текущему (настоящему) моменту времени $t - 1$ известна предыстория (дисконтированных) цен x_1, \dots, x_{t-1} . Стоимость V_{t-1} портфеля, хеджирующего обусловленное обязательство по проданному американскому опциону, для гарантированного исполнения обязательств должна быть, во-первых, не менее текущих обязательств, равных потенциальным выплатам $g_t(x_1, \dots, x_{t-1})$. Во-вторых, стоимость портфеля в следующий момент $V_t = V_{t-1} + H_t \Delta X_t$ (здесь стратегия H_t формируется в момент $t - 1$ и может зависеть только от предыстории цен x_1, \dots, x_{t-1}) должна быть гарантировано, при любом сценарии $\Delta X_t = y \in K_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ движения цен на шаге t , не меньше, чем $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y)$. Тем самым, для покрытия будущих обязательств стоимость V_{t-1} портфеля при выборе стратегии $H_t = h \in D_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ должна быть не менее величины $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$ при наиболее неблагоприятном сценарии

Мотивацией к разработке альтернативной формализации поведения финансового рынка — с детерминистской неопределенной динамикой и учетом торговых ограничений, а также гарантированного подхода к суперхеджированию, явилось стремление построить теорию, при котором *способ численного решение задачи возникает естественным образом, соответствуя экономической интерпретации.*

В современных математических финансах большое место занимает проблема формализации и анализа условий «безарбитражности» модели рынка. Интересно, что предложенная в главе 1 формализация модели рынка и задачи суперхеджирования изначально не опирается на какое-либо предположение безарбитражности, хотя из экономических соображений ясно, что такого сорта предположения необходимы для получения содержательных результатов. В главе 2 нами было введено новое понятие, учитывающие наличие торговых ограничений — отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью (NDSAUP). Оказывается, что в случае гарантированного арбитража с ограниченной прибылью для одномерной модели (т. е. для модели с одним рисковым активом) суперхеджирование для типичной модели нецелесообразно, а для опционов «rainbow», (т. е. для модели, когда число рисковом активных активов $n \geq 2$) суперхеджирование становится экономически целесообразным. Условие NDSAUP является естественной формализацией «безарбитражности» модели рынка с торговыми ограничениями для двухэтапного метода решения задачи, предложенного в главе 7, для анализа задачи суперхеджирования опционов «rainbow».

Особую роль играет введенное в главе 2 понятие *структурной устойчивости модели*. Это можно заметить хотя бы потому, что данное понятие существенно используется во многих главах работы. Более того, автор считает это новое понятие наиболее важным в данной работе. В отличие от торговых ограничений, которые могут считаться заданными точно, компактнозначные отображения, описывающие динамику рынка, было бы принципиально ошибочным считать заданными точно, когда речь идет о практическом приложении. Структурная устойчивость⁴⁸ является фундаментальным свойством модели, означая, что на качественное поведение модели не влияют небольшие (в определенном смысле) возмущения ее динамики. С экономической точки зрения качественное поведение модели финансового рынка определяется «безарбитражностью» (или же ее отсутствием) в том или ином смысле (что требует формализации). В нашей работе предлагается формализация структурной устойчивости в рамках гарантированного детерминированного подхода; адекватность формализации подтверждается рядом содержательных результатов, приведен-

$y \in K_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ движения цен на шаге t , т. е. при $y \in K_t(x_1, \dots, x_{t-1})$, максимизирующем выражение $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$. Полученное значение минимизируется посредством выбора стратегии $h \in D_t(x_1, \dots, x_{t-1})$, чтобы оценить требуемые резервы на покрытие будущих потенциальных выплат. Осталось положить $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1})$ равным максимуму из величины текущих обязательств и величины резервов на покрытие будущих потенциальных выплат.

⁴⁸Термин заимствован из теории динамических систем.

ных в главах 2, 3, 4, 6, 8, 9 и 10.

Гарантированный детерминистский подход, вообще говоря, может давать решения задачи суперхеджирования, отличные от классических вероятностных моделей, однако для при отсутствии торговых ограничений, для «достаточно регулярного» случая «детерминистское» и «вероятностное» решения совпадают, что подробно изложено в главе 9. Это именно тот случай, когда имеет место непрерывность решений уравнений Беллмана—Айзекса, см. главы 3 и 4. Из результатов этих трех глав следует, что при сделанных условиях решение задачи суперхеджирования допускает непрерывную версию решения (определенного с точностью до почти наверху). При этом *структурная устойчивость модели существенна для непрерывности*: в главе 10 построен соответствующий пример⁴⁹.

Введение смешанной стратегии рынка и использования результатов об игровом равновесии, см. главу 5, позволило отделить задачу ценообразования (переходя от уравнений Беллмана—Айзекса к уравнением Беллмана) от задачи хеджирования. Впервые результат на эту тему (в предположении отсутствия торговых ограничений) докладывался в 2001 году на семинаре франко-российского центра имени А. М. Ляпунова при МГУ, включая важную экономическую интерпретацию, объясняющую природу риск-нейтральности, как свойство наиболее неблагоприятных стратегий рынка⁵⁰.

Предложенный в главе 7 двухэтапный метод решения уравнений Беллмана, в предположении игрового равновесия в смешанных стратегиях рынка, используется далее в качестве основы для численного метода решения задачи ценообразования. Первый этап представляет собой задачу, относящейся к общей проблеме моментов и сводится к построению вогнутой оболочки функции⁵¹, а второй этап сводится к классической задаче — максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве. При этом наиболее неблагоприятные смешанные стратегии рынка достаточно искать в классе распределений, сосредоточенных не более чем в конечном числе точек, равном $n + 1$ — совокупному количеству активов (рисковых и безрискового). При достаточно общих предположениях, касающихся «гладкости» функций, описания динамики цен и торговых ограничений⁵² неблагоприятные смешанные стратегии рынка достигаются на таких распределениях⁵³.

⁴⁹Это контрпример к предложению 3.7 в разделе 3.2 из статьи [115] (являющейся типичной работой «робастного» направления), где в предположениях, аналогичных сделанным нами, однако без требования структурной устойчивости модели, утверждается непрерывность цены суперхеджирования как функции предьстории цен.

⁵⁰Позднее эта интерпретация была независимо открыта В. Н. Колокольцовым [95].

⁵¹Разделение на два этапа в особенности оправдано, когда при заданной динамике рынка производятся расчеты для разных торговых ограничений.

⁵²Речь идет о надлежащих свойствах полунепрерывности для числовых функций и многозначных отображений.

⁵³Отсюда можно сделать вывод, что для традиционной вероятностной постановки задачи суперхеджирования для случае отсутствия торговых ограничений и неатомических условных распределений приращений цен не существует эквивалентной мартингаловой меры, для которой достигался бы наиболее неблагоприятный вероятностный сценарий.

Поведение наиболее неблагоприятных смешанных стратегий рынка, с носителями, состоящими из не более чем в $n + 1$ точке, исследованное в главе 8, представляет прикладной интерес, так как суперхеджирование для фиксированной начальной цены сводится к хеджированию для не более чем $(n + 1)^N$ траекторий движения цен. Если для модели сохраняется свойство выпуклости решений уравнений Беллмана—Айзекса⁵⁴, то оптимальные смешанные стратегии рынка — условные распределения приращений цен при известной предьстории цен⁵⁵ сосредоточены на множестве из не более чем $n + 1$ экстремальной точки выпуклой оболочки носителя смешанной стратегии.

В главе 10 введено новое понятие — порога структурной устойчивости модели, представляющего собой при заданной предьстории цен максимальное возмущение компактов, описывающих динамику цен, сохраняющее структурную устойчивость модели (грубое условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью). Опираясь на результаты, касающиеся порога структурной устойчивости, получены оценки чувствительности решений уравнений (В1) Беллмана—Айзекса по отношению к равномерно малым возмущением компактов, описывающих динамику цен исходной модели, для достаточно общего класса торговых ограничений, когда соответствующие множества представимы в виде разложения Моцкина⁵⁶. Показано, что без условия структурной устойчивости модели при равномерно малой аппроксимации компактов, описывающих динамику цен исходной модели, нельзя гарантировать равномерную близость решений уравнений Беллмана—Айзекса, даже для случая отсутствия торговых ограничений и сохранения при аппроксимации условия отсутствия арбитражных возможностей. Подробно обсуждена проблема выбора адекватных численных методов, как для задачи ценообразования, так и для задачи хеджирования. Описаны предварительные вычисления перед решением уравнения Беллмана для класса моделей с упомянутыми выше торговыми ограничениями, с целью определения ограничений на погрешность вычислений, гарантирующих заданную точность вычисления премии по опциону. Подобраны тестовые модельные примеры, для которых проведен численный эксперимент.

В главе 11 рассматривается задача ценообразования простейшего европейского опциона, функция выплат по которому является разрывной — бинарного опциона “call”, при отсутствии торговых ограничений. В рамках гарантированного детерминистского подхода к суперхеджированию для мультипликативной модели динамики цен с одним рисковым активом получен ряд свойств решений уравнений Беллмана. Показано, в частности, что решения являются числовыми

⁵⁴Свойство наследственности выпуклости (а также монотонности) доказано нами для моделей специального вида, являющимися обобщенными моделями Колокольцова.

⁵⁵Существование измеримых по Борелю переходных ядер, отвечающих оптимальным смешанным стратегиям «рынка», доказано в главе 8.

⁵⁶Торговые ограничения такого вида охватывают два класса моделей возникающих на практике: моделей с неограниченными торговыми ограничениями (когда все множества, описывающие торговые ограничения, являются неограниченными) и моделей с ограниченными торговыми ограничениями (когда все множества, описывающие торговые ограничения, являются ограниченными).

функциями, являющимися монотонно неубывающими, непрерывными справа и кусочно-выпуклыми, непрерывными за исключением одной точки (в которой имеется скачок). Кроме того, решения являются кусочно-рациональными, что дало возможность предложить алгоритм построения «полуявного» решения, — рекуррентного построения решений в виде формул на некоторых интервалах, что, в частности, можно выполнить при помощи символьных вычислений. Результаты численного анализа позволяют сформулировать ряд гипотез о поведении решений.

В главе 12 для системы маржирования портфеля из опционов и фьючерсов на срочном рынке, с дефолт-менеджментом, основанным на методологии изобретения [55], строится математическая модель маржирования, т. е. способ расчета требуемого уровня депозитной маржи (гарантийного обеспечения), основанная на идеологии гарантированного детерминистского подхода к суперхеджированию и теоретико-игровой интерпретации. Из экономического смысла задачи непосредственно выводятся уравнения Беллмана—Айзекса для требуемого уровня маржи. Изучаются свойства этих уравнений, в частности, доказано выполнение важного с экономической точки зрения требования к системе маржирования — свойства субаддитивности маржи портфеля. На модельных примерах проведен численный эксперимент, подтверждающий эффективность работы системы.

Выводы и рекомендации

Подводя итоги исследований, можно сделать вывод, что детерминистский подход к описанию динамики рынка, в сочетании с предположением об ограниченности приращений цен рискованных активов, оказался эффективным инструментом для анализа и построения моделей с дискретным временем в задаче суперхеджирования. Гарантированный детерминистский подход позволяет (при соответствующих предположениях регулярности) решать задачу суперхеджирования и для классической вероятностной постановки в дискретном времени, а задача суперхеджирования была, есть и будет актуальной хотя бы потому, что дает верхнюю границу рационального ценообразования опционов для различных моделей ценообразования. Разработанный способ численного решения, который сводится к хорошо изученным задачам вычислительной геометрии, показал свою работоспособность на специально подобранных тестовых моделях.

В качестве одной из рекомендаций, теоретического характера, мы предлагаем в рамках «робастного» направления использовать, непрерывные селекторы вместо аналитических (по Сулину) или борелевских селекторов⁵⁷. Необходимым и достаточным условием существования непрерывного селектора в конечномерном евклидовом пространстве является полунепрерывность снизу многозначного отображения, см. главу 6. Было бы интересно, по крайней мере

⁵⁷Обычно работах этого направления опираются на теорему Янкова—фон Неймана [5, теорему 7.49].

ре для канонического пространства (т. е. для модели, оперирующей только с ценовой информацией), разработать теорию в предположении феллеровости переходных ядер вместо аналитических (в смысле Суслина), поскольку феллеровское свойство является естественным для модели рынка с экономической точки зрения. Экономических оснований для разрывности зависимости от ценовой предыстории не имеется.

Другая рекомендация носит практический характер и может быть полезна при работе с реальными данными. Даже если для исходной модели условие структурной устойчивости выполняется, то тем не менее, можно использовать описанное в главе 10 регуляризирующее закругление исходной системы на уровне, на уровне погрешности данных⁵⁸. Если же условие структурной устойчивости не выполняется, это скорее всего свидетельствует о некорректной постановке задачи — так, например, может наблюдаться «хрупкость» модели описанная в главе 10. В таком случае регуляризирующее закругление исходной системы необходимо. Возможной причиной может также быть несогласованность наблюдаемых рыночных данных в рамках модели. С такой ситуацией мы столкнулись решая конкретную проблему для финансовой модели с использованием реальных данных в [236]⁵⁹. Для достижения корректной постановки в этой работе использовалась аналогичная идея «закругления точности данных». Кроме того, потеря структурной устойчивости может возникнуть в результате (некорректной) численной аппроксимации исходной динамики рынка.

Мы разработали рекомендации дидактического характера, на основе многолетней апробации в курсе «Элементы финансовой математики» для студентов старших курсов кафедры системного анализа факультета ВМК МГУ и в курсах лекций для студентов магистерской программы «Управление рисками и актуарные методы» экономического факультета НИУ ВШЭ. Мы предлагаем излагать теорию ценообразования обусловленных обязательств, на основе гарантированного (теоретико-игрового) подхода, опираясь на игровое равновесие в смешанных стратегиях рынка для интерпретации наиболее неблагоприятных сценариев поведения рынка. Особо простая и прозрачная интерпретация получается в предположении отсутствия торговых ограничений — вероятностные меры, отвечающие наиболее неблагоприятным смешанным стратегиям, обязаны быть риск-нейтральными. Этот материал можно использовать в курсах по

⁵⁸По сути дела, это идея А. Н. Тихонова, предложенная для решения некорректно поставленных задач.

⁵⁹В этой статье построена модель в рамках общепринятой концепции ценообразования кредитного риска, позволяющая учитывать срочную структуру как безрисковых процентных ставок, так вероятностей дефолтов. На реальных рыночных данных возникает проблема согласованности (непротиворечивости) котировок облигаций в зоне евро и контрактов CDS (на суверенный кредитный риск). Предложен подход к проверке согласованности и процедура обработки противоречивых данных, являющийся модельно-независимым: он совместим с любым способом оценки срочной структуры и позволяет оценить точность построения срочной структуры безрисковой доходности по заданному набору данных. Установлено, что котировки облигаций и контрактов CDS в зоне евро, как правило, не являются согласованными на межстрановом уровне даже в случае фильтрации данных на уровне эмитента. Можно это интерпретировать как нарушение «безарбитражности» в рамках данной модели на наблюдаемых данных.

математическим финансам для математиков и в курсах по риск-менеджменту и финансовой инженерии для экономистов.

Наконец, разработанный комплекс программ для численного решения задачи суперхеджирования может быть использован как для исследовательских целей, так и для проведения компьютерного практикума для студентов старших курсов, изучающих курс по финансовой математике. В частности, этот комплекс программ уже внедрен в компьютерном практикуме, дополняющем курс «Элементы финансовой математики» для студентов старших курсов кафедры системного анализа факультета ВМК МГУ.

Перспективы дальнейших исследований

Было бы полезно разработать общий метод численного решения уравнений Беллмана—Айзека для случая разрывных функций выплат. Анализ, проведенный в главе 11 на простейшем примере бинарного опциона, показал, что поведение решений (VI) может быть весьма сложным.

Представляет интерес исследование асимптотического поведения вероятностных мер, отвечающих наиболее неблагоприятным смешанным стратегиям рынка — их сходимости при соответствующей нормировке к случайному процессу с непрерывным временем. Для частного случая подобные результаты были получены в [17] и [33].

Следующим шагом в усложнении моделей с целью ее приближения к реальности могла бы стать разработка теории, учитывающая транзакционные издержки, в рамках гарантированного детерминистского подхода. Простейший случай модели такого сорта фактически был изучен в главе 12.

Планируется также расширение функциональности разработанного комплекса программ, в том числе посредством включения в него численного решения задачи портфельного инвестирования.

Обозначения

Основные обозначения

\emptyset пустое множество;

$[[t, s]]$ множество целых чисел $\{t, t + 1, \dots, s\}$, где $t \leq s$;

\mathbb{R} множество вещественных чисел;

\mathbb{C} множество комплексных чисел;

\mathbb{Z} множество целых чисел;

$a \wedge b$ минимум из двух чисел $a, b \in \mathbb{R}$;

$a \vee b$ максимум из двух чисел $a, b \in \mathbb{R}$;

$\bigwedge_{i=1}^n a_i$ минимум из чисел $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$;

$\bigvee_{i=1}^n a_i$ максимум из чисел $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$;

Принимается конвенция: $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$, $\prod_{i \in \emptyset} b_i = 1$, $\bigvee_{i \in \emptyset} c_i = -\infty$, $\bigwedge_{i \in \emptyset} d_i = +\infty$;

$\operatorname{re}(a)$ вещественная часть комплексного числа $a \in \mathbb{C}$;

$A_1 \times \dots \times A_n$ декартово произведение множеств A_1, \dots, A_n ,
т.е. $A_1 \times \dots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}$

A^n декартова степень множества A ,
т.е. $A^n = A \times \dots \times A$ (n раз);

S_k симплекс размерности k ,
т.е. $S_k = \{q = (q_1, \dots, q_{k+1}) \in [0, 1]^{k+1} : \sum_{i=1}^{k+1} q_i = 1\}$;

I_A индикатор множества A , т.е. $I_A(x) = \begin{cases} 1 \forall x \in A; \\ 0 \forall x \notin A; \end{cases}$

2^E класс всех подмножеств множества E ;

$\mathcal{N}(E)$ класс всех непустых подмножеств E : $\mathcal{N}(E) = 2^E \setminus \{\emptyset\}$;

$\mathcal{P}^*(E)$	класс всех нормированных (вероятностных) мер на E с конечным носителем;
$\mathcal{P}(E)$	класс всех нормированных (вероятностных) мер на измеримом пространстве (E, \mathcal{A}) с заданной σ -алгеброй \mathcal{A} подмножеств E ;
$\mathcal{P}^n(E)$	класс всех нормированных (вероятностных) мер, сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке E ;
\mathcal{B}^n	борелевская σ -алгебра подмножеств \mathbb{R}^n , $n \geq 1$;
$\text{supp}(\mu)$	топологический носитель меры μ ;
δ_a	мера Дирака, сосредоточенная в точке a , т. е. $\delta_a(A) = I_A(a)$;
$\sum_i q_i Q_i$	смесь вероятностных мер Q_i , $i = 1, 2, \dots$, где $q_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots$ и $\sum_i q_i = 1$;
\mathbb{P}	вероятность, заданная на σ -алгебре \mathcal{F} подмножеств пространства элементарных событий Ω ;
\mathbb{E}	оператор математического ожидания, отвечающий \mathbb{P} ;
\mathbb{E}^A	оператор условного математического ожидания относительно σ -алгебры $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$;
$\mu \ll \nu$	мера μ абсолютно непрерывна относительно меры ν (обе меры заданы на одном измеримом пространстве);
x^+	$0 \vee x$;
h^\oplus	для вектора $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ вектор $h^\oplus = (h_1^+, \dots, h_n^+)$;
$x \otimes y$	для векторов $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ матрица размерности $m \times n$ с элементами $(x \otimes y)_{ij} = x_i y_j$, $m \geq 1, n \geq 1$;
∇	градиент;
∇^2	гессиан.

В топологическом пространстве E

$\mathcal{K}(E)$	класс всех непустых компактных подмножеств E ;
$\text{cl}(A)$	замыкание A ;
$\text{int}(A)$	внутренность A ;
$\text{bd}(A)$	граница A .

В метрическом пространстве X с метрикой ρ

$\rho(x, A)$	расстояние от точки x до множества $A \subseteq X$, т. е. $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$;
$[A]^\varepsilon$	замкнутая ε -окрестность A , т. е. $[A]^\varepsilon = \{x \in X : \rho(x, A) \leq \varepsilon\}$;
$B_\delta(x)$	открытый шар радиуса δ с центром в x , т. е. $B_\delta(x) = \{y : \rho(y, x) < \delta\}$;
$\bar{B}_\delta(x)$	замкнутый шар радиуса δ с центром в x , т. е. $\bar{B}_\delta(x) = \text{cl}(B_\delta(x)) = \{y : \rho(y, x) \leq \delta\}$;
$e_\rho(A, B)$	отклонение Помпею множества A от множества B для метрического пространства с заданной метрикой ρ , т. е. $e_\rho(A, B) = \sup\{\rho(x, B), x \in A\}$;
$h_\rho(A, B)$	расстояние Помпею–Хаусдорфа для метрического пространства с заданной метрикой ρ , т. е. $h_\rho(A, B) = e_\rho(A, B) \vee e_\rho(B, A)$;
$\text{dist}(A, B)$	дистанция между множествами A и B (Термин «дистанция» не является общепринятым, употребляется здесь для отличия от расстояния Помпею–Хаусдорфа); определяется как $\inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}$;
ω_f	модуль непрерывности отображения $f : X \rightarrow Y$, где Y — метрическое пространство;
L_f	константа Липшица отображения $f : X \rightarrow Y$, удовлетворяющего условию Липшица, где Y — метрическое пространство.

В линейном пространстве X

$x + A$	сдвиг множества $A \subseteq X$ на вектор x , т. е. $x + A = \{y \in X : y = x + z, z \in A\}$;
$A_1 + A_2$	сумма (Минковского) множеств $A_1 \subseteq X$ и $A_2 \subseteq X$, т. е. $A_1 + A_2 = \{y \in X : y = x_1 + x_2, x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\}$;
$\langle x, y \rangle = xy$	скалярное произведение в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , т. е. $xy = \sum_{i=1}^n x^i y^i$ для $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ и $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$;
$\Lambda(z)$	для вектора $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ диагональная матрица с элементами $\Lambda(z)_{ij} = z_i$, если $j = i$ и $\Lambda(z)_{ij} = 0$, если $j \neq i$;
$L_1 \oplus L_2$	прямая сумма линейных подпространств L_1 и L_2 ;

$\text{conv}(A)$	выпуклая оболочка множества A ;
$\text{aff}(A)$	аффинная оболочка множества A ;
$\text{lin}(A)$	линейная оболочка множества A ;
$\text{li}(A)$	линейное подпространство, параллельное $\text{aff}(A)$, т. е. если $y \in \text{aff}(A)$, то $-y + \text{aff}(A) = \text{li}(A)$;
$\text{ri}(A)$	относительная внутренность выпуклого множества A ;
$\text{rbd}(A)$	относительная граница выпуклого множества A ;
σ_A	опорная функция множества A , т. е. $\sigma_A(x) = \sup\{\langle x, y \rangle, y \in A\}$;
$\text{bar}(A)$	барьерный конус множества A ;
$\text{rec}(A)$	рецессивный конус выпуклого множества A ;
$\text{ext}(A)$	множество крайних (экстремальных) точек выпуклого множества A ;
$\text{dim}(A)$	аффинная размерность множества A , т. е. $\text{dim}(A) = \text{dim}(\text{li}(A))$;
$\text{dom}(f)$	эффективная область выпуклой функции f , т. е. $\text{dom}(f) = \{x : f(x) < \infty\}$;
D°	выпуклый конус $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle h, y \rangle \leq 0 \forall h \in D\}$; если D — выпуклый конус, то D° — полярный к D конус;
$\mathcal{K}_c(X)$	класс всех непустых выпуклых компактных подмножеств топологического линейного пространства X .

Список литературы

1. Андреев Н. А., Смирнов С. Н. Гарантированный подход к задачам инвестирования и хеджирования // «Тихоновские чтения»: научная конференция: тезисы докладов: посвящается памяти академика Андрея Николаевича Тихонова: 29 октября – 2 ноября 2018 г. — М. : МАКС Пресс, 2018. — С. 11. — (Цит. на с. 18, 20).
2. Андреев Н. А., Смирнов С. Н. Численное решение уравнения Беллмана–Айзекса в задачах управления портфелем финансовых активов // Ломоносовские чтения: научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, 2020 г. : тезисы докладов. — Москва : Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2020. — (Цит. на с. 18, 20).
3. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Доклады Академии Наук СССР. — 1937. — Т. XIV, № 5. — С. 247—250. — (Цит. на с. 64).
4. Архипов В. М., Захаров И. Ю., Науменко В. В., Смирнов С. Н. Предпосылки введения количественных мер эффективности для ГЭР. — Препринт WP16/2007/05. — Издательский дом Государственного университета — Высшей школы экономики, 2007. — (Цит. на с. 24).
5. Бертсекас Д., Шрив С. Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени (пер. с англ.) — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — (Цит. на с. 18, 42, 179, 195, 196, 374).
6. Биркгоф Г. Теория решеток (пер. с англ.) — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — (Цит. на с. 219).
7. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН СССР. — 1985. — Т. 169. — С. 194—252. — (Цит. на с. 49).
8. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Многозначные отображения // Итоги науки и техники. Серия «Математический анализ». — 1982. — Т. 19. — С. 127—230. — (Цит. на с. 49).
9. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1972. — (Цит. на с. 223).

10. Воробьев Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — (Цит. на с. 152).
11. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1971. — (Цит. на с. 167).
12. Давыдов Э. Г. Методы и модели теории антагонистических игр. — М. : Издательство МГУ, 1978. — (Цит. на с. 152).
13. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1972. — (Цит. на с. 184).
14. Долматов А. С. Математические методы риск-менеджмента. — Москва : Экзамен, 2007. — (Цит. на с. 347).
15. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — 2-е изд., перераб. — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1986. — (Цит. на с. 70).
16. Заночкин А. Ю., Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства бинарного европейского опциона // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. — 2020. — № 1. — С. 29—59. — (Цит. на с. 314).
17. Захаров А. В., Мусса Д. А. Гарантированный подход к задаче ценообразования и хеджирования для случая обусловленного обязательства с несколькими рисковыми активами // ДЕП в ВИНТИ, №1092-B01. — 2001. — С. 19. — (Цит. на с. 12, 376).
18. Зверев О. В., Хаматов В. М. Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на компактном $(1,S)$ -рынке // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2011. — Т. 18, № 11. — С. 121—122. — (Цит. на с. 8).
19. Зверев О. В., Хаматов В. М. Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2011. — Т. 18, № 1. — С. 26—54. — (Цит. на с. 8).
20. Зверев О. В., Хаматов В. М. Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время). II // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2011. — Т. 18, № 2. — С. 193—204. — (Цит. на с. 8).
21. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1974. — (Цит. на с. 49).

22. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. — Ленинград : Издание Ленинградского государственного университета, 1939. — (Цит. на с. 168).
23. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике (пер. с англ.) — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1976. — (Цит. на с. 173).
24. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функциональный анализ. — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1976. — (Цит. на с. 141, 144).
25. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1977. — (Цит. на с. 14).
26. Лейхтвейс К. Выпуклые множества (пер. с нем.) — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — (Цит. на с. 68, 90, 99, 146, 177, 211, 254, 263, 265, 278, 286, 287, 304).
27. Майоров С. Клиринг на финансовых рынках. — Москва : Статистика России, 2015. — (Цит. на с. 343).
28. Марков А. А. О некоторых приближениях алгебраических непрерывных дробей : докторская диссертация / Марков А. А. — СПб., 1884. — (Цит. на с. 161).
29. Математическая энциклопедия // : в 5 т. Т. 5 / под ред. И. М. Виноградова. — М. : Советская Энциклопедия, 1985. — (Цит. на с. 176).
30. Мельников А. В., Феоктистов К. М. Вопросы безарбитражности и полноты дискретных рынков и расчеты платежных обязательств // Обзорные прикладной и промышленной математики. — 2001. — Т. 8, № 1. — С. 28—40. — (Цит. на с. 9).
31. Михайлова П., Смирнов С. Монотонные разностные схемы для решения задач ценообразования и хеджирования опционов // Обзорные прикладной и промышленной математики. — 2002. — Т. 9, № 3. — С. 642—643. — (Цит. на с. 296).
32. Молчанов С. А. Сильно феллеровское свойство диффузионных процессов на гладких многообразиях // Теория вероятностей и ее применения. — 1968. — Т. 13, № 3. — С. 493—498. — (Цит. на с. 136).
33. Мусса Д. А. Моделирование финансовых рынков методами стохастических дифференциальных уравнений : диссертация канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Мусса Д. А. — М., 2001. — (Цит. на с. 12, 376).
34. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — М. : Наука, 1974. — (Цит. на с. 328).

35. Национальный Клиринговый Центр (НКО НКЦ). Методика определения выделенного капитала центрального контрагента НКО НКЦ (АО) : тех. отч. / НКО НКЦ. — 2017. — (Цит. на с. 344).
36. Половинкин Е. С. Многочленный анализ и дифференциальные включения. — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 2015. — (Цит. на с. 49, 66—69, 87—90, 99, 102, 103, 107, 192, 202, 212, 225, 260, 262, 266).
37. Полякова Л. Н. Разработка математической теории и численных методов для решения некоторых классов негладких задач оптимизации. : Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Полякова Л. Н. — Санкт-Петербург, 1998. — (Цит. на с. 272).
38. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применение. — 1956. — Т. 1, № 2. — С. 177—238. — (Цит. на с. 128, 143, 189).
39. Реповш Д., Семенов П. В. Теория Э. Майкла непрерывных селекций. Развитие и приложения // Успехи математических наук. — 1994. — Т. 49, № 6(300). — С. 151—190. — (Цит. на с. 49).
40. Рокаффеллар Р. Выпуклый анализ (пер. с англ.) — М. : Мир, 1973. — (Цит. на с. 43, 59, 63, 69, 71, 73, 80, 82, 85, 98, 112, 117, 129, 130, 162, 163, 172, 173, 178, 180, 181, 184, 205, 207, 211, 237, 238, 262, 263, 265, 266, 276, 279, 287, 295, 328, 329).
41. Рохлин Д. Б. Исследования по теории арбитража в стохастических моделях финансовых рынков : диссертация док. физ.-мат. наук: 01.01.05. / Рохлин Д. Б. — Ростов-на-Дону, 2010. — (Цит. на с. 118).
42. Рохлин Д. Б. Критерий отсутствия асимптотического бесплатного ленча на конечномерном рынке при выпуклых ограничениях на портфель и выпуклых операционных издержках // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2002. — Т. 1, № 9. — С. 133—144. — (Цит. на с. 58).
43. Рохлин Д. Б. Расширенная версия теоремы Даланга–Мортон–Виллинджера при выпуклых ограничениях на портфель // Теория вероятностей и ее применения. — 2004. — Т. 49, № 3. — С. 503—521. — (Цит. на с. 50, 52, 58, 118).
44. Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: Модель рынка, торговые ограничения и уравнения Беллмана–Айзекса // Математическая теория игр и её приложения. — 2018. — Т. 10, № 4. — С. 59—99. — (Цит. на с. 22, 40, 348).
45. Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: наиболее неблагоприятные сценарии поведения рынка и проблема моментов // Математическая теория игр и её приложения. — 2020. — Т. 12, № 3. — С. 50—88. — (Цит. на с. 149).

46. Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: Свойства «безарбитражности» рынка // Математическая Теория Игр и ее Приложения. — 2019. — Т. 11, № 2. — С. 68—95. — (Цит. на с. 45).
47. Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса // Математическая Теория Игр и ее Приложения. — 2019. — Т. 11, № 4. — С. 87—115. — (Цит. на с. 74).
48. Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: смешанные стратегии и игровое равновесие // Математическая теория игр и её приложения. — 2020. — Т. 12, № 1. — С. 60—90. — (Цит. на с. 109).
49. Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: соотношение “детерминистской” и “вероятностной” постановки при отсутствии торговых ограничений // Теория вероятностей и ее применение. — 2022. — Т. 67, № 4. — С. 688—716. — (Цит. на с. 235).
50. Смирнов С. Н. Геометрический критерий грубого условия отсутствия гарантированного арбитража // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная Математика и Кибернетика. — 2020. — № 3. — С. 43—48. — (Цит. на с. 45).
51. Смирнов С. Н. Общая теорема теории антагонистических игр о конечном носителе смешанной стратегии // Доклады Академии Наук. — 2018. — Т. 480, № 1. — С. 25—28. — (Цит. на с. 149, 152).
52. Смирнов С. Н. Порог структурной устойчивости для грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная Математика и Кибернетика. — 2021. — № 1. — С. 38—49. — (Цит. на с. 259).
53. Смирнов С. Н. Феллеровское переходное ядро с носителями мер, заданными многозначным отображением // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 219—217. — (Цит. на с. 135).
54. Смирнов С. Н., Андреев Н. А. Комплекс программ численного решения задачи робастного управления портфелем для математической модели финансового рынка с детерминистской динамикой цен // Ломоносовские чтения: научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, 2020 г. : тезисы докладов. — Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2021. — (Цит. на с. 20, 259).

55. Смирнов С. Н., Захаров А. В., Полиматиди И. В., Балабушкин А. Н. Способ электронной биржевой торговли производными финансовыми инструментами, способы определения уровня депозитной маржи, способы урегулирования ситуации с дефицитом маржи. — 2004. — Патент Российской Федерации 2226714. — (Цит. на с. 12, 21, 40, 342, 348, 349, 351, 352, 356, 374).
56. Смирнов С. Н., Кузнецов В. А., Сливинский В. А. Гарантированный детерминистский подход к маржированию на срочном рынке: Численный эксперимент // Экономика и математические методы. — 2021. — Т. 57, № 4. — С. 76—87. — (Цит. на с. 21, 342).
57. Смирнов С. Н., Полиматиди И. В. Гарантированный детерминистский подход к маржированию на срочном рынке // Экономика и математические методы. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 96—105. — (Цит. на с. 21, 342, 366).
58. Сухарев А. Г. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1989. — (Цит. на с. 291, 292).
59. Талер Р. Новая поведенческая экономика: почему люди нарушают правила традиционной экономики и как на этом заработать (пер. с англ.) — М. : Издательство «Э», 2017. — (Цит. на с. 47).
60. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1960. — (Цит. на с. 96).
61. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. — М. : Издательство МГУ, 1976. — (Цит. на с. 291).
62. Ушаков В. Н., Ершов А. А. Об оценке Хаусдорфова расстояния между множеством и его выпуклой оболочкой в евклидовых пространствах малой размерности // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2018. — Т. 24, № 1. — С. 223—235. — (Цит. на с. 304).
63. Ушаков В. Н., Лебедев П. Д. Алгоритмы оптимального покрытия множеств на плоскости \mathbb{R}^2 // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2016. — Т. 26, № 2. — С. 258—270. — (Цит. на с. 292).
64. Фелпс Д. Лекции о теоремах Шоке (пер. с англ.) — Мир, 1968. — (Цит. на с. 168).
65. Хаметов В. М., Чалов Д. М. Европейский опцион — это бесконечная антагонистическая игра // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2004. — Т. 11, № 2. — С. 264—265. — (Цит. на с. 8).
66. Ченцов Н. Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. — М. : Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1972. — (Цит. на с. 236).

67. Шикин Е. В. Линейные пространства и отображения. — М. : Издательство МГУ, 1987. — (Цит. на с. 72).
68. Ширяев А. Н. Вероятность – 1. — М. : МЦМНО, 2004. — (Цит. на с. 26, 139, 186, 238).
69. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория. — М. : ФАЗИС, 1998. — (Цит. на с. 7, 58, 185, 186, 235, 240, 241, 245).
70. Ширяев А. Н. Стохастические задачи о разладке. — М. : МЦМНО, 2016. — (Цит. на с. 186).
71. Шнирельман Л. Г. О равномерных приближениях // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1938. — Т. 2, № 1. — С. 53—60. — (Цит. на с. 152).
72. Энгелькинг Р. Общая топология (пер. с англ.) — М. : Издательство «Мир», 1986. — (Цит. на с. 142, 144, 234).
73. Aksamit A., Deng S., Oblój J., Tan X. Robust pricing–hedging duality for American options in discrete time financial markets // *Mathematical Finance*. — 2019. — Vol. 29, no. 3. — P. 861–897. — (Cit. on pp. 9, 18).
74. Alexandroff A. D. Additive set-functions in abstract spaces // *Rec. Math. [Mat. Sbornik]*. — 1943. — Vol. 13(55), no. 2–3. — P. 169–238. — (Cit. on pp. 119, 138, 157, 189, 254).
75. Andreev N. A., Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: Numerical experiment // *Computational Mathematics and Modeling*. — 2021. — Vol. 32, no. 1. — P. 22–44. — (Cit. on pp. 21, 259).
76. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk // *Mathematical Finance*. — 1999. — Vol. 9, no. 3. — P. 203–228. — (Cit. on p. 359).
77. Ash R. B. *Real Analysis and Probability*. — New York : Academic Press, 1972. — P. 494. — (Cit. on pp. 138, 139).
78. Aumann R. J., Hart S. *Handbook of Game Theory with Economic Applications, Volume 2, 1st Edition* / Aumann R.J., Hart S. Eds. — New York : Elsevier Since B.V., 1994. — P. 735–1520. — (Cit. on p. 152).
79. Ausubel L. An efficient dynamic auction for heterogeneous commodities // *American Economic Review*. — 2006. — Vol. 96, no. 3. — P. 602–629. — (Cit. on p. 344).
80. Ausubel L. M. System and method for an efficient dynamic multi-unit auction. — Google Patents, 2007. — US Patent 7,165,046. — (Cit. on p. 344).
81. Avellaneda M., Cont R. Close-out risk evaluation (CORE): A new risk management approach for central counterparties // *SSRN Electronic Journal*. — 2013. — (Cit. on p. 348).

82. Avis D., Jordan C. Comparative computational results for some vertex and facet enumeration codes. — 2016. — <http://arxiv.org/abs/1510.02545v3>. — (Cit. on p. 298).
83. Awasthi P., Kalantari B., Zhang Y. Robust vertex enumeration for convex hulls in high dimensions *inmj* // *Annals of Operations Research*. — 2020. — (Cit. on p. 298).
84. Bachelier L. Théorie de la spéculation // *Annales scientifiques de l'É.N.S.* 3e série. — 1900. — Vol. 17. — P. 21–86. — (Cit. on pp. 6, 25).
85. Barber C., Dobkin D., H. H. The quickhull algorithm for convex hulls // *ACM Transactions on Mathematical Software*. — 1996. — Vol. 22. — P. 469–483. — (Cit. on p. 298).
86. Bayraktar E., Zhang Y. Fundamental theorem of asset pricing under transaction costs and model uncertainty // *Mathematics of Operations Research*. — 2016. — Vol. 41, no. 3. — P. 1039–1054. — (Cit. on p. 8).
87. Bayraktar E., Zhang Y., Zhou Z. A note on the fundamental theorem of asset pricing under model uncertainty // *Risks*. — 2014. — Vol. 2. — P. 425–433. — (Cit. on p. 65).
88. Bayraktar E., Zhou Z. On arbitrage and duality under model uncertainty and portfolio constraints // *Mathematical Finance*. — 2017. — Vol. 27, no. 4. — P. 988–1012. — (Cit. on p. 8).
89. Beiglböck M., Nutz M. Martingale inequalities and deterministic counterparts // *Electronic Journal of Probability*. — 2014. — Vol. 19, no. 95. — P. 1–15. — (Cit. on p. 167).
90. Bellman R. *Dynamic Programming*. — Princeton : Princeton University Press, 1957. — (Cit. on p. 36).
91. Bentkus R. On the dependence of the Berry–Esseen bound on dimension // *Journal of Statistical Planning and Inference*. — 2003. — Vol. 113. — P. 385–402. — (Cit. on p. 251).
92. Berge C. *Espaces Topologiques: Fonctions Multivoques*. Collection Unive. — Paris : Dunod, 1959. — (Cit. on pp. 15, 76, 77).
93. Berge C. *Topological Spaces: Including a Treatment of Multi-Valued Functions, Vector Spaces, and Convexity*. — London : Oliver & Boyd, 1963. — P. 270. — (Cit. on p. 76).
94. Berinde V., Păcurar M. The role of the Pompeiu–Hausdorff metric in fixed point theory // *Creative Mathematics and Informatics*. — 2013. — Vol. 22, no. 2. — P. 143–150. — (Cit. on p. 143).
95. Bernhard P., Engwerda J. C., Roorda B., Schumacher J., Kolokoltsov V., Saint-Pierre P., Aubin J.-P. *The Interval Market Model in Mathematical Finance: Game-Theoretic Methods*. — New York : Springer, 2013. — (Cit. on pp. 7, 12, 19, 31, 108, 203, 220, 348, 372).

96. Bertsekas D. Approximation procedures based on the method of multipliers // *Journal Optimization Theory and Applications*. — 1977. — Vol. 23. — P. 487–510. — (Cit. on p. 296).
97. Biagini F., Gonon L., Reitsam T. Neural Network Approximation for Superhedging Prices // *arXiv:2107.14113 [q-fin.MF]*. — 2021. — (Cit. on p. 9).
98. Bielecki T. R., Cialenco I., Feng S. A dynamic model of central counterparty risk // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. — 2018. — (Cit. on p. 345).
99. Billingsley P. *Convergence of Probability Measures*. — First edition. — New York : Wiley, 1968. — (Cit. on pp. 23, 119, 120, 128, 137, 139).
100. Billingsley P. *Convergence of Probability Measures*. — Second edition. — New York : Wiley, 1999. — (Cit. on pp. 119, 256).
101. Black F. The pricing of commodity contracts // *Journal of Financial Economics*. — 1976. — Vol. 3. — P. 167–179. — (Cit. on p. 347).
102. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // *Journal of Political Economy*. — 1973. — Vol. 81, no. 3. — P. 637–654. — (Cit. on pp. 6, 347).
103. Bogachev V. *Measure Theory*. Vol. 2. — Berlin : Springer, 2007. — (Cit. on pp. 138, 140).
104. Bohnenblust H. F., Karlin S., Shapley L. S. Games with continuous, convex pay-off // *Contributions to the theory of games*. — 1950. — Vol. 20, no. 1. — P. 181–192. — (Cit. on p. 152).
105. Bouchard B., Nutz M. Arbitrage and duality in nondominated discrete-time models // *Annals of Applied Probability*. — 2015. — Vol. 25, no. 2. — P. 823–859. — (Cit. on pp. 8, 50, 52, 227).
106. Bremner D., Fukuda K., Marzetta A. Primal-dual methods for vertex and facet enumeration // *Discrete & Computational Geometry*. — 1998. — Vol. 20. — P. 333–357. — (Cit. on p. 298).
107. Brennan M. J. A theory of price limits in futures markets // *Journal of Financial Economics*. — 1986. — Vol. 16, no. 2. — P. 214–233. — (Cit. on p. 353).
108. Burzoni M., Frittelli M., Hou Z., Maggis M. Universal arbitrage aggregator in discrete-time markets under uncertainty // *Finance and Stochastics*. — 2016. — Vol. 20, no. 1. — P. 1–50. — (Cit. on p. 9).
109. Burzoni M., Frittelli M., Hou Z., Maggis M., Oblój J. Pointwise arbitrage pricing theory in discrete time // *Mathematics of Operations Research*. — 2019. — Vol. 44, no. 3. — P. 1034–1057. — (Cit. on pp. 9, 52, 348).
110. Burzoni M., Frittelli M., Maggis M. Model-free superhedging duality // *The Annals of Applied Probability*. — 2017. — Vol. 27, no. 3. — P. 1452–1477. — (Cit. on p. 9).

111. Capponi A., Cheng W. A., Sethuraman J. Clearinghouse Default Waterfalls: Risk-Sharing, Incentives, and Systemic Risk. — 2017. — URL: <https://ssrn.com/abstract=2930099> ; 08.06.2020. — (Cit. on p. 344).
112. Carassus, L., Gobet, E., Temam, E. A class of financial products and models where super-replication prices are explicit // *Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance* "— Proceedings of the 6th Ritsumeikan International Conference. — World Scientific, 2006. — P. 67–84. — (Cit. on pp. 8, 30).
113. Carassus L., Lépinette E. Pricing without no–arbitrage condition in discrete time // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2022. — Vol. 505, no. 125441. — (Cit. on pp. 40, 54, 55, 59).
114. Carassus L., Oblój J., Wiesel J. Erratum: The Robust Superreplication Problem: A Dynamic Approach // *SIAM Journal on Financial Mathematics*. — 2022. — Vol. 13, no. 2. — P. 653–655. — (Cit. on p. 229).
115. Carassus L., Oblój J., Wiesel J. The robust superreplication problem: A dynamic approach // *SIAM Journal on Financial Mathematics*. — 2019. — Vol. 10, no. 4. — P. 907–941. — (Cit. on pp. 143, 228, 229, 348, 372).
116. Carassus L., Vargiolu T. Super-replication price for asset prices having bounded increments in discrete time. — 2010. — (Cit. on pp. 8, 30).
117. Cherny A. General arbitrage pricing model: I "— *Probability Approach // Séminaire de Probabilités XL. Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 1899. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2007. — P. 415–445. — (Cit. on p. 47).
118. Coffman Jr E. G., Matsypura D., Timkovsky V. G. Strategy vs risk in margining portfolios of options // *Quarterly Journal of Operations Research*. — 2010. — Vol. 8. — P. 375–386. — (Cit. on p. 347).
119. Committee on Payment and Settlement Systems, Technical Committee of the Organization of Securities Commissions. Principles for financial market infrastructures : tech. rep. / Bank for International Settlements ; International Organization of Securities Commissions. — 2012. — (Cit. on p. 345).
120. Committee on Payment and Settlement Systems, Technical Committee of the Organization of Securities Commissions. Recommendations for central counterparties : tech. rep. / Bank for International Settlements ; International Organization of Securities Commissions. — 2004. — (Cit. on p. 344).
121. Committee on Payments and Market Infrastructures, Board of the International Organization of Securities Commissions. Resilience of central counterparties (CCPs): Further guidance on the PFMI : tech. rep. / Bank for International Settlements ; International Organization of Securities Commissions. — 2016. — (Cit. on p. 346).
122. Cont R. The end of the waterfall: default resources of central counterparties // *Journal of Risk Management in Financial Institutions*. — London, 2015. — Vol. 8, no. 4. — P. 365–389. — (Cit. on p. 344).

123. Contento L. The Discrete Legendre–Fenchel Transform and its application to phase separation in electrolytes. — 2012. — (Cit. on p. 298).
124. Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings, Lattices, and Groups. — New York : Springer–Verlag, 1993. — (Cit. on p. 292).
125. Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach // *Journal of financial Economics*. — 1979. — Vol. 7, no. 3. — P. 229–263. — (Cit. on pp. 7, 23, 222, 319, 347).
126. Cramér H. Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités // *Actualités Scientifiques et Industrielles*. — 1938. — Vol. 736. — P. 5–23. — (Cit. on p. 237).
127. Dana R.-A., Jeanblanc-Picqué M. *Marchés Financiers en Temps Continu*. — Paris : Economica, 1994. — (Cit. on pp. 7, 221).
128. Dana R.-A., Le Van C., Magnien F. On the different notions of arbitrage and existence of equilibrium // *Journal of Economic Theory*. — 1999. — Vol. 87, no. 1. — P. 169–193. — (Cit. on p. 47).
129. Delbaen F. Representing martingale measures when asset prices are continuous and bounded // *Mathematical Finance*. — 1992. — Vol. 2, no. 2. — P. 107–130. — (Cit. on p. 47).
130. Delbaen F., Schachermayer W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing // *Mathematische annalen*. — 1994. — Vol. 300, no. 1. — P. 463–520. — (Cit. on p. 47).
131. Delbaen F., Schachermayer W. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes // *Mathematische annalen*. — 1998. — Vol. 312, no. 2. — P. 215–250. — (Cit. on p. 47).
132. Denis L., Martini C. A theoretical framework for the pricing of contingent claims in the presence of model uncertainty // *Annals of Applied Probability*. — 2006. — Vol. 16, no. 2. — P. 827–852. — (Cit. on p. 13).
133. Denkowski Z., Migórski S., Papageorgiou N. S. *An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory*. — New York : Springer, 2003. — (Cit. on pp. 145, 176).
134. DeVore R. A., Lorentz G. G. *Constructive Approximation*. — New York : Springer, 1993. — P. 452. — (Cit. on p. 95).
135. Dieudonné J. *Foundations of Modern Analysis*. — New York : Academic Press, 1960. — P. 361. — (Cit. on p. 102).
136. Dovgoshey O., Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M. The Cantor function // *Expositiones Mathematicae*. — 2006. — Vol. 24, no. 1. — P. 1–37. — (Cit. on p. 96).
137. Dudley R. M. Distances of Probability Measures and Random Variables // *The Annals of Mathematical Statistics*. — 1968. — Vol. 39, no. 5. — P. 1503–1572. — (Cit. on p. 143).

138. Dudley R. M. *Real Analysis and Probability*. — New York : Cambridge University Press, 2004. — P. 566. — (Cit. on pp. 141, 190–192).
139. Dudley R. Convergence of Baire measures // *Studia Mathematica*. — 1966. — Vol. 27. — P. 251–268. — (Cit. on p. 143).
140. Duffy D. J. *Finite Difference Methods in Financial Engineering: A Partial Differential Equation Approach*. — West Sussex : Wiley, 2006. — (Cit. on p. 9).
141. Edmonds A. L. Simplicial decompositions of convex polytopes // *Pi Mu Epsilon Journal*. — 1970. — Vol. 5, no. 3. — P. 124–128. — (Cit. on p. 216).
142. Eldor R., Hauser S., Yaari U. Safer margins for option trading: How accuracy promotes efficiency // *Multinational Finance Journal*. — 2011. — Vol. 15, no. 3–4. — P. 217–234. — (Cit. on p. 347).
143. Esscher F. On the probability function in the collective theory of risk // *Skandinavisisk Aktuarietidskrift*. — 1932. — Vol. 15, no. 3. — P. 175–195. — (Cit. on p. 236).
144. Evstigneev I. V., Schürger K., Taksar M. I. On the fundamental theorem of asset pricing: random constraints and bang-bang no-arbitrage criteria // *Mathematical Finance*. — 2004. — Vol. 14, no. 2. — P. 201–221. — (Cit. on p. 118).
145. Fan K. Minimax theorems // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 1953. — Vol. 39. — P. 42–47. — (Cit. on pp. 115, 152).
146. Faruqui U., Huang W., Takáts E. Clearing risks in OTC derivatives markets: the CCP-bank nexus // *BIS Quarterly Review* December. — 2018. — P. 73–90. — (Cit. on p. 345).
147. Favorsky A., Mikhailova P., Smirnov S. Monotone numerical methods for the option pricing and hedging models // *Abstracts of the 3rd International Conference on Operations Research (ORM2001)*. — 2001. — P. 30–31. — (Cit. on p. 296).
148. Fekete M. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // *Mathematische Zeitschrift*. — 1923. — Vol. 17, no. 1. — P. 228–249. — (Cit. on p. 361).
149. Fenchel W. *Convex Cones, Sets, and Functions*. — Princeton : Princeton University, Department of Mathematics, 1953. — (Cit. on p. 157).
150. Föllmer H., Kabanov Y. Optional decomposition and Lagrange multipliers // *Finance and Stochastics*. — 1997. — Vol. 2, no. 1. — P. 69–81. — (Cit. on pp. 6, 240).
151. Föllmer H., Schied A. *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, 4nd edition. — New York : Walter de Gruyter, 2016. — (Cit. on pp. 6, 41, 130, 213, 227, 240, 245, 348).

152. Gamby A., Katajainen J. Convex-hull algorithms: Implementation, testing and experimentation // *Algorithms*. — 2018. — Vol. 11, no. 195. — (Cit. on p. 297).
153. Gander W., Golub G. H., Van Mott U. A constrained eigenvalue problem // *Linear Algebra and its Applications*. — 1989. — Vol. 114–115. — P. 815–839. — (Cit. on p. 304).
154. Gerhold S., Krühner P. Dynamic trading under integer constraints // *Finance Stoch.* — 2018. — Vol. 22. — P. 919–957. — (Cit. on p. 40).
155. Ghamami S. Static models of central counterparty risk // *International Journal of Financial Engineering*. — 2015. — Vol. 2. — P. 1–36. — (Cit. on p. 345).
156. Glasserman P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. — New York : Springer, 2004. — (Cit. on p. 9).
157. Goberna M., González E., Martínez–Legaz J., Todorov M. Motzkin decomposition of closed convex sets // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2010. — Vol. 364, no. 1. — P. 209–221. — (Cit. on p. 276).
158. Goberna M., Iusem A., Martínez–Legaz J., Todorov M. Motzkin decomposition of closed convex sets via truncation // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2013. — Vol. 400, no. 1. — P. 35–47. — (Cit. on p. 276).
159. Goberna M., Martínez–Legaz J., Todorov M. On Motzkin decomposable sets and functions // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2010. — Vol. 372, no. 2. — P. 525–537. — (Cit. on p. 276).
160. Hales T. [et al.]. A formal proof of the Kepler conjecture // *Forum of Mathematics, Pi*. — 2017. — Vol. 5. — e3. — (Cit. on p. 292).
161. *Handbook of Discrete and Computational Geometry, Third Edition* // *Handbook of Discrete and Computational Geometry, Third Edition* / ed. by C. D. Toth, J. O'Rourke, J. E. Goodman. — CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 2017. — (Cit. on pp. 16, 294, 297).
162. Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. *Inequalities*. — Cambridge : Cambridge University Press, 1934. — (Cit. on p. 238).
163. Harrison J. M., Kreps D. M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // *Journal of Economic theory*. — 1979. — Vol. 20, no. 3. — P. 381–408. — (Cit. on p. 47).
164. Harrison J. M., Pliska S. R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading // *Stochastic processes and their applications*. — 1981. — Vol. 11, no. 3. — P. 215–260. — (Cit. on p. 47).
165. Hausdorff F. *Grundzüge der Mengenlehre*. — Leipzig : Verlag von Viet & Comp., 1914. — (Siehe S. 143).

166. Helly E. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — 1923. — Bd. 32, Nr. 9. — S. 175–176. — (Siehe S. 154).
167. Hille S. C., Worm D. T. H. Embedding of semigroups of Lipschitz maps into positive linear semigroups on ordered Banach spaces generated by measures // Integral Equations and Operator Theory. — 2009. — Vol. 63, no. 3. — P. 351–371. — (Cit. on p. 140).
168. Himmelberg C. J. Measurable relations // Fundamenta Mathematicae. — 1975. — Vol. 87, no. 1. — P. 53–72. — (Cit. on p. 241).
169. Hobson D. Robust hedging of the lookback option // Finance and Stochastics. — 1998. — Vol. 2, no. 4. — P. 329–347. — (Cit. on p. 8).
170. Hou Z., Oblój J. Robust pricing–hedging dualities in continuous time // Finance Stoch. — 2018. — Vol. 22. — P. 511–567. — (Cit. on pp. 65, 140).
171. Hu S., Papageorgiou N. Handbook of Multivalued Analysis: Theory, vol. I. Mathematics and Its Applications. Vol. 419. — Berlin : Springer, 1997. — P. 968. — (Cit. on pp. 75–81, 83, 87–90, 94, 101, 137, 141, 143, 188–191, 193–196, 200, 201, 212, 225, 229, 231, 233, 267, 275, 276, 286, 288, 290).
172. Hucki Z., Kolokoltsov V. N. Pricing of rainbow options: game theoretic approach // International Game Theory Review. — 2007. — Vol. 9, no. 2. — P. 215–242. — (Cit. on p. 220).
173. International Swaps and Derivatives Association (ISDA). CCP best practices : tech. rep. / ISDA. — 2019. — (Cit. on p. 346).
174. Ionescu Tulcea C. T. Mesures dans les espaces produits // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Rendiconti Lincei Matematica E Applicazioni. — 1949. — Vol. 7. — P. 208–211. — (Cit. on p. 227).
175. Isii K. The extrema of probability determined by generalized moments (I) bounded random variables // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. — 1960. — Vol. 12, no. 2. — P. 119–134. — (Cit. on p. 173).
176. Iusem A. N., Martínez-Legaz J. E., Todorov M. I. Motzkin predecomposable sets // Journal of Global Optimization. — 2014. — Vol. 60, no. 4. — P. 635–647. — (Cit. on p. 276).
177. Jacod J., Shiryaev A. N. Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case // Finance And Stochastics. — 1998. — Vol. 2, no. 3. — P. 259–273. — (Cit. on pp. 6, 50, 58, 59, 161, 185, 227, 241).
178. Jain P. K., Ahmad K., Ahuja O. P. Functional Analysis. — New Delhi : Academic Press, 1995. — P. 326. — (Cit. on p. 143).
179. Jones F. B. Connected and disconnected plane sets and the functional equation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1942. — Vol. 48, no. 2. — P. 115–120. — (Cit. on p. 96).

180. Karlin S. Extreme points of vector functions // *Proceedings of the American Mathematical Society*. — 1953. — Vol. 4, no. 4. — P. 603–610. — (Cit. on p. 169).
181. Karoui N. E., Quenez M. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market // *SIAM journal on Control and Optimization*. — 1995. — Vol. 33, no. 1. — P. 29–66. — (Cit. on p. 6).
182. Karr A. Extreme Points of Certain Sets of Probability Measures, with Applications // *Mathematics of Operations Research*. — 1983. — Vol. 8, no. 1. — P. 581–587. — (Cit. on pp. 168, 169).
183. Kneser H. Sur un théoreme fondamental de la théorie des jeux // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*. — 1952. — Vol. 234. — P. 2418–2420. — (Cit. on pp. 15, 57, 85, 114, 117, 152).
184. Knight F. H. Risk, uncertainty and profit. — New York : Houghton Mifflin Co., 1921. — (Cit. on p. 7).
185. Kolokoltsov V. N. Nonexpansive maps and option pricing theory // *Kybernetika*. — 1998. — Vol. 34, no. 6. — P. 713–724. — (Cit. on pp. 7, 12, 220, 316).
186. Kramkov D. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets // *Probability Theory and Related Fields*. — 1996. — Vol. 105, no. 4. — P. 459–479. — (Cit. on p. 6).
187. Krein M., Milman D. On extreme points of regular convex sets // *Studia Mathematica*. — 1940. — Vol. 9, no. 9. — P. 133–138. — (Cit. on p. 168).
188. Kreps D. M. Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities // *Journal of Mathematical Economics*. — 1981. — Vol. 8, no. 1. — P. 15–35. — (Cit. on pp. 47, 48).
189. Kupka I. Continuous selections from topological to metric spaces // *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. — 1990. — Vol. 39, no. 3. — P. 427–435. — (Cit. on pp. 201, 202, 212).
190. Lange K. L. Borel sets of probability measures // *Pacific Journal of Mathematics*. — 1973. — Vol. 48, no. 1. — P. 141–162. — (Cit. on p. 137).
191. Lévy P. *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires*. Vol. 1 / ed. by Gauthier–Villars. — Paris : Gauthier–Villars, 1937. — (Monographies des probabilités). — (Cit. on p. 143).
192. Lucet Y. What shape is your conjugate? A survey of computational convex analysis and its applications // *SIAM review*. — 2010. — Vol. 52, no. 3. — P. 505–542. — (Cit. on p. 297).
193. Matsuda T., Takemura A. Game-theoretic derivation of upper hedging prices of multivariate contingent claims and submodularity // *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*. — 2020. — Vol. 37, no. 1. — P. 213–248. — (Cit. on p. 220).

194. Merton R. C. Theory of rational option pricing // *The Bell Journal of Economics*. — 1973. — Vol. 4, no. 1. — P. 141–183. — (Cit. on pp. 6, 48, 52).
195. Michael E. A. Continuous selections. I // *Annals of Mathematics*. — 1956. — Vol. 63, no. 2. — P. 361–382. — (Cit. on pp. 144, 145).
196. Moore G. H. Zermelo's Axiom of Choice. — New York : Springer-Verlag, 1982. — (Cit. on p. 252).
197. Mordukhovich B. S., Nam N. M. Extremality of convex sets with some applications // *Optimization Letters*. — 2017. — Vol. 11, no. 7. — P. 1201–1215. — (Cit. on p. 261).
198. Moreau J.-J. Proximité et dualité dans un espace hilbertien // *Bulletin de la société mathématique de France*. — 1965. — Vol. 93. — P. 273–299. — (Cit. on p. 296).
199. Moschovakis Y. *Descriptive Set Theory*. — Second edition. — New York : American Mathematical Society, 2009. — (Cit. on p. 179).
200. Mulholland H. P., Rogers C. A. Representation theorems for distribution functions // *Proceedings of the London Mathematical Society*. — 1958. — Vol. 3, no. 2. — P. 177–223. — (Cit. on p. 166).
201. Mycielski J., Świerczkowski S. On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness // *Fundamenta Mathematicae*. — 1964. — Vol. 54, no. 1. — P. 67–71. — (Cit. on pp. 43, 110).
202. Neufeld A., Nutz M. Superreplication under volatility uncertainty for measurable claims // *Electronic Journal of Probability*. — 2013. — Vol. 18, no. 48. — P. 1–14. — (Cit. on p. 13).
203. O'Neill B. Induced homology homomorphisms for set-valued maps // *Pacific Journal of Mathematics*. — 1957. — Vol. 7, no. 2. — P. 1179–1184. — (Cit. on p. 201).
204. Obłój J., Wiesel J. A unified Framework for Robust Modelling of Financial Markets in discrete time. — 2019. — arXiv:1808.06430. — (Cit. on pp. 8, 48, 52).
205. Ostrovski V. Stability of no-arbitrage property under model uncertainty // *Statistics and Probability Letters*. — 2013. — Vol. 83. — P. 89–92. — (Cit. on pp. 65, 256).
206. Peters H., Wakker P. Convex functions on non-convex domains // *Economics Letters*. — 1986. — Vol. 22, no. 2. — P. 251–255. — ISSN 0165–1765. — (Cit. on p. 182).
207. Pliska S. R. *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*. — New York : Wiley, 1997. — (Cit. on pp. 52, 58).

208. Rachev S., Klebanov L., Stoyanov S., Fabozzi F. *The Methods of Distances in the Theory of Probability and Statistics*. — New York : Springer, 2013. — (Cit. on p. 251).
209. Revuz D. *Markov Chains*. — North Holland, 1975. — (Cit. on pp. 146, 148).
210. Richter H. Parameterfreie abschätzung und realisierung von erwartungswerten // *Blätter der DGVM*. — 1957. — Bd. 3, Nr. 2. — S. 147–162. — (Siehe S. 166, 173).
211. Rogers L. C. G. Equivalent martingale measures and no-arbitrage // *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*. — 1994. — Vol. 51, no. 1–2. — P. 41–49. — (Cit. on p. 235).
212. Rogosinski W. W. Moments of non-negative mass // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1958. — Vol. 245, no. 1240. — P. 1–27. — (Cit. on p. 166).
213. Rokhlin D. B. Martingale selection problem and asset pricing in finite discrete time // *Elect. Comm. in Probab.* — 2007. — Vol. 12. — P. 1–8. — (Cit. on p. 111).
214. Ross S. A. A simple approach to the valuation of risky streams // *Journal of Business*. — 1978. — Vol. 51, no. 3. — P. 453–475. — (Cit. on p. 47).
215. Ryll–Nardzewski C. On quasi-compact measures // *Fundamenta Mathematicae*. — 1953. — Vol. 40, no. 1. — P. 125–130. — (Cit. on p. 176).
216. Samuelson P. A. Rational theory of warrant pricing // *Industrial Management Review*. — 1965. — Vol. 6. — P. 13–31. — (Cit. on pp. 6, 25).
217. Schachermayer W. The fundamental theorem of asset pricing // *Mathematical Finance*. — 2004. — Vol. 14, no. 1. — P. 19–48. — (Cit. on p. 64).
218. Schirmer H. Fix-finite approximation of n -valued multifunctions // *Fundamenta Mathematicae*. — 1984. — Vol. 1, no. 121. — P. 73–80. — (Cit. on p. 201).
219. Seidel W. Supports of Borel measures // *Fundamenta Mathematicae*. — 1989. — Vol. 133, no. 1. — P. 67–80. — (Cit. on p. 128).
220. Simchi–Levi D., Chen X., Bramel J. *The Logic of Logistics: Theory, Algorithms, and Applications for Logistics Management*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. — New York : Springer, 2013. — (Cit. on p. 219).
221. Sion M. On general minimax theorems // *Pacific Journal of Mathematics*. — 1958. — Vol. 8, no. 1. — P. 171–176. — (Cit. on pp. 152, 156).
222. Smirnov S. N. A Feller transition kernel with measure supports given by a set-valued mapping // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. — 2020. — Vol. 308, no. Suppl. 1. — S188–S195. — (Cit. on pp. 14, 15, 135).

223. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: A game equilibrium in the case of no trading constraints // *Journal of Mathematical Science*. — 2020. — Vol. 248, no. 1. — P. 105–115. — (Cit. on pp. 19, 109).
224. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: case of the convex payoff functions on option // *Mathematics*. — 2019. — Vol. 7, no. 1246. — P. 1–19. — (Cit. on p. 188).
225. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: Financial market model, trading constraints and the Bellman–Isaacs equations // *Automation and Remote Control*. — 2021. — Vol. 82, no. 4. — P. 722–743. — (Cit. on p. 22).
226. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: No arbitrage properties of the market // *Automation and Remote Control*. — 2021. — Vol. 82, no. 1. — P. 172–187. — (Cit. on p. 45).
227. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: optimal mixed strategies of the market and their supports // *Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis: OTHA 2020, Part II – Probability-Analytical Models, Methods and Applications*. — Rostov-on-Don : Springer, 2021. — P. 355–372. — (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics). — (Cit. on p. 188).
228. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: Sensitivity of solutions of Bellman–Isaacs equations and numerical methods // *Computational Mathematics and Modeling*. — 2020. — Vol. 31, no. 3. — P. 384–401. — (Cit. on pp. 92, 259).
229. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: structural stability and approximation // *Computational Mathematics and Modeling*. — 2021. — Vol. 32, no. 2. — P. 129–146. — (Cit. on p. 259).
230. Smirnov S. N. General theorem on a finite support of mixed strategy in the theory of zero-sum games // *Doklady Mathematics*. — 2018. — Vol. 97, no. 3. — P. 215–218. — (Cit. on pp. 12, 15, 149).
231. Smirnov S. N. Geometric criterion for a robust condition of no sure arbitrage with unlimited profit // *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*. — 2020. — Vol. 44, no. 3. — P. 146–150. — (Cit. on p. 45).
232. Smirnov S. N. Guaranteed Deterministic Approach to Superhedging: the Semicontinuity and Continuity Properties of Solutions of the Bellman–Isaacs Equations // *Automation and Remote Control*. — 2021. — Vol. 82, no. 11. — P. 2024–2040. — (Cit. on p. 74).
233. Smirnov S. N. Structural stability threshold for the condition of robust no deterministic sure arbitrage with unbounded profit // *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*. — 2021. — Vol. 45, no. 1. — P. 34–44. — (Cit. on p. 259).

234. Smirnov S. N. The guaranteed deterministic approach to superhedging: Lipschitz properties of solutions of the Bellman–Isaacs equations // *Frontiers of Dynamics Games: Game Theory and Management*. — St. Petersburg : Birkhäuser, 2019. — P. 267–288. — (Cit. on p. 92).
235. Smirnov S. N. Thoughts on financial risk modeling: The role of interpretation // *Intelligent Risk*. — 2012. — Vol. 2, no. 2. — P. 12–15. — (Cit. on pp. 18, 136, 170).
236. Smirnov S. N., Lapshin V. A., Kurbangaleev M. Z. Deriving implied risk-free interest rates from bond and CDS quotes: A model-independent approach // *Optimization and Engineering*. — 2017. — Vol. 18, no. 2. — P. 499–536. — (Cit. on pp. 274, 375).
237. Smirnov S. N. Realistic models of financial market and structural stability // *Journal of Mathematics*. — 2021. — Vol. 2021. — P. 6651324. — (Cit. on pp. 135, 235).
238. Smirnov S. N., Zanochkin A. Y. Guaranteed deterministic approach to superhedging: Case of binary european option // *Abstract and Applied Analysis*. — 2021. — Vol. 2021. — P. 5568636. — (Cit. on pp. 21, 314).
239. Solovay R. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // *Annals of Mathematics*. — 1970. — Vol. 92, no. 1. — P. 1–56. — (Cit. on p. 42).
240. Soner H. M., Touzi N., Zhang J. Dual formulation of second order target problems // *Annals of Applied Probability*. — 2013. — Vol. 23, no. 1. — P. 308–347. — (Cit. on p. 13).
241. Starr R. Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences // *Econometrica*. — 1969. — Vol. 37, no. 1. — P. 25–38. — (Cit. on p. 304).
242. Steinitz E. Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. — 1914. — Bd. 144. — S. 1–40. — (Siehe S. 219).
243. Steinitz E. Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. VI, VII // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. — 1916. — Bd. 146. — S. 1–52. — (Siehe S. 168).
244. Strassen V. The existence of probability measures with given marginals. // *The Annals of Mathematical Statistics*. — 1965. — Vol. 36. — P. 423–439. — (Cit. on p. 143).
245. Stroock D. W. *Probability Theory an Analytic View*. — New York : Cambridge University Press, 2011. — (Cit. on p. 157).
246. Sung C. H., Tam B. S. On the cone of a finite dimensional compact convex set at a point // *Linear Algebra and Its Applications*. — 1987. — Vol. 90. — P. 47–55. — (Cit. on p. 150).

247. Technical Committee of IOSCO. Report on margin : tech. rep. / International Organization of Securities Commissions. — 1996. — (Cit. on pp. 345, 351).
248. Tijss S. H., Borwein J. M. Some generalizations of Carathéodory's theorem via barycentres, with application to mathematical programming // Canadian Mathematical Bulletin. — 1980. — Vol. 23, no. 3. — P. 339–346. — (Cit. on p. 128).
249. Topsoe F. Topology and Measure. Lecture Notes in Mathematics. — New York : Springer–Verlag, 1970. — P. 84. — (Cit. on p. 119).
250. Uhlmann A. Entropy and optimal decompositions of states relative to a maximal commutative subalgebra // Open Systems and Information Dynamics. — 1998. — Vol. 5. — P. 209–228. — (Cit. on p. 182).
251. Vakhania N. N. The topological support of Gaussian measure in Banach space // Nagoya Mathematical Journal. — 1975. — Vol. 57. — P. 59–63. — (Cit. on p. 128).
252. Vakhania N. N., Tarieladze V. I., Chobanyan S. A. Probability Distributions on Banach Spaces. — Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1987. — P. 482. — (Cit. on p. 137).
253. Vicente L. A. B. G., Cerezetti F., De Faria S., Iwashita T., Pereira O. Managing risk in multi-asset class, multimarket central counterparties: The CORE approach // Journal of Banking & Finance. — 2015. — Vol. 51. — P. 119–130. — (Cit. on pp. 348, 351).
254. Vicente L. A. B. G. Risk assessment processes for closeout of a portfolio. — Google Patents, 2012. — US Patent App. 13/462,091. — (Cit. on p. 348).
255. Weaver N. Lipschitz Algebras. — New York : World Scientific Publishing Co., 1999. — P. 223. — (Cit. on p. 139).
256. Winkler G. Extreme Points of Moment Sets // Mathematics of Operations Research. — 1988. — Vol. 13, no. 4. — P. 581–587. — (Cit. on p. 169).
257. Yang Y. A facet enumeration algorithm for convex polytopes. — 2019. — <http://arxiv.org/abs/1909.11843v1>. — (Cit. on p. 299).
258. Zhukovskiy S. E. On continuous selections of finite-valued set-valued mappings // Eurasian Mathematical Journal. — 2018. — Vol. 9, no. 1. — P. 83–87. — (Cit. on pp. 15, 201, 202).

LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY

Printed as a manuscript

Smirnov Sergey Nickolaevich

**A guaranteed deterministic approach
to the modeling of financial markets**

Scientific specialty 1.2.2
Mathematical modeling, numerical methods and software packages

Dissertation submitted for the degree of
Doctor of Physics and Mathematics

Translation from Russian

Moscow, 2022

First of all, note that the distinction between applied and pure mathematics is very conditional. Questions that seem to belong to pure mathematics and have no use are very often quite unexpectedly important for different applications. On the other hand, when engaged in applied mathematics, a researcher almost inevitably encounters related questions solved by the same methods, attracting him by their logical beauty but actually having no direct applications. Perhaps the practical work of the mathematician must be given the necessary breadth. Undoubtedly, mathematicians must deal with all those questions strongly imposed by the questions of practice, it is their duty. If related questions, even without immediate applications, are attractive at least because of the beauty and naturalness of the arising problems, they should of course be dealt with as well.

A.N. Kolmogorov

Clearly, no matter how accurate the mathematical solution is, it cannot have accuracy higher than the underlying approximate assumptions. This is often forgotten: some rough approximation or assumption is made at the beginning, often even without any statement, and then the resulting formula is given much more credence than it deserves, and this is due to its complex derivation.

A.N. Krylov

The sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work — that is correctly to describe phenomena from a reasonably wide area. Furthermore, it must satisfy certain esthetic criteria — that is, in relation to how much it describes, it must be rather simple.

J. von Neumann

Contents

Contents	3
Introduction	6
Chapter 1. Market Model, Trading Constraints, and the Bellman–Isaacs Equations	20
1.1. The Deterministic Market Model: Price Dynamics and Trading Constraints	20
1.2. Guaranteed Pricing of an American Option: Problem Statement . . .	30
Chapter 2. “No Arbitrage” Properties of the Market	41
2.1. Arbitrage and “No Arbitrage” in the Market	41
2.2. Arbitrage Opportunity and Sure Arbitrage	44
2.3. No Sure Arbitrage with Unbounded Profit	55
2.4. Structural Stability of the Model. The Coarse (Robust) Form of “No Arbitrage”	58
Chapter 3. The Semicontinuity and Continuity Properties of Solutions of the Bellman–Isaacs Equations	67
3.1. General Conditions for the Semicontinuity and Continuity of Solutions of the Bellman–Isaacs Equations	67
3.2. Smoothness Conditions for Solutions of Bellman–Isaacs Equations Relating Uncertain Price Dynamics and Trading Constraints via “No Arbitrage”	76
Chapter 4. The Modulus of Continuity and Lipschitz Properties of Solutions of the Bellman–Isaacs Equations	83
4.1. Auxiliary Results	83
4.2. Solutions of the Bellman–Isaacs Equations: Estimation of the Modulus of Continuity	90
Chapter 5. Mixed Strategies and Game Equilibrium	99
5.1. Mixed “Market” Strategies	99
5.2. Equilibrium in Mixed “Market” Strategies	102
5.3. Equilibrium in the Case of No Trading Constraints	115

Chapter 6. The Realistic Property of the Market Model and Its Criterion	123
6.1. The Realistic Property of the Market Model	123
6.2. The Properties of Feller Transition Kernels	125
6.3. Auxiliary Results	127
6.4. The Existence of Feller Transition Kernels with Measure Supports Given by a Set-Valued Mapping	129
6.5. The Existence of Strongly Feller Transition Kernels in the Strict Sense under Structural Stability	132
Chapter 7. The Most Unfavorable Scenarios of Market Behavior and the Moment Problem	135
7.1. The Two-Stage Method for Solving the Bellman Equations	135
7.2. Finite Supports of Mixed Strategies in a Zero-Sum Game	138
7.3. The General Moment Problem	146
7.4. Measurability in the General Moment Problem	160
7.5. Application of Results from General Moment Problem Theory	163
7.6. The Case of No Trading Constraints	168
Chapter 8. The Properties of Optimal “Market” Strategies and Their Supports	171
8.1. Smoothness Properties of Optimal Mixed “Market” Strategies and Their Supports	171
8.2. The Existence of a Transition Kernel for Optimal Mixed Strategies	177
8.3. Some Properties of Supports in the Case of a Unique Optimal Market Strategy Concentrated at Most at $n + 1$ Points	181
8.4. The Convex Solutions of the Bellman Equations	184
8.5. Discontinuous Superhedging Price due to Possible Degeneracy of Optimal Mixed Market Strategies under Structural Instability	204
Chapter 9. The Relationship between the Deterministic and Probabilistic Problem Statements without Trading Constraints	213
9.1. A Constructive Method to Design a Parametric Family of Equivalent Measures with a Given Barycenter	213
9.2. The Relationship between the Deterministic and Probabilistic Approaches to Superreplication	217
9.3. Preservation of Structural Stability for Close Stochastic Models	228
Chapter 10. Numerical Solution Based on an Approximating Model with Accuracy Estimation	234
10.1. Structural Stability Threshold	235
10.2. Sensitivity to Small Perturbations of Compact Sets Describing Uncertain Price Dynamics	246
10.3. Fragility of the Model: Possible under Structural Instability	259
10.4. Choice of Numerical Methods	264

10.5. Numerical Analysis Algorithm and Computational Experiment . . .	269
Chapter 11. Binary Options	285
11.1. Auxiliary Results for Special Models	285
11.2. A Binary European Option	288
11.3. Numerical Solution Algorithm	307
Chapter 12. A Guaranteed Deterministic Approach to Margining in an Exchange-Traded Derivatives Market	311
12.1. Risk Management of the Central Counterparty	311
12.2. The Role of the Margining System in Risk Management of the Central Counterparty	313
12.3. Description of the Margining System Based on the Deterministic Guaranteed Approach	317
12.4. The Mathematical Model of Margining with Futures Correction . .	320
12.5. The Solutions of the Bellman–Isaacs Equations: Some Useful Properties for Numerical Solution	328
12.6. Calculations on Model Examples to Demonstrate the Effectiveness of the Margining System with Futures Correction	330
Conclusion	336
Notations	342
References	346

Introduction

Topicality of research and the current level of examination in the literature

The mathematical models of financial derivatives pricing and hedging first appeared in 1973 in the seminal works of Black and Scholes [36] and Merton [148]. They were based on the Bachelier–Samuelson continuous-time financial market model [16; 184], which is an example of complete market models. In the case of continuous time, the market completeness assumption is natural: with an absolutely continuous change of the measure, it is possible to pass to a single equivalent martingale measure. However, for discrete-time models, which are of main interest in this dissertation, market completeness appears to be a limiting requirement. For the market model with one risk-free and several risky assets and no trading constraints, the conditional distributions of discounted price increments should be (almost surely) concentrated in a finite number of points, not exceeding the total number of assets. This result was established by Jacod and Shiryaev [121].

For incomplete market models, one of the most important ways to hedge contingent liabilities on a written option is superhedging, also known as superreplication. The superhedging problem was first solved using the optional decomposition technique by several authors: El Karoui and Quenez [127] for the diffusion dynamics of the underlying assets, Kramkov [134] in the general semimartingale statement, and Föllmer and Kabanov [92] for the discrete-time case. A modern probabilistic approach in the discrete-time case was presented by Föllmer and Schied in the monograph [93]. In Chapter 8 of this book, various statements of the efficient hedging problem were considered; their solution was reduced to the superhedging of an option with a modified payoff function.

Our research was initially motivated by Kramkov’s presentation on a seminar at Steklov Mathematical Institute in the mid-1990s, devoted to solving the superhedging problem based on the optional decomposition. In the presentation, he noted difficulties in finding an essential supremum for the conditional expectation of the payoff function on the set of equivalent martingale measures. That is why we came up with the idea of option pricing within another approach, an alternative to the traditional probabilistic one and more constructive in nature.

Several researchers of mathematical finance qualified non-probabilistic market models as formalizations of Knightian uncertainty. However, this term seems to be incorrect: in Chapter 8 of his book [131], Knight discussed unquantifiable uncertainty

(as opposed to risk). In this research, we use the term “guaranteed deterministic approach.” Note that Kolokoltsov’s paper [133], dating back to 1998, is one of the pioneering publications on the guaranteed deterministic approach. As far as we know, he first explicitly formulated this approach to the pricing and hedging of contingent liabilities on options for incomplete markets.¹ Implicitly but factually, some mathematical tools for the guaranteed deterministic approach² were presented back in 1994 by Dana and Jeanblanc-Picqué; see Sections 1.1.6 and 1.2.4 of the book [64].

The subject of this dissertation is closely related to Kolokoltsov’s results presented in Chapters 11–14 of the book [27], devoted to interval market models. Note that these results were obtained without trading constraints. In particular, Kolokoltsov’s paper contains a game interpretation of risk-neutral probabilities independently discovered by him (in the case of no trading constraints). Chapters 13 and 14 of the book dealt with market models with interval constraints on the logarithms of prices (i. e., the vector composed of the logarithms of price increments lies in a parallelepiped). However, the theory presented in Chapter 12 of the book allows, in principle, studying more general compact-valued price constraints, as in this dissertation. Being devoted to the game-theoretic approach, these chapters of the book, surprisingly, involved no game-theoretic methods. A possible explanation is that only the case of no trading constraints was considered. From the very beginning, game-theoretic methods have been the basis of this research. With such an approach, we have investigated game equilibrium in the class of mixed strategies under trading constraints and the role of “no arbitrage”³ conditions concerning the existence of game equilibrium and the smoothness of solutions. These issues were not addressed in Kolokoltsov’s paper, as well as the connection between deterministic and stochastic approaches. Meanwhile, the solutions for these approaches may generally differ. The model from Chapters 13 and 14 of the book describes the rather regular behavior of set-valued mappings (the Lipschitz property), and the deterministic Kolokoltsov model often yields the results coinciding with the stochastic approach to superhedging, which involves supports of the conditional distributions of price increments given a known price history.

Note that our approach is close in spirit to the game-theoretic formulation proposed in 2004 by Khametov and Chalov [129]. Later on, it was developed by Zverev and Khametov in the papers [256–258]. Similar results can be found in the studies of Carassus et al. [48; 52], although all these works involve the traditional probabilistic approach.

Recent years have shown an increased interest in a new approach to market uncertainty, often called robust (which reflects the roughness of models) or model-

¹Formally, the classical paper by Cox, Ross, and Rubinstein [62] can be considered the first work, but it studied the complete market model. Despite the probabilistic approach used therein, both approaches yield the same result for a finite space of elementary events.

²These tools can be used to obtain the result of the first part of Kolokoltsov’s paper, in the case of a single risky asset and a convex payoff function for a European option.

³The term in quotation marks means the absence of arbitrage in some sense, which can be formalized in various ways. In Russian, the corresponding term was proposed by Shiryayev in the Russian edition of [189].

independent. The second term is less successful in our opinion. The guaranteed deterministic approach can be formally considered robust, which indicates the topicality of this subject. However, our approach differs in its economic interpretation. The works attributed to the robust approach can be conditionally divided into two groups: those involving the quasi-sure and pathwise approaches. Usually, these works distinguish two categories of financial instruments in a portfolio: dynamic (the instruments traded dynamically, underlying assets) and static (the instruments to which the “buy-and-hold” strategy is applied). European call and put options with fixed time to expiration are often used. The idea of studying such portfolios belongs to Hobson [112]. The relationship between the pathwise and quasi-sure approaches was considered by Oblój and Wiesel [163]. The quasi-sure approach introduces a class of probability measures describing possible scenarios of market behavior. From the mathematical point of view, in contrast with the traditional probabilistic approach, this class can contain mutually singular measures, creating serious technical complications. For the discrete-time model, this idea was proposed in Bouchard and Nutz [41]. Choosing a certain class of probability measures generates a wide range of market dynamics specifications. This approach was used to describe market uncertainty in Bayraktar et al. [18; 20]. The pathwise approach to market uncertainty modeling operates particular market scenarios (without use of probability measures). For the discrete-time model, the general pathwise approach theory was developed by Burzoni et al. [45] based on the early results [44; 46]. Aksamit et al. [1] continued the research of Bouchard and Burzoni. General pricing duality results for American options were established in the discrete-time case. The dynamic programming principle was satisfied through fictitious market enlargement, allowing to trade all financial instruments dynamically.⁴

Kolokoltsov’s work and this dissertation can be formally attributed to the pathwise approach. Nevertheless, they differ in the formulation with the time-local constraints on possible paths. This simplifies the economic interpretation and use in practice. These models do not consider the static part of the portfolio.

At the moment, the literature presents no generally accepted numerical methods adapted to solving the superhedging problem, especially in the guaranteed deterministic statement.⁵ However, the interest in this problem has arisen recently. For example, in [30] a neural network algorithm was proposed to solve numerically the problem in a probabilistic statement; the authors used an approximation by the quantile hedging price, which converges to the superhedging price.

The goals and tasks of research

This dissertation aims at constructing a theoretical framework for the guaranteed deterministic approach to the mathematical modeling of financial problems within the

⁴As far as we know, the idea of fictitious market enlargement belongs to A. V. Melnikov [147].

⁵In practice, the general problem on the pricing and hedging of financial derivatives, one of the most important for computational finance, is solved mainly using finite-difference methods (e.g., see Duffy’s book [81]) and Monte Carlo methods (e.g., see Glasserman’s book [99]).

discrete-time financial market model with an uncertain deterministic price evolution and trading constraints. This framework is used to analyze qualitative properties of the models and propose numerical solution methods for the following problems:

- the superhedging of options (the primary problem of this research),
- margining (determining adequate requirements to the collateral (i. e., initial margin) to cover partially the obligations of the clearing members in the exchange-traded market.

To achieve this goal, we identify several tasks on developing qualitative and approximate analytical methods for studying the mathematical models and choosing effective computational methods adequate to the problem statement. These tasks can be formulated as follows:

- Describe and justify the financial market model with an uncertain deterministic price evolution for risky assets discounted with respect to a risk-free asset and trading constraints on risky asset transactions. Based on the guaranteed approach with trading constraints on hedging strategies, derive Bellman–Isaacs equations for the objective function, which is the minimum level of funds for ensuring the complete coverage of a contingent liability on a written American option with payoffs depending on the price history;
- Examine different formalizations of the “no arbitrage” property of the market, as well as their relevance and relationship within the financial market model with an uncertain deterministic price evolution. In particular, investigate the structural stability of the model;
- Obtain sufficient conditions for the “smoothness” properties of the solutions of the Bellman–Isaacs equations (semicontinuity and continuity) in terms of describing the price evolution uncertainty and trading constraints. Estimate the moduli of continuity, including Lipschitz constants, for the solutions of the Bellman–Isaacs equations under the proper assumptions on the price evolution uncertainty and trading constraints;
- Based on a game-theoretic interpretation of the model, introduce mixed market strategies leading to an equivalent statement of the problem. Study equilibrium conditions in a dynamic antagonistic (zero-sum) the hedger–market game (including equilibrium in the case of no trading constraints);
- Find a criterion for the financial market model with an uncertain deterministic price evolution to be realistic, that is, to admit mixed strategies continuously depending on the price history (for a weak topology on the measure space);
- Characterize the most unfavorable market behavior scenarios in mixed strategies and establish a connection of this problem with the classical Chebyshev–Markov moment problem. Investigate the smoothness properties of optimal

mixed strategies of the market and their supports under proper assumptions on the price evolution uncertainty and trading restrictions;

- Establish the relationship between the guaranteed deterministic and traditional probabilistic statements of the superhedging problem in the case of no trading constraints;
- Examine the model sensitivity to price dynamics perturbations under given trading constraints. Find the structural stability threshold.
- Propose numerical methods for solving the superhedging problem considering its specifics and providing a guaranteed estimate of the solution accuracy;
- Develop a software package to implement the numerical methods for solving the superhedging problem and conduct a computational experiment;
- As a practical example, apply the guaranteed deterministic approach to construct a method of margining,⁶ derive Bellman–Isaacs equations for the deposit margin, and demonstrate its effectiveness and applicability in practice. For this purpose, develop a software package implementing the numerical methods and conduct a computational experiment;
- Examine the behavior of solutions of the Bellman–Isaacs equations for a discontinuous payoff function, based on the example of European binary option.

The object and subject of research

The object of research is the discrete-time financial market model with an uncertain deterministic price evolution: asset prices evolve deterministically under uncertainty described by a priori information about possible price increments (they are assumed to lie in given compact sets depending on the price history). In addition, market transactions are executed in accordance with given trading constraints.

The main subject of research is the superhedging (superreplication) problem within the financial market model with an uncertain deterministic price evolution and trading constraints. Superhedging is a way to determine the minimum level of premium (under an appropriate hedging strategy) for ensuring the complete coverage of a contingent liability on a written option with payoffs depending on the price history. In addition, the subject of research is the margining problem for a portfolio of financial derivatives in the exchange-traded market within the financial market model with an uncertain deterministic price evolution.

⁶A method for determining the requirements for the collateral (i. e., initial margin) in the exchange-traded market.

The scientific novelty of research

This dissertation uses an alternative statement of the superhedging problem (as compared to the traditional probabilistic one), the guaranteed deterministic (game-theoretic) approach. It was proposed by V.N. Kolokoltsov [27; 133] and, independently, by the dissertation's author in the 1996–1997 academic year. Since then, the approach was included in *Elements of Mathematical Finance*, a lecture course still delivered for senior students of the Department of Systems Analysis (the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University). It became a basis for the publication of Zakharov and Mussa [253] and Mussa's dissertation [157].

The idea of the guaranteed deterministic approach and some results mentioned below were adopted to propose a new concept of organized markets for trading futures and options. Clearing rules with an novel procedure to settle margin deficit and a portfolio margining system were developed. They ensure effective and stable operation in conditions of low market liquidity. In 2004, the corresponding patent for invention was issued in the Russian Federation [224].

The Bellman–Isaacs equations, derived directly from the economic sense of the problem within the guaranteed deterministic approach, underlie further research. In particular, they are used to study various smoothness properties of the solutions (the semicontinuity, continuity, or Lipschitz property of payoff functions and set-valued mappings describing the uncertain price dynamics in the market and set-valued mappings describing trading constraints).

A distinctive feature of our approach is introducing mixed market strategies in the dynamic “hedger–market” game. In this dissertation, the Bellman equations for the superhedging problem are thereby obtained under the game equilibrium from the Bellman–Isaacs equations originally appearing in the problem statement. With such a statement, first, we apply the theorem on the finite supports of mixed strategies in the zero-sum two-player game proved under general assumptions in [207]. Second, we establish a connection with the Chebyshev–Markov moment problem and propose a two-stage optimization method for the solution using a convex envelope of the Bellman function. As a result, special numerical methods can be applied. A new element in the superhedging problem is the analysis of the most unfavorable scenarios of market behavior in mixed strategies, naturally arising in the guaranteed deterministic approach due to the game-theoretic interpretation. As shown under very general conditions, the optimal mixed market strategies can be found in the class of probability measures for which the conditional distributions of discounted price increments are concentrated in a finite number of points not exceeding the total number of assets in the market.⁷ We study the smoothness properties of the optimal mixed market strategies and their supports under proper assumptions on the price evolution uncertainty and trading constraints.

As we believe, for applications the model should include economically justified assumptions about the market. A principal consideration is that the market uncertainty

⁷One risk-free asset and several risky ones.

cannot be accurately described in practice.⁸ The fundamental economic properties, such as “no arbitrage” in the market (in a certain sense), should therefore hold under small perturbations of the market model. It was a strong motivation to introduce a new concept of the structural stability of the model (a coarseness principle for “no arbitrage” markets). We obtained geometric criteria for structural stability. As it turned out, the conditions of this type play an important role in establishing the continuity property of the solutions of the Bellman–Isaacs equations. In the models with trading constraints, a relevant condition for “no arbitrage” is a robust (coarse) condition of no sure arbitrage with unbounded (i. e., unlimited) profits. For stochastic models without trading constraints, closeness was estimated in different metrics to preserve the robust condition of no arbitrage opportunities.

We investigated the relationship between the deterministic approach and the stochastic one in the case of no trading constraints.⁹ Under very general assumptions, the premium charged by the option writer in the guaranteed approach is not smaller than in the probabilistic approach. Sufficient conditions for their coincidence were obtained. They include the structural stability and continuity of the set-valued mappings describing the price evolution uncertainty and payoff functions on the option. As it turned out, structural stability is an essential condition.

Also, we introduced another concept called the structural stability threshold of the model. It characterizes the maximum perturbation¹⁰ of the compact sets describing uncertain price dynamics under which the structural stability of the model is surely preserved. An explicit expression for this threshold was obtained, and its properties were studied.

Using the structural stability threshold expression and the estimated modulus of continuity for the solutions of the Bellman–Isaacs equations, we estimated their sensitivity to uniformly small perturbations of the compact sets describing the price dynamics of the original model. This is a fundamentally important result for estimating the numerical solution error when approximating the compact sets of uncertain price dynamics.

Another principal consideration concerns the realism of the model. As realistic stochastic scenarios of market behavior, we take the probability distributions of a discrete-time stochastic process describing the price evolution for which the conditional distributions of the current price continuously (in a weak topology) depend on the price history. In other words, the transition kernels corresponding to the conditional price distributions at the current time instant given a price history satisfy the Feller property. We say that the financial market model with an uncertain price evolution is realistic if there exist mixed market strategies such that the conditional price distributions at the current time instant given a price history have supports coinciding with the compact sets describing the uncertain price dynamics, and the corresponding transition kernels have the Feller property. In the paper [196],

⁸Within the robust approach in the continuous-time case, several researchers studied models with volatility uncertainty; for example, see [71], [227], and [161].

⁹As noted above, the solutions of the superhedging problem for these approaches may differ.

¹⁰In the Pompeiu–Hausdorff measure.

we imposed rather general assumptions on topological spaces to obtain necessary conditions and sufficient conditions (criteria) for the existence of Feller transition kernels with supports defined by a set-valued mapping with closed values. For the finite-dimensional Euclidean phase space (which is the case of the financial model under consideration), necessary conditions and sufficient conditions coincide, and the corresponding criterion is the lower semicontinuity of the set-valued mapping that associates with the initial state the topological supports of the probability measures of the transition kernel.

The peculiarity of the problem statement in the guaranteed deterministic approach naturally leads to the innovative principles for construction of the corresponding numerical methods. The basic idea is to replace the original model with a close counterpart of a simpler structure: the new compact sets of price increments prices contain a finite number of points on a fixed lattice. Due to the two-stage optimization method for solving the Bellman equations proposed in this dissertation, it is necessary to choose appropriate numerical algorithms to construct a convex hull of the Bellman function and maximize the concave function on a convex set.

The methodology of research

The mathematical statement of the superhedging problem within the financial market model with an uncertain deterministic price evolution is a discrete-time control problem under uncertainty. The guaranteed approach for the general control problem under uncertainty was formulated by A.B. Kurzhanski in his seminal book [138]. As applied to our problem, this approach is more constructive than the traditional probabilistic approach and naturally yields a numerical method of solution. This fact was the main motivation behind the dissertation.

With the game-theoretic interpretation of the problem, we directly use the results of both the classical theory of zero-sum two-player games (particularly the results of Kneser [130] on game equilibrium, the results of Berge [24] on the smoothness properties of the objective function for optimal strategies) and author's new results on the properties of the optimal mixed strategy supports published in [207].

The financial market model with an uncertain deterministic price evolution necessitates using methods of set-valued mapping theory. The uncertainty of price evolution is described by a priori information about the behavior of price increments (compact-valued mappings): price increments lie in compact sets depending on the price history. Trading constraints are given by convex-valued mappings, which reflects the possible dependence on the price history. This dissertation involves both the classical theory of set-valued mappings and new results, e.g., from a recent paper by Zhukovskiy [255] and the author's paper [196] on the existence of continuous selectors. The latter results were obtained to find a realistic criterion for the financial market model with an uncertain deterministic price evolution.

The methods of set-valued mapping theory are effective in combination with convex analysis methods. Convex analysis is used to study different formalizations of the "no arbitrage" property and relevant geometric criteria, find an explicit expression

for the structural stability threshold of the model, and develop numerical methods for solving the superhedging problem in the guaranteed deterministic statement.

The possibility of using probabilistic methods arises when interpreting the most unfavorable scenarios of market behavior in mixed strategies. This interpretation becomes elegant in the case of no trading constraints: the probability measures corresponding to such mixed strategies must be risk-neutral.¹¹ Under sufficiently general regularity conditions, the optimal mixed strategies lead to the complete market model, and many well-known results valid for such markets can be applied accordingly. In addition, the probabilistic description is required when analyzing the relationship between the deterministic and traditional probabilistic statements of the superhedging problem and when investigating the structural stability of close probabilistic models.

In the numerical construction of the convex hull of the Bellman function, computational geometry methods (namely, the construction of the convex hull of finite sets) were used.¹² From the practical point of view, it is reasonable to choose algorithms effective for small dimensions of the problem.

The results submitted for defense

- 1) New mathematical methods for modeling the financial market based on the game-theoretic interpretation: the guaranteed approach within the financial market model with an uncertain deterministic price evolution has yielded the Bellman–Isaacs equations for the objective function corresponding to the economic sense of the problem for several applied financial problems (the superhedging of a contingent liability on a written option under trading constraints and the margining of a portfolio of futures and options in an exchange-traded market).
- 2) Qualitative and analytical methods for studying the corresponding mathematical models based on the game-theoretic interpretation and the guaranteed approach to the superhedging problem. With these methods, mixed market strategies have been naturally introduced in the dynamic antagonistic hedger–market game with a finite horizon, game equilibrium has been investigated, and the qualitative properties of optimal mixed market strategies and the behavior of their topological supports have been analyzed.
- 3) A new concept called the realistic property of the financial market model with an uncertain deterministic price evolution. It is understood as the existence of mixed strategies depending continuously (in a weak topology) on the price history. This is a natural requirement for the model from an economic point of view. A criterion of the realistic property has been obtained.

¹¹Such measures are also called martingale measures: in this case, the stochastic process of discounted prices is a martingale.

¹²For example, see the book [104].

- 4) A new concept called the structural stability of the model (the principle of coarseness for the “no arbitrage” property of the market¹³). This is a natural requirement for the financial market model formalizing the price evolution uncertainty. Geometric structural stability criteria have been obtained for the model. In the case of no trading constraints, probabilistic models have been considered to establish structural stability conditions for close probability measures. As has been discovered, the structural stability of the model plays a key role for the continuity of solutions of the Bellman–Isaacs equations and the uniform approximation of price dynamics in the numerical solution.
- 5) The existence of the most unfavorable (optimal) mixed market strategies in the class of probability measures for which the number of points in the support of the conditional distribution of price increments does not exceed the total number of assets.¹⁴ This fact has been established under very general conditions.
- 6) Sufficient conditions under which the superhedging problem with no trading constraints has coincident solutions in the guaranteed deterministic model and the probabilistic one. Under very general assumptions, it has been shown that the premium charged by the option writer within the guaranteed approach is not smaller than within the probabilistic approach.
- 7) Efficient computational methods for solving the superhedging problem with a given accuracy of calculating the premium on an option. As has been proved, a reasonable numerical approach to these problems is achieving the suboptimal guaranteed numerical result as a compromise between the accuracy and algorithmic complexity of the solution. An explicit expression has been derived for the structural stability threshold of the model. For a given price history, it represents the maximum perturbation¹⁵ of the compact sets describing the price dynamics that preserves the structural stability of the model.¹⁶ For a wide class of models, the sensitivity of the solutions of Bellman–Isaacs equations to uniformly small perturbations of the compact sets describing the original model price dynamics has been estimated using the structural stability threshold. For the numerical solution of the superhedging problem, the market dynamics have been approximated by compact sets that consist of a finite number of points on a given (sufficiently dense) lattice.

¹³An adequate formalization of the corresponding “no arbitrage” property of the market is the robust condition of no sure arbitrage with unbounded profit.

¹⁴In the case of no trading constraints and fixed prices at the initial time instant, such a model can be defined using a probability measure on a finite number of paths; moreover, the price process is a martingale, and the most unfavorable mixed market strategies generate the complete market model. Hence, the well-known results of stochastic finance can be used to determine the premium and the hedging strategy.

¹⁵In the Pompeiu–Hausdorff measure.

¹⁶That is, the robust condition of no sure arbitrage with unbounded profits.

- 8) The software package implementing the numerical methods developed for solving the superhedging problem. Computational experiments have been carried out for various market and option models. They have confirmed the efficiency of the software package.
- 9) A mathematical model for the margining problem, computational methods for solving this problem, and the software package implementing them. Computational experiments have been carried out, particularly using simulation modeling. They have confirmed the efficiency of the software package.

The theoretical and practical significance of research

The guaranteed deterministic approach developed in this dissertation can be formally attributed to a new line of market uncertainty modeling (the robust one). However, it differs in the interpretation and specifics of the problem statement, which yields the Bellman–Isaacs equations for the objective function directly from the economic sense. Besides the superhedging and margining problems, this approach is applicable to a rather wide range of other financial problems. For example, the guaranteed deterministic approach can be used in portfolio management, particularly investments considering transaction costs [3]. It is convenient for developing relevant numerical methods [5].

Note that the technique of many robust approach-based works, e.g., Aksamit’s paper [1], implies the use of analytic sets and their properties (in the spirit of Bertsekas and Shreve’s monograph [29]) as well as abstract theorems about measurable selectors, which is strongly unconstructive. In this respect, on the one hand, our approach yields several meaningful theoretical results without any conditions concerning measurability. The matter concerns the Bellman–Isaacs equations, game equilibrium, and duality with respect to the class of probability measures concentrated in a finite set of points. On the other hand, our approach generally simplifies the mathematical background (at least the formulation of the results) and admits a transparent economic interpretation. In addition, the original statement of the superhedging problem within the guaranteed deterministic approach even does not require any “no arbitrage” conditions. However, such conditions are, of course, vital for meaningful models, and we found “no arbitrage” formalizations relevant to the approach being developed. In the case of no trading constraints, our approach explains the reason of risk-neutrality, i. e., why a martingale probability arises in the pricing problem. Therefore, it seems quite natural and understandable to economists, being of applied and didactic value.¹⁷

Due to higher constructiveness compared to the traditional probabilistic approach, the guaranteed deterministic method allows formulating requirements to the properties of relevant numerical algorithms for this class of problems and analyzing their accuracy using the estimated sensitivity of the Bellman–Isaacs equations to small perturbations of market uncertainty modeling.

¹⁷The author’s paper [219] demonstrated the significance of an adequate interpretation for the concepts and assumptions used in financial modeling for risk-neutral valuation.

The software package developed to solve the superhedging problem can be for research and education.

The degree of validity and approval of results

The author's results on the topic, including the idea of using the game-theoretic approach for the deterministic market description, for the first time were discussed in 2001 at the workshop of the Franco-Russian Lyapunov Centre at Moscow State University, organized by Academician A.B. Kurzhanski. Among the event participants, note Pierre Bernard.¹⁸ During the workshop, the game equilibrium theorem and an interpretation of risk-neutral measures as the most unfavorable (for the hedger) market strategies in the case of no trading constraints under the guaranteed pricing of a contingent liability on an option were presented.¹⁹ The main results of this dissertation were later presented at several international and Russian conferences, workshops and seminars:

- the Workshop of the Department of Risk Management, the Chicago Mercantile Exchange (CME), Chicago, 2002;
- the Workshop on Mathematical Finance, the University of Alberta, Edmonton, 2006;
- the 2006 Stochastic Modeling Symposium, the Canadian Institute of Actuaries, Toronto, 2006;
- the Workshop on Risk Management, headed by Didier Sornette, the Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zürich, 2010;
- the First Russian Economic Congress, Moscow, 2009;
- the Workshop on Probabilistic Control Problems and Stochastic Models in Economics, Finance and Insurance, headed by V.I. Arkin and E.L. Presman, the Central Economics and Mathematics Institute (CEMI), the Russian Academy of Science (RAS), Moscow, 2009 and 2011;
- the Workshop on Mathematical Economics, headed by V.I. Danilov and V.M. Polterovich, CEMI RAS, Moscow, 2011;
- the Workshop in Quantitative Finance, the University of Bologna, Bologna, 2012;
- the Workshop on Applied Problems of Systems Analysis, headed by A.B. Kurzhanski, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2015;

¹⁸In 2013, with six coauthors, he published the book [27] containing results close to ours, obtained independently by V. N. Kolokoltsov.

¹⁹These results were not published until 2020, when the paper [197] appeared.

- the International Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, dedicated to the 100th Anniversary of Gvanji Mania, Tbilisi, 2018;
- the Annual Scientific Conference “Tikhonov Readings,” Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2018 (joint report with N.A. Andreev; see [3]);
- a seminar at the Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Scientific Center RAS, Petrozavodsk, 2018;
- the Workshop on Probabilistic Control Problems and Stochastic Models in Economics, Finance and Insurance, headed by V.I. Arkin, T.A. Belkina, and E.L. Presman, CEMI RAS, Moscow, 2018;
- the Workshop on Mathematical Modeling of Economic Systems, headed by I.G. Pospelov, Federal Research Center “Computer Science and Control” RAS, Moscow, 2019;
- the Scientific Conference “Lomonosov Readings-2020,” Moscow State University, Moscow, 2020 (joint report with N.A. Andreev; see [5]);
- the Scientific Conference “Lomonosov Readings-2021,” Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2021 (joint report with N.A. Andreev; see [220]);
- the 36th International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Petrozavodsk, 2021 (plenary talk);
- the 10th International Scientific Conference “Modern Methods and Problems of Operator Theory and Harmonic Analysis and Their Applications,” Rostov-on-Don, 2021;
- a seminar at Faculty of Applied Mathematics - Control Processes, St. Petersburg State University, headed by L.A. Petrosyan, Saint Petersburg, 2022;
- the Annual Scientific Conference “Tikhonov Readings,” Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2022 (joint report with D.M. Sotnikov and A.Yu Zanochkin).

Personal contribution

This dissertation includes statements and results obtained either personally by the author or with his determinative participation. The author’s personal contribution consists in all problem statements on the subject of research, their formalizations, new concepts, the proof of all results on the qualitative behavior of the models, numerical analysis methods for the models, and the general architecture of the software package implementing the developed numerical methods. The results were prepared for publication jointly with the coauthors, and the author’s contribution was determinative in the following works. In the paper [4] (1.4 printer’s sheets, author’s

contribution 1 printer's sheet), the author possesses principal considerations on choosing numerical methods and analyzing the properties of special model examples for the calculations. The algorithms and the design of the corresponding software package were selected jointly. Coauthor N.A. Andreev detailed and implemented the algorithms as well as carried out the numerical experiment. In the paper [223] (0.6 printer's sheet, author's contribution 0.5 printer's sheet), the author possesses the general architecture of the margining system in an exchange-traded market based on the guaranteed deterministic approach, the problem statement within the financial market model with an uncertain deterministic price evolution, and the basic equations. Coauthor I.V. Polimatidi proved the subadditivity of the deposit margin. In the paper [221] (0.8 printer's sheet, author's contribution 0.6 printer's sheet), which continues the research started in [223], the author reduced the Bellman–Isaacs equations to a form convenient for calculations and estimation of the Lipschitz constant of the objective function, which is necessary for evaluating the numerical error. The numerical algorithms were developed jointly, their implementation and computer experiments were conducted by coauthors V.A. Kuznetsov and V.A. Slivinski. In the paper [225] (1.1 printer's sheets, author's contribution 1 printer's sheet), the author possesses the theoretical results, the problem statement, and the numerical solution algorithm. Coauthor A.Yu. Zanoekin implemented the algorithm and carried out the calculations. In the invention [224] (3.2 printer's sheets, author's contribution 2 printer's sheets), the author possesses the general architecture of the margining system, the design features due to the guaranteed deterministic approach, and the problem statement on calculating the initial margin of a portfolio within the financial market model with an uncertain deterministic futures price evolution. Coauthors A.V. Zakharov, I.V. Polimatidi, and A.N. Balabushkin developed the technical details of the system's architecture; also, A.V. Zakharov and I.V. Polimatidi implemented the margining system and carried out calculations on model examples and real data.

The volume and structure of research

This dissertation consists of the Introduction, 12 Chapters and the Conclusion. Its total volume is 365 pages, including 13 figures. The results of the dissertation were published in the invention and 21 papers published in peer-reviewed publications, of which 13 papers were published in publications cited in the Scopus and WoS databases.

Chapter 1. Market Model, Trading Constraints, and the Bellman–Isaacs Equations

This chapter introduces a guaranteed deterministic statement for the discrete-time superhedging (superreplication) problem as an alternative to the traditional probabilistic approach based on a reference measure. Within the proposed framework, the reference measure is not needed, and the hedging of a contingent claim is to ensure coverage of possible payoff under the option contract for all admissible scenarios. These scenarios are a priori defined by given compact sets depending on the price history: the price increments at each time instant must lie in the corresponding compact sets.

The presentation focuses on the economic sense without aiming for the greatest possible generality. This explains the nature of several assumptions. The absence of transaction costs is assumed, and the market is considered both with and without trading constraints. The game-theoretic approach and the economic interpretation immediately yield the corresponding Bellman–Isaacs equations for the current reserves necessary to ensure coverage of the current and future contingent liabilities on a written American option. Several economically meaningful examples of the models are presented.

The main results were published in [212] (the English version in [199]).

1.1 The Deterministic Market Model: Price Dynamics and Trading Constraints

In this section, we construct a discrete-time mathematical model of the financial market with an uncertain deterministic price evolution: we consider asset prices evolving deterministically under uncertainty described by a priori information about possible price increments. We focus on assumptions whose economic sense is often ignored in mathematical finance.

In classical mechanics, a model is constructed in continuous time and then approximated in discrete time for numerical solution. Within the context of financial market models, the opposite approach is much closer to reality. In the end, all models applied to market data and real pricing problems of financial instruments

are discrete. There is no continuous pricing in the market: even if the ticks go at a millisecond rate, the next hedging operation has no sense until new price information comes. Thus, discrete-time financial market models should be naturally interpreted as primary because they better reflect reality. Continuous-time pricing models are convenient from a mathematical point of view and often yield explicit-form solutions. Nevertheless, they should be interpreted as secondary, describing the asymptotic behavior of the market under appropriate normalization.¹ This does not mean that continuous-time models are inapplicable in practice. Model risks arise anyway, but a more careful analysis of the underlying assumptions is needed to validate continuous-time models. These considerations predetermined author's opting for discrete-time market models.

Consider a discrete-time model with a finite horizon, where the time variable t takes a finite set of values² $\llbracket 0, N \rrbracket = \{0, 1, \dots, N\}$. Assume that transactions are conducted in a market of $n + 1$ assets (in the general case, financial instruments), where $n \geq 1$, without any payouts (dividends or coupons) on them on the time interval $\llbracket 0, N \rrbracket$. The market price³ per unit of the i th asset at a time instant t will be denoted by X_t^i , $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. These prices will be interpreted as “uncertain” variables⁴: the value X_t^i becomes known only by the time instant t .

The model is based on the following assumption.

Assumption 1.1.1 (AI). *The information observable⁵ by a time instant t is the prices of $n + 1$ assets at the time instants $\llbracket 0, t \rrbracket$.*

Although this assumption is common for particular models in mathematical finance, researchers usually neglect its implicit fitting into Fama's concept of “weak” information efficiency of the market.⁶ In reality, other additional information can be

¹For example, from the classical Cox–Ross–Rubinstein model [62] (also called binomial) with discrete time and a single risk-neutral probability (the complete market model), we can pass to a continuous-time model on a fixed closed interval by placing the time points of the discrete-time model uniformly on this interval and connecting the points of the logarithms of (discounted) prices with broken lines. Under appropriate normalization of the broken lines, their distribution will weakly converge to the distribution of Brownian motion (the probability measure in the space of continuous functions on the interval) as the horizon increases infinitely. This result follows from Donsker's theorem; e.g., see [32, ch. 2, § 10]. Therefore, the binomial market model approximates the risk-neutral Bachelier–Samuelson model with continuous time, and the asymptotic option pricing corresponds to the Black–Scholes model. (The payoff functions are required to be uniformly integrable.) This is a well-known theoretical fact, also assimilated by practitioners. For example, the Eurex Exchange, one of the largest international trading floors for financial derivatives in Europe, sets daily the calculated prices for stock options based on the binomial model. Note that the Cox–Ross–Rubinstein model fits perfectly into the guaranteed deterministic approach to superhedging developed by the author.

²In the sequel, we use the notation $\llbracket t, s \rrbracket = \{t, t + 1, \dots, s\}$, where $t \leq s$.

³The very concept of a market price is ambiguous: for different purposes, it can be the closing price, the current price, or the price determined by the market regulator as “the market price”; for example, see the information on price indicators on the Moscow Exchange website.

⁴Incomplete information on the price behavior is supposed available; this will be formalized in Assumption (UD) below. The uncertain variables can be considered random after introducing mixed strategies.

⁵Observability means not only availability: this information will be used when describing price increment constraints, trading constraints, and hedging strategies.

⁶For example, see the survey in [7].

useful for hedging (e.g., news) if it allows predicting the nature of price changes or their volatility. (This corresponds to the “semi-strong” information efficiency of the market.)

Also, we introduce another assumption.⁷

Assumption 1.1.2 (RA). *The 0th asset⁸ is risk-free: its price becomes known one step in advance.*

In other words, the available information on asset prices at the time instants $\llbracket 0, t - 1 \rrbracket$ is sufficient for determining X_t^0 for $t \geq 1$.

The notations below use a convention widespread in probability theory: the uncertain variables (e.g., X_t^i) are capitalized, whereas their values are set in lowercase.

We denote by $\hat{X}_t = (X_t^0, X_t^1, \dots, X_t^n)$ the price vector at a time instant t .

Assumption 1.1.3 (NNP). *The prices are nonnegative:*

$$X_t^i \geq 0, \quad i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

This requirement seems obvious since negative prices make no economic sense.⁹ However, under Assumption (NNP), zero prices *in the model* may lead to arbitrage opportunities if they can subsequently take positive values. Therefore, when constructing “uncertain” price dynamics, it is reasonable to require the model to satisfy a stronger property.

Assumption 1.1.4 (PP). *The prices are positive:*

$$X_t^i > 0, \quad i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

The next (implicit) assumption is common in mathematical finance, without comment.

⁷The presence of a risk-free asset is a standard assumption in financial theory. (In practice, especially after the global financial crisis, its absence is nevertheless recognized.) The theory can also be constructed without Assumption (RA), but at the cost of technical complication (particularly due to the need to consider arbitrage of the first and second kind).

⁸In the absence of trading constraints, at least two risk-free assets behaving differently would lead to arbitrage opportunities: this is standard economic reasoning to justify the existence of a single risk-free asset in a market model.

⁹As noted by Samuelson back in [184], the prices of financial instruments should not be negative, criticizing the Bachelier model [16] and proposing geometric Brownian motion to describe prices instead of Brownian motion. However, an unprecedented case occurred on April 20, 2020: the futures prices of WTI crude oil (the benchmark for U.S. crude oil prices) fell below 0. The fuel supply considerably exceeded the demand due to the coronavirus pandemic. Because of overproduction, the storage tanks for WTI were full: if the futures contracts had been brought to delivery, it would be difficult to find space for that oil. Since the May contract expired on April 21, 2020, the market participants with long positions did not want to take delivery of the oil (which no one wanted during that period) and bear the costs of storage. By entering into offset trades, they preferred to fix large losses so that the prices turned negative. Starting from April 22, 2020, the Chicago Mercantile Exchange (CME) switched to the Bachelier pricing model for futures options on several energy commodities to consider the possibility of negative prices.

Assumption 1.1.5 (PC). *The price may take arbitrary real values satisfying (NNP) or the stronger requirement (PP).*

At first glance, Assumption (PC) may seem completely innocent. However, discrete prices and tick size can play a significant role in practice and research on the microstructure of the financial market.¹⁰

The *portfolio structure* at a time instant $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$ is described by a vector $\hat{H}_t = (H_t^0, H_t^1, \dots, H_t^n)$, where H_t^i is the number of units of the i th asset in the portfolio at the time instant t , and the value H_t^i becomes known one step in advance¹¹, i.e., at the time instant $t - 1$. In other words, if the price history $\hat{X}_0 = \hat{x}_0, \dots, \hat{X}_{t-1} = \hat{x}_{t-1}$ is known, then $\hat{H}_t = \hat{H}_t(\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{t-1}) = \hat{H}_t(\cdot)$. From this point onwards, (\cdot) denotes the current variable (in this case, the known price history).

Of course, in reality, \hat{H}_t may take integer values. But we can assume that transactions are “lot”-oriented (no less than a certain number of assets), and therefore, the unit of an asset is a fractional value of the lot. Hereinafter, we adopt a simplifying assumption about the “infinite divisibility” of assets, implicitly inferring that the positions \hat{H}_t are sufficiently large.

Assumption 1.1.6 (AD). *The assets are “infinitely divisible”:*

$$H_t^i \in \mathbb{R}, \quad i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

We define *trading constraints* using convex sets $\hat{D}_t \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Like \hat{H}_t , they become known one step in advance: $\hat{D}_t = \hat{D}_t(\cdot)$. Thus, an *admissible portfolio structure* at a time instant t is $\hat{H}_t \in \hat{D}_t(\hat{X}_0, \dots, \hat{X}_{t-1})$.

We make an important assumption about the nature of trading constraints.

Assumption 1.1.7 (R). *All funds can be invested in the risk-free asset:*

$$\{\hat{h}_t \in \hat{D}_t(\cdot) : h_t^1 = h_t^2 = \dots = h_t^n = 0\} \neq \emptyset, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

The next assumption, often used in mathematical finance, significantly simplifies the model.

¹⁰For example, SEC Rule 612 (also called the “Sub-Penny Rule”) was introduced in 2005. In particular, it states that the minimum change in the price of shares valued at more than USD1.00 must be USD0.01, and for shares valued at less than USD1.00 it must be USD0.0001. Note that the rule applies to quotes, not trading. Europeans went further than Americans: in 2016, they legislated tick size regimes based on market activity, in effect since the beginning of 2018. For details, see *Final Report – Amendment to Commission Delegated Regulation (EU) 2017/588 (RTS 11), 12 December 2018, ESMA 70-156-834*. The Moscow Exchange has been using a similar practice since November 1, 2018.

¹¹In probability theory terms, the process \hat{H} (as well as the price X_0 of the risk-free asset) is predictable with respect to the filtration generated by the asset price process. The probabilistic description of dependencies through measurability with respect to σ -algebras generated by random elements is mathematically more elegant. Nevertheless, we consistently adhere to the deterministic description in terms of functional dependencies. In any case, there is no logical contradiction here: a random variable η is measurable with respect to the σ -algebra \mathcal{F}_ξ generated by a random element ξ in a measurable space (E, \mathcal{E}) if and only if it is representable as a measurable function φ of ξ : $\eta = \varphi \circ \xi$; for example, see [190, Chapter II, § 4, Theorem 3].

Assumption 1.1.8 (TC). *There are no (direct or indirect) transaction costs.*

In particular, Assumption (TC) often comes with the default convention that the portfolio value at a time instant t is given by the book value:

$$V_t = \hat{H}_t \hat{X}_t, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket. \quad (\text{L})$$

Throughout this dissertation, we use the scalar product notation hx . However, it is sometimes convenient to write $\langle h, x \rangle$ instead of hx . In formula (L), we have $\hat{H}_t \in \mathbb{R}^{n+1}$ and $\hat{X}_t \in \mathbb{R}^{n+1}$, while

$$\hat{H}_t \hat{X}_t = \langle \hat{H}_t, \hat{X}_t \rangle = \sum_{i=0}^n H_t^i X_t^i.$$

Despite its seeming self-evidence, formula (L) reflects the additivity property of the portfolio value: if the portfolio is divided into two sub-portfolios, its value will equal the sum of the values of the sub-portfolios. From the economic point of view, however, the value of a trading portfolio is its liquidation value. Therefore, given the limited liquidity of the market, additivity is generally violated due to ignoring indirect costs. Thus, (L) is an implicit assumption of high market liquidity.

According to a standard assumption, the portfolio is self-financing¹²: if the portfolio is reconfigured at a time instant $t - 1$, and the new portfolio structure \hat{H}_t is created without capital inflow or outflow, using funds in the amount of the portfolio value V_{t-1} and at the prices \hat{X}_{t-1} prevailing at the time instant $t - 1$ under (TC), this budget constraint has the form¹³:

$$\hat{H}_t \hat{X}_{t-1} = \hat{H}_{t-1} \hat{X}_{t-1}, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.1.1)$$

Recall that when restructuring the portfolio, the vector $\hat{H}_t \in \hat{D}_t(\cdot)$ is selected using the information available at the time instant $t - 1$.

Considering (L), constraint (1.1.1) is equivalent to

$$\Delta V_t = \hat{H}_t \Delta \hat{X}_t, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.1.2)$$

From now on, Δ denotes the backward difference: $\Delta V_t = V_t - V_{t-1}$.

Following the standard procedure, we can pass to discounted prices by reducing the problem dimension by one. This means that the risk-free asset is chosen as a “numéraire”: the discounted value of the portfolio is expressed in “units” of the risk-free asset¹⁴, i.e.,

$$\tilde{V}_t = \frac{1}{X_t^0} V_t = \hat{H}_t \left(\frac{1}{X_t^0} \hat{X}_t \right) = \hat{H}_t \tilde{X}_t, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

¹²Self-financing is quite justified from an economic point of view, when it comes to hedging a contingent liability on an over-the-counter (OTC) option.

¹³Like (L), constraint (1.1.1) rests on Assumption (TC) (no direct or indirect transaction costs).

¹⁴If all prices X_t^i are quoted in a single currency (as supposed below), then the discounted prices are dimensionless. Note that $X_t^0 \neq 0$ due to Assumption 1.1.4.

where $\tilde{X}_t = (\tilde{X}_t^0, \tilde{X}_t^1, \dots, \tilde{X}_t^n)^T$ and $\tilde{X}_t^i = \frac{1}{X_t^0} X_t^i$. The form of conditions (L), (1.1.1) and (1.1.2) in the discounted prices \tilde{X}_t is obviously preserved:

$$\tilde{V}_t = \hat{H}_t \tilde{X}_t, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket; \quad (\text{L}')$$

$$\hat{H}_t \tilde{X}_{t-1} = \hat{H}_{t-1} \tilde{X}_{t-1}, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket; \quad (1.1.1')$$

$$\Delta \tilde{V}_t = \hat{H}_t \Delta \tilde{X}_t, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.1.2')$$

In this case, the discounted risk-free asset has the price identically equal to one, and $\Delta \tilde{X}_t^0 = 0$ for all $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Therefore, it suffices to consider n “risky” assets, where $H_{t+1}^1, \dots, H_{t+1}^n$ are arbitrarily selected at the step t (one step in advance), and the investment in the risk-free asset H_{t+1}^0 is determined from the self-financing condition:

$$H_{t+1}^0 = \tilde{V}_t - \sum_{i=1}^n H_{t+1}^i \tilde{X}_t^i, \quad t \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (1.1.3)$$

with $\hat{H}_{t+1} = (H_{t+1}^0, \dots, H_{t+1}^n) \in \hat{D}_{t+1}(\cdot)$.

Without loss of generality, we introduce the following simplifying assumption.

Assumption 1.1.9 (RN). *The price of the risk-free asset identically equals one:*

$$X_t^0 \equiv 1, \quad t \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

This simplification allows omitting the tilde sign and passing to the discounted prices. Focusing now on n risky assets, we adopt the notations¹⁵

$$\begin{aligned} X_t &= (X_t^1, \dots, X_t^n), \\ H_t &= (H_t^1, \dots, H_t^n). \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Also, we denote by $\bar{X}_t = (X_0, \dots, X_t)$ the discounted price history up to the time instant t inclusive.

Assumption 1.1.10 (SF). *The hedging strategy is self-financing: with convention (RN), we have¹⁶*

$$H_t^0 = V_{t-1} - H_t X_{t-1}, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

In addition, convention (RN) and notations (1.1.4) allow writing formula (1.1.2') as

$$\Delta V_t = H_t \Delta X_t. \quad (1.1.5)$$

If the price path $\bar{X}_t = \bar{x}_t$ is known, using the notation¹⁷

$$V_t = v_t(\bar{x}_t)$$

¹⁵The notations \hat{X}_t , \hat{H}_t , and \hat{D}_t were used for $n+1$ assets, including the risk-free one.

¹⁶Below, the scalar product is calculated in the space \mathbb{R}^n .

¹⁷The selected notation for uncertain variables draw some analogy with the conditional expectation of random variables: for a random variable Y , there exists a measurable function φ such that $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_X} Y = \mathbb{E}(Y|X) = \varphi(X)$ almost surely (a.s.) and $\mathbb{E}(Y|X = x) = \varphi(x)$. (The latter relation is defined almost everywhere with respect to a measure P_X of the distribution of X .)

and $X_t^0 \equiv 1$, we write the trading constraints $D_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$ on risky assets as

$$D_t(\cdot) = \left\{ h = (h^1, \dots, h^n) : (v_{t-1}(\cdot) - hx_{t-1}, h^1, \dots, h^n) \in \widehat{D}_t(\cdot) \right\}, \quad (1.1.6)$$

where $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Note that $D_t(\cdot)$ is convex if such is $\widehat{D}_t(\cdot)$. In this case, the expression (1.1.3) for the trading constraints D_t at the time instant t generally incorporates the portfolio value $V_{t-1} = v_{t-1}$ at the previous time instant $t - 1$.

We make another simplifying assumption¹⁸ that any risk-free asset positions (both long and short) are admissible and do not affect the risky asset constraints.

Assumption 1.1.11 (T). *The trading constraints \widehat{D}_t can be represented as*

$$\widehat{D}_t(\cdot) = \mathbb{R} \times D_t(\cdot), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

Remark 1.1.1. Under Assumption (T), Assumption (R) takes a simpler form:

$$0 \in D_t(\cdot), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.1.7)$$

The convexity condition of trading constraints has an economic meaning associated with the possibilities of diversification. Let H'_t and H''_t be two admissible structures of the portfolio of investments in risk assets at a time instant t : $H'_t, H''_t \in D_t(\cdot)$. When interpreting them as two funds with given portfolio structures, the convexity of the set $D_t(\cdot)$ means that for any $q \in [0, 1]$, it is possible to form an admissible portfolio by investing a share $q' = q$ in the fund H'_t and the share $q'' = 1 - q$ in the fund H''_t : $qH'_t + (1 - q)H''_t \in D_t(\cdot)$.

Assumption 1.1.12 (D). *The set $D_t(\cdot)$ is convex for all $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.*

Definition 1.1.1. *We say that there are no trading constraints if*

$$D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.1.8)$$

Note that the assumption of no trading constraints is common in mathematical finance.

The main assumption about the dynamics of X_t , accepted in this dissertation, is a priori known price constraints depending on possible price increments.

Assumption 1.1.13 (UD). *By a time instant $t - 1$, where $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, according to the price history $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1}$ available by this instant, the price vector increments ΔX_t are known to lie in an a priori given non-empty set $K_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n$.*

By default we suppose that the set-valued mappings $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ and $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ are given for any paths in the price history, i.e., for any $\bar{x}_{t-1} \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^t$. Let $X_0 \in K_0$, where K_0 is some set. In several cases, however, it is convenient to believe that $X_0 = x_0$ is given. (This is equivalent to assuming that

¹⁸The problem can be stated without it; see the discussion in Section 1.2 of this chapter.

K_0 contains a single point.) In reality, part of the paths will be unrealizable if we fix the initial price X_0 or K_0 . Depending on the problem solved, it is sometimes useful to consider “feasible paths” only.

In order to construct a *meaningful* theory when describing uncertain price dynamics in the market based on Assumption (UD), we need the following important requirement.

Assumption 1.1.14 (C). *The sets $K_0, K_1(\bar{x}_0), \dots, K_N(\bar{x}_{N-1})$ are compact.*

Assumptions (UD) and (C) correspond to the “deterministic” problem statement in contrast to the “probabilistic” one, where a reference probability measure is defined.

In this case, the “probabilistic” analog of the “deterministic” problem is price dynamics with a reference measure for which $K_t(\cdot)$ is the support¹⁹ of the conditional distribution²⁰ of the discounted price increments ΔX_t for a given history $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1}$ by the time instant $t - 1$.

The compactness assumption (C) is essential for the superreplication problem to be meaningful: in the case of unbounded supports of the conditional distributions of price increments given the price history, one should expect degenerate hedging results (e.g., those described in [48]). For this reason, the authors of [52] proposed assuming the boundedness of price increments in the superreplication problem (in the “probabilistic” statement and the one-dimensional case, i.e., with one risky asset).

Assumption (UD) can be written as an additive representation of the price process X_t for a given process of the uncertain variables Y_t :

$$X_t = X_{t-1} + Y_t, \quad Y_t \in K_t(\cdot), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.1.9)$$

The additive representation (1.1.9) is especially convenient for analyzing the “no arbitrage” conditions.²¹ For several applied models, it is also convenient to use the multiplicative representation

$$X_t^i = M_t^i X_{t-1}^i, \quad M_t = (M_t^1, \dots, M_t^n) \in C_t(\cdot), \quad (1.1.10)$$

where $C_t(\cdot)$ is a compact subset of \mathbb{R}^n . The uncertain variables M_t^i are called the multiplicative factors. The prices of risky assets at each time instant $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$ must be positive, which is equivalent to their positivity at the initial time instant and the condition

$$C_t(\cdot) \subseteq (0, \infty)^n.$$

For $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{R}^n$, we introduce a diagonal matrix $\Lambda(m)$ of the form

$$\Lambda(m)_{ij} = \begin{cases} m_i & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

¹⁹Here and below, the term “support” means the topological support, i.e., the smallest closed set of full measure. It coincides with the set of distribution growth points, i.e., the points whose any neighborhood has a positive probability.

²⁰The matter concerns regular conditional distributions, which are determined almost surely with respect to the reference probability measure.

²¹The issues of “no arbitrage” in markets will be discussed in Chapter 2.

Then (1.1.10) can be written in the matrix form

$$X_t = \Lambda(M_t)X_{t-1}. \quad (1.1.10')$$

Obviously, the additive and multiplicative representations satisfy the relation

$$Y_t = (\Lambda(M_t) - I)X_{t-1},$$

where I denotes an identity matrix of compatible dimensions, and

$$K_t(\bar{x}_{t-1}) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = (\Lambda(m) - I)x_{t-1}, m \in C_t(\bar{x}_{t-1})\}.$$

Using a certain analogy between uncertain and random variables, we introduce the following definitions.

Definition 1.1.2. *We say that the price dynamics are Markovian if all $K_t(\cdot)$ depend on the price values at a previous time instant only: $K_t(\bar{x}_{t-1}) = K_t^*(x_{t-1})$.*

Similarly, we say that the trading constraints are Markovian if $D_t(\bar{x}_{t-1}) = D_t^(x_{t-1})$.*

Definition 1.1.3. *We say that the Markovian price dynamics are stationary if $K_t^*(\cdot)$ does not depend on the time variable t .*

Similarly, we say that the Markovian trading constraints are stationary if $D_t^(\cdot)$ does not depend on the time variable t .*

Definition 1.1.4. *We say that the price dynamics are multiplicatively independent if the mapping $C_t(\cdot)$ in the multiplicative representation (1.1.10) does not depend on the price history: $C_t(\bar{x}_{t-1}) = C_t^*$.*

Similarly, we say that the trading constraints are independent if the mapping $D_t(\cdot)$ does not depend on the price history: $D_t(\bar{x}_{t-1}) = D_t^$.*

Note that the market models considered by V.N. Kolokoltsov in [27, Chapter 13–14] are of Markov type, multiplicatively independent, and stationary. In addition, the set C^* is selected as a parallelepiped²², and there are no trading constraints, i.e., $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$.

Remark 1.1.2. The probabilistic approach with a reference measure given on a finite space of elementary events coincides with the deterministic one (the set of zero probability will be empty). In our statement, this case particularly arises when the initial price vector x_0 is fixed, and all sets $K_t(\bar{x}_{t-1}) = K_t(\cdot)$ have a finite number of elements. By the way, the Cox–Ross–Rubinstein model fits into this scheme, appearing in several natural models within the deterministic approach.

In the conclusion of this section, note that the trading constraints and price history may depend on the time variable due to the regulator limiting leverage or risk management limiting the market risk of the portfolio. Here are examples of the trading constraints.

²²To some extent, the choice of C^* as a parallelepiped could be characterized as the coordinate independence of multiplicative factors, at least when it comes to satisfying the “no arbitrage” condition coordinatewise.

Example 1.1.1. The classical case of no trading constraints:

$$\hat{D}_t \equiv \mathbb{R}^{n+1}.$$

Example 1.1.2. The case where the trading constraints are independent of the time variable and price history:

$$\hat{D}_t \equiv \mathbb{R} \times D,$$

where $D \subseteq \mathbb{R}^n$ are constant trading constraints on risky assets.

Example 1.1.3. A special case of Example 1.1.2 with prohibiting short positions on risky assets:

$$\hat{D}_t \equiv \mathbb{R} \times [0, \infty)^n.$$

Example 1.1.4. Suppose that the company's risk management establishes limits on the derivative desk's portfolio by calculating the Value-at-Risk (VaR) based on the Bachelier model assumptions, under which the price process is the multidimensional Brownian motion. In this case, the VaR of a portfolio with a given significance level and a one-step horizon²³ will be proportional to the standard deviation of the portfolio value. Let the estimate B_t of the covariance matrix for the increments ΔX_t be recursively calculated using exponentially weighted moving averages (which is common practice). Also, let the initial values for the empirical mean M_0 and the empirical covariance matrix B_0 be given (e.g., determined by the historical data of the preceding period). Then for $t \geq 1$, we have the relations²⁴

$$\begin{aligned} M_t &= \varkappa \Delta X_{t-1} + (1 - \varkappa)M_{t-1}, \\ B_t &= \varkappa(\Delta X_{t-1} - M_t) \otimes (\Delta X_{t-1} - M_t) + (1 - \varkappa)B_{t-1}, \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

where $x \otimes y$ is a matrix composed of $(x \otimes y)_{ij} = x_i y_j$, and $\varkappa \in (0, 1)$ denotes the exponential weighting parameter.

In this case, $B_t = B_t(\bar{x}_{t-1}) = B_t(\cdot)$, and the trading constraints have the form

$$D_t(\cdot) \equiv \left\{ H_t : \gamma \sqrt{\langle H_t, B_t(\cdot) H_t \rangle} \leq L \right\}, \quad (1.1.12)$$

where L is the risk management limit, and γ is the quantile of the standard Gaussian distribution corresponding to a given VaR significance level. Thus, if the matrices B_t are non-degenerate²⁵, $D_t(\cdot)$ are compact sets, namely ellipsoids, depending on the price history, since the parameters B_t are given by (1.1.11).

Example 1.1.5. Assumption (T) does not hold.²⁶

In the case of margin trading, a maintenance margin $\mu \in (0, 1)$ is set. This margin should be preserved for the broker not to make a margin call: the portfolio value

²³For example, one day.

²⁴In formulas (1.1.11), we interpret ΔX_t and M_t in matrix form as column vectors.

²⁵The nondegeneracy of the matrix B_t can be considered "the general situation." However, if the matrix $B_t(\bar{x}_{t-1})$ is degenerate for some \bar{x}_{t-1} , then the set $D_t(\bar{x}_{t-1})$ is not compact and imposes ellipsoidal constraints on the trading strategies in a proper subspace $B_t(\bar{x}_{t-1})\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$.

²⁶The problem statement for this example will be discussed at the end of Section 1.2 of this chapter.

should exceed $100\mu\%$ of the value of its long positions.²⁷ Thus, when restructuring the portfolio at the time instant $t - 1$, the following requirement must be satisfied:

$$V_{t-1} \geq \mu(H_t^\oplus, X_{t-1}),$$

where

$$(z_0, \dots, z_n)^\oplus \equiv (z_0^+, \dots, z_n^+), \quad z^+ \equiv 0 \vee z,$$

and \vee denotes the binary operation of taking the maximum. (Also, we will use the notation \wedge for minimum.)

1.2 Guaranteed Pricing of an American Option: Problem Statement

In this section, we apply the guaranteed deterministic approach to solve the main problem considered in the dissertation, i.e., the superhedging (superreplication) problem within the financial market model with an uncertain deterministic price evolution and trading constraints (the increments of discounted prices lie in given compact sets depending on the price history). This problem is solved by determining the minimum reserves necessary to ensure coverage of a contingent liability on a written American option with price history-dependent payoffs through an appropriate hedging strategy. The corresponding objective function satisfies the Bellman–Isaacs equations. What is important, we show what assumptions about the market and trading constraints are used in the (quite simple and standard) proof and what are not.

Consider an American option²⁸ with potential payoffs G_t at a time instant $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Assumption 1.2.1 (A). *The payoffs on an American option are nonnegative:*

$$G_t \geq 0, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

Usually, no payoffs on a contingent liability are expected to make at the initial time instant $t = 0$. For convenience, we may formally choose $G_0 = -\infty$.

For an American option, the time instant of payoff (execution of the contract) is determined by the counterparty (the option buyer). Here $G_t = g_t(\bar{X}_t)$, i.e., the value G_t is determined based on the observable price path of risky assets until the time instant t . Nonnegative functions g_t are called payoff functions. From now on, we assume that the variables X_t are the discounted prices of the assets. Therefore, the prices X_t are dimensionless and measured in the amount of the risk-free asset. In other words, the risk-free asset has a constant price equal to one, representing a dimensionless quantity.

²⁷In practice, margin trading can be allowed only for part of the positions.

²⁸In fact, this problem statement with certain “no arbitrage” assumptions covers payoffs at particular time instants, including European and Bermudan options; see below.

We denote by V_t the portfolio value at a time instant t , which is formed by the option seller. He receives the premium V_0 at the initial time instant and uses the self-financing strategy $H = (H_1, \dots, H_N)$ to hedge the contingent liability on the written option.

The counterparty can arbitrarily choose when the contract is to be executed. Therefore, the guaranteed hedge of the contingent liability on the option (i.e., the guaranteed coverage of potential payoffs) is equivalent to the fact that the portfolio value V_t satisfies the requirement

$$V_t \geq G_t, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (\text{SH})$$

Definition 1.2.1. *We say that a strategy H is superhedging if the portfolio value V_t satisfies (SH).*

Definition 1.2.2. *We say that an asset price path \bar{x}_t on a time interval $\llbracket 0, t \rrbracket$, $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$ is feasible if*

$$x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(\bar{x}_0), \dots, \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1}).$$

We denote by B_t the set of all feasible asset price paths on $\llbracket 0, t \rrbracket$:

$$B_t = \{\bar{x}_t : x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(\bar{x}_0), \dots, \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})\}. \quad (1.2.1)$$

Suppose that the functions $g_t(\cdot)$ are uniformly bounded.

Assumption 1.2.2 (B). *There exist constants $C_t \geq 0$ such that*

$$g_t(\bar{x}_t) \leq C_t \quad (\text{B})$$

for each $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ and all feasible paths $\bar{x}_t \in B_t$.

Here and in the sequel, the constant C_t is chosen minimum possible:

$$C_t = \sup_{\bar{x}_t \in B_t} |g_t(\bar{x}_t)|. \quad (1.2.2)$$

In addition,

$$C = \bigvee_{t=1}^N C_t. \quad (1.2.3)$$

Under fairly weak requirements on the “smoothness” of the functions g_t and the “smoothness” of $K_t(\cdot)$ as a function of the price history²⁹, the assumption about the boundedness of the payoff functions (B) is satisfied and therefore does not look burdening. Assumption (B) allows drawing an important conclusion: for a sufficiently high premium, the set of strategies H satisfying the majorization condition (SH) is non-empty: it suffices to choose $V_0 \geq C$ and $H_t \equiv 0$ for $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, i.e., take a

²⁹It suffices to have upper semicontinuity of the functions $g_t(\cdot)$ and the upper semicontinuity of $K_t(\cdot)$ in the sense of set-valued mappings; see Chapter 3.

sufficient premium not smaller than C from the counterparty, invest it in the risk-free asset, which is possible due to Assumption (R), and stop restructuring the portfolio. A natural question concerns the minimum requirements for a premium to cover liabilities at any time instant, i.e., when the majorization condition (SH) holds. It is convenient, however, to define such a value not only at the initial but any time instant.

Definition (VF). *The guaranteed pricing V_t^* of the hedging cost at a time instant $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$ is the infimum of the portfolio value V_t at this instant that ensures the fulfillment of the current and future liabilities regarding potential payoffs when exercising the option with superhedging strategies. The value V_0^* is the initial premium.*

From an economic point of view, V_t^* can be interpreted as the minimum reserves at a time instant t required to fully cover liabilities on a written option (superhedging).

The optimality principle in dynamic programming was introduced by Bellman in the early 1950s. The original statement ([22, p. 83]) was as follows:

An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.³⁰

This principle may have different formalizations for particular classes of applied problems. Its applicability is most often related to the properties of the objective function (also called the value function), which represents a functional of the system trajectory to be globally optimized on a given time interval. In our case, the applicability of the optimality principle is directly related to the economic interpretation of the problem and the formal definition of the price function, where optimization is local (in time). Simple reasoning based on backward induction yields the basic equations further called the Bellman–Isaacs equations. This name is associated with the game-theoretic interpretation of the guaranteed approach: choosing the best strategy (hedging a contingent liability on an option) in the worst-case scenario (price dynamics in the market).

Given the prices $\bar{X}_t = \bar{x}_t$, we denote by $v_t^*(\bar{x}_t)$ and $g_t(\bar{x}_t)$ the values of V_t^* and G_t , respectively. (In this case, $V_t^* = v_t^*(\bar{X}_t)$ and $G_t = g_t(\bar{X}_t)$.) We call $v_t^*(\cdot)$ *objective function*. The following result holds.

Theorem 1.2.1. *Let the discrete-time market model with a finite horizon satisfy the following:*

- *Assumption (TC) on the absence of transaction costs³¹;*
- *Assumption (AI) on the observable price history;*
- *Assumption (NNP) on the nonnegative prices;*
- *Assumption (RA) on one risk-free asset;*

³¹As a consequence, we have formula (L).

- Assumption (RN) on the choice of a risk-free numéraire (price discounting);
- Assumption (R) on the possibility of investing all funds in the risk-free asset;
- Assumption (T) on the form of trading constraints (not affecting the risk-free asset);
- Assumption (SF) on self-financing;
- Assumption (UD) on the a priori information describing uncertain price dynamics;
- Assumption (A) on the nonnegative payoff function on an American option;
- Condition (SH) on the guaranteed coverage of contingent liabilities on an option (superhedging);
- Assumption (B) on the bounded payoff functions on the set of feasible price paths.

Then the price function (VF) taking values³² in $\overline{\mathbb{R}}$ satisfies the inequalities

$$\begin{aligned} v_t^*(\bar{x}_t) &\leq C, & t \in \llbracket 0, N \rrbracket, \\ v_t^*(\bar{x}_t) &\geq 0, & t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \end{aligned}$$

and the recurrence relation³³

$$\begin{aligned} v_N^*(\bar{x}_N) &= g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy], \end{aligned} \quad (\text{BI})$$

where $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1})$ describes the history with respect to the current time instant $t = N, \dots, 1$. In this case, it can be formally supposed that $g_0(\cdot) \equiv -\infty$ (no payoff liabilities at the initial time instant).

By assumption, the set-valued mappings $x \mapsto K_t(x)$ and $x \mapsto D_t(x)$ and the functions $x \mapsto g_t(x)$ are defined for all $x \in (\mathbb{R}^n)^t$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, so that the functions $x \mapsto v_t^*(x)$ are given by equations (BI) for all $x \in (\mathbb{R}^n)^t$.

Proof. First, we establish the inequality

$$v_t^*(\cdot) \leq C. \quad (1.2.4)$$

For this purpose, we use the possibility (R) of investing all funds in the risk-free asset (under Assumption (T) on the form of trading constraints). It suffices to choose

³²The symbol $\overline{\mathbb{R}}$ denotes the affinely extended real axis $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, \infty]$, in which the neighborhoods of the points $-\infty$ and $+\infty$ have the form $[-\infty, x)$ and $(x, +\infty]$, respectively, where $x \in \mathbb{R}$. Also, we adopt the conventions $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ for $a \in (-\infty, +\infty]$ and $b + (-\infty) = (-\infty) + b = -\infty$ for $b \in [-\infty, +\infty)$.

³³Recall that \vee indicates maximum, whereas hy is the scalar product of vectors h and y .

$H_t \equiv 0$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Then, by formula (1.1.5), the hedging portfolio value V_t does not change over time, $V_t \equiv V_0$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.³⁴ For the initial capital $V_0 = C$, the strategy $H_t \equiv 0$ turns out to be superhedging: due to the boundedness of the payoff functions (B), $G_t \leq C = V_t$, and we have $V_t^* \leq V_t \equiv C$ by Definition (VF). Therefore, inequality (1.2.4) holds.

On the other hand, the problem is to superhedge an American option. In view of (A) and (SH), from (VF) it follows that

$$v_t^*(\cdot) \geq 0, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket.$$

Obviously, for $t = N$ we have

$$v_N^*(\cdot) = G_N(\cdot).$$

Consider the case $t < N$. In the reasoning below, we involve Bellman's optimality principle when comparing the ε -optimal superhedging strategies on the time intervals³⁵ $\llbracket t, N \rrbracket$ and $\llbracket t-1, N \rrbracket$, where $t \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. Let the price history $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1}$ be known, and let $H_s = h_s(\bar{x}_{s-1})$ be a self-financing superhedging strategy for $s \in \llbracket t-1, N \rrbracket$ with the hedging portfolio value V_s . (Then it is also a self-financing superhedging strategy on the time interval $\llbracket t, N \rrbracket$.) For each feasible price scenario $y = \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})$ at step t we have

$$v_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) + h_t(\bar{x}_{t-1})y = v_t(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) \geq v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y).$$

Therefore,

$$\begin{aligned} v_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) &\geq \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - h_t(\bar{x}_{t-1})y] \geq \\ &\quad \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \end{aligned}$$

Consequently, by Definition (VF),

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) \geq \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy].$$

Moreover, it follows from (SH) that

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) \geq g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}).$$

Thus,

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) \geq g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \quad (1.2.5)$$

By Definition (VF), for a fixed price history \bar{x}_t and an arbitrary $\varepsilon > 0$, there exists a superhedging strategy $h_{t+1}^{(\varepsilon)}(\bar{x}_t), \dots, h_N^{(\varepsilon)}(\bar{x}_{N-1})$ on the time interval $\llbracket t, N \rrbracket$

³⁴This formula rests on Assumption (TC) (no transaction costs).

³⁵Here we mean intervals on the set of nonnegative integers.

such that the value $v_t^{(\varepsilon)}(\bar{x}_t)$ of the corresponding hedging portfolio at the time instant t will satisfy the inequality

$$v_t^{(\varepsilon)}(\bar{x}_t) \leq v_t^*(\bar{x}_t) + \varepsilon.$$

Next, for the previously fixed price history \bar{x}_t and an arbitrary value $\delta > 0$, we select a strategy $h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1})$ at the step t such that

$$\begin{aligned} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1})y] \leq \\ \delta + \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

If by the time instant $t - 1$ we provide the hedger with the capital

$$v_{t-1}^{\varepsilon, \delta}(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \left\{ \varepsilon + \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1})y] \right\},$$

then the strategy $h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1}), h_{t+1}^{(\varepsilon)}(\bar{x}_t), \dots, h_N^{(\varepsilon)}(\bar{x}_{N-1})$ will be superhedging on the time interval $\llbracket t - 1, N \rrbracket$ since

$$v_{t-1}^{\varepsilon, \delta}(\bar{x}_{t-1}) + h_t^{(\delta)}(\bar{x}_{t-1})\Delta x_t \geq v_t^*(\bar{x}_t) + \varepsilon \geq v^\varepsilon(\bar{x}_t)$$

for any feasible price increment scenario $\Delta x_t \in K_t(\bar{x}_t)$. At the same time, it follows from (1.2.6) that

$$\begin{aligned} v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) \leq v_{t-1}^{\delta, \varepsilon}(\bar{x}_{t-1}) \leq \\ \varepsilon + \delta + g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \\ \vee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \end{aligned}$$

Since $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$ are arbitrary, we obtain inequalities opposite to (1.2.5) and hence the desired relations (BI) for $t \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$. \square

Remark 1.2.1. Theorem 1.2.1 makes no use of the following:

- Assumption (C) on the compact sets $K_t(\cdot)$ describing the uncertain price dynamics in Assumption (UD);
- Assumption (D) on the convex sets $D_t(\cdot)$ describing the trading constraints;
- Assumption (PC) on a continuous price line;
- Assumption (AD) on infinitely divisible assets.

These assumptions, however, will serve for studying the properties of equations (BI). As noted above, Assumption (C) is crucial for a meaningful theory.

At the same time, whereas (PC) is generally acceptable as an approximation to reality, (AD) may be inadequate for small portfolios. A more natural problem

statement is to solve (BI) with integer optimization³⁶ in relation to the superhedging strategy $h \in D_t(\cdot)$.

Remark 1.2.2. In fact, Theorem 1.2.1 has been proved without Assumption (PP) (positive prices). Meanwhile, for discounting and making Assumption (RN), we need nonzero prices of the risk-free asset: $X_t^0 \neq 0$.

Definition 1.2.3. *An admissible superhedging strategy*

$$\mathbf{h}_N^* = (h_1^*(\bar{x}_0), \dots, h_N^* = h_N^*(\bar{x}_{N-1}))$$

satisfying the trading constraints

$$h_t^*(\bar{x}_{t-1}) \in D_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

is said to be optimal if the infimum over h in equations (BI) is reached at $h = h_t^(\bar{x}_{t-1})$.*

Remark 1.2.3. For equations (BI) to hold, no assumptions like “no arbitrage” in the market are required.³⁷ However, such properties are, of course, fundamental when studying the properties of equations (BI) and hedging strategies. For details, see Chapters 2 and 3. In particular, some natural assumption of “no arbitrage” in the market together with the closedness of the sets $D_t(\bar{x}_{t-1})$ is sufficient for the existence of an optimal superhedging strategy; see Corollary 3.2.1.

Remark 1.2.4. The measurability requirements do not appear in the statement of Theorem 1.2.1. However, the “smoothness properties” of the solutions of equations (BI) are of applied interest and depend on the “smoothness properties” of the set-valued mappings $x \mapsto K_t(x)$ and $x \mapsto D_t(x)$ and the payoff functions $g_t(\cdot)$. This issue will be investigated in Chapter 3.

Remark 1.2.5. Formally, equations (BI) can serve for the price function of a European option when choosing $g_0(\cdot) = \dots = g_{N-1}(\cdot) \equiv -\infty$ and $g_N(\cdot) = g(\cdot)$, where $g(\cdot) \geq 0$ is the payoff function at the terminal time instant (exercising the option).

In a similar way, equations (BI) can serve for the price function of a Bermudan option when choosing $g_s \equiv -\infty$ for the time instants s without payoffs.

In this case, generally speaking, the inequality $v_t^*(\cdot) \geq 0$ will fail without additional assumptions, whereas the inequality $v_t^*(\cdot) \leq C$ will still hold.

Remark 1.2.6. To justify the term “Bellman–Isaacs equations” for the relations (BI), we emphasize that $g_{t-1}(\cdot)$ can be placed under the minimax sign³⁸:

$$v_{t-1}^*(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [g_{t-1}(\cdot) \vee (v_t^*(\cdot, x_{t-1} + y) - hy)], \quad t = N, \dots, 1.$$

³⁶In the invention [224], the central counterparty’s hedging strategy for the defaulter’s open positions was determined by solving an integer optimization problem. The superhedging problem with integer trading constraints (when the quantity of each asset is an integer) was studied in [96].

³⁷The possibility of market modeling and formalizing the superhedging problem without the “no arbitrage” assumptions seems unobvious. For example, this fact was independently discovered by the authors [49] (for the probabilistic market model) several years after our publication [212].

³⁸However, this trick would hardly facilitate the analytical study of equations (BI).

This fact follows from the well-known property: any nondecreasing upper semicontinuous function $\varphi: \overline{\mathbb{R}} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ satisfies the relation

$$\varphi\left(\inf_{h \in A} f(h)\right) = \inf_{h \in A} \varphi(f(h)).$$

In our case, it is applied to the continuous nondecreasing function $\varphi(u) = g \vee u$ together with the identity

$$g \vee \sup_{y \in B} f(y) = \sup_{y \in B} [g \vee f(y)].$$

Remark 1.2.7. Within the deterministic approach, the Bellman–Isaacs equations are trivially obtained from the economic sense, and the proof is standard and elementary. In contrast, the probabilistic analog of these equations requires mathematically advanced results such as the optional decomposition; for example, see [93].

Remark 1.2.8. When deriving equations (BI), the boundedness of the payoff function and the possibility of investing all funds in the risk-free asset are used only to show the existence of a superhedging strategy. Assumptions (B) and (R) in the statement of Theorem 1.2.1 can be discarded by replacing them with the less constructive assumption about the existence of a feasible superhedging strategy $h_t(\bar{x}_{t-1}) \in D_t(\bar{x}_{t-1})$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, ensuring the finiteness of the function $v_t^*(\cdot)$, $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$. For a call option, such a strategy would be “buy and hold”³⁹ if feasible (e.g., if the trading constraints allow taking arbitrarily large long positions in a risky asset).

Proposition 1.2.1. *If the price dynamics and trading constraints are Markovian⁴⁰, whereas the payoff functions depend only on the current price, i. e., for $t = 1, \dots, N$ they can be represented as*

$$g_t(x_0, \dots, x_t) = g_t^*(x_t), \quad (1.2.7)$$

then the solutions of the Bellman–Isaacs equations also depend only on the current price, i. e., for $t = 1, \dots, N$ they can be represented as

$$v_t^*(x_0, \dots, x_t) = v_t^*(x_t). \quad (1.2.8)$$

Proof. The assertion can be verified by induction; this is a direct consequence of the Bellman–Isaacs equations (BI). \square

Due to the additive representation (1.1.9), for convenient notations, we can make an “additive” change of the last variable in the functions v_t^* by letting

$$w(\bar{x}_{t-1}, y) = w_t(x_1, \dots, x_{t-1}, y) = v^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y). \quad (\text{T})$$

³⁹This strategy is to buy an underlying (risky) asset at the initial time instant and hold the position until the option expires.

⁴⁰See Definition 1.1.2.

Really, it is often convenient to analyze the right-hand side of the Bellman–Isaacs equation (BI) in terms of the functions w_t for $t \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$:

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy], \quad t = N, \dots, 1. \quad (1.2.9)$$

As is well known, an abstract problem arises in the theory of dynamic programming in discrete time: the projection of a Borel set (in the more general case, its continuous image) is generally not a Borel set but only an analytic one. These problems and the related theory were presented, e.g., in the book [29, §§ 7.6–7.7 and Appendix B].⁴¹

From our point of view, this is not of great interest in applications: “problems” with measurability are mainly associated with using the axiom of choice. This axiom leads to “pathological” examples (particularly those related to the existence of Lebesgue unmeasurable sets). However, this existence is nonconstructive. When replacing the axiom of choice with alternative axioms that preserve the countable axiom of choice (and hence traditional mathematical analysis), these “pathological” examples disappear. For example, this is the case for the axiom of dependent choice⁴²; see [226]. The situation is similar for the axiom of determinateness [158]. Therefore, “the existence of pathological examples” is a philosophical rather than mathematical issue. Of course, the problem statement in particular applications is constructive.

In this regard, studying the “smoothness” properties of solutions (semicontinuity, continuity, or the Lipschitz property) is useful for applications; see the next chapters.

At the same time, problem statements are possible where the measurability does not matter at all (in particular, for a certain concept of game equilibrium, also considered below).

In conclusion, let us discuss possible modifications of the dynamic programming problem (1.2.9) in the case of trading constraints on the risk-free asset and in the case of margin trading (Example 1.1.5). We mean the possibility of reducing the problem dimension from $n + 1$ to n , but in this case, the Bellman–Isaacs equations take another form compared with (1.2.9).

Due to (1.1.6), we consider trading constraints on the risk-free asset using the relation

$$(v_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) - hx_{t-1}, h) \in \hat{D}_t(\bar{x}_{t-1}). \quad (1.2.10)$$

Assume that the sets $\hat{D}_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, are convex. In accordance with (1.1.6), we write the constraints on risky assets as

$$D_t(\cdot) = \{h \in \mathbb{R}^n : (v_{t-1}(\cdot) - hx_{t-1}, h) \in \hat{D}_t(\cdot)\}.$$

⁴¹One of the suggested solutions is to use universal measurability. However, analytic sets are universally measurable only under an additional assumption, which is an axiom of descriptive set theory.

⁴²Such a change of the axiom yields no contradiction within the Zermelo–Fraenkel axiomatic system.

For $h \in \mathbb{R}^n$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, let⁴³

$$\begin{aligned} A_t(h, \cdot) &= \{h^0 \in \mathbb{R} : (h^0, h) \in \hat{D}_t(\cdot)\} \subseteq \mathbb{R}, \\ \alpha_t(h, \cdot) &= \inf A_t(h, \cdot), \\ \beta_t(h, \cdot) &= \sup A_t(h, \cdot), \\ E_t(\cdot) &= \{h \in \mathbb{R}^n : A_t(h, \cdot) \neq \emptyset\} \subseteq \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Note that the function $h \mapsto \alpha_t(h, \cdot)$ is convex, and the function $h \mapsto \beta_t(h, \cdot)$ is concave; see [175, Theorem 5.3]. The set $E_t(\cdot)$ is convex, and $0 \in E_t(\cdot)$ by Assumption (R) in the form (1.1.7).

With the notations (T), the recurrence relation of the corresponding dynamic programming problem can be written as

$$\begin{aligned} v_N^*(\bar{x}_N) &= g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \\ &\quad \inf_{h \in E_t(\bar{x}_{t-1})} \left\{ \left[\sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy) \vee \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (hx_{t-1} + \alpha_t(h, \bar{x}_{t-1})) \right] \wedge \right. \\ &\quad \left. (hx_{t-1} + \beta_t(h, \bar{x}_{t-1})) \right\}. \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

From the economic point of view, however, natural constraints arise for borrowed funds⁴⁴, and upper bounds on investments in the risk-free asset make no sense. In applications, reasonable assumptions are $\beta_t(h, \bar{x}_{t-1}) = +\infty$ and $\alpha_t(h, \bar{x}_{t-1}) \leq 0$. They allow simplifying the recurrence relation (1.2.11).

In Example 1.1.5 with margin trading, condition (1.2.10) takes the form

$$v_{t-1} \geq \mu h^\oplus x_{t-1}, \quad \mu \in [0, 1).$$

Therefore, the recurrence relation for the corresponding dynamic programming problem become

$$\begin{aligned} v_N^*(\bar{x}_N) &= g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \\ &\quad \inf_{h \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy) \vee \mu h^\oplus x_{t-1} \right\}. \end{aligned}$$

Now, simultaneously with the trading constraints inherent in margin trading, we restrict risk-free asset borrowing by specifying an h -convex function $\alpha_t(h, \bar{x}_{t-1}) \leq 0$. Then, with the notations (T), the corresponding Bellman–Isaacs equations with the

⁴³Here we adopt the convention $\inf \emptyset \equiv +\infty$, $\sup \emptyset \equiv -\infty$.

⁴⁴The lender can set a limit, e.g., the borrowed funds must not exceed a given share $\gamma \in (0, 1)$ of the borrower's equity, $\alpha_t(h, \cdot) = -\gamma v_{t-1}(\cdot)$.

additional constraints $h \in D_t(\cdot)$ can be written as

$$\begin{aligned}
 v_N^*(\bar{x}_N) &= g_N(\bar{x}_N), \\
 v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \\
 &\quad \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \left\{ \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy) \vee \mu h^\oplus x_{t-1} \vee \right. \\
 &\quad \left. (hx_{t-1} + \alpha_t(h, \bar{x}_{t-1})) \right\}. \tag{1.2.12}
 \end{aligned}$$

Remark 1.2.9. Equations (1.2.9) are a special case of (1.2.12) for

$$\mu = 0, \quad \alpha_t \equiv -\infty.$$

Remark 1.2.10. In formula (1.2.12), the bracketed expression minimized with respect to h is a convex function of h .

Chapter 2. “No Arbitrage” Properties of the Market

This chapter considers several concepts formalizing the “no arbitrage” property of the market within the deterministic approach with trading constraints and their properties.

We introduce a new concept of the structural stability of the model, important for the theory and applications. It consists in the robustness of the “no arbitrage” properties of the market: these qualitative properties are preserved under small perturbations in market price dynamics. The structural stability of the model is essentially used in Chapters 3, 4, 6, 8, 9, and 10.

Also, geometric criteria are obtained for the “no arbitrage” properties of the market.

The main results were published in [211] (the English version in [200]) and [209] (the English version in [210]).

2.1 Arbitrage and “No Arbitrage” in the Market

We begin by quoting¹ famous financial engineer Emanuel Derman:

Scientific models are a tower of metaphors built atop the fundamental nonmetaphorical qualities and the laws. . . . What about financial models and theories? Financial theory is a tower of metaphors too, but, as practitioners soon learn, the sad truth is that there are no fundamental laws analogous to Newton’s or Maxwell’s.

Although we can partially agree with this, there are fundamental principles that financial models must satisfy. The most important principle is the “no arbitrage” requirement for the market, which by its significance in financial engineering is akin to the principle of conservation of energy in closed systems in physics. One should not seek Perpetuum Mobile, at least within the physical theory; nor should one use a financial model that would motivate to profit through arbitrage. (In practice, it will be most likely unrealizable since no model can consider all the nuances of the real world.) The main difference between them is that in physical models, the principle of conservation of energy is usually formalized easily and unambiguously, whereas

¹*Metaphors and Their Limits*, published September 30, 2008 by Emanuel Derman.

the financial theory operates more vague concepts, and formalizing the principle of “no arbitrage” is ambiguous. (It is not obvious which of the possible formalizations better corresponds to the reality.)

The concept of arbitrage, extremely important for describing the behavior of financial markets, is inconsistent from the beginning. As a typical interpretation, consider the definition given in *Investopedia*.

Arbitrage occurs when a security is purchased in one market and simultaneously sold in another market at a higher price, thus considered to be risk-free profit for the trader. Arbitrage provides a mechanism to ensure prices do not deviate substantially from fair value for long periods of time. With advancements in technology, it has become extremely difficult to profit from pricing errors in the market. Many traders have computerized trading systems set to monitor fluctuations in similar financial instruments. Any inefficient pricing setups are usually acted upon quickly, and the opportunity is often eliminated in a matter of seconds. Arbitrage is a necessary force in the financial marketplace.²

On the one hand, and this is the most essential characteristic of arbitrage, the matter concerns transactions bringing profit without risk. On the other hand, note that different market participants have nonidentical opportunities in terms of access to information and access to the market. Here, a major role is played not only by the response time but also by the speed of executing transactions. The actions of market participants to execute the arbitrage of assets traded in the market, of course, affect the market value of these assets, leading not only to price equalization but also to a possible occurrence of the opposite price situation in the market within a short period of time. This is due to some market inertia, the non-simultaneous actions of market participants caused by their heterogeneity in terms of market access. Thus, in reality, market participants always have risk, and the only risk-free market participant could be the one who is “always first.” This aspect explains the development of high-frequency trading systems, in which transactions are executed in small fractions of a second.

Another possibility of arising arbitrage in the real financial markets is due to certain episodes of mispricing, which can be explained using behavioral interpretation, see [236]³.

Despite the contradictions described above, the concept of “no arbitrage” in the market, however, is crucial for correct market modeling. If a *model* allows for arbitrage with unbounded profit⁴, then the optimal hedging of contingent liabilities on options and optimal portfolio investment become meaningless problems: such a market model would only encourage trading strategies for obtaining unbounded risk-free profits through arbitrage. We emphasize that the concepts of arbitrage and

²URL: <https://www.investopedia.com/terms/a/arbitrage.asp>.

³The author is grateful to professor A. A. Vasin for pointing out this book.

⁴In the case of no trading constraints, arbitrage is always associated with unbounded profit, and no initial capital is required to execute arbitrage.

“no arbitrage” in the market are difficult to formalize: there exist many different mathematical definitions, and it is far from always clear which definition better matches reality. The most non-trivial situation arises when constructing continuous-time market models. For this class of models, we refer only to some fundamental research works on the arbitrage theory, starting with the seminal paper [182] published by Ross in 1978. For example, a mathematically precise formulation of the “no arbitrage” conditions was proposed in 1979 by Harrison and Kreps; see the paper [106]. A connection between the “no arbitrage” properties and martingale measures was established in 1981 by Harrison and Pliska [107]. In 1981, Kreps [136] adapted the concept of “no arbitrage” to the infinite number of assets. In 1992, Delbaen [67] and, in 1994, Delbaen jointly with Schachermayer [68], applied Kreps’ results to derive existence conditions for martingale measures. Later on, in 1998, Delbaen and Schachermayer [69] also found the most general conditions of this type. In 1999, Dana, Le Van, and Magnien [65] related the “no arbitrage” property to market equilibrium.

In our opinion, a very natural formalization of the concept of “no arbitrage” in the case of continuous time, called No Generalized Arbitrage (NGA), was proposed by Cherny in 2007; see the paper [54]. According to his version of the fundamental theorem on asset pricing, a finite-horizon market model satisfies NGA if and only if there exists a probabilistic measure equivalent to a reference measure, with which the discounted price process is a (real) martingale⁵; an infinite-horizon model satisfies NGA if and only if there exists an equivalent measure, with which the discounted price process is a uniformly integrable martingale. Note that this approach is based on elementary (or simple) trading strategies, which are certainly closer to reality than the more general “continuous trading” strategies.

For a discrete-time “deterministic” market model, the concept of “no arbitrage” can also be formalized in different ways. The corresponding formulations vary from the “probabilistic” definitions, although they are close to them in meaning. The definition of a (deterministic) arbitrage opportunity goes back to Merton (see his paper [148] published in 1973) and is formulated in terms of “dominant securities (portfolio).” Here is a quote from the original paper.

Security (portfolio) A is dominant over security (portfolio) B, if on some known date in the future, the return on A will exceed the return on B for some possible states of the world⁶, and will be at least as large as on B, in all possible states of the world. Note that in perfect markets with no transactions costs and the ability to borrow and short-sell without restriction, the existence of a dominated security⁷ would be equivalent to the existence of an arbitrage situation.

⁵And not a local martingale, i.e., the process has a finite mean at each time instant.

⁶Within the model proposed in [136], the states of the world can be, e.g., possible price paths of the securities under consideration.

⁷Here, apparently, Merton meant dominant portfolios, not just securities.

In the presence of a risk-free asset, it is natural to compare the portfolio income with the income from this asset, and an arbitrage opportunity is equivalent to that the risk-free asset will be either dominated or dominant; see Proposition 2.2.4 in Section 2.2 below.

Within the robust approach to financial market modeling, there are different ways of formalizing “no arbitrage.” Their relationship was analyzed in [163].

2.2 Arbitrage Opportunity and Sure Arbitrage

In this section, we discuss some formalizations of “no arbitrage” for the financial market model with an uncertain deterministic price evolution and trading constraints. From this point onwards, the self-financing condition is assumed to be satisfied and, unless otherwise specified, the sets $K_t(\cdot)$ are compact.

Definition 2.2.1. *For a known price history $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$, an arbitrage opportunity at a time instant $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ will be understood as follows.*

- 1° *There exists an admissible strategy $h^* = h^*(\bar{x}_{t-1}) \in D_t(\bar{x}_{t-1})$ at a time instant t such that $h^*y \geq 0$ for all $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$.*
- 2° *There exists a $y^* = y^*(\bar{x}_{t-1}) \in K_t(\bar{x}_{t-1})$ such that $h^*y^* > 0$.*

For a known price history $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$, we say that there is no arbitrage opportunity at a time instant $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ if at least one of conditions 1° and 2° fails.

Remark 2.2.1. In the probabilistic statement, condition 1° holds almost surely, whereas condition 2° is replaced with a stronger one expressing the realness of an arbitrage opportunity: the event $H_t^* \Delta X_t > 0$, where $H_t^* = h_t^*(X_0, \dots, X_{t-1})$, has a positive (reference) probability. However, for the probabilistic counterpart of the problem, in which $K_t(\cdot)$ are the (topological) supports of a regular conditional distribution of ΔX_t given a known price history, the conditions of Definition 2.2.1 imply that the event $H^* \Delta X > 0$ has a positive (reference) probability under some technical assumptions.

Indeed, we denote by $P_{\Delta X_t | \bar{X}_{t-1} = \cdot}$ the corresponding conditional distributions and assume the existence of measurable selectors⁸ $h^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$ and $y^*(\cdot) \in K_t(\cdot)$ with properties 1° and 2°. In principle, this can be satisfied⁹ via appropriate properties of the set-valued mappings $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ and $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$.

⁸Unfortunately, the terminology of set-valued analysis in the Russian literature diverges. For example, in the book [117] and the paper [40], the term “section” was adopted; the authors [172] preferred speaking about “selection”; in the paper [37], “branch” was considered to be a synonym of “selector”; in the book [168], “branch” was related to set-valued mappings only, and “selector” was comprehended as a choice function for a class of sets (in the sense of set theory).

⁹For example, it suffices to require the upper or lower semicontinuity of the set-valued mappings, or their measurability; see [168, § 15 and § 20].

According to condition 2°, the open half-space $S(\cdot) = \{y : h^*(\cdot)y > 0\}$ intersects $K_t(\bar{x}_{t-1})$ so that

$$P_{\Delta X_t | \bar{x}_{t-1}}(S(\cdot)) > 0.$$

Hence, we have

$$\mathbb{P}(H_t \Delta X_t > 0) > 0$$

for the unconditional (reference) probability.

Note that for the criteria of “no arbitrage” in terms of the supports $K_t(\cdot)$ within the probabilistic approach, serious efforts are needed to struggle with the problem of measurability. In particular, certain (non-constructive) results concerning measurable selectors are often used; for example, see [179], [121] and [41]. At the same time, the deterministic approach, in principle, allows avoiding these problems, at least partially.

Definition NDAO. We say that the (stepwise) condition of no arbitrage opportunity holds if at each time instant $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, an arbitrage opportunity is absent for any price history $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$ (in the sense of Definition 2.2.1). This condition will be denoted by NDAO.¹⁰

Definition 2.2.2. A multistep arbitrage opportunity on the time interval $\llbracket 0, N \rrbracket$ will be understood as follows.

1° There exists an admissible strategy

$$\mathbf{h}_N^* = (h_1^* = h_1^*(\bar{x}_0), \dots, h_N^* = h_N^*(\bar{x}_{N-1})),$$

$$h_t^* \in D_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

such that

$$\sum_{s=1}^N h_s^* \Delta x_s \geq 0$$

for any feasible price path $\bar{x}_N \in B_N$.

2° There exists a feasible price path $\bar{x}_N^* \in B_N$ such that

$$\sum_{s=1}^N h_s^* \Delta x_s^* > 0.$$

Definition 2.2.3. We say that the condition of no multistep arbitrage opportunity holds if a multistep arbitrage opportunity is absent on the time interval $\llbracket 0, N \rrbracket$ (in the sense of Definition 2.2.2).

Proposition 2.2.1. NDAO (the stepwise condition of no arbitrage opportunity) and the condition of no multistep arbitrage opportunity are equivalent.

¹⁰No Deterministic Arbitrage Opportunity.

Proof. For some price history $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$, an arbitrage opportunity at a time instant $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ implies multistep arbitrage opportunities on the time interval $\llbracket 0, N \rrbracket$: it suffices to let $h_s = 0$ for $s \neq t$, $h_t(x) = h^*(x)$ for $x = \bar{x}_{t-1}$, and $h_t(x) = 0$ for $x \neq \bar{x}_{t-1}$. Considering the corresponding definitions of “no arbitrage,” we establish that no sure multistep arbitrage on the time interval $\llbracket 0, N \rrbracket$ implies no sure one-step arbitrage at any time instant $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

To show the inverse implication, we use an equivalent formulation for a multistep arbitrage opportunity on the time interval $\llbracket 0, N \rrbracket$: there exists an admissible strategy

$$\mathbf{h}_N^* = (h_1^* = h_1^*(\bar{x}_0), \dots, h_N^* = h_N^*(\bar{x}_{N-1})),$$

such that

$$h_t^* \in D_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

and the two inequalities hold¹¹:

$$I_N(\mathbf{h}_N^*) = \inf_{y_1 \in K_1(x_0)} \dots \inf_{y_N \in K_N(\bar{x}_{N-1})} \sum_{s=1}^N h_s^* y_s \geq 0$$

and

$$S_N(\mathbf{h}_N^*) = \sup_{y_1 \in K_1(x_0)} \dots \sup_{y_N \in K_N(\bar{x}_{N-1})} \sum_{s=1}^N h_s^* y_s > 0.$$

We will prove by induction. The required statement trivially holds for the time horizon $N = 1$. Assume that for the time horizon $N = T$, where $T \geq 1$, the stepwise condition of no arbitrage opportunities implies no multistep arbitrage opportunities. Given this assumption, we need to derive the same property for the time horizon $N = T + 1$. Let the stepwise condition of no arbitrage opportunities hold on the time interval $\llbracket 0, T + 1 \rrbracket$. Then it also holds on the time interval $\llbracket 0, T \rrbracket$, and by the inductive assumption, there are no multistep arbitrage opportunities on the time interval $\llbracket 0, T \rrbracket$.

Suppose that there exists a multistep arbitrage opportunity on the time interval $\llbracket 0, T + 1 \rrbracket$. Then there exists an admissible strategy \mathbf{h}_{T+1}^* such that

$$\begin{aligned} I_{T+1}(\mathbf{h}_{T+1}^*) &= \inf_{y_1 \in K_1(\bar{x}_0)} \dots \inf_{y_T \in K_T(\bar{x}_{T-1})} \sum_{s=1}^T h_s^* y_s + \inf_{y_{T+1} \in K_{T+1}(\bar{x}_T)} h_{T+1}^* y_{T+1} = \\ I_T(\mathbf{h}_T^*) &+ \inf_{y_{T+1} \in K_{T+1}(\bar{x}_T)} h_{T+1}^* y_{T+1} = I_T(\mathbf{h}_T^*) + i_{T+1}(h_{T+1}^*) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

and

$$S_{T+1}(\mathbf{h}_{T+1}^*) = S_T(\mathbf{h}_T^*) + \sup_{y_{T+1} \in K_{T+1}(\bar{x}_T)} h_{T+1}^* y_{T+1} = S_T(\mathbf{h}_T^*) + s_{T+1}(h_{T+1}^*) > 0. \quad (2.2.2)$$

However, there are no multistep arbitrage opportunities on the time interval $\llbracket 0, T \rrbracket$, and hence any admissible strategy \mathbf{h}_T satisfies at least one of the inequalities $I_T(\mathbf{h}_T) < 0$ and $S_T(\mathbf{h}_T) \leq 0$. Due to the one-step condition of no arbitrage

¹¹The infimum and supremum below are reached and finite due to the compactness of $K_t(\cdot)$.

opportunities at the time instant $T + 1$, for any $h_{T+1} \in D_t(\bar{x}_{T+1})$ we have at least one of the inequalities: either $i_{T+1}(h_{T+1}) < 0$ or $s_{T+1}(h_{T+1}^*) \leq 0$. Consider four cases for the admissible strategy \mathbf{h}_{T+1} given by the pair \mathbf{h}_T and h_{T+1} :

- 1) $I_T(\mathbf{h}_T) < 0$ and $i_{T+1}(h_{T+1}) < 0$. In this case, inequality (2.2.1) cannot be satisfied.
- 2) $I_T(\mathbf{h}_T) < 0$ and $s_{T+1}(h_{T+1}^*) \leq 0$. In this case,

$$i_{T+1}(h_{T+1}) \leq s_{T+1}(h_{T+1}^*) \leq 0,$$

and inequality (2.2.1) cannot be satisfied.

- 3) $S_T(\mathbf{h}_T) \leq 0$ and $i_{T+1}(h_{T+1}) < 0$. In this case,

$$I_T(\mathbf{h}_T) \leq S_T(\mathbf{h}_T) \leq 0,$$

and inequality (2.2.1) cannot be satisfied.

- 4) $S_T(\mathbf{h}_T) \leq 0$ and $s_{T+1}(h_{T+1}) \leq 0$. In this case, inequality (2.2.2) cannot be satisfied.

Thus, we have arrived at a contradiction, meaning that multistep arbitrage opportunities cannot exist if the stepwise condition of no arbitrage opportunities holds. \square

For the guaranteed deterministic approach, relevant “no arbitrage” conditions are very weak, even weaker than NDAO and the corresponding probabilistic concepts of “no arbitrage.” (They were analyzed, e.g., in [179]). Thus, our approach is effective for the more general problem statement.

Definition 2.2.4. *Sure arbitrage*¹² at a time instant $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ will be understood as follows:

There exists an admissible strategy $h^ = h^*(\bar{x}_{t-1}) \in D_t(\bar{x}_{t-1})$ at a time instant t such that¹³ $h^*y > 0$ for all $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$.*

For a known price history $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$, we say that there is no sure arbitrage at a time instant $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ if for any admissible strategy $h \in D_t(\bar{x}_{t-1})$ at this instant, there exists a price increment $y^ = y^*(\bar{x}_{t-1}) \in K_t(\bar{x}_{t-1})$ such that $hy^* \leq 0$.*

¹²A stable term has not been established. We prefer the term “sure arbitrage” as the most accurate expression for the meaning of this concept. For example, consider the book [167] devoted to discrete-time models with a finite number of states of the world (i.e., price increments take a finite number of values). In the book, the presence of a dominant strategy, interpreted differently than in [148], was equivalent to sure arbitrage. We proposed this terminology in the late 1990s. In the “robust” approach, intensively developing over the last years, an arbitrage opportunity from Definition 2.2.1 corresponds to “One Point Arbitrage”; in our problem statement, it also corresponds to “quasi-sure arbitrage” from [41]. Sure arbitrage from Definition 2.2.4 corresponds to “Strong Arbitrage” from [45]. The relationship between different definitions of “no arbitrage” within the robust approach to financial market modeling with discrete time was analyzed in detail in [163].

¹³For the compact set $K_t(\cdot)$, the strategy h^* satisfies $\min_{y \in K_t(\cdot)} h^*y > 0$.

Definition NDSA. We say that the (stepwise) condition of no sure arbitrage holds if at each time instant $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, sure arbitrage is absent for any price history $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$ (in the sense of Definition 2.2.4. This condition will be denoted by NDSA.¹⁴

No doubt, NDSA is a rather weak requirement for “no arbitrage” in the market. Nevertheless, this form of “no arbitrage” in the market is relevant for the deterministic problem statement with trading constraints¹⁵ and for equilibrium analysis in the hedger–market game.¹⁶ As a rule, applying NDSA yields some non-strict inequalities. Here is an example of economic nature that confirms this thesis.

Example 2.2.1. At a time instant t , the price v_t of selling an American option in the market must not exceed the value v_t^* given by equations (BI), due to the considerations of no sure arbitrage. (If $v_t > v_t^*$, selling the option at the price v_t , we obtain the funds $v_t^* + \varepsilon$, where $0 < \varepsilon < v_t - v_t^*$, sufficient for superhedging.) Thus, NDSA reasoning yields the inequality $v_t \leq v_t^*$.

Definition 2.2.5. Sure multistep arbitrage on the time interval $\llbracket 0, N \rrbracket$ will be understood as follows. There exists an admissible strategy

$$\mathbf{h}_N^* = (h_1^*(\bar{x}_0), \dots, h_N^* = h_N^*(\bar{x}_{N-1})),$$

satisfying the trading constraints

$$h_t^* \in D_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

such that

$$\sum_{s=1}^N h_s^* \Delta x_s > 0$$

for any feasible price path $\bar{x}_N \in B_N$.

Definition 2.2.6. We say that the condition of no sure multistep arbitrage holds if sure multistep arbitrage is absent on the time interval $\llbracket 0, N \rrbracket$ (in the sense of Definition 2.2.5).

Proposition 2.2.2. NDAO (the stepwise condition of no arbitrage opportunities) implies NDSA (the stepwise condition of no sure arbitrage), which in turn implies no sure multistep arbitrage.

Proof. The first implication is due to the following fact: for a known price history $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$, sure arbitrage at a time instant $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ is an arbitrage opportunity at the time instant $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ for the price history $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$.

¹⁴No Deterministic Sure Arbitrage.

¹⁵In fact, the weaker “no arbitrage” conditions discussed in Sections 2.3 and 2.4 below will also be relevant.

¹⁶This concept will be introduced in Chapter 5.

We prove the second implication by induction. It trivially holds for the time horizon $N = 1$. Assume that for the time horizon $N = T$, where $T \geq 1$, the stepwise condition of no sure arbitrage implies no sure multistep arbitrage. Given this assumption, we establish the same property for the time horizon $N = T + 1$. Let the stepwise condition of no arbitrage opportunities hold on the time interval $\llbracket 0, T + 1 \rrbracket$. Then it also holds on the time interval $\llbracket 0, T \rrbracket$, and by the inductive assumption, there are no multistep arbitrage opportunities on the time interval $\llbracket 0, T \rrbracket$. Then for any admissible strategy \mathbf{h}_T on the time interval $\llbracket 0, T \rrbracket$, there is a feasible price path $\bar{x}_T^* \in B_T$ such that

$$\sum_{s=1}^T h_s \Delta x_s^* \leq 0.$$

For any price history, particularly $\bar{x}_T^* \in B_T$, and for any $h_{T+1} \in D_{T+1}(\bar{x}_T^*)$, there exists a price increment $y_{T+1} = y_{T+1}(\bar{x}_T^*) \in K_{t+1}(\bar{x}_T^*)$ such that $h_{T+1} y_{T+1} \leq 0$. Thus, it suffices to let $x_{T+1}^* = \bar{x}_T^* + y_{T+1}(\bar{x}_T^*)$. \square

In the paper [49] devoted to the discrete-time model without trading constraints, the declared goal was to determine the superhedging price without the “no arbitrage assumption” for the financial market (See the discussion in Chapter 1.) Let us quote the authors.

If 0 does not belong to the convex hull of the conditional support of the price increment, then the superhedging cost is equal to $-\infty$. To exclude this unrealistic possibility we postulate the condition of Absence of Instantaneous Profit (AIP). So AIP condition is indeed the minimal requirement in order to get a financial market where pricing is possible. The AIP is very weak: if the initial information is trivial, a one-period instantaneous profit is a strategy starting from 0 and leading to a terminal wealth larger than some strictly positive constant.

Note that the AIP condition (understood “almost everywhere” in [49]) is equivalent to condition NDSA in our framework.¹⁷ If NDSA fails, the superhedging price turns into $-\infty$. This fact has the following economic interpretation: no restrictions should be imposed on the reserves necessary to cover a contingent liability (including the amount of indebtedness when the reserves are negative) because sure arbitrage allows making unbounded profit.

For the sake of convenience, we introduce the notation

$$K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot)), \quad (2.2.3)$$

where $\text{conv}(A)$ is the convex hull of a set A .

Remark 2.2.2. For the sake of convenience, considering the original price dynamics model defined by compact sets $K_t(\cdot)$, we associate with it a coarser price dynamics

¹⁷Recall that the sets $K_t(\cdot)$ are assumed compact; see Remark 2.2.5 below.

model defined by compact sets $K_t^*(\cdot) \supseteq K_t(\cdot)$ (with rougher a priori information about price increments). The latter model will be called the convexified model. Note that an arbitrage opportunity or sure arbitrage have the same essence for both models; moreover, arbitrage is executed using the same “arbitrage” strategy¹⁸ $h^* \in D_t(\cdot)$.

Indeed, if there exists an arbitrage opportunity $h^* \in D_t(\cdot)$ or sure arbitrage for the convexified model (in which $\Delta X_t \in K_t^*(\cdot)$), then the same is the case for the original model (in which $\Delta X_t \in K_t(\cdot)$). For sure arbitrage, this statement directly follows from Definition 2.2.4. If h^* is an arbitrage opportunity, then condition 1° of Definition 2.2.1 obviously holds with the same h^* for the original model. Consider condition 2° of Definition 2.2.1. Since there exists a $y^* \in K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$ such that $h^* y^* > 0$, y^* can be represented as a convex combination of a finite¹⁹ number of points y_1, \dots, y_m from $K_t(\cdot)$. In other words, for some numbers $p_i > 0$, $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, such that $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, we have $y^* = \sum_{i=1}^m p_i y_i$. Recall that $h^* y_i \geq 0$. In view of the considerations above,

$$h^* y^* = \sum_{i=1}^m p_i h^* y_i > 0.$$

Hence, $h^* y_i > 0$ for some i , and condition 2° holds for $y_i \in K_t(\cdot)$.

Conversely, assume that there exists an arbitrage opportunity or sure arbitrage for the original model. In the original model, for the arbitrage strategy h^* the closed half-space $\{y : h^* y \geq 0\}$ or the open half-space $\{y : h^* y > 0\}$ are convex; therefore, these sets contain, together with $K_t(\cdot)$, its convex hull $K_t^*(\cdot)$.

These considerations explain the presence of $\text{conv}(K_t(\cdot))$ in different geometric criteria of “no arbitrage” (see below).

We denote by

$$D^\circ = \{y : h y \leq 0, \forall h \in D\} \quad (2.2.4)$$

the cone polar²⁰ to D . If $y \in D_t^\circ(\cdot)$, then this is “the absolutely unfavorable scenario,” which yields no profit at the time instant t under any admissible strategies. Obviously, the cone $D_t^\circ(\cdot)$ is closed and convex.

Consider the following geometric condition:

$$\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^\circ(\cdot) \neq \emptyset. \quad (2.2.5)$$

Condition (2.2.5) can be interpreted as follows: there are “absolutely unfavorable scenarios” for the the convexified model.

As emphasized in the Introduction, game-theoretic methods are natural for the problem statement under consideration. This can be confirmed by the following result,²¹ which particularly establishes the equivalence of conditions NDSA and (2.2.5)

¹⁸The trading constraints are assumed to be the same for both models.

¹⁹According to Carathéodory’s theorem, these points can be chosen in a quantity not greater than $n + 1$ because $K_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$.

²⁰Strictly speaking, it is correct to consider a cone polar to D if D is a cone. Some liberty of speech will be accepted here.

²¹Note that compactness for the set $D_t(\cdot)$ is not required, as the sets $K_t(\cdot)$ are compact.

and is formulated in terms of the value $\pi_t(\cdot)$. The latter represents the value of the “game” defined by the given²² sets $K_t^*(\cdot)$ and $D_t(\cdot)$; its economic meaning is the maximum profit from sure arbitrage, if any, and zero profit in the case of no sure arbitrage.

Proposition 2.2.3.

1°

$$\pi_t(\cdot) = \sup_{h \in D_t(\cdot)} \min_{y \in K_t^*(\cdot)} hy = \min_{y \in K_t^*(\cdot)} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy. \quad (2.2.6)$$

2° *The value $\pi_t(\cdot)$ is always nonnegative (possibly, equal to $+\infty$); moreover, it is equal to 0 if NDSA holds, and takes positive values if there exists sure arbitrage.*

3° *NDSA is equivalent to condition (2.2.5).*

Proof. The equality in item 1° directly follows from the classical Kneser theorem [130]. The value $\pi_t(\cdot)$ is nonnegative since $0 \in D_t(\cdot)$ and consequently, $\sup_{h \in D_t(\cdot)} hy \geq 0$ for all y . Assume that condition (2.2.5) does not hold:

$$\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^\circ(\cdot) = \emptyset.$$

Then for any $y \in \text{conv}(K_t(\cdot))$, we have $\sup_{h \in D_t(\cdot)} hy > 0$ because $y \notin D_t^\circ(\cdot)$.

The lower semicontinuous convex function $y \mapsto \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy$ achieves minimum²³ at some point of the compact set $K_t^*(\cdot)$, so that

$$\min_{y \in K_t^*(\cdot)} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy > 0.$$

Due to item 1°,

$$\pi_t(\cdot) = \sup_{h \in D_t(\cdot)} \min_{y \in K_t^*(\cdot)} hy = \min_{y \in K_t^*(\cdot)} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy > 0.$$

Hence, there exists an $h^* \in D_t(\cdot)$ such that

$$\min_{y \in K_t^*(\cdot)} h^*y > 0,$$

which means that h^* executes sure arbitrage. Well, item 3° is established.

Now let condition (2.2.5) be satisfied. In this case, there exists a point $y^* \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^\circ(\cdot)$. Since $y^* \in D_t^\circ(\cdot)$, it follows that $\sup_{h \in D_t(\cdot)} hy^* \leq 0$. Due to

²²The notation (2.2.3) is used here.

²³The function $y \mapsto \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy = \sigma_{D_t(\cdot)}(y)$ can be $+\infty$ in the case of the unbounded set $D_t(\cdot)$.

Here $\sigma_D(\cdot)$ is the support function of the set D , i.e., $\sigma_D(y) = \sup\{hy : h \in D\}$.

$0 \in D_t(\cdot)$, the inequality $\sup_{h \in D_t(\cdot)} hy \geq 0$ holds for all y , so that $\sup_{h \in D_t(\cdot)} hy^* = 0$. As a result, the function $y \mapsto \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy$ achieves the minimum value 0 at the point $y^* \in K_t(\cdot)$, i.e., $\pi_t(\cdot) = 0$. In view of

$$\pi_t(\cdot) = \sup_{h \in D_t(\cdot)} \min_{y \in K_t^*(\cdot)} hy = 0,$$

for any $h \in D_t(\cdot)$, the following inequality holds:

$$\min_{y \in K_t^*(\cdot)} hy \leq 0.$$

Thus, there does not exist a sure arbitrage strategy $h^* \in D_t(\cdot)$, i.e., a one such that $h^*y > 0$ for all $y \in K_t^*(\cdot)$. \square

Remark 2.2.3. The sufficiency of condition (2.2.5) for satisfying NDSA can be proved in a straightforward way, without using the value $\pi_t(\cdot)$. Due to Remark 2.2.2, this follows from the existence of a point $y^* = K_t^*(\cdot)$ such that $hy^* \leq 0$ for all $h \in D_t(\cdot)$.

As for NDAO, geometric criteria like (2.2.5) turn out to be much more delicate, even in the case of finite sets $K_t(\cdot)$; see [178; 179]. However, in the deterministic statement, for the analysis of game equilibrium, NDSA is of paramount importance,²⁴ not NDAO. Therefore, for avoiding many technicalities, further considerations will be restricted to NDAO for a particular case of no trading constraints, which is often studied in research works on financial mathematics. In other words, let

$$D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n.$$

The case of no trading constraints NDAO is equivalent to the following proposition²⁵, which directly follows from the definition.

Proposition 2.2.4. *For each $h \in \mathbb{R}^n$,*

- *either²⁶ $hy = 0$ for all $y \in K_t(\cdot)$,*
- *or there exist y_1, y_2 from $K_t(\cdot)$ such that $hy_1 > 0$ and $hy_2 < 0$.*

In the case of no trading constraints, it is easy to obtain a geometric criterion for NDAO, similar to the results of [121]; also, see [189].

Proposition 2.2.5. *In the case of no trading constraints, NDAO is equivalent to one of the following alternatives:*

²⁴From an economic point of view, this is due to the fact that NDSA expresses a criterion for the existence of a linear pricing rule; for example, see [167, Proposition 19], where the space of states of the world was assumed to be finite.

²⁵Actually, this condition means that a risk-free asset is neither dominant nor dominated in Merton's sense.

²⁶This is possible in the degenerate case, where $K_t(\cdot)$ belongs to an affine manifold of a dimension smaller than n .

- 1) either $K_t(\cdot) = \{0\}$,
- 2) or $K_t(\cdot)$ contains at least two points, and the point 0 belongs to the relative interior (with respect to the affine hull) of the convex hull $\text{conv}(K_t(\cdot))$ of the compact set $K_t(\cdot)$ for any $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

The sufficiency of alternatives 1) and 2) is obvious due to Proposition 2.2.4. For establishing the necessity of this alternative, assume that the point 0 does not belong to the relative interior of the convex hull of the compact set $K_t(\cdot)$. Then either the point 0 does not belong to the convex hull (in this case, there is sure arbitrage due to the strict separability of this point and $K_t(\cdot)$ by a hyperplane), or the point 0 lies on the boundary of the convex hull of the compact set $K_t(\cdot)$ (in this case, condition 1° of Definition 2.2.1 holds since there is a support hyperplane at zero). If $K_t(\cdot)$ contains one point, the latter is obviously 0. If $K_t(\cdot)$ contains at least two points, then $K_t(\cdot)$ contains a nonzero point; the support plane for the point 0 can always be chosen so that this point will lie in the positive half-plane, i.e., condition 2° of Definition 2.2.1 will hold.

Remark 2.2.4. From a formal mathematical point of view, it seems possible not to single out alternative 1) since the relative interior of the set $\{0\}$ coincides with this set. However, the statement used here wins in clarity. Alternatives 1) and 2) can be written as a single condition

$$0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (2.2.7)$$

where $\text{ri}(A)$ denotes the relative interior of A .

As we believe, it should be called the Jacod–Shiryaev geometric criterion of no arbitrage opportunities NDAO (in the absence of trading constraints); see [121]. For comparison, due to item 3° of Proposition 2.2.3, the geometric criterion of NDSA without trading constraints reduces to the relations

$$0 \in \text{conv}(K_t(\cdot)), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.2.8)$$

Remark 2.2.5. Note that the geometric criterion of the AIP condition (see [49, item 1 of Proposition 2.11]) is precisely condition (2.2.8), understood “almost surely” in [49], where $K_t(\cdot)$ is the (topological) support of the conditional distribution of (discounted) prices increments. However, compactness was not assumed in [49], in contrast to our case. (In our model, $K_t(\cdot)$ is supposed compact, which guarantees the compactness and hence closedness of $\text{conv}(K_t(\cdot))$.) As is well known, the convex hull of a closed set is not necessarily closed. Therefore, [49, Proposition 2.11] contains a mistake: item 2 does not imply item 1. It only follows from item 2 that $0 \in \text{cl}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, where $\text{cl}(A)$ denotes the closure of a set A . (For example, this is a consequence of [175, Corollary 13.1.1].²⁷) A simple counterexample is the

²⁷In fact, a particular case of this assertion is needed: the support function of a set is nonnegative if and only if the point 0 belongs to the closure of this set.

following one-step model with two risky assets²⁸: $K_0 \subseteq (2, +\infty) \times (1, +\infty) \subseteq \mathbb{R}^2$ and $K_1(\cdot) = \{(y_1, y_2) : y_2 = y_1 + 1, y_1 \in [-2, +\infty)\} \cup \{(-1, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. (In fact, it does not depend on the initial price.)

Consider the assertion²⁹ “If 0 does not belong to the convex hull of the support of the conditional distribution of price increments, then the superhedging cost is $-\infty$.” Within the guaranteed deterministic approach, the assertion fails for this example with a nonnegative payoff function w because the superhedging cost is given by

$$\inf_{h \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in K_1(x_0)} [w(x_0, y) - hy],$$

and

$$\sup_{y \in K_1(x_0)} [w(x_0, y) - hy] \geq \sup_{y \in K_1(x_0)} -hy = \sigma_{-K_1(x_0)}(h) = \sigma_{\text{cl}(\text{conv}(-K_1(x_0)))}(h) \geq 0$$

due to $0 \in \text{cl}(\text{conv}(-K_1(x_0)))$.

Definition 2.2.7. Consider a model with a given description of uncertain price dynamics $K_t(\cdot)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ and trading constraints $D_t(\cdot)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, and another model with the same trading constraints and a rougher description of uncertain price dynamics $K'_t(\cdot)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ such that $K_t(\cdot) \subseteq K'_t(\cdot)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

We say that “no arbitrage” (understood in some sense) satisfies the principle of uncertainty, or equivalently, has the monotonicity property, if the “no arbitrage” condition for the former model implies the “no arbitrage” condition for the latter model

From the economic point of view, the monotonicity property of “no arbitrage” is natural in our interpretation³⁰ of the price dynamics model within the deterministic approach, i.e., as a description of an uncertain price evolution. Therefore, if there is no possibility of making arbitrage profits within the original model, one should hardly expect such a possibility within a coarser model with less information about feasible price dynamics.

The monotonicity property of “no arbitrage” holds for NDSA. (This fact follows directly from the definition.) However, the monotonicity property of “no arbitrage” fails for NDAO without additional assumptions.

Theorem 2.2.1. In the case of no trading constraints, the monotonicity property of “no arbitrage” for NDAO holds if and only if $K_t(\cdot)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, are of full dimension, i.e.,

$$\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \neq \emptyset, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.2.9)$$

²⁸The parameters of this model are chosen to ensure the positivity of prices.

²⁹We have mentioned this result of [49]; see above.

³⁰In the interpretation of the traditional probabilistic model of market dynamics, the set of feasible price paths is fixed (within the set of zero measure). This is defined by the class of equivalent probability measures.

Proof. Let condition NDAO hold, which is equivalent to the geometric condition (2.2.7), but for some time instant $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ and some price history $\bar{x}_{t-1}^* \in B_{t-1}$, the set $\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}^*))$ has an empty interior. In the case under consideration, this means that $K_t(\bar{x}_{t-1}^*)$ is contained in a linear subspace $L \subseteq \mathbb{R}^n$ of a dimension smaller than n . Now we add to $K_t(\bar{x}_{t-1}^*)$ one point y not lying in L and let $K'_t(\bar{x}_{t-1}^*) = K_t(\bar{x}_{t-1}^*) \cup \{y\}$ and $K'_s(\bar{x}_{s-1}) = K_s(\bar{x}_{s-1})$ for the other time instants $s \neq t$ and the other price histories $\bar{x}_{t-1} \neq \bar{x}_{t-1}^*$ by the time instant t . As a result, the model with the market dynamics $K'_s(\bar{x}_{s-1})$ does not satisfy condition NDAO³¹ since $0 \notin \text{ri}(\text{conv}(K'_t(\bar{x}_{t-1}^*)))$; see Remark 2.2.4). Therefore, the principle of uncertainty for NDAO is violated.

If, however, (2.2.9) holds, then the principle of uncertainty for NDAO is valid. \square

Remark 2.2.6. Thus, the monotonic variant of the condition of no arbitrage opportunities has the form

$$0 \in \text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.2.10)$$

As shown in Section 2.4 below, condition (2.2.9) is equivalent to structural stability, and (2.2.10) is a geometric criterion for the robust condition of no arbitrage opportunities, RNDAO.

Example 2.2.2. In the case of no trading constraints, the above criteria can be illustrated by an example of the model with one risky asset ($n = 1$), further called the one-dimensional multiplicative model. The price of the single risky asset X_t^1 will be written without the superscript, i.e., as X_t . The price dynamics of this asset have a multiplicative representation of the form

$$X_t = M_t X_{t-1}, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

where $X_0 > 0$.

It is known a priori that $M_t \in [\alpha, \beta]$, $\beta > \alpha > 0$. As a result, the model is stationary and multiplicatively independent; see Section 1.2 of Chapter 1; here $K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = [x_{t-1}(\alpha - 1), x_{t-1}(\beta - 1)]$.

Condition NDAO is obviously equivalent to $1 \in (\alpha, \beta)$, meaning that after one time step, both an increase and a decrease in the risky asset price are possible in the future. In other words, at the time instant t , the return on the risky asset, $R_t = M_t - 1$, can be either positive or negative. If $\alpha = 1$ or $\beta = 1$, there is an arbitrage opportunity, but condition NDSA holds, i.e., no sure arbitrage. If $\alpha > 1$ or $\beta < 1$, then there is a sure arbitrage: to execute it, just take a long position on the risky asset³² in the case $\alpha > 1$ and a short position in the case $\beta < 1$.

2.3 No Sure Arbitrage with Unbounded Profit

In the case of sure arbitrage ($\pi_t(\cdot) > 0$ in Proposition 2.2.3), two cases will be distinguished as follows.

³¹But it satisfies NDSA.

³²By funding this long position through a short position on the risk-free asset. In the case of no trading constraints, arbitrage is possible without initial capital.

Definition SAUP. We say that *Sure Arbitrage with Unbounded Profit (SAUP)* holds at a time instant t if $\pi_t(\cdot) = +\infty$.

Definition SABP. We say that *Sure Arbitrage with Bounded Profit (SABP)* holds at a time instant t if $0 < \pi_t(\cdot) < +\infty$.

Note that without trading constraints, sure arbitrage leads to unbounded profit, i.e., SAUP holds; in this case, $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$, where $\text{bar}(A)$ indicates the barrier cone of a set A :

$$\text{bar}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \sigma_A(y) < +\infty\}.$$

Definition NDSAUP. We say that *No Deterministic Sure Arbitrage with Unbounded Profit (NDSAUP)* holds if arbitrage SAUP is impossible, i.e., $\pi_t(\cdot) < +\infty$ for any $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

A sufficient condition for NDSAUP is the form of trading constraints when the sets $D_t(\cdot)$ are compact. In this case, the convex function $y \mapsto \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy = \sigma_{D_t(\cdot)}(y)$ takes finite values, and $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \mathbb{R}^n$.

Theorem 2.3.1. *Condition NDSAUP holds if and only if*

$$\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.3.1)$$

Proof. Assume that condition (2.3.1) is not satisfied. Clearly, in this case, the set $D_t(\cdot)$ is unbounded. We denote by $\bar{D}_t(\cdot)$ the closure of the set $D_t(\cdot)$:

$$\bar{D}_t(\cdot) = \text{cl}(D_t(\cdot)).$$

The support functions of a convex set in \mathbb{R}^n and its closures coincide. Hence, $\sigma_{\bar{D}_t(\cdot)} = \sigma_{D_t(\cdot)}$ and $\text{bar}(\bar{D}_t(\cdot)) = \text{bar}(D_t(\cdot))$, and we have

$$\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(\bar{D}_t(\cdot)) = \emptyset.$$

Since $\text{conv}(K_t(\cdot))$ is compact, the convex set $\text{conv}(K_t(\cdot))$ and the cone $\text{bar}(\bar{D}_t(\cdot))$ can be strictly separated by a hyperplane passing through the origin: there exists an $h_t^*(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ such that

$$\min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} h_t^*(\cdot)y = \varepsilon_t(\cdot) > 0$$

and

$$h_t^*(\cdot)y < 0 \text{ for } y \in \text{bar}(\bar{D}_t(\cdot)). \quad (2.3.2)$$

For details, see [175, Corollary 11.4.2 and Theorem 11.7].

Note that for a closed non-empty convex set A , the cone $(\text{bar}(A))^\circ$ polar to $\text{bar}(A)$ coincides with the recession cone³³ O^+A ; see [175, Corollary 14.2.1].

³³See [175, § 8 of Chapter II]. A recession cone for a non-empty convex set A can be defined as the cone $O^+A = \{y : A + y \subseteq A\}$. If A is closed, the cone O^+A will be closed as well.

Therefore, (2.3.2) means that $h_t^*(\cdot) \in O^+ \bar{D}_t(\cdot)$. Since $0 \in D_t(\cdot) \subseteq \bar{D}_t(\cdot)$, by [175, Corollary 8.2] it follows that $\alpha h_t^*(\cdot) \in \bar{D}_t(\cdot)$ for all $\alpha \geq 0$, in particular, $h_t^*(\cdot) \in \bar{D}_t(\cdot)$.

Next,

$$\begin{aligned} \pi_t(\cdot) &= \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy = \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy \geq \sup_{h \in \bar{D}_t(\cdot)} \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} hy \geq \\ &\sup_{\alpha \geq 0} \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} \alpha h_t^*(\cdot) y = \sup_{\alpha \geq 0} \alpha \varepsilon_t(\cdot) = +\infty. \end{aligned}$$

Thus, if condition (2.3.1) is not satisfied, then $\pi_t(\cdot) = +\infty$. As a result, NDSAUP fails.

Assume now that condition (2.3.1) holds. In this case, there exists a $y_t^*(\cdot) \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))$, and consequently,

$$\pi_t(\cdot) = \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy \leq \sup_{h \in D_t(\cdot)} h y_t^*(\cdot) = \sigma_{D_t(\cdot)}(y_t^*) < +\infty$$

because $y_t^* \in \text{bar}(D_t(\cdot))$. \square

Now we discuss the following question: does hedging make sense if NDSAUP holds, but there exists a sure arbitrage with bounded profit SABP? According to Theorem 2.3.1, this is the case when³⁴ condition (2.3.1) holds, and according to Proposition 2.2.3, $0 < \pi_t(\cdot) < \infty$.

For the optimal hedging problem with a single risky asset and a convex compact set $K_t(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$, which (in the one-dimensional case) turns into the closed interval $[\bar{a}_t(\cdot), \bar{b}_t(\cdot)]$, $0 \notin [\bar{a}_t(\cdot), \bar{b}_t(\cdot)]$, the answer to this question is negative. The matter is that the function $h \mapsto \sup_{y \in K_t(\cdot)} [v_t(\cdot, x_{t-1} + y) - hy]$ will be strictly monotonic, in particular,

- 1° increasing if $\bar{b}_t(\cdot) < 0$, and a sure arbitrage is executed by taking a short position on the risky asset, i.e., $h < 0$;
- 2° decreasing if $\bar{a}_t(\cdot) > 0$, and a sure arbitrage is executed by taking a long position on the risky asset, i.e., $h > 0$.

We introduce the notations $\bar{c}_t(\cdot) = \inf D_t(\cdot)$ and $\bar{d}_t(\cdot) = \sup D_t(\cdot)$. Recall that $D_t(\cdot)$ is a convex set, representing an interval, and $0 \in D_t(\cdot)$. Therefore, $-\infty \leq \bar{c}_t(\cdot) \leq 0 \leq \bar{d}_t(\cdot) \leq +\infty$. For NDSAUP to hold and SABP to exist, we impose the following requirements: in case 1°, $-\infty < \bar{c}_t(\cdot) < 0$; in case 2°, $0 < \bar{d}_t(\cdot) < +\infty$. Thus, for minimizing the function under consideration with respect to h , it is necessary: in case 1°, choose the minimum possible value of h , i.e., $h \rightarrow \bar{c}_t(\cdot)$ if $c_t(\cdot) \notin D_t(\cdot)$, and $h = \bar{c}_t(\cdot)$ if $c_t(\cdot) \in D_t(\cdot)$; in case 2°, quite the reverse, choose the maximum possible value of h , i.e., $h \rightarrow \bar{d}_t(\cdot)$ if $\bar{d}_t(\cdot) \notin D_t(\cdot)$, and $h = \bar{d}_t(\cdot)$ if $\bar{d}_t(\cdot) \in D_t(\cdot)$. This corresponds to making the highest arbitrage profit.

³⁴In particular, if the sets $D_t(\cdot)$ are compact.

In the two-dimensional case, however, for compact trading constraints, this question can have a positive answer. An illustrative example will be given Chapter 5, where mixed “market” strategies will be introduced. Thus, No Deterministic Sure Arbitrage with Unbounded Profit NDSAUP, which is even weaker than NDSA, makes economic sense at least for rainbow options (several underlying assets).

Remark 2.3.1. In the case of trading constraints defined by convex cones $D_t(\cdot)$ (particularly no trading constraints), condition NDSAUP implies the condition of no deterministic sure arbitrage NDSA. In other words, for conic trading constraints, NDSAUP is equivalent to NDSA. The barrier cone for $D_t(\cdot)$ coincides with the polar cone for $D_t(\cdot)$, i.e.,

$$\text{bar} (D_t(\cdot)) = D_t^\circ(\cdot).$$

This fact directly follows from the geometric criteria (2.3.1) and (2.2.5) and has a simple economic interpretation: in this case, sure arbitrage can always yield unbounded profit.

2.4 Structural Stability of the Model. The Coarse (Robust) Form of “No Arbitrage”

Structural stability is a fundamental property of a model. It means that the qualitative behavior of the model remains invariable under small (in some sense) perturbations of model dynamics. From an economic point of view, the qualitative behavior of a financial market model is determined by the absence of “arbitrage” in some sense. For correct financial modeling, it is therefore reasonable to involve the principle of coarseness (robustness)³⁵ to ensure the structural stability of the model.

Of course, the idea of stability of the “no arbitrage” property under some model perturbation presents in the literature. We restrict ourselves to mentioning only a few related papers. Let us start with [185], where a “robust no arbitrage condition” was introduced in the case of market friction (proportional transaction costs). This concept has the following economic meaning: there is still room for the broker to offer some discount when quoting bid and ask prices without creating an arbitrage opportunity. Also, there are ad hoc definitions of the robust “no arbitrage” property within a particular model. For example, the model [19] considered the case with nontradable options quoted with bid-ask spreads. In this problem statement, the robust “no arbitrage” property turns out equivalent to the absence of arbitrage under an additional assumption that hedging options with nonzero spread are nonredundant. (In other words, the options cannot be precisely replicated by other options and risky assets.) For a frictionless market, a simple but nice result was presented in [164]: for a nonredundant one-step model, the “no arbitrage” property is preserved under sufficiently small perturbations of the initial probability in the total variation metric if the set of risky assets is nonredundant. Sometimes, such properties are used implicitly,

³⁵The term “robustness” is borrowed from dynamical systems theory. Structurally stable systems were introduced in 1937 by A.A. Andronov and L.S. Pontryagin [6].

as in [113]: the cited author considered a continuous-time financial market model with primary assets, options that are nontradable except at the initial time instant, and $K \geq 0$ continuously traded European options. The general duality results of that paper exploited its Assumption 3.1 concerning the K options ($K \geq 1$), requiring that calibrated martingale measures exist under arbitrarily small perturbations of the initial prices. Thus, *depending on the context, structural stability can be formalized in various ways.*

We propose a formalization of structural stability in the framework of the guaranteed deterministic approach. The structural stability of the model turns out important for the continuity of solutions of the Bellman–Isaacs equations (BI) and the possibility of approximating price dynamics so that the solutions of these equations for the approximate model would be uniformly close to the solutions of (BI). The latter property is crucial for numerical solution.

Usually, trading constraints described by set-valued mappings $D_t(\cdot)$ are known exactly. In contrast, the assignment of compact sets $K_t(\cdot)$, which characterize uncertain price dynamics, is approximate. Therefore, for the model under consideration, the principle of robustness claims that the key properties of the model must be preserved under sufficiently small perturbations of the sets $K_t(\cdot)$. With regard to the “no arbitrage” properties of the market, the principle of robustness can be formalized as follows.

Definition 2.4.1. *Robust*³⁶ “No Arbitrage” means that this property is preserved for a given price history under sufficiently small perturbations of the compact sets $K_t(\cdot)$, which describe uncertain price dynamics, in the Pompeiu–Hausdorff measure.³⁷

Definition RNDSAUP. *Robust No Deterministic Sure Arbitrage with Unbounded Profit will be denoted by RNDSAUP.*

Definition RNDAO. *Robust No Deterministic Arbitrage Opportunity will be denoted by RNDAO.*

By the definition of robustness, RNDSAUP implies NDSAUP, whereas RNDAO implies NDAO.

Lemma 2.4.1. *Let N be a bounded convex set containing a ball $B_\varepsilon(y)$ of radius $\varepsilon > 0$ centered at a point y . If N' is a convex set such that the Pompeiu–Hausdorff distance satisfies the inequality $h_\rho(N', N) \leq \delta < \varepsilon$, then*

$$B_{\varepsilon-\delta}(y) \subseteq N'.$$

³⁶This term is used, e.g., in mathematical statistics.

³⁷For non-empty sets A_1 and A_2 , the Pompeiu–Hausdorff distance h_ρ corresponding to a measure ρ (in the case under study, ρ is the Euclidean measure in the space \mathbb{R}^n , i.e., $\rho(x^1, x^2) = \|x^1 - x^2\|_2$, where $\|x\|_2 = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$), is defined as $h_\rho(A_1, A_2) = \max(\sup\{\rho(x, A_2), x \in A_1\}, \sup\{\rho(x, A_1), x \in A_2\})$, where $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y), y \in A\}$. This distance can be $+\infty$. In the class of all non-empty closed and bounded sets of a metric space, h_ρ is a metric; see [168, Theorem 5.1].

Proof. Since $B_\varepsilon(y) \subseteq N$, the corresponding support functions satisfy the inequality³⁸

$$\sigma_N(h) \geq \sigma_{B_\varepsilon(y)}(h) = \varepsilon \|h\|_2 + \langle h, y \rangle.$$

Clearly, the set N' is bounded and, by [168, Proposition 9.11],

$$|\sigma_{N'}(h) - \sigma_N(h)| \leq \|h\|_2 h_\rho(N', N) \leq \delta \|h\|_2.$$

Therefore,

$$\sigma_{N'}(h) \geq (\varepsilon - \delta) \|h\|_2 + \langle h, y \rangle = \sigma_{B_{\varepsilon-\delta}(y)}(h).$$

According to [168, Proposition 9.5], the desired inclusion $B_{\varepsilon-\delta}(y) \subseteq N'$ holds due to the convexity of N' . The proof is complete. \square

Definition 2.4.2. A set A is said to have full dimension if its convex hull $\text{conv}(A)$ is solid³⁹, i.e., if $\text{int}(\text{conv}(A)) \neq \emptyset$.

Theorem 2.4.1.

1) Condition RNDSAUP is equivalent to

$$0 \in \text{int}\{z : z + \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}. \quad (2.4.1)$$

2) Considered jointly, condition RNDSAUP and the full dimension condition of the compact sets $K_t(\cdot)$, i. e.,

$$\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \neq \emptyset, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (2.4.2)$$

are equivalent to

$$\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.4.3)$$

Proof. We fix a time instant t and a price history \bar{x}_{t-1} .

1) For proving that RNDSAUP implies (2.4.1), we consider the shifts $K_t^{r(z)}(\cdot) = z + K_t(\cdot)$. Obviously,

$$\text{conv}\left(K_t^{(z)}(\cdot)\right) = z + \text{conv}(K_t(\cdot)). \quad (2.4.4)$$

By [168, Lemma 5.3],

$$\begin{aligned} h_\rho(K_t^{(z)}(\cdot), K_t(\cdot)) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\rho(x, K_t^{(z)}(\cdot)) - \rho(x, K_t(\cdot))| = \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\rho(x - z, K_t(\cdot)) - \rho(x, K_t(\cdot))| \leq \rho(x - z, x) = \\ &= \|(x - z) - x\|_2 = \|z\|_2, \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

³⁸Here $\langle h, y \rangle$ indicates the scalar product.

³⁹This is equivalent to the following: for $A \subseteq \mathbb{R}^n$, the affine hull $\text{aff}(A)$ coincides with the entire space \mathbb{R}^n .

where the latter inequality involves [168, Lemma 5.1]. By the definition of robustness, with $K_t^{(z)}(\cdot)$ treated as the “perturbed” market dynamics and due to (2.4.5), condition NDSAUP will hold for $\|z\|_2 < \varepsilon$ under a sufficiently small value $\varepsilon > 0$ that depends on \bar{x}_{t-1} . Considering (2.4.4), by Theorem 2.3.1 it follows that

$$\left[z + \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})) \right] \cap \text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1})) \neq \emptyset$$

for any $z \in B_\varepsilon(0)$, so condition (2.4.1) holds.

Conversely, assume that RNDSAUP is not satisfied. Consider a monotonically decreasing numerical sequence $\varepsilon_n \rightarrow 0$. According to the assumption, there exists a sequence of compact sets K_n such that $h_\rho(K_n, K_t(\bar{x}_{t-1})) \leq \varepsilon_n$ and

$$C_n \cap B = \emptyset,$$

where $C_n = \text{conv}(K_n)$ and $B = \text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))$. Denoting $C = \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))$, we have

$$h_\rho(C_n, C) \leq h_\rho(K_n, K_t(\bar{x}_{t-1})) \leq \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad (2.4.6)$$

by [168, formula (5.12) of Proposition 5.2]. According to [140, Theorem 3.1], the convex sets C^n , $n = 1, 2, \dots$, and B can be separated by the hyperplane $H_n = \{y : h_n y = \alpha_n\}$ with some $\alpha_n \in \mathbb{R}$ and $h_n \in S_1(0) = \{z \in \mathbb{R} : \|z\| = 1\}$. Thus, we obtain the inequalities

$$\max_{y \in K_n} \langle h_n, y \rangle \leq \alpha_n \leq \inf_{y \in B} \langle h_n, y \rangle.$$

The hyperplane H'_n that separates C^n and B can be chosen to support C^n . For this purpose, we choose a point $y_n \in C_n$ maximizing

$$\langle h_n, y_n \rangle = \max_{y \in K_n} \langle h_n, y \rangle = \max_{y \in C_n} \langle h_n, y \rangle = \sigma_{C_n}(h_n),$$

and let

$$H'_n = \left\{ y : \langle h_n, y - y_n \rangle \leq 0 \right\}.$$

Note that due to (2.4.6) and the compactness of C , the sequence K_n is uniformly bounded; see [168, Proposition 5.1]. Therefore, it is possible to extract a subsequence $h_{n_k} \rightarrow h^* \in S_1(0)$, due to the compactness of the sphere $S_1(0)$, and a subsequence $y_{n_k} \rightarrow y^* \in C$, due to [168, Proposition 5.4] and the convergence of (2.4.6). Further,

$$\sup_{h \in S_1(0)} \left| \sigma_{C_n}(h) - \sigma_C(h) \right| = h_\rho(C_n, C) \leq \varepsilon_n,$$

by [168, Proposition 9.12]. Together with [168, Proposition 9.11], this result gives

$$\begin{aligned} \left| \sigma_n(h_n) - \sigma_C(h^*) \right| &\leq \left| \sigma_{C_n}(h_n) - \sigma_C(h_n) \right| + \left| \sigma_C(h_n) - \sigma_C(h^*) \right| \leq \\ &\varepsilon_n - \|C\| \|h_n - h^*\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Passing to the limit, we write

$$\sigma_C(h^*) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \sigma_{C_n}(h_n) \leq \limsup_{n_k \rightarrow \infty} \left[\inf_{y \in B} \langle h_n, y \rangle \right] \leq \inf_{y \in B} \langle h^*, y \rangle. \quad (2.4.7)$$

The latter inequality in (2.4.7) holds since the function $h \mapsto \inf_{y \in B} \langle h, y \rangle$ is upper semicontinuous. As the shift we choose $z_\delta = -\delta h^*$, where $\delta > 0$ is an arbitrary small number. Then

$$\sigma_{z_\delta + C}(h^*) = \sigma_C(h^*) + \langle z_\delta, h^* \rangle = \sigma_C(h^*) - \delta,$$

and applying inequality (2.4.7) yields

$$\sigma_{z_\delta + C}(h^*) < \inf_{y \in B} \langle h^*, y \rangle - \delta.$$

In view of

$$z_\delta + C = z_\delta + \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})) = \text{conv}(z_\delta + K_t(\bar{x}_{t-1})),$$

we finally arrive at the following fact: for any $\delta > 0$,

$$\text{conv}(z_\delta + K_t(\bar{x}_{t-1})) \cap \text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1})) = \emptyset,$$

i.e., (2.4.1) is not satisfied.

2) Assume that condition (2.4.3) holds. Then there exists a

$$y \in \text{int}(\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))) \cap \text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1})),$$

and since $y \in \text{int}(\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})))$, for some $\varepsilon > 0$ (which depends on \bar{x}_{t-1}) the ball $B_\varepsilon(y)$ is contained in $\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))$. Let $K'_t(\cdot)$ be the perturbed market dynamics and $h_\rho(K_t(\bar{x}_{t-1}), K'_t(\bar{x}_{t-1})) = \delta < \varepsilon$. Then, due to [168, Propositions 9.11 and 9.12],

$$h_\rho(\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})), \text{conv}(K'_t(\bar{x}_{t-1}))) \leq \delta.$$

By Lemma 2.4.1, it follows that $B_{\varepsilon-\delta}(y) \subseteq \text{conv}(K'_t(\bar{x}_{t-1}))$, so that we have $y \in \text{conv}(K'_t(\bar{x}_{t-1})) \cap \text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))$; by Theorem 2.3.1, condition NDSAUP holds for the perturbed market dynamics. Thus, RNDSAUP holds. Obviously, the compact sets $K_t(\cdot)$ have full dimension.

Conversely, let condition RNDSAUP hold, and let the compact sets $K_t(\cdot)$ have full dimension. If the relative interior $\text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot)))$ of the convex cone $\text{bar}(D_t(\cdot))$ had no intersection with $\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) = \text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, by [175, Theorem 11.3] the convex sets $\text{conv}(K_t(\cdot))$ and $\text{bar}(D_t(\cdot))$ could be separated.⁴⁰ Finally, we take the normal vector z of the separating hypersurface

⁴⁰Due to the full dimension of $K_t(\cdot)$, the set $\text{conv}(K_t(\cdot))$ does not belong to the separating hyperplane.

directed towards⁴¹ $\text{conv}(K_t(\cdot))$, choosing it to be of an arbitrarily small length $\|z\|$. As a result,

$$z + \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) = \emptyset,$$

which obviously contradicts condition RNDSAUP due to item 1) of this theorem, since (2.4.1) is not satisfied. Thus, an even stronger property than (2.4.3) holds:

$$\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot))) \neq \emptyset.$$

□

Proposition 2.4.1. *In the case of no trading constraints, condition RNDAO is equivalent to NDAO together with (2.4.2). In turn, the two conditions are equivalent to a single condition of the form*

$$0 \in \text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.4.8)$$

Proof. In the case of no trading constraints ($D_t(\cdot) = \mathbb{R}^n$), we have $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$. In view of Remark 2.3.1, conditions RNDAO and RNDSAUP are equivalent.

In turn, condition RNDSAUP is equivalent to condition (2.4.1); see item 1) of Theorem 2.4.1. In the case of no trading constraints, the latter condition implies (2.4.2). Indeed, due to (2.4.1),

$$B_\delta(0) \subseteq \{z : 0 \in z + \text{conv}(K_t(\cdot))\}$$

for some $\delta > 0$ (which depends on the price history). Hence, $B_\delta(0) \subseteq \text{conv}(K_t(\cdot))$, meaning that (2.4.2) holds. Thus, RNDAO obviously implies NDAO and (2.4.2) as well.

Conversely, in the case of no trading constraints, NDAO is equivalent to (2.2.7) by Proposition 2.2.5 and Remark 2.2.4, i.e.,

$$0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) = \text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))),$$

where equality holds due to (2.4.2). By item 2) of Theorem 2.4.1, condition (2.4.3) implies RNDSAUP. As mentioned above, in the case of no trading constraints, the latter condition is equivalent to RNDAO. □

Remark 2.4.1. The geometric criterion for RNDAO given by (2.4.8) can be called the strengthened Jacob–Shiryayev condition.

Note that in the one-dimensional case (the model with one risky asset without trading constraints), the strengthened Jacob–Shiryayev condition (2.4.8) coincides with its common counterpart (2.2.7). As a result, in this case, RNDAO coincides with NDAO. Therefore, the negative effect from violating structural stability in the superhedging problem may arise only for rainbow options (for several risky assets). An example is provided in Section 8.5.

⁴¹That is, $\langle z, y \rangle \geq 0$ for $y \in \text{conv}(K_t(\cdot))$.

The geometric picture is better illustrated by an alternative (geometric) criterion for condition RNSAUP.

We introduce the following notations:

$\text{aff}(A)$ is the affine hull of a set A ;

$L_1 \oplus L_2$ is the direct sum of linear spaces L_1 and L_2 in \mathbb{R}^n ;

$\dim(L)$ is the dimension of a linear space L in \mathbb{R}^n ;

$\text{li}(A)$ is a linear space parallel to⁴² $\text{aff}(E)$.

Definition 2.4.3. We say that convex sets E_1 and E_2 intersect transversally⁴³ if

- a) $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$,
- b) $\text{li}(E_1) + \text{li}(E_2) = \mathbb{R}^n$.

Remark 2.4.2. 1) Condition b) is equivalent to the following condition on the dimension of the sum $\text{li}(E_1) + \text{li}(E_2)$:

$$\dim(\text{li}(E_1) + \text{li}(E_2)) = n.$$

Since the dimensions of linear subspaces L_1 and L_2 of the space \mathbb{R}^n satisfy the equality

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2),$$

then the transversal intersection condition b) can be written in terms of dimensions:

$$\dim(\text{li}(E_1)) + \dim(\text{li}(E_2)) - \dim(\text{li}(E_1) \cap \text{li}(E_2)) = n. \quad (2.4.9)$$

In particular, it follows from (2.4.9) that the intersection is transversal under the inequality

$$\dim(\text{li}(E_1)) + \dim(\text{li}(E_2)) \geq n.$$

- 2) If $\dim(\text{li}(E_i)) = n$ for $i = 1$ or $i = 2$, condition (2.4.9) holds.
- 3) If $\dim(\text{li}(E_2)) = 0$, condition (2.4.9) becomes equivalent to $\dim(\text{li}(E_1)) = n$.

Theorem 2.4.2. Condition RNSAUP holds if and only if the sets $\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$ and $\text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot)))$ intersect transversally, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Proof. We fix a time instant t and a price history \bar{x}_{t-1} . Also, we denote

$$E_1 = \text{ri}(\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))), \quad E_2 = \text{ri}(\text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))),$$

⁴²If $y \in \text{aff}(E)$, then $-y + \text{aff}(E) = \text{li}(E)$.

⁴³Affine hulls of these sets, considered as smooth submanifolds of \mathbb{R}^n , intersect transversally; for example, see [77, Chapter 2, § 10, Section 10.3].

$$A_i = \text{aff}(E_i), \quad L_i = \text{li}(E_i), \quad i = 1, 2.$$

Let condition RNDSAUP hold. Assume that $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. According to [175, Theorem 11.3], non-empty convex subsets of \mathbb{R}^n can be properly separated⁴⁴ by some hyperplane if and only if their relative interiors do not intersect. In our case, there is a hyperplane H properly separating $\text{conv}(K_t(\cdot))$ and $\text{bar}(D_t(\cdot))$. Since $\text{bar}(D_t(\cdot))$ is a cone, by [175, Theorem 11.7] we may assume that H passes through the point 0. We choose a normal vector $z \neq 0$ for the hyperplane H so that $\langle z, y \rangle \leq 0$ for all $y \in \text{bar}(D_t(\cdot))$. Then, for an arbitrarily small norm of the vector z , the shift $z + \text{conv}(K_t(\cdot)) = \text{conv}(z + K_t(\cdot))$ does not intersect $\text{bar}(D_t(\cdot))$, which contradicts the geometric criterion (2.4.1) for RNDSAUP. Hence, $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$.

Now we assume that

$$\dim(L_1 + L_2) < n.$$

Let L_0 be a subspace complementary⁴⁵ to $L_1 + L_2$, i.e., $\mathbb{R}^n = L_0 \oplus (L_1 + L_2)$. According to condition 2.4.1, which is equivalent to RNDSAUP, there exists a number $\varepsilon > 0$ such that for $\|z\| < \varepsilon$, the set $[z + \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))] \cap \bar{D}_t(\bar{x}_{t-1})$ is non-empty. We choose $z \in L_0$ such that $\|z\| < \varepsilon$ and $z \neq 0$ and consider an arbitrary point

$$x^* \in [z + \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))] \cap \bar{D}_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq (z + A_1) \cap A_2.$$

Since $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, there is a point $x \in E_1 \cap E_2 \subseteq A_1 \cap A_2$. Hence, $x^* - x \in L_2$ and $z \in (x^* - x) + L_1 \subseteq L_1 + L_2$. However, the inclusions $z \in L_0$ and $z \in L_1 + L_2$ hold simultaneously only if $z = 0$, which contradicts the choice of z , so $\dim(L_1 + L_2) = n$. Thus, the sets E_1 and E_2 intersect transversally.

Conversely, let the sets E_1 and E_2 intersect transversally. We choose $x \in E_1 \cap E_2$. By the definition of a relative interior, there exist numbers $\delta_1 > 0$ and $\delta_2 > 0$ such that for $z_i \in A_i$, $\|z_i\| < \delta_i$, $z_i + x \in E_i$, $i = 1, 2$. We denote by L'_2 a subspace complementary to the subspace $L_1 \cap L_2$ in the space L_2 , i.e., $L_2 = L'_2 \oplus (L_1 \cap L_2)$. Then $L_1 \oplus L'_2 = \mathbb{R}^n$ by the transversal intersection condition b). We denote by P_1 and P_2 the projectors on the spaces L_1 and L'_2 , respectively. Then $z \in \mathbb{R}^n$ is uniquely represented as $z = P_1 z + P_2 z$. Due to the finite dimension of the space, the linear operators P_1 and P_2 are continuous, and there is a number $\varepsilon > 0$ such that $\|P_i z\| < \delta_i$, $i = 1, 2$, for $\|z\| < \varepsilon$. The choice of $\varepsilon > 0$, $\delta_1 > 0$, and $\delta_2 > 0$ implies the inclusions $-P_1 z + x \in E_1$ and $P_2 z + x \in E_2$. Letting $y = P_2 z + x$, we obtain $y \in P_1 z + P_2 z + E_1 = z + E_1$ and $y \in E_2$, so that $(z + E_1) \cap E_2 \neq \emptyset$, and hence condition (2.4.1) holds. \square

Corollary 2.4.1. *If⁴⁶ $\text{int}(\text{bar}(D_t(\cdot))) \neq \emptyset$, condition RNDSAUP is equivalent to*

$$\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{int}(\text{bar}(D_t(\cdot))) \neq \emptyset.$$

⁴⁴In the terminology of [175], a hyperplane H separates sets C_1 and C_2 if they lie in the opposite closed half-spaces generated by H . A hyperplane H properly separates C_1 and C_2 if at least one of the sets C_1 and C_2 is not contained entirely in H .

⁴⁵For example, see [188, Chapter 1, § 5].

⁴⁶For example, when short positions are not allowed.

In this case, $\dim(\text{li}(\text{bar}(D_t(\cdot)))) = n$, and condition b) in the definition of transversal intersection holds. As a result,

$$\text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot))) = \text{int}(\text{bar}(D_t(\cdot))).$$

Corollary 2.4.2. *If $\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \neq \emptyset$, condition RNDSAUP is equivalent to*

$$\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot))) \neq \emptyset. \quad (2.4.10)$$

In this case, $\dim(\text{li}(\text{conv}(K_t(\cdot)))) = n$, and condition b) in the definition of transversal intersection holds. As a result,

$$\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) = \text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))).$$

Corollary 2.4.3. *In the case of no trading constraints ($D_t(\cdot) = \mathbb{R}^n$), we have $\text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot))) = \text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$. In view of item 3) of Remark 2.4.2, RNDSAUP turns out equivalent to (2.4.8).*

Remark 2.4.3. If

$$\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot))) \neq \emptyset,$$

then by [175, Theorem 6.5],

$$\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot))) = \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))).$$

Remark 2.4.4. Any open set sharing points with some convex set also shares them with its relative interior; see [175, Corollary 6.3.2]. Hence, properties (2.4.10) are (2.4.3) are equivalent. Therefore, Corollary 2.4.2 particularly implies item 2) of Theorem 2.4.1.

Chapter 3. The Semicontinuity and Continuity Properties of Solutions of the Bellman–Isaacs Equations

In this chapter, we study the “smoothness” properties of solutions of the Bellman–Isaacs equations under appropriate assumptions on the smoothness of market prices and trading constraints. In particular, we establish sufficient conditions under which: (a) the set of feasible price paths is compact, (b) the solutions of the Bellman–Isaacs equations are bounded above, and (c) the solutions of the Bellman–Isaacs equations are upper semicontinuous. Property (b) has been used in Theorem 1.2.1 of Chapter 1), whereas property (c) is crucial for the existence of a game equilibrium in mixed “market” strategies (see Chapter 5).

The main result of this chapter is Theorem 3.2.2 on the continuity of solutions of the Bellman–Isaacs equations. It rests on the structural stability condition of the model.

The main results were published in [205] (the English version in [214]).

3.1 General Conditions for the Semicontinuity and Continuity of Solutions of the Bellman–Isaacs Equations

The “smoothness” properties of solutions of the Bellman–Isaacs equations (BI) are determined by the corresponding “smoothness” properties, first, of the payoff functions $g_t(\cdot)$ and, second, of the set-valued mappings $K_t(\cdot)$ and $D_t(\cdot)$ that define a priori information about the price increments and trade constraints, respectively. In fact, the guaranteed deterministic approach motivates us to study this “smoothness.”¹

For the reader’s convenience, let us present necessary definitions and notations. We denote by $e_\rho(A, B)$ the Pompeiu deviation of a set A from a set B :

$$e_\rho(A, B) = \sup\{\rho(x, B), x \in A\},$$

¹The “smoothness” requirements of the set-valued mapping $K_t(\cdot)$ (in a certain sense) are dictated by the realistic property of the financial market model. This concept will be introduced in Chapter 6.

where $\rho(x, B) = \inf\{\rho(x, x'), x' \in B\}$. The Pompeiu–Hausdorff distance can be represented in the following form:

$$h_\rho(A, B) = e_\rho(A, B) \vee e_\rho(B, A).$$

From this point onwards, we denote by $\mathcal{N}(Y)$ the class of all non-empty subsets of a topological space Y and by $\mathcal{K}(Y)$ the class of all non-empty compact subsets of Y .

Definition 3.1.1. For a topological space X and a metric space Y with a measure ρ , the upper (lower) semicontinuity of a set-valued mapping $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ at a point $x_0 \in X$ in the Pompeiu–Hausdorff sense (in brief, its upper (lower) h -semicontinuity) is defined as the continuity of the numerical function $x \mapsto e_\rho(F(x), F(x_0))$ ($x \mapsto e_\rho(F(x_0), F(x))$, respectively) at the point x_0 . A set-valued mapping is upper (lower) h -semicontinuous if it is upper (lower) semicontinuous at all points of its domain.

Definition 3.1.2. For Hausdorff topological spaces, the upper (lower) semicontinuity² of a set-valued mapping F is defined as the openness of the set $\{x \in X : F(x) \subseteq G\}$ for any open $G \subseteq Y$ (as the openness of the sets $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ for any open $G \subseteq Y$, respectively).

Remark 3.1.1. In the general case of a set-valued mapping, upper semicontinuity in a metric space Y implies upper h -semicontinuity; see [114, Chapter 1, Proposition 2.61].

Remark 3.1.2. For compact-valued mappings, both lower semicontinuity and upper semicontinuity are equivalent to lower h -semicontinuity and upper h -semicontinuity, respectively; see [114, Chapter 1, Theorem 2.68].

Remark 3.1.3. If $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ is an h -continuous set-valued mapping with closed values, then its graph $\{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ is closed (in the topology of the product of spaces); see [114, Chapter 1, Proposition 2.63].

Remark 3.1.4. For a compact-valued semicontinuous mapping $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$, the image³ $F(K) = \bigcup_{x \in K} F(x)$ of a compact set $K \subseteq X$ is compact; see [114, Chapter 1, Corollary 2.20].

Obviously, upper or lower semicontinuity for the set-valued mappings $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ and $\bar{x}_{t-1} \mapsto x_{t-1} + K_t(\bar{x}_{t-1})$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, are equivalent. The same applies to the functions v_t^* and w_t , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Now we establish sufficient conditions for the “regular behavior” of the set of feasible price paths described by the compact set K_0 of the initial prices and the compact-valued⁴ mappings $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. For this purpose, we introduce an auxiliary assumption as follows:

²Such semicontinuity is also called semicontinuity in the Vietoris sense.

³Here, image is understood in the sense of a set-valued mapping.

⁴See Assumption 1.1.14 in Chapter 1.

Assumption 3.1.1 (USC-PH). For $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, the set-valued mappings

$$(x_0, \dots, x_{t-1}) \mapsto K_t(x_0, \dots, x_{t-1})$$

from $(\mathbb{R}^n)^t$ to $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ are upper h -semicontinuous.

Proposition 3.1.1. Let condition 3.1.1 hold. Then:

1° The sets B_t , $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$, described by the relations (1.2.1) are compact.

2° In addition, if the potential payoff functions g_t , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, appearing in equation (BI) are upper semicontinuous, then the uniform boundedness (1.2.2) holds.

Proof. We easily verify Assertion 1° by induction. For $t = 0$, it holds since $B_0 = K_0$ is a compact set. Assume that this assertion is true for $t \in \llbracket 0, s-1 \rrbracket$, where $s \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. In this case, due to (1.2.1), the set

$$B_s = \{(\bar{x}_{s-1}, x_s) : \bar{x}_{s-1} \in B_{s-1}, x_s = x_{s-1} + K_s(\bar{x}_{s-1})\}$$

is the graph of the compact-valued mapping $F_s : B_{s-1} \mapsto \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, where $F_s(\bar{x}_{s-1}) = x_{s-1} + K_s(\bar{x}_{s-1})$ is upper semicontinuous in the Pompeiu–Hausdorff sense, and the set B_{s-1} is compact.

According to Remark 3.1.3, the set B_s is closed. By Remark 3.1.2, the mapping F is upper semicontinuous, and by Remark 3.1.4, the image $F(B_s)$ is compact. Since the closed set B_s is contained in the compact set $B_{s-1} \times F(B_s)$, the set B_s is compact as well.

Assertion 2° follows directly from Assertion 1° because the semicontinuous functions g_t are bounded above (and reach maximum) on the compact sets B_t , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. \square

We need classical results: three Berge’s theorems [24; 25] and [114]. For the reader’s convenience, we present them below. Assume that X and Y are Hausdorff topological spaces.

Theorem 3.1.1 (Berge). If a numerical function $g : X \times T \mapsto [-\infty, +\infty]$ is upper semicontinuous, and a set-valued mapping $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ is lower semicontinuous, then the function $g_* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$ defined by

$$g_*(x) = \inf_{y \in F(x)} g(x, y) \quad (3.1.1)$$

is upper semicontinuous.

Theorem 3.1.2 (Berge). If a numerical function $g : X \times T \mapsto [-\infty, +\infty]$ is upper semicontinuous, and a compact-valued mapping $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ is upper semicontinuous⁵, then the function $g^* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$ defined by

$$g^*(x) = \sup_{y \in F(x)} g(x, y), \quad (3.1.2)$$

⁵In the book [24], the compactness of F was included in the definition of upper semicontinuity, in addition to the openness of the set $\{x \in X : F(x) \subseteq G\}$ for any open $G \subseteq Y$.

is upper semicontinuous.

Remark 3.1.5. Since

$$-\inf_{y \in F(x)} [-g(x, y)] = \sup_{y \in F(x)} g(x, y), \quad (3.1.3)$$

Berge's theorems can be reformulated as follows⁶:

1° Theorem 3.1.1:

For a lower semicontinuous function $g : X \times Y \mapsto [-\infty, +\infty]$ and a lower semicontinuous set-valued mapping $F(x)$, the function $g^* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$ defined by (3.1.2) is lower semicontinuous.

2° Theorem 3.1.2:

For a lower semicontinuous function $g : X \times Y \mapsto [-\infty, +\infty]$ and an upper semicontinuous compact-valued mapping $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$, the function $g_* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$ defined by (3.1.1) is lower semicontinuous.

A statement similar to Theorem 3.1.1 can be obtained by weakening the requirements to the function g but strengthening those to the set-valued function F .

Proposition 3.1.2. *If for each $y \in Y$ the functions $x \mapsto g_y(x) = g(x, y) \in [-\infty, +\infty]$, $x \in X$, are upper semicontinuous, and for any $y \in Y$ the sets $\{x \in X : y \in F(x)\}$ are open, then the function $g_* : X \mapsto [-\infty, +\infty]$ defined by (3.1.1) is upper semicontinuous.*

Proof. We set

$$\varphi_y(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } y \in F(x), \\ +\infty & \text{if } y \notin F(x). \end{cases}$$

Then

$$g_*(x) = \inf_{y \in Y} [g_y(x) + \varphi_y(x)],$$

where the function $g_y(\cdot) + \varphi_y(\cdot)$ is upper semicontinuous due to the upper semicontinuity of $\varphi_y(\cdot)$. Finally, the function $g_*(\cdot)$ is upper semicontinuous as the infimum of upper semicontinuous functions. \square

Remark 3.1.6. Using identity (3.1.3), we reformulate Proposition 3.1.2 as follows:

If for any $y \in Y$ the functions $x \mapsto g_y(x) = g(x, y) \in [-\infty, +\infty]$ are lower semicontinuous, and the sets $\{x \in X : y \in F(x)\}$ are open, then the function g^ defined by (3.1.2) is lower semicontinuous.*

Remark 3.1.7. In Proposition 3.1.2 and Remark 3.1.6, the maximum and minimum, respectively, are reached for each $x \in X$ and some value $y^*(x) \in F(x)$.

⁶Theorem 3.1.1 in the current statement is [114, Chapter 1, Proposition 3.1], whereas Theorem 3.1.2 is [114, Chapter 1, Proposition 3.3].

Remark 3.1.8. If for any $y \in Y$ the sets $\{x \in X : y \in F(x)\}$ are open, then the set-valued function F is lower semicontinuous: for an open set $G \subseteq Y$, the sets $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\} = \bigcup_{y \in G} \{x : y \in F(x)\}$ are open as the union of open sets.

Remark 3.1.9. Generally speaking, the openness of the sets $\{x \in X : y \in F(x)\}$ does not follow from the lower (upper) semicontinuity of the mapping F . In the case of a metric space Y with a measure ρ , the functions $x \mapsto \rho(y, F(x))$ are upper (lower) semicontinuous for any $y \in Y$; see [114, Chapter 1, Propositions 2.26, 2.61 and 2.64]. If F takes closed values (i.e., the set $F(x)$ is closed for any $x \in X$), we can only assert that the set $\{x \in X : y \in F(x)\} = \{x \in X : \rho(y, F(x)) = 0\}$ is closed (or, accordingly, is of the type⁷ G_δ).

Remark 3.1.10. The upper (lower) semicontinuity of a numerical bivariate function $g(x, y)$ in both variables (joint upper (lower) semicontinuity) implies the upper (lower) semicontinuity of the functions $x \mapsto g_y(x) = g(x, y)$ of one variable: if g is upper semicontinuous, then considering the Cauchy net (x_α, y_α) , where $x_\alpha \equiv x$, $y_\alpha \rightarrow y^*$, we obtain $(x_\alpha, y_\alpha) \rightarrow (x, y^*)$ and hence

$$\limsup_{\alpha} g_x(y_\alpha) = \limsup_{\alpha} g(x_\alpha, y_\alpha) \leq g(x, y^*) = g_x(y^*).$$

The corresponding assertion about lower semicontinuity can be proved by analogy. However, it also follows from the result established above with $g = -f$, where f is lower semicontinuous.

The next theorem⁸ provides sufficient conditions for the continuity of the function g^* (3.1.2).

Theorem 3.1.3 (Berge). *Let a function $g : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ be continuous, and $F : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ be a continuous⁹ set-valued mapping. Then the function $g^* : Y \mapsto \mathbb{R}$ defined by (3.1.2) is continuous, and the set-valued mapping $M : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$, where¹⁰ $M(x) = \{y \in F(x) : g(x, y) = g^*(x)\}$ is upper semicontinuous.*

The results presented above naturally lead to semicontinuity conditions for the solution v_t^* of the basic equations (BI). Using the notations (T) from Section 1.2 of Chapter 1, we introduce the function¹¹

$$\bar{x}_{t-1} \mapsto \rho_t(\bar{x}_{t-1}) = \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy]. \quad (3.1.4)$$

Theorem 3.1.4. *Let the upper h -semicontinuity condition 3.1.1 hold for the set-valued mappings $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.*

For $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, assume also that:

⁷Such a set is representable as a countable intersection of open sets.

⁸It is often called Berge's maximum theorem; see [114, Chapter 1, Theorem 3.4].

⁹Simultaneously upper and lower semicontinuous set-valued mapping.

¹⁰In other words, $M(x)$ is the set of maximizers: those $y \in Y$ for which the maximum in (3.1.2) is reached for a given $x \in X$.

¹¹Note that $\rho_t(\cdot)$ can take the value $-\infty$ and is uniformly bounded above due to inequality (3.2.10).

1° The set-valued mappings $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ are lower semicontinuous.

2° The numerical functions $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ are upper semicontinuous.

Then the functions $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, defined by the relations (BI) are upper semicontinuous.

Proof. Under conditions 1° and 2°, the upper semicontinuity of the functions v_s can be proved by induction. For $s = N$, the theorem assertions obviously hold since $v_N^* = g_N$. Assuming their truth for $s = N, \dots, t$, we will establish them for $s = t-1$, where $N \geq t > 1$. By the inductive assumption, the function $(\bar{x}_{t-1}, y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y)$ is upper semicontinuous. Due to Assumption 3.1.1 and Theorem 3.1.2, the function

$$(\bar{x}_{t-1}, h) \mapsto \varphi(x, h) = \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy], \quad (3.1.5)$$

is upper semicontinuous because the function $((\bar{x}_{t-1}, h), y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy$ is jointly upper semicontinuous. Applying Theorem 3.1.1 to the function defined by (3.1.5), we conclude that the function ρ_t (3.1.4) is upper semicontinuous. Hence, the same property holds for the function

$$\bar{x}_{t-1} \mapsto v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \rho_t(\bar{x}_{t-1}). \quad (3.1.6)$$

□

Lemma 3.1.1. *Let X be a Hausdorff topological space, and $F : X \mapsto 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \{\emptyset\}$ be a set-valued mapping taking convex values. Then:*

1° *The lower semicontinuity of $F(\cdot)$ is equivalent to the lower semicontinuity of the set-valued mapping $x \mapsto \text{ri}(F(x))$.*

2° *In addition, if $\text{int}(F(x)) \neq \emptyset$ for all $x \in X$, then the lower semicontinuity of $F(\cdot)$ is equivalent to the lower semicontinuity of $x \mapsto \text{int}(F(x))$.*

Proof.

1° Since¹²

$$\text{ri}(F(x)) \subseteq F(x) \subseteq \text{cl}(F(x)) \quad (3.1.7)$$

and $F(x)$ is convex, by [175, Theorem 6.3] we obtain

$$\text{cl}(\text{ri}(F(x))) = \text{cl}(F(x)). \quad (3.1.8)$$

According to [114, Proposition 2.38], the set-valued mapping $x \mapsto F(x)$ is lower semicontinuous if and only if so is the mapping $x \mapsto \text{cl}(F(x))$. Hence, (3.1.7) and (3.1.8) imply the desired assertion.

¹²Here $\text{cl}(A)$ denotes the closure of A .

2° In the case $\text{int}(F(x)) \neq \emptyset$, we have

$$\text{ri}(F(x)) = \text{int}(F(x)). \quad (3.1.9)$$

□

Remark 3.1.11. The nondegeneracy of the trading constraints, comprehended here as the solidity of the convex set $D_t(\cdot)$ ($\text{int}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$), is a natural assumption for financial models. Due to the convexity of $D_t(\cdot)$, we may therefore apply Lemma 3.1.1: without loss of generality, the sets $D_t(\cdot)$ can be considered open for preserving the lower semicontinuity of $D_t(\cdot)$ under no other requirements.

Remark 3.1.12. On the other hand, the lower semicontinuity of the set-valued mapping $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ is equivalent to the lower semicontinuity of the set-valued mapping $\bar{F} : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$, where $\bar{F}(x) = \text{cl}(F(x))$; see [114, Proposition 2.38]. In several cases, without loss of generality, lower semicontinuous sets $D_t(\cdot)$ can be supposed closed for convenience under no other requirements.¹³

Remark 3.1.13. Without loss of generality, the sets $D_t(\cdot)$ in Theorem 3.1.4 can be supposed closed because the values $v_t^*(\cdot)$ do not change when closing $D_t(\cdot)$. Indeed, denoting $\bar{D}_t(\cdot) = \text{cl}(D_t(\cdot))$, we have the inequality

$$\inf_{h \in \bar{D}_t(x)} \varphi(x, h) \leq \inf_{h \in D_t(x)} \varphi(x, h), \quad (3.1.10)$$

where the function φ is given by (3.1.5). For any $h \in \bar{D}_t(x)$, there exists a sequence $h^n \in D_t(x)$ such that $h^n \rightarrow h$. Due to the upper semicontinuity of the function φ (see the proof of Theorem 3.1.4),

$$\varphi(x, h) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(x, h^n) \geq \inf_{h \in D_t(x)} \varphi(x, h),$$

which leads to equality in (3.1.10).

On the other hand, applying the relations (3.1.7) and (3.1.8) to $F(\cdot) = D_t(\cdot)$, we establish the following facts. First, the value v_t^* will not change if $D_t(\cdot)$ is replaced by $D_t'(\cdot) = \text{ri}(D_t(\cdot))$. Second, in the nondegenerate case, the sets $D_t(\cdot)$ can be considered open without losing generality due to (3.1.9).

Remark 3.1.14. For several models, trading constraints are time-invariant and do not depend on the price history¹⁴, i.e., $D_t(\cdot) \equiv D$. In this case, the set $\{x \in (\mathbb{R}^n)^{t-1} : h \in D_t(\cdot)\}$ is either empty (if $h \notin D$) or coincides with the entire space $(\mathbb{R}^n)^{t-1}$ (if $h \in D$), so the set is open (and hence Proposition 3.1.2 and Remark 3.1.6 are applicable) and simultaneously closed, and the set-valued mappings $x \mapsto D_t(\cdot)$ are continuous.

¹³Nondegeneracy is then not needed.

¹⁴For example, when short positions are prohibited: $D = [0, \infty)^n$.

Remark 3.1.15. We denote by $\tilde{K}_t = K_t(B_{t-1})$ the image B_{t-1} of the set-valued mapping K_t , where B_t is given by (1.2.1). Under condition 3.1.1, the function defined by (3.1.5) is bounded due to the compactness of \tilde{K}_t (see Proposition 3.1.1) uniformly in $\bar{x}_{t-1} \in \tilde{K}_t$ for any h because $C \geq w_t \geq 0$: for any $y \in K_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \tilde{K}_t$,

$$\begin{aligned} C - hy &\geq w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy \geq -hy, \\ \max_{y \in \tilde{K}_t} hy &\geq -hy \geq \min_{y \in \tilde{K}_t} hy = -\max_{y \in \tilde{K}_t} hy. \end{aligned}$$

Therefore¹⁵,

$$C + \sigma_{-\tilde{K}_t}(h) \geq \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] \geq -\sigma_{\tilde{K}_t}(h), \quad (3.1.11)$$

where $\sigma_A(h)$ stands for the support function of a set A .

Remark 3.1.16. Due to the upper semicontinuity of the function $y \mapsto w_t(\cdot, y) - hy$, the supremum over y is reached for some $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$ under the conditions of Theorem 3.1.4.

Remark 3.1.17. For $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$, the function (3.1.5) is convex in the variable h , takes finite values with the estimate (3.1.11), and particularly has continuity in h ; see [175, Corollary 10.1.1].

Remark 3.1.18. The function $\rho_t(\cdot)$ defined by (3.1.4) can take the value $-\infty$. At the same time, since $0 \in D_t(x)$, the function $\rho_t(\cdot)$ is bounded above: $\rho_t(\cdot) \leq C$.

To ensure the lower semicontinuity of the Bellman–Isaacs functions defined by (BI), we need an additional assumption concerning the trading constraints:

Assumption 3.1.2 (C-T). *The set $D_t(\bar{x}_{t-1})$ is compact for any \bar{x}_{t-1} , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.*

Theorem 3.1.5. *Under Assumption (C-T), let the compact-valued mappings $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ and $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ be upper semicontinuous and lower semicontinuous, respectively, and the numerical functions $\bar{x}_{t-1} \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1})$ be lower semicontinuous for $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Then, for $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$, the functions $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$ defined by (BI) are lower semicontinuous.*

Proof. We prove by induction. For $s = N$, the assertion obviously holds since $v_N^* = g_N$. Assuming its truth for $s = N, \dots, t$, we will establish it for $s = t - 1$, where $N \geq t > 1$. As the function $((\bar{x}_{t-1}, h), y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy$ is jointly lower semicontinuous, we apply item 1° of Remark 3.1.5 to the function φ defined by equation (3.1.5) to establish the lower semicontinuity of the function φ . Next, we apply item 2° of Remark 3.1.5 to the function $\rho_t(\cdot)$ defined by (3.1.4) to establish its lower semicontinuity. Finally, the lower semicontinuity of the function $v_{t-1}^*(\cdot)$ follows from (3.1.6). \square

¹⁵The support function of a compact set takes finite values.

Theorem 3.1.6. *Under Assumption (C-T), let the compact-valued mappings $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ and $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ be continuous¹⁶, and the numerical functions $\bar{x}_{t-1} \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1})$ be continuous. Then:*

- 1° *The functions $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$ given by the relations (BI) are continuous.*
- 2° *The set-valued mappings $(\bar{x}_{t-1}, h) \mapsto M_t(\bar{x}_{t-1}, h)$, where $M_t(\bar{x}_{t-1}, h)$ is the set of maximizers $y \in K_t(\bar{x}_{t-1})$ in (3.1.5), and the set-valued mappings $\bar{x}_{t-1} \mapsto N_t(\bar{x}_{t-1})$, where $N_t(\bar{x}_{t-1})$ is the set of maximizers $h \in D_t(\bar{x}_{t-1})$ in (3.1.4), are **upper semicontinuous**, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.*

Proof. This result follows from Theorems 3.1.4 and 3.1.5 and Berge's theorem 3.1.3. □

Remark 3.1.19. If Y is a metric space¹⁷, then the upper semicontinuity of a set-valued mapping is preserved under closure; see [114, Chapter 1, Proposition 2.40]. Therefore, if $D_t(\cdot)$ is replaced by $\bar{D}_t(\cdot) = \text{cl}(D_t(\cdot))$, Theorem 3.1.6 will remain valid due to Remark 3.1.12 on preserving the value of the function $v_t^*(\cdot)$.

Remark 3.1.20. The results above provide semicontinuity or continuity conditions in a more general case, namely, for the model described at the end of Section 1.2 of Chapter 1.¹⁸ For this purpose, simultaneously with the trading constraints inherent in margin trading, we should impose constraints on borrowing a risk-free asset by specifying an h -convex function¹⁹ $\alpha_t(h, \bar{x}_{t-1}) \leq 0$. With the auxiliary constraints $h \in D_t(\cdot)$, the corresponding Bellman–Isaacs equations have the form

$$v_N^*(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N),$$

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \left[\sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} (w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy) \bigvee \mu h^\oplus \bar{x}_{t-1} \bigvee (h\bar{x}_{t-1} + \alpha_t(h, \bar{x}_{t-1})) \right].$$

For applying Theorem 3.1.4, we require the upper semicontinuity of the function $x \mapsto \alpha_t(h, x)$, $x \in B_{t-1}$; for applying Theorem 3.1.5, the joint lower semicontinuity of α_t ; for applying Theorem 3.1.6, the joint continuity of α_t .

Remark 3.1.21. The results above are general and do not involve “no arbitrage” assumptions. To ensure the lower semicontinuity and continuity of the Bellman–Isaacs functions w_t when (C-T) fails (the case of unbounded sets D_t), we need additional conditions relating the behavior of the set-valued mappings $K_t(\cdot)$ and $D_t(\cdot)$. Below we present the corresponding conditions and proofs, which are more technical than those considered above.

¹⁶The continuity of a set-valued mapping means its upper and lower semicontinuity simultaneously. For compact-valued mappings, this is equivalent to continuity in the Pompeiu–Hausdorff measure.

¹⁷In fact, the normality of the topological space Y suffices.

¹⁸See formulas (1.2.10) and (1.2.11).

¹⁹Here α_t is the maximum allowable debt (e.g., band credit limit) taken with the minus sign.

3.2 Smoothness Conditions for Solutions of Bellman–Isaacs Equations Relating Uncertain Price Dynamics and Trading Constraints via “No Arbitrage”

In Section 2.4 of Chapter 2, we have conceptualized the coarseness (robustness) of “no arbitrage.” According to Theorem 2.4.1, the robust condition of no deterministic sure arbitrage with unbounded profit RNDSAUP is equivalent to the geometric criterion (2.4.1). Recall that it has the form

$$0 \in \text{int} \{z : z + K_t^*(\cdot) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}. \quad (3.2.1)$$

This condition and its strengthening are crucial for proving the results of the current section. Note that the proof will essentially use the boundedness condition 1.2.2 for the payoff functions g_t , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$; see Section 1.2 of Chapter 1.

Proposition 3.2.1. *Under condition 1.2.2, let the set-valued mappings $D_t(\cdot)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, take closed values. Then the set*

$$D_t^a(\cdot) = \left\{ h \in D_t(\cdot) : \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \leq a \right\}$$

is compact²⁰ for any $a \in \mathbb{R}$ if and only if condition RNDSAUP holds.

Proof. We denote

$$T_t(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : (z + K_t^*(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}. \quad (3.2.2)$$

Condition (3.2.1), equivalent to RNDSAUP, can be written as

$$0 \in \text{int}(T_t(\cdot)). \quad (3.2.3)$$

Since $w_t \geq 0$, and $w_t \leq C$ due to (3.1.1), we have

$$\begin{aligned} \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-hy] &= \sup_{y \in K_t(\cdot)} [-hy] \leq \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \leq \\ &C + \sup_{y \in K_t(\cdot)} [-hy] = C + \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-hy]. \end{aligned}$$

Denoting

$$\hat{D}_t^b(\cdot) = \left\{ h \in D_t(\cdot) : \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-hy] \leq b \right\} = \left\{ h \in D_t(\cdot) : \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h) \leq b \right\}, \quad (3.2.4)$$

²⁰The empty set is considered compact.

we obtain $\hat{D}_t^{a-C}(\cdot) \subseteq D_t^a(\cdot) \subseteq \hat{D}_t^a$. Therefore, the set $D_t^a(\cdot)$ is compact for all $a \in \mathbb{R}$ if and only if the sets $\hat{D}_t^a(\cdot)$ are compact for all $a \in \mathbb{R}$.

Consider the function

$$h \mapsto f_{t,\cdot}(h) = \chi_{D_t(\cdot)}(h) + \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy), \quad (3.2.5)$$

where

$$\chi_D(h) = \begin{cases} 0 & \text{for } h \in D; \\ +\infty & \text{for } h \notin D. \end{cases}$$

The function defined by (3.2.5) is a closed²¹ proper²² convex function: all these properties refer to the first term in (3.2.5), whereas the second term in (3.2.5) is an everywhere finite convex function (hence, everywhere continuous; see [175, Corollary 10.1.1]). According to [175, Corollary 14.2.2], the set

$$\{h \in \mathbb{R}^n : f_{t,\cdot}(h) \leq a\} = \hat{D}_t^a(\cdot)$$

is bounded (and hence compact due to the semicontinuity of the function defined by (3.2.5)) for any $a \in \mathbb{R}$ if and only if 0 is an inner point of the set

$$T_t'(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : f_{t,\cdot}^*(z) < \infty\},$$

where $z \mapsto f_{t,\cdot}^*(z)$ denotes the Legendre–Fenchel conjugate function for $h \mapsto f_{t,\cdot}(h)$, i.e.,

$$T_t'(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : \sup_{h \in \mathbb{R}^n} [hz - f_{t,\cdot}(h)] < \infty\}.$$

In this case, using the classical Kneser minimax theorem [130], we obtain

$$\begin{aligned} \sup_{h \in \mathbb{R}^n} \{hz - [\chi_{D_t(\cdot)}(h) + \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy)]\} &= \sup_{h \in D_t(\cdot)} [hz + \inf_{y \in K_t^*(\cdot)} (hy)] = \\ &= \sup_{h \in D_t(\cdot)} \inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} (hy) = \inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sup_{h \in D_t(\cdot)} (hy) = \inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sigma_D(y). \end{aligned}$$

If $(z + K_t^*(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) = \emptyset$, then $\sigma_D(y) = \infty$ for all $y \in z + K_t^*(\cdot)$ and $\inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sigma_D(y) = +\infty$.

If, however, $(z + K_t^*(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$, then $\inf_{y \in z + K_t^*(\cdot)} \sigma_D(y) < \infty$. Thus,

$$T_t'(\cdot) = \{z \in \mathbb{R}^n : z + K_t^*(\cdot) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\},$$

meaning that $T_t'(\cdot) = T_t(\cdot)$, and the conclusion follows. \square

Remark 3.2.1. When proving Proposition 3.2.1, we have established that condition (3.2.1) and the closedness of the sets $D_t(\cdot)$ are sufficient for the compactness of the sets $\hat{D}_t^a(\cdot)$.

²¹Lower semicontinuous in the terminology of [175].

²²Such a function takes finite values on a non-empty convex set and is $+\infty$ outside it.

Remark 3.2.2. Clearly, the set $T_t(\cdot)$ defined by (3.2.2) is convex.

Remark 3.2.3. In the case of no trading constraints ($D_t(\cdot) = \mathbb{R}^n$), the barrier cone $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$, and condition (3.2.3) is equivalent to the robust condition of no arbitrage opportunities RNDAO. According to Proposition 2.4.1 of Chapter 2, the latter condition is equivalent to the condition of no arbitrage opportunities NDAO together with the full dimension condition (2.4.2) for the compact sets $K_t(\cdot)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, which is in turn equivalent to condition 2.4.8 ($0 \in \text{int}(K_t^*(\cdot))$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.)

In the sequel, the sets $D_t(\cdot)$ are supposed closed due to Remarks 3.1.13 and 3.1.19. This assumption does not affect the validity of Theorems 3.1.4 and 3.1.6.

Lemma 3.2.1. *Under condition RNSAUP, let $D_t(\cdot)$ be closed sets. Then for $a \geq C$, the function $\rho_t(\cdot)$ defined by (3.1.4) can be represented as*

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in \hat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]. \quad (3.2.6)$$

Thus, $D_t(\cdot)$ can be replaced by a compact convex set $\hat{D}_t^a(\cdot)$ with $0 \in \hat{D}_t^a(\cdot)$. In particular, the lower semicontinuous (and convex) function $h \mapsto \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]$ achieves the minimum value $\rho_t(\cdot)$ at some point $h^*(\cdot) \in \hat{D}_t^C$.

Proof. If $h_0 \notin \hat{D}_t^a(\cdot)$, where $a \geq C$, we have

$$\begin{aligned} \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - h_0 y] &\geq \sup_{y \in K_t^*(\cdot)} [-h_0 y] > a \geq C \geq \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \Big|_{h=0} \geq \\ &\inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \end{aligned}$$

because $0 \in D_t(\cdot)$. This inequality implies (3.2.6). \square

Corollary 3.2.1. *The structural stability condition of the market model (the robust condition of no deterministic sure arbitrage with unbounded profit, RNSAUP) and the closedness of the sets $D_t(\cdot)$ guarantee the existence of an optimal superhedging strategy.*

Remark 3.2.4. Under the conditions of Corollary 3.2.1, the optimal superhedging strategy $h_t^*(\bar{x}_t)$ is generally not unique, and the set of such strategies for a given time instant t is a closed convex subset $D_t(\bar{x}_t)$.

We say that a set-valued mapping $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ is locally precompact if there exists a neighborhood V_x of any point $x_0 \in X$ such that its image $F(V_x) = \bigcup_{x \in V_x} F(x)$ is precompact.²³ Moreover, if X is compact, then obviously, the image of $F(x)$ is precompact.²⁴

²³In the terminology of [168], this mapping is compactly bounded at all points from X ; in [114], the mapping was also called ‘‘locally compact.’’ In our opinion, the second term is inappropriate since it refers to topological spaces.

²⁴It suffices to select a finite subcover from the cover V_x , $x \in X$, and recall that a finite union of compact sets is compact.

Lemma 3.2.2. *For each point x_0 from B_{t-1} , let there exist a neighborhood $V(x_0)$ such that $\check{K}_t(x_0) = \bigcap_{x \in V(x_0)} K_t^*(x) \neq \emptyset$, and moreover²⁵,*

$$0 \in \text{int} \left(\left\{ z : z + \check{K}_t(x_0) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset \right\} \right). \quad (3.2.7)$$

Then the set-valued mapping $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$, $x \in B_{t-1}$, is locally precompact.

Proof. Due to (3.2.4), for $x \in V(x_0)$ we have

$$\hat{D}_t^b(x) \subseteq \check{D}_t^b(x_0) = \{h \in D_t(x_0) : \sigma_{\check{K}_t(x_0)}(-h) \leq b\}.$$

Repeating the proof of Proposition 3.2.1 with $K_t^*(x)$ replaced by $\check{K}_t(x)$, we arrive at the following conclusion: the sets $\check{D}_t^b(x_0)$, $x_0 \in B_{t-1}$, are compact for all $b \in \mathbb{R}$ if and only if (3.2.7) holds. Hence, the set-valued mapping $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$, $x \in B_{t-1}$ is locally precompact under condition (3.2.7). \square

Lemma 3.2.3. *Let the set-valued mappings $x \mapsto D_t(x)$ and $x \mapsto K_t(x)$ be closed²⁶ and lower semicontinuous, respectively, and the sets B_t be precompact, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Then the set-valued mappings $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ are closed.*

Proof. Since $B_t = K_t(B_{t-1}) = \bigcup_{x \in B_{t-1}} K_t(x)$ is precompact, the set-valued mapping $x \mapsto K_t(x)$ is uniformly bounded on B_{t-1} . Therefore, the convex hulls $K_t^*(x) = \text{conv}(K_t(x))$ are uniformly bounded on B_{t-1} :

$$\sup_{x \in B_{t-1}} \sup_{y \in K_t^*(x)} \|y\| = A < \infty. \quad (3.2.8)$$

The lower semicontinuity of $K_t(\cdot)$ implies the lower semicontinuity of $K_t^*(\cdot)$ by [114, Chapter 1, Proposition 2.24 (a)]. Consider sequences x^n and h^n , $n = 1, 2, \dots$, such that $x^n \in B_{t-1}$, $x^n \rightarrow x^0$ and $h^n \in \hat{D}_t^b(x^n)$, $h^n \rightarrow h^0$. According to [168, Proposition 9.10], in view of (3.2.8), we obtain²⁷

$$b x s \geq \sigma_{K_t^*(x^n)}(-h^n) \geq \sigma_{K_t^*(x^0)}(-h^0) - A \|h^n - h^0\|.$$

Consequently,

$$b \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_{K_t^*(x^n)}(-h^n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_{K_t^*(x^n)}(-h^0) \geq \sigma_{K_t^*(x^0)}(-h^0)$$

because the function $x \mapsto \sigma_{K_t^*(x)}(h)$ is lower semicontinuous for any h ; for details, see [114, Chapter 1, Proposition 2.35]. Moreover, since the set-valued mapping $x \mapsto D_t(x)$ is closed, $h^0 \in D_t(x^0)$. Thus,

$$h^0 \in \{h \in D_t(x^0) : \sigma_{K_t^*(x^0)}(-h) \leq b\} = \hat{D}_t^b(x^0).$$

\square

²⁵Of course, (3.2.7) implies $\check{K}_t(x_0) \neq \emptyset$. We can interpret $\check{K}_t(\cdot)$ as new market dynamics with a reduced uncertainty compared to $K_t^*(\cdot)$; in this case, $\check{K}_t(\cdot)$ are convex compact sets.

²⁶A set-valued mapping $F : X \mapsto \mathcal{N}(Y)$ is closed if for Cauchy nets x_α and y_α such that $x_\alpha \rightarrow x$, $y_\alpha \in F(x_\alpha)$, and $y_\alpha \rightarrow y$, we have $y \in F(x)$. In other words, the graph of the mapping F is closed.

²⁷This proposition from [168] concerns the Lipschitz property with the constant A for support function.

Theorem 3.2.1. *Under condition (3.2.7), let the numerical functions $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ be lower semicontinuous, the set-valued mappings $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ and $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ be closed and lower semicontinuous, respectively, and the sets B_t be precompact, where $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Then the functions $(\bar{x}_{t-1}, y) \mapsto w_t(\bar{x}_{t-1}, y)$ defined by the relations (BI) are lower semicontinuous.*

Proof. According to Lemmas 3.2.2 and 3.2.3, the locally precompact and closed mapping²⁸ $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$ is upper semicontinuous by [114, Chapter 1, Proposition 2.23]. Applying Lemma 3.2.1 and Theorem 3.1.5, where $D_t(\cdot)$ is replaced by $\hat{D}_t^b(\cdot)$ with some $a \geq C$, we arrive at the desired conclusion. \square

Remark 3.2.5. While proving this theorem, we have established the upper semicontinuity of the compact-valued mapping $x \mapsto \hat{D}_t^b(x)$ under the conditions of Theorem 3.2.1 concerning $K_t(\cdot)$, $D_t(\cdot)$, and B_t .

Proposition 3.2.2. *Let the set-valued mappings $x \mapsto K_t(x)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, be lower semicontinuous, and condition (2.4.3) hold²⁹ for all x :*

$$\text{int}(K_t^*(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset. \quad (3.2.9)$$

Then:

1° *There exist neighborhoods $V(x)$ of points x such that³⁰*

$$\text{int}(\check{K}_t(x)) \cap \text{bar}(D_t(x)) \neq \emptyset \quad (3.2.10)$$

for $\check{K}_t(x) = \bigcap_{x' \in V(x)} K_t^(x')$.*

2° *Condition (3.2.7) holds.*

Proof.

1° We fix t and x . According to (3.2.9), there exist $r > 0$ and $y \in \text{bar}(D_t(x))$ such that $B_r(y) \subseteq K_t^*(x)$. By [114, Chapter 1, Proposition 2.42, item (a)], the lower semicontinuity of $K_t(\cdot)$ implies the same property for $K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$. Due to [114, Chapter 1, Lemma 2.51], for any $\varepsilon \in (0, r)$ there exists a neighborhood $V(x)$ of the point x such that $B_\varepsilon(y) \subseteq K_t^*(x')$ for any $x' \in V(x)$. Hence, letting $\check{K}_t(x) = \bigcap_{x' \in V(x)} K_t^*(x')$ yields $B_\varepsilon(y) \subseteq \check{K}_t(x)$. Therefore, we have $\text{int}(\check{K}_t(x)) \cap \text{bar}(D_t(x)) \neq \emptyset$.

2° Consider new market dynamics with the price uncertainty described by the compact sets $\check{K}_t(\cdot)$, which are convex as the intersection of convex compact sets. Such a market satisfies (3.2.10), so item 2) of Theorem 2.4.1 can be

²⁸A closed mapping takes closed values; see [114, Chapter 1, Remark 2.12].

²⁹This condition appears in Theorem 2.4.1 and implies the full dimension of the compact sets $K_t(\cdot)$, i.e., $\text{int}(K_t^*(\cdot)) \neq \emptyset$.

³⁰Under the conditions of Proposition 3.2.2, the compact sets $\check{K}_t(\cdot)$ have full dimension as well.

applied. Hence, condition RNDSAUP is satisfied for the new model. Now we apply item 1) of Theorem 2.4.1 to the new model, concluding that (3.2.7) holds. □

Now we fix $a \geq C \geq 0$, where the constant C is given by the relation (1.2.3) from Chapter 1. Without loss of generality, we can assume³¹ that $C > 0$. (Otherwise, $g_t(\cdot) \equiv 0$, which is of no interest from an economic point of view.

Proposition 3.2.3. *Under condition (3.2.1), let the compact-valued mappings $K_t(\cdot)$ be continuous, and the compact-valued mappings $D_t(\cdot)$ be lower semicontinuous and closed³² on B_{t-1} . Then the set-valued mapping*

$$x \mapsto \hat{D}_t^a(x) = D_t(x) \cap E_t^a(x), \quad x \in B_{t-1}, \quad (3.2.11)$$

where

$$E_t^a(x) = \{h \in \mathbb{R}^n : \sigma_{K_t^*(x)}(h) \leq a\}, \quad (3.2.12)$$

is continuous.

Proof. Let us demonstrate lower semicontinuity for $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$. Fixing $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, we first establish lower semicontinuity for $E_t^a(\cdot)$. By [114, Chapter 1, Proposition 2.6, item e)], it suffices to verify that the Kuratowski lower limit $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_t^a(x_n)$ for a converging sequence $x_n \rightarrow x_0$ from B_{t-1} contains $E_t^a(x_0)$. Since

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_t^a(x_n) = \{x : \rho(x, E_t^a(x_n)) \rightarrow 0\}$$

(see [114, Chapter 1, Remark 1.43]), for an arbitrary number $h_0 \in E_t^a(x_0)$ it is necessary to show the existence of a sequence $h_n \in E_t^a(x_n)$ such that $h_n \rightarrow h_0$. Note that

$$r_n = h_\rho(K_t^*(x_n), K_t^*(x_0)) \leq h_\rho(K_t(x_n), K_t(x_0)) \rightarrow 0$$

by [168, inequality 5.12]. Recall that for compact-valued mappings, particularly $K_t^*(\cdot)$, continuity coincides with h -continuity; see [114, Chapter 1, Theorem 2.68]. Let $h_n = \alpha_n h_0$, where $\alpha_n = \frac{a}{a+r_n \|h_0\|} \rightarrow 1$ as $n \rightarrow \infty$. Using [168, Proposition 9.11], we obtain

$$\begin{aligned} \sigma_{K_t^*(x_n)}(h_n) &\leq \sigma_{K_t^*(x_0)}(h_n) + r_n \|h_n\| = \alpha_n \sigma_{K_t^*(x_0)}(h_0) + r_n \alpha_n \|h_0\| \leq \\ &\alpha_n a + \alpha_n r_n \|h_0\| = a. \end{aligned}$$

In other words, $h_n \in E_t^a(x_n)$, $h_n \rightarrow h_0 \in E_t^a(x_0)$, and the lower semicontinuity of $E_t^a(\cdot)$ is proved.

³¹However, we can simply require $a > C$ to ensure $a > 0$, which is needed for proving Proposition 3.2.3.

³²In the terminology of the book [168], the weakly continuous mapping $x \mapsto D_t(\cdot)$ is weakly upper and lower semicontinuous simultaneously. Moreover, weak upper semicontinuity is equivalent to closedness (see [168, Theorem 14.7]), and weak lower semicontinuity coincides with (ordinary) lower semicontinuity (see [168, Remark 14.1]).

Note that $a > 0$ by the assumption above, and the set $\frac{1}{a}E_t^a(x) = \{h : \sigma_{K_t^*(x)}(h) \leq 1\}$ is polar in the Minkowski sense for $K_t^*(\cdot)$; see [140, formula (70) and Theorem 12.2]. According to [140, Theorem 6.6 item a)], the point 0 is an inner point of the set polar to $K_t^*(x)$ because it is bounded.³³ Therefore, $0 \in \text{int}(E_t^a(x))$ for all $x \in B_{t-1}$. Further, $0 \in D_t(\cdot) \cap \text{int}(E_t^a(\cdot)) \neq \emptyset$, and the sets $D_t(\cdot)$ and $E_t^a(\cdot)$ are convex. Hence, applying [114, Chapter 1, Proposition 2.54], we establish the lower semicontinuity of the set-valued mapping $\hat{D}_t^a(\cdot) = D_t(\cdot) \cap E_t^a(\cdot)$.

Due to Lemma 3.2.3, the set-valued mapping $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ is closed. Closed set-valued mappings take closed values.³⁴ Hence, by Remark 3.2.1, the sets $D_t(\cdot)$ are closed, whereas the sets $\hat{D}_t^a(\cdot)$ are compact. Since the sets $\hat{D}_t^a(\cdot)$ are convex, we can apply [114, Chapter 1, Theorem 2.102], stating that a closed lower semicontinuous set-valued mapping on a metric space whose values represent path-connected compact subsets of a finite-dimensional Euclidean space is continuous. \square

Theorem 3.2.2. *Under condition RNDSAUP, let the numerical functions $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$ be continuous, the set-valued mappings $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$ be continuous, and the set-valued mappings $\bar{x}_{t-1} \mapsto D_t(\bar{x}_{t-1})$ be lower semicontinuous and closed, where $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Then Assertions 1° and 2° of Theorem 3.1.6 are true.*

Proof. Using Lemma 3.2.1 with a fixed number $a > C$, we choose $\hat{D}_t^a(\cdot)$ instead of $D_t(\cdot)$ in formulas (BI). By Proposition 3.2.3, the compact-valued mapping $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ is continuous, and the conclusion follows by applying Theorem 3.1.6. \square

³³Boundedness follows from compactness by [140, Theorem 2.6].

³⁴See [114, Chapter 1, Remark 2.12].

Chapter 4. The Modulus of Continuity and Lipschitz Properties of Solutions of the Bellman–Isaacs Equations

In this chapter, we strengthen Theorem 3.2.2 on the continuity of solutions of the Bellman–Isaacs equations based on the structural stability condition of the model. A constructive proof is found, which allows estimating the modulus of continuity for the (uniformly) continuous solutions of (BI), including the case of Lipschitz solutions.

These results are used to estimate the approximation error of market price dynamics market prices, which is important for solving the Bellman–Isaacs equations numerically; see Chapter 10.

The main results of this chapter were published in [218] and [202].

4.1 Auxiliary Results

The following elementary assertion will be utilized several times. Therefore, for convenience, we present it as a separate lemma.

Lemma 4.1.1. *For any numerical functions f and g ,*

$$\left| \sup_A f - \sup_A g \right| \leq \sup_A |f - g|, \quad (4.1.1)$$

$$\left| \inf_A f - \inf_A g \right| \leq \sup_A |f - g|. \quad (4.1.2)$$

Proof. We denote $\gamma = \sup_A |f - g|$. Then, for all $x \in X$,

$$g(x) - \gamma \leq f(x) \leq g(x) + \gamma,$$

whence it follows that

$$\sup_A g - \gamma \leq \sup_A f \leq \sup_A g + \gamma.$$

In other words, inequality (4.1.1) holds. We can obtain (4.1.2) by analogy. However, (4.1.2) is immediate from (4.1.1) when taking both functions with the minus sign. \square

In particular, Lemma 4.1.1 implies

$$\begin{aligned} \left| \bigvee_{i=1}^n y_i - \bigvee_{i=1}^n y'_i \right| &\leq \bigvee_{i=1}^n |y_i - y'_i| = \|y - y'\|_\infty, \\ \left| \bigwedge_{i=1}^n y_i - \bigwedge_{i=1}^n y'_i \right| &\leq \bigvee_{i=1}^n |y_i - y'_i| = \|y - y'\|_\infty, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

where $y, y' \in \mathbb{R}^n$.

Let (X, ρ) and (Y, d) be metric spaces, $E \subseteq X$, and $E \neq \emptyset$. For a function $f : X \mapsto Y$ and $\delta \in [0, \infty)$, we denote by

$$\omega_f^E(\delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in E \\ \rho(x_1, x_2) \leq \delta}} d(f(x_1), f(x_2)), \quad (4.1.4)$$

the modulus of continuity of f on the set E . If $E = X$, we omit the superscript at the modulus of continuity, simply writing $\omega_f^X(\delta) = \omega_f(\delta)$. The uniform continuity of f on E means that $\omega_f^E(\delta) \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0$.

Any modulus of continuity $\omega_f^E = \omega$, where $\omega : [0, \infty) \mapsto [0, \infty]$, satisfies obvious properties:

$$1^\circ \quad \omega(0) = 0.$$

$$2^\circ \quad \omega \text{ is a monotonically nondecreasing function.}$$

Note that the nonnegativity of ω follows from 1° and 2° .

Lemma 4.1.2. *Let T be a topological space, a function $u : T \mapsto [0, \infty)$ be lower semicontinuous,*

$$F(z) = \{x \in T : u(x) \leq z\}$$

be a set-valued mapping¹ $F : [0, \infty) \mapsto 2^T$ such that $F(0) \neq \emptyset$, and a function $\varphi : T \mapsto \mathbb{R}$ be upper semicontinuous.

Then:

- 1) *F takes non-empty closed values, and the graph of F is closed; if T is also compact, the set-valued mapping F is upper semicontinuous.*
- 2) *If T is compact, then the function $z \mapsto \sup\{\varphi(x), x \in F(z)\}$, $z \in A$, where A is a closed subset of the set of nonnegative numbers, is monotonically nondecreasing and right continuous.*

Proof.

- 1) The closedness of the set $F(z)$, $z \in A$, follows from the lower semicontinuity of the function u . Consider Cauchy nets $z_\alpha \rightarrow z$, $x_\alpha \in F(z_\alpha)$, and $x_\alpha \rightarrow x$. Since $x_\alpha \in F(z_\alpha)$ is equivalent to $u(x_\alpha) \leq z_\alpha$, the lower semicontinuity of the

¹Here 2^T indicates the class of all subsets of T .

function u implies $u(x) \leq \liminf u(x_\alpha) \leq z$, i.e., $x \in F(z)$. Therefore, the graph of F is closed. If E is compact, F will be upper semicontinuous by [114, Proposition 2.23].

- 2) The numerical function $\psi : A \mapsto \mathbb{R}$, where $\psi(z) = \sup\{\varphi(x) : x \in F(z)\}$, is monotonically nondecreasing due to the monotonicity of F , i.e., $F(z) \subseteq F(z')$ for $z \leq z'$. According to Berge's Theorem 3.1.2 (see Chapter 3), the function ψ is upper semicontinuous. For a monotonically nondecreasing numerical function, upper semicontinuity is equivalent to right continuity.

□

Proposition 4.1.1. *Let E be a non-empty compact subset of a metric space (X, ρ) , and a function $f : X \mapsto Y$ be continuous, where (Y, d) is a metric space. Then the modulus of continuity $\omega_f^E = \omega$ satisfies additional conditions:*

3° ω takes finite values.

4° ω is right continuous.

Proof. Choosing $T = E \times E$, $x = (x_1, x_2) \in E \times E$, $u(x) = u(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)$, $A = [0, +\infty)$, $z = \delta$, $\phi(x) = \phi(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$, we apply Lemma 4.1.2. Then the set-valued mapping

$$F(\delta) = \{(x_1, x_2) \in E \times E, \rho(x_1, x_2) \leq \delta\}$$

is upper semicontinuous, whereas the function φ is continuous and reaches maximum on the compact set $F(\delta)$. Hence, the function

$$\psi(\delta) = \max_{x \in F(\delta)} \varphi(x) = \max_{x_1, x_2 \in E, \rho(x_1, x_2) \leq \delta} d(f(x_1), f(x_2)) = \omega_f^E(\delta)$$

is right continuous. □

Remark 4.1.1.

- 1) Under the conditions of Proposition 4.1.1, the modulus of continuity can be discontinuous. As a simple example, consider a discrete space X with the measure

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = y, \\ 1 & \text{for } x \neq y. \end{cases}$$

In this case, any function $f : X \mapsto Y$ is uniformly continuous and

$$\omega_f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{for } \delta \in [0, 1), \\ 1 & \text{for } \delta \in [1, \infty). \end{cases}$$

- 2) Introducing an additional structure on the space X , we establish another important property, i.e., the subadditivity of the modulus of continuity.

Let E be a non-empty convex subset of a normed space X with the metric $\rho(x, y) = \|x - y\|$. The case of a singleton E is not interesting.² Therefore,

²In this case, subadditivity trivially holds due to property 1°.

assume that E contains two different points (hence, a continuum of them). Fixing arbitrary nonnegative numbers δ_1, δ_2 not equal to 0 simultaneously, we choose arbitrary points x and y from E such that $\rho(x, y) = \|x - y\| \leq \delta_1 + \delta_2 > 0$. For $p = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}$ and $z_p = (1 - p)x + py \in E$, we have

$$\begin{aligned}\|x - z_p\| &= p\|x - y\| \leq \delta_1, \\ \|z_p - y\| &= (1 - p)\|x - y\| \leq \delta_2.\end{aligned}$$

For any x and y , $\|x - y\| \leq \delta_1 + \delta_2$, it follows that

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(z_p)) + \rho(f(z_p), f(y)) \leq \omega_f^E(\delta_1) + \omega_f^E(\delta_2).$$

Due to property 1⁰, when $\delta_1 = \delta_2 = 0$, the modulus of continuity $\omega_f^E = \omega$ possesses the subadditivity property:³

$$5^\circ \quad \omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2).$$

- 3) For a function $\varphi : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ with properties 1⁰, 2⁰, 3⁰ and 5⁰, the modulus of continuity⁴, coincides with this function⁵, i.e., $\omega_\varphi = \varphi$. Indeed, let $|t_2 - t_1| \leq \delta$. Using 2⁰, 3⁰ and 5⁰ we obtain

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| = \varphi(t_1 \vee t_2) - \varphi(t_1 \wedge t_2) \leq \varphi(|t_2 - t_1|) \leq \varphi(\delta), \quad (4.1.5)$$

and consequently, $\omega_\varphi \leq \varphi$. Conversely, properties 1⁰ and 2⁰ imply

$$\omega_\varphi(\delta) \geq |\varphi(\delta) - \varphi(0)| = \varphi(\delta) - \varphi(0) = \varphi(\delta).$$

- 4) Under properties 1⁰, 2⁰ and 5⁰ let the modulus of continuity $\omega_f = \omega$ of a function f have⁶ property 4⁰. In this case, property 3⁰ is valid, ω coincides with its modulus of continuity, and f is uniformly continuous. (This fact follows from inequality (4.1.5).)
- 5) An example of a uniformly continuous but not absolutely continuous function $\varphi : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ that satisfies properties 1⁰, 2⁰, 4⁰ and 5⁰ is a Cantor stairwise function⁷; see [239, subsection 3.2.4]. Moreover, the function φ satisfies the Hölder condition: $\varphi(\delta) = \omega_\varphi(\delta) \leq \delta^\alpha$, where $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ [76].

³Possibly $\omega(\delta) = \infty$ for all $\delta > 0$. If ω satisfies conditions 1⁰, 2⁰ and 5⁰, for condition 3⁰ to hold it suffices that $\omega(\delta)$ be finite at the single point $\delta > 0$.

⁴Such a function φ satisfies conditions in item 2) of Remark 4.1.1.

⁵Similar assertions can be found in the literature; for example, see [73, Section 6]. However, redundant requirements were imposed on φ therein.

⁶If, in addition to 1⁰ and 2⁰, the function is concave, then 4⁰ and 5⁰ hold.

⁷More precisely, φ is a continuation of a Cantor function $\psi : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ if $\varphi(\delta) = 1$ for $\delta > 1$.

- 6) Under the conditions of item 2), if property 3° holds, the modulus of continuity satisfies 1°, 2°, 3° and 5°; moreover, the function ω satisfying these four properties is asymptotically linear.⁸ Indeed, we fix an arbitrary time instant $t > 0$. Recall that $\omega \geq 0$ due to properties 1° and 2°. Denoting by $[a]$ the integer part of $a \in \mathbb{R}$, for any $x \in [0, \infty]$, we have

$$\omega(x) = \omega\left(\left[\frac{x}{t}\right]t + r\right), \quad r = \left(\frac{x}{t} - \left[\frac{x}{t}\right]\right)t \in [0, t).$$

From subadditivity 5° it follows that

$$\omega(x) \leq \left[\frac{x}{t}\right]\omega(t) + \omega(r).$$

Since ω is monotonically decreasing⁹, we have

$$\omega(r) \leq \omega(t)$$

due to 2°. The two previous inequalities imply

$$\omega(x) \leq \left(\left[\frac{x}{t}\right] + 1\right)\omega(t) \leq \left(\frac{x}{t} + 1\right)\omega(t). \quad (4.1.6)$$

Further, standard considerations based on (4.1.6) yield the inequality¹⁰

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\omega(x)}{x} \leq \frac{\omega(t)}{t}, \quad t > 0.$$

Due to the arbitrariness of $t > 0$, it follows that

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\omega(x)}{x} \leq \inf_{t > 0} \frac{\omega(t)}{t} \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\omega(x)}{x},$$

and we obtain the classical result

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\omega(x)}{x} = \inf_{x > 0} \frac{\omega(x)}{x} < +\infty.$$

The Pompeiu–Hausdorff distance can be represented in the following form¹¹

$$h_\rho(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq [B]^\varepsilon, B \subseteq [A]^\varepsilon\},$$

where

$$\begin{aligned} \rho(x, A) &= \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}, \\ [A]^\delta &= \{x \in X : \rho(x, A) < \delta\}. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

⁸This property can be treated as a continuous version of the Fekete lemma.

⁹An additive function, i.e., the solution of the Cauchy equation, is subadditive. Hence, asymptotic linearity for a subadditive function cannot be obtained without additional conditions: the axiom of choice implies the existence of an immeasurable solution of the Cauchy equation whose graph is dense everywhere on the plane [123]. It suffices to require the boundedness of ω in a neighborhood of the point 0; in our case, this follows from the nonnegativity of ω (a consequence of properties 1° and 2°) and the properties of monotonicity 2° and finiteness 3°.

¹⁰If a function ω satisfying 1° and 2° is concave, then the function $t \rightarrow \frac{\omega(t)}{t}$ is nonincreasing.

¹¹Possibly $h_\rho(A, B) = \infty$.

Lemma 4.1.3. *Let (X, ρ) be a metric space, $E \subseteq X$, $A \subseteq E$, and $B \subseteq E$ be given non-empty sets, and $f : E \mapsto \mathbb{R}$ be a given numerical function.*

1) *If $h_\rho(A, B) < \delta$, then*

$$|\sup_A f - \sup_B f| \leq \omega_f^E(\delta).$$

2) *Moreover, if f is continuous on E , a compact subset of X , then*

$$|\sup_A f - \sup_B f| \leq \omega_f^E(h_\rho(A, B)).$$

Proof.

1) Consider the metric space (E, ρ') , where ρ' is the restriction of ρ to $E \times E$. Note that $\rho'(x, A) = \rho(x, A)$ for $x \in E$ and $A \subseteq E$. We introduce the notation $[A]_E^\delta = \{x \in E : \rho(x, A) < \delta\} = [A]^\delta \cap E$. For $A \subseteq E$, the inclusion $A \subseteq [B]^\varepsilon$ implies $A \subseteq [B]^\varepsilon \cap E = [B]_E^\varepsilon$, and the inclusion $A \subseteq [B]_E^\varepsilon$ implies $A \subseteq [B]^\varepsilon \cap E \subseteq [B^\varepsilon]$. Therefore, for $A \subseteq E$ and $B \subseteq E$, the Pompeiu-Hausdorff distance on E , $h_{\rho'}(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq [B]_E^\varepsilon, B \subseteq [A]_E^\varepsilon\}$, coincides with $h_\rho(A, B)$. Since $h_\rho(A, B) < \delta$, we have $A \subseteq [B]_E^\delta$ and $B \subseteq [A]_E^\delta$. For $x \in [A]_E^\delta$, there exists $y \in A$ such that $\rho(x, y) < \delta$, which yields $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f^E(\delta)$.

Consequently,

$$\sup_{[A]_E^\delta} f \leq \sup_A f + \omega_f^E(\delta),$$

and by analogy,

$$\sup_{[B]_E^\delta} f \leq \sup_B f + \omega_f^E(\delta).$$

Moreover,

$$\sup_B f \leq \sup_{[A]_E^\delta} f \leq \sup_A f + \omega_f^E(\delta)$$

and

$$\sup_A f \leq \sup_{[B]_E^\delta} f \leq \sup_B f + \omega_f^E(\delta).$$

Hence,

$$|\sup_A f - \sup_B f| \leq \omega_f^E(\delta).$$

2) According to Proposition 4.1.1, the function ω_f^E is right continuous: item 2) follows from item 1).

□

We denote by $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ the class of all non-empty compact subsets of \mathbb{R}^n . Consider $N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ with the convex hull containing the origin, i.e., $0 \in \text{conv}(N)$. In this case, the support function $\sigma_N(h) = \max_{y \in N} hy$ is convex and finite for all $h \in \mathbb{R}^n$. Due to [175, Corollary 10.1.1], it is therefore continuous and reaches minimum on a compact set $S_1(0)$ representing the unit sphere in \mathbb{R}^n . (It has the form $S_1(0) = \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\|_2 = 1\}$, where $\|\cdot\|_2$ indicates the Euclidean norm, and $\|h\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}$.)

For further considerations, we define an important function r as¹²

$$r(N) = \min_{h \in S_1(0)} \sigma_N(h) = \min_{h \in S_1(0)} \max_{y \in N} hy \quad (4.1.8)$$

for¹³ $N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ with $0 \in \text{conv}(N)$. Note that $r(\text{conv}(N)) = r(N)$ because the support function of the set N coincides with that of its convex hull $\text{conv}(N)$. For a convex set $N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ containing point 0, the value $r(N)$ geometrically means the radius of an inscribed ball with center 0 (the maximum radius of the ball centered at point 0 and contained in the convex compact set N , or equivalently, the distance from point 0 to the boundary $\text{bd}(N)$ of the set N).

Lemma 4.1.4. *The function $N \mapsto r(N)$ is Lipschitzian with the constant equal to 1 on the space $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ of all non-empty convex compact sets in \mathbb{R}^n equipped with the Pompeiu–Hausdorff measure.*

Proof. For $N \subseteq \mathbb{R}^n$, we denote

$$N^* = \text{conv}(N). \quad (4.1.9)$$

Let $N_i \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$. According to [140, Theorem 14.1], the Pompeiu–Hausdorff distance between convex compact sets¹⁴ N_1^* and N_2^* can be written as

$$h_\rho(N_1^*, N_2^*) = \max_{h \in S_1(0)} |\sigma_{N_1^*}(h) - \sigma_{N_2^*}(h)|. \quad (4.1.10)$$

Using Lemma 4.1.1, we have

$$\begin{aligned} |r(N_1) - r(N_2)| &= |r(N_1^*) - r(N_2^*)| = \left| \min_{h \in S_1(0)} \sigma_{N_1^*}(h) - \min_{h \in S_1(0)} \sigma_{N_2^*}(h) \right| \leq \\ & \max_{h \in S_1(0)} |\sigma_{N_1^*}(h) - \sigma_{N_2^*}(h)| = h_\rho(N_1^*, N_2^*) \leq h_\rho(N_1, N_2). \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

The latter inequality can be found in [168, Proposition 5.2], formula (5.12). \square

¹²Recall that hy indicates the scalar product of vectors h and y .

¹³For such arguments, the function r takes finite nonnegative values.

¹⁴The convex hull of a compact set is compact; for example, see [140, Theorem 2.6]. Note that the notation (4.1.9) is used here.

Lemma 4.1.5. *Let K be a compact set, and a set-valued mapping $N : K \mapsto \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ be lower semicontinuous. In addition, assume that for all $x \in K$, the sets $N(x)$ satisfy the condition¹⁵ $0 \in \text{int}(N^*(x))$, where $N^*(x) = \text{conv}(N(x))$. Then the function $x \mapsto r(N(x))$ is lower semicontinuous and $\min_{x \in K} r(N(x)) > 0$.*

Proof. The function $(x, h) \mapsto \sigma_{N(x)}(h) = \max_{y \in N(x)} hy$ is lower semicontinuous by Berge's theorem; see item 1° of Remark 3.1.5 in Chapter 3. Further, the mapping $x \mapsto S_1(0)$ takes a constant compact value and is continuous. According to Berge's theorem (see item 2° of Remark 3.1.5 in Chapter 3), the function $x \mapsto r(N(x)) = \min_{h \in S_1(0)} \sigma_{N(x)}(h)$ is lower semicontinuous and reaches minimum at some point $x^* \in K$ for which $0 \in \text{int}(N^*(x^*))$. Therefore, we have $r(N(x^*)) = r(N^*(x^*)) > 0$. \square

Remark 4.1.2.

- 1) If a mapping $x \mapsto N(x)$ taking compact convex values is continuous (or equivalently, h -continuous), then the function $x \mapsto r(N(x))$ is continuous. This result directly follows from Lemma 4.1.4.
- 2) If $N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $0 \in N^*$, and¹⁶ $\dim(\text{aff}(N)) < n$, then $r(N) = 0$.
- 3) We define a new function of the form

$$\tilde{r}(N) = \min_{h \in S_1(0) \cap \text{aff}(N)} \sigma_N(h)$$

for sets $N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ such that $0 \in \text{ri}(N^*)$, where $\text{ri}(A)$ denotes the relative interior of a convex set A . The function $\tilde{r}(N)$ is the distance from the origin 0 to the relative boundary $\text{rbd}(N^*)$ of the set N^* . This function is no longer continuous with respect to the Pompeiu–Hausdorff distance corresponding to the Euclidean measure in the space \mathbb{R}^n . For example, if N is a convex compact set, $0 \in \text{ri}(N)$, and $\dim(\text{aff}(N)) < n$, then $\tilde{r}(N) > 0$. However, choosing an arbitrary small number $\varepsilon \in (0, \tilde{r}(N))$, we obtain $h_\rho(N, N^\varepsilon) = \varepsilon$ and $\tilde{r}(N^\varepsilon) = r(N^\varepsilon) = \varepsilon$ for $N^\varepsilon = N + \bar{B}_\varepsilon(0)$. Of course, the function \tilde{r} will be continuous in the reduced space $E = \text{aff}(N)$ with the inherited Euclidean measure and the corresponding Pompeiu–Hausdorff measure.

4.2 Solutions of the Bellman–Isaacs Equations: Estimation of the Modulus of Continuity

The next result refines Theorem 3.2.2, allowing us to estimate the modulus of continuity and, moreover, provide an alternative (constructive) proof of the continuity of the functions v_t^* , $t \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

¹⁵In this case, the affine hull of the set $N(x)$ is \mathbb{R}^n , coinciding with the linear hull since $0 \in N(x)$.

¹⁶Here, $\text{aff}(N)$ indicates the affine hull of N , and $\dim(A)$ is the dimension of an affine manifold A .

For convenience¹⁷, we believe that the functions $g_t(\cdot)$ and set-valued mappings $K_t(\cdot)$ in the original problem statement are defined on the entire space $(\mathbb{R}^n)^t$; accordingly, the functions $v_t^*(\cdot)$ in (BI) are defined everywhere. In fact, these functions and mappings need to be considered on the set of feasible paths B_t or, possibly, on some convex compact subset of $(\mathbb{R}^n)^t$ containing B_t . For $\bar{x}_t \in (\mathbb{R}^n)^{t+1}$, we define the norm

$$\|\bar{x}_t\| = \sum_{s=0}^t \|x_s\|_1,$$

where

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z^i| \text{ для } z = (z^1, \dots, z^n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

We introduce additional notations: $K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$;

$$C_t^* = \bigvee_{s=t}^N C_s, \tag{4.2.1}$$

$$C_t = \sup_{\bar{x}_{t-1} \in B_t} g_t(\bar{x}_{t-1});$$

$$A_t^* = \sup_{x \in B_{t-1}} \|\hat{D}_t^{C_t^*}\|_2, \tag{4.2.2}$$

where the set $\hat{D}_t^b(\cdot)$ is given by formula (3.2.4) of Chapter 3, $\|A\|_2 = \sup_{h \in A} \|h\|_2$, and $\|h\|_2$ is the Euclidean norm, i.e., $\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (h^i)^2}$ for a vector $h = (h^1, \dots, h^n) \in \mathbb{R}^n$.

Theorem 4.2.1. *Under the robust condition of no sure arbitrage with unbounded profit RNDSAUP, for $s = 1, \dots, N$, let the potential payoff functions g_s be continuous, the compact-valued mappings $\bar{x}_{s-1} \mapsto K_s(\bar{x}_{s-1})$ be h -continuous in the Pompeiu–Hausdorff measure¹⁸, the set-valued mapping $\bar{x}_{s-1} \mapsto D_s(\bar{x}_{s-1})$ be closed and lower semicontinuous, and the set B_0 of feasible initial prices be compact. Then the functions v_s^* defined by (BI) are uniformly continuous and bounded on B_s , i.e.,*

$$0 \leq v_s^* \leq C_s^* < \infty, \quad s \in \llbracket 0, N \rrbracket. \tag{4.2.3}$$

In addition, the modulus of continuity $\omega_{v_s^}$ of the function v_s^* is estimated using the recurrence inequalities.*

$$\begin{aligned} \omega_{v_{s-1}^*}^{B_{s-1}}(\delta) &\leq \omega_{g_{s-1}}^{B_{s-1}}(\delta) \vee \left[\omega_{v_s^*}^{B_s}(\omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta)) + A_s^* \omega_{K_s}^{B_{s-1}}(\delta) + \omega_{v_s^*}^{B_s}(\delta) \right], \quad s = N, \dots, 1; \\ \omega_{v_N^*}^{B_N} &= \omega_{g_N}^{B_N}, \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

¹⁷This is convenient and even natural at least for the potential payoff functions g_t , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$: these functions are usually defined so in practice.

¹⁸For compact-valued mappings, h -continuity is equivalent to continuity; see [114, Theorem 2.68].

where formally $g_0 \equiv 0$ (i.e., $\omega_{g_0} \equiv 0$), $\omega_{K_s}^{B_{s-1}}$ is the modulus of continuity of $K_s(\cdot)$ in the Pompeiu–Hausdorff measure on B_{s-1} , and $\omega_{g_s}^{B_s}$ and $\omega_{v_s^*}^{B_s}$ are the moduli of continuity of the functions g_{s-1} and v_s^* , respectively, on $B_s(s = N, \dots, 1)$. Moreover, the values A_s^* given by (4.2.2) are finite, $s = N, \dots, 1$.

Proof. The continuity of the functions v_s^* , $s \in \llbracket 0, N \rrbracket$, follows from Theorem 3.2.2, considering the coincidence of (upper or lower) semicontinuity and h -continuity for compact-valued mappings $K_s(\cdot)$, $s \in \llbracket 1, N \rrbracket$; see [114, Proposition 2.68]. According to Proposition 3.1.1 of Chapter 3, the set B_s of feasible paths is compact, and the functions v_s^* are uniformly continuous and bounded on B_s , $s \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

However, for the considered case, the uniform continuity of the functions v_s^* can be established by induction simultaneously with the estimate (4.2.4) for the moduli of continuity and inequalities (4.2.3); see the reasoning below. For $s = N$, this is obvious. Assume that v_s^* is uniformly continuous for $s = N, \dots, t$, where $t < N$. Let us show that v_{t-1}^* is uniformly continuous and (4.2.3) and (4.2.4) hold for $s = t$. According to (BI), for $t = N, \dots, 1$, the Bellman–Isaacs equations take the form

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \rho_t(\bar{x}_{t-1}), \quad (4.2.5)$$

where

$$\rho_t(\bar{x}_{t-1}) = \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \quad (4.2.6)$$

The functions g_{t-1} are continuous by the hypotheses of the theorem. Hence, they are uniformly continuous and bounded on the compact set B_t of feasible paths; in particular, $C_t < \infty$.

Since $v_{t-1}^*(\cdot) \geq g_{t-1}(\cdot)$, we have $v_s^*(\cdot) \geq 0$ for $s = t-1, \dots, N$. By the inductive hypothesis, $v_t^*(\cdot) \leq C_t^*$, and the infimum over h in the expression (4.2.6) does not exceed the supremum value over y for $h = 0$. Therefore, $\rho_t(\cdot) \leq C_t^*$, and the inequalities $v_{t-1}^*(\cdot) \leq C_{t-1} \bigvee C_t^* = C_{t-1}^*$ hold. Thus, inequalities (4.2.3) are valid.

Now, we show the uniform continuity of the function $\bar{x}_{t-1} \mapsto \rho_t(\bar{x}_{t-1})$ and simultaneously estimate its modulus of continuity. First, a continuous mapping of a compact metric space into a metric space is uniformly continuous; for example, see [74, Theorem 3.16.5]. Second, due to [168, Theorem 5.1, Lemma 5.5], the class of all compact subsets of \mathbb{R}^n is a metric space equipped with the Pompeiu–Hausdorff measure. Therefore, the mapping $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, treated as an ordinary (single-valued) mapping, is uniformly continuous on B_{t-1} . Denoting by $\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\cdot)$ the modulus of continuity of the mapping $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, we have $\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta) \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0$.

By the inductive hypothesis, the function $v_t^*(\cdot)$ is uniformly continuous, and hence its modulus of continuity $\omega_{v_t^*}(\delta) \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0$.

Let $\bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$, $\bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$, and $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| \leq \delta$. The following inequalities

hold:

$$\begin{aligned}
& \left| \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] - \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1} + y) - hy] \right| \leq \\
& \left| \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] - \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] \right| + \\
& \left| \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] - \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1} + y) - hy] \right|.
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Consider the first term on the right-hand side of inequality (4.2.7). Note that at a point $\varepsilon \geq 0$, the modulus of continuity of the function $y \mapsto v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$ has the upper bound $\omega_{v_t^*}^{B_t}(\varepsilon) + \|h\|_2 \varepsilon$. Further, using Lemma 4.1.3, item 2, we estimate the first term as

$$\begin{aligned}
& \omega_{v_t^*}(h_\rho(K_t(\bar{x}_{t-1}), K_t(\bar{x}'_{t-1}))) + \|h\|_2 h_\rho(K_t(\bar{x}_{t-1}), K_t(\bar{x}'_{t-1})) \leq \\
& \omega_{v_t^*}^{B_t}(\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)) + \|h\|_2 \omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta).
\end{aligned}$$

With Lemma 4.1.1, the second term on the right-hand side of inequality (4.2.7) can be estimated as

$$\sup \left\{ |v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1} + y)|, y \in K_t(\bar{x}'_{t-1}) \right\} \leq \omega_{v_t^*}^{B_t}(\delta).$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
& \left| \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] - \sup_{y \in K_t(\bar{x}'_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}'_{t-1}, x'_{t-1} + y) - hy] \right| \leq \\
& \left[\omega_{v_t^*}^{B_t}(\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)) + \|h\|_2 \omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta) \right] + \omega_{v_t^*}(\delta)
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

for all $\bar{x}_{t-1}, \bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$ such that $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| < \delta$.

According to Lemma 3.2.1, the function $\rho_t(\cdot)$ defined by (3.1.4) can be represented as

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in \hat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy],$$

where a is not smaller than a uniform upper bound for the function w_t (e.g., the constant C_t^* due to inequality (4.2.3)). Thus, $D_t(\cdot)$ can be replaced by the convex set $\hat{D}_t^a(\cdot)$, compact due to condition RNSAUP, with $a = C_t^*$:

$$\rho_t(\bar{x}_{t-1}) = \inf_{h \in \hat{D}_t^{C_t^*}(\bar{x}_{t-1})} \varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h), \tag{4.2.9}$$

where

$$\varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h) = \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy]. \tag{4.2.10}$$

According to Proposition 3.2.3, the set-valued mapping $x \mapsto \hat{D}_t^a(x)$ is continuous.¹⁹ Since $B_t(\cdot)$ is compact, this mapping is compactly bounded²⁰ on B_t , and hence A_t^* takes a finite value.

¹⁹For compact-valued mappings, h -continuity is equivalent to continuity.

²⁰In other words, there exists a compact set containing all values of the set-valued mapping; see [168, Definition 6.3].

Considering (4.2.8), we obtain the inequalities

$$|\varphi_t(\bar{x}'_{t-1}, h) - \varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h)| \leq \beta(\delta), \quad (4.2.11)$$

where

$$\beta(\delta) = \omega_{v_t^*}^{B_t}(\omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta)) + A_t^* \omega_{K_t}^{B_{t-1}}(\delta) + \omega_{v_t^*}^{B_{t-1}}(\delta), \quad (4.2.12)$$

for any $\bar{x}_{t-1}, \bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$ such that $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| < \delta$ and for all $h \in B_{A_t^*}(0)$. Due to (4.2.9), (4.2.11), (4.2.12), and Lemma 4.1.1, the inequality

$$|\rho_t(\bar{x}'_{t-1}) - \rho_t(\bar{x}_{t-1})| \leq \beta(\delta) \quad (4.2.13)$$

holds for all $\bar{x}_{t-1}, \bar{x}'_{t-1} \in B_{t-1}$ such that $\|\bar{x}_{t-1} - \bar{x}'_{t-1}\| < \delta$. Since v_t^* and K_t are uniformly continuous, $\beta(\delta) \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0$. Thus, the function ρ_{t-1} is uniformly continuous with the modulus of continuity

$$\omega_{\rho_t}^{B_{t-1}}(\delta) = \beta(\delta). \quad (4.2.14)$$

Since $v_{t-1}^* = g_{t-1} \vee \rho_t$, using inequalities (4.1.3), we obtain

$$\omega_{v_{t-1}^*}^{B_{t-1}}(\delta) \leq \omega_{g_{t-1}}^{B_{t-1}}(\delta) \vee \omega_{\rho_t}^{B_{t-1}}(\delta) \quad (4.2.15)$$

for $\delta \geq 0$. Finally, the requisite inequalities (4.2.4) follow from (4.2.12), (4.2.14), and (4.2.15). \square

This theorem easily leads to another result.

Proposition 4.2.1. *Under condition RNDSAUP, let the set-valued mapping $D_t(\cdot)$ be lower semicontinuous and closed, and the functions g_{t-1} and $K_t(\cdot)$ have the Lipschitz property with constants L_{g_t} and L_{K_t} , respectively. Then the Bellman functions v_t^* also have the Lipschitz property with constants $L_{v_t^*}$, which can be determined from the recurrence relation*

$$\begin{aligned} L_{v_N^*} &= L_{g_N}, \\ L_{v_{t-1}^*} &= L_{g_{t-1}} \vee [L_{v_t^*}(L_{K_t} + 1) + A_t^* L_{K_t}], \quad t = N, \dots, 1. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

where A_t^* is given by (4.2.2), $t = N, \dots, 1$.

Proof. The equality $L_{v_N^*} = L_{g_N}$ is obvious. Using formulas (4.2.4) and (4.2.2), as well as the Lipschitz property of g_{t-1} and $K_t(\cdot)$, i.e.²¹,

$$\begin{aligned} \omega_{g_{t-1}}(\delta) &\leq L_{g_t} \delta, \\ \omega_{K_{t-1}}(\delta) &\leq L_{K_{t-1}} \delta, \end{aligned}$$

we finally arrive at the desired result. \square

²¹Here, the Lipschitz constants can be chosen minimal: $L_{g_{t-1}} = \sup\{\omega_{g_{t-1}}(\delta)/\delta, \delta > 0\}$ and $L_{K_{t-1}} = \sup\{\omega_{K_{t-1}}(\delta)/\delta, \delta > 0\}$.

Let

$$r_t^* = \inf_{x \in B_{t-1}} r(K_t^*(x)), \quad t = 1, \dots, N, \quad (4.2.17)$$

where r is the function given by (4.1.8).

Proposition 4.2.2. *Under conditions of Theorem 4.2.1, in the case of no trading constraints we have the inequalities*

$$A_t^* \leq \frac{C_t^*}{r_t^*}, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (4.2.18)$$

Moreover, the values r_t^* , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, defined by (4.2.17) are positive.

Proof.

In the case of no trading constraints, RNDSAUP is equivalent to RNDAO; see Theorem 2.4.1 and Proposition 2.4.1. In turn, the latter condition is equivalent to the geometrical criterion (2.4.8), i.e., $0 \in K_t^*(\cdot)$.

Due to Lemma 4.1.4, the function $\bar{x}_{t-1} \mapsto r(K_t(\bar{x}_{t-1}))$, where r is given by (4.1.8), is continuous and by Lemma 4.1.5, the function $\bar{x}_{t-1} \mapsto r(K_t(\bar{x}_{t-1}))$ reaches maximum at some $\bar{x}_{t-1}^* \in B_{t-1}$ such that $r(K_t(\bar{x}_{t-1}^*)) = r_t^* > 0$.

According to the definition of r_t^* (see (4.2.17)), we have $K_t^*(\cdot) \supseteq B_{r_t^*}(0)$, leading to the inequality $\sigma_{K_t^*(\cdot)} \geq r_t^* \|h\|_2$ for the support functions. Therefore,

$$r_t^* \|h\|_2 \leq \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h) \leq C_t^*$$

for $h \in D_t^{\hat{C}_t^*}(\cdot)$. Hence, it follows that $\|h\|_2 \leq \frac{C_t^*}{r_t^*}$ and consequently, $A_t^* \leq \frac{C_t^*}{r_t^*}$. \square

Remark 4.2.1.

- 1) To apply item 2) of Remark 4.1.1 in Theorem 4.2.1, it suffices to extend the set B_t (the domain of the modulus of continuity) to a convex set containing B_t ; the minimal set is the convex hull $\text{conv}(B_t)$. For some models, $B_t, t = 0, \dots, N$, is a convex set.
- 2) If E is a non-empty compact subset of the metric space (X, ρ) , then the function $f : X \mapsto Y$ with a metric space (Y, d) has the Lipschitz property on E if and only if the modulus of continuity $\omega_f^E(\delta) = \omega(\delta)$ satisfies the condition

$$a = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(\delta)}{\delta} < \infty. \quad (4.2.19)$$

The necessity part is obvious. If (4.2.19) holds, then the function f is uniformly continuous on E because $\omega(\delta) \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0$. For a fixed arbitrary number $\varepsilon > 0$, there exists $\delta^* = \delta^*(\varepsilon) > 0$ such that $\omega(\delta) \leq (a + \varepsilon)\delta$ for $\delta \in [0, \delta^*]$. We denote by m the maximum of the continuous function $(x_1, x_2) \mapsto d(f(x_1), f(x_2))$ on the compact set $E \times E$. Since ω does not exceed this maximum, we have $\omega(\delta) \leq \left[\frac{m}{\delta^*} \vee (a + \varepsilon) \right] \delta$ for all $\delta \geq 0$.

- 3) Like in item 2) of Remark 4.1.1, let E be a non-empty convex subset of the normalized space X equipped with the measure $\rho(x, y) = \|x - y\|$ that contains two points (hence, a continuum of them). Then condition (4.2.19) is necessary and sufficient for the Lipschitz property of the function $f : E \mapsto Y$, where (Y, d) is a metric space. Moreover, $\omega(\delta) < a\delta$ for all $\delta \in [0, \infty)$, i.e., a is a Lipschitz constant.

The necessity part is obvious. If (4.2.19) holds, we fix an arbitrary number $\varepsilon \in (0, 1)$ and choose $\delta^* = \delta^*(\varepsilon) > 0$ so that $\omega(\delta) \leq (a + \varepsilon)\delta$ for $\delta \in [0, \delta^*]$. Under the assumptions above, the function ω is subadditive, and for $x \geq t > 0$, inequality (4.1.6) implies

$$\frac{\omega(x)}{x} \leq \left(1 + \frac{t}{x}\right) \frac{\omega(t)}{t}. \quad (4.2.20)$$

Choosing $x > \delta^*$ and $t < \varepsilon\delta^*$ in (4.2.20), we obtain $\sup_{x>0} \frac{\omega(x)}{x} \leq (a + \varepsilon)(1 + \varepsilon)$. Due to the arbitrary small ε , we conclude that a is a Lipschitz constant.

- 4) In particular, Theorem 4.2.1 serves to estimate the accuracy of the numerical solution of the problem with Lipschitz functions and set-valued mappings (an additional “smoothness” property stronger than continuity). Note that the Lipschitz property of the potential payoff functions is a realistic assumption true for many types of options. One of the exceptions is the binary option.²² The Lipschitz property of set-valued mappings within the multiplicative model will be proved in Proposition 4.2.3 below.

Consider a model that is multiplicatively independent and stationary.²³ The deterministic price dynamics are defined through the multiplicative representation

$$X_t^i = M_t^i X_{t-1}^i, \quad M_t = (M_t^1, \dots, M_t^n) \in C_t(\cdot), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (4.2.21)$$

where $C_t(\cdot)$ is a non-empty compact subset of \mathbb{R}^n , and M_t^i are the multiplicative factors describing the market uncertainty. For a vector $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, we denote by $\Lambda(z)$ a diagonal matrix with the entries

$$\Lambda(z)_{ij} = \begin{cases} z_i & \text{for } i = j; \\ 0 & \text{for } i \neq j. \end{cases}$$

Then (4.2.21) can be written in the matrix form

$$X_t = \Lambda(M_t) X_{t-1}. \quad (4.2.22)$$

Clearly, the price increments $Y_t = \Delta X_t$ are related to the multiplicative representation as follows:

$$Y_t = [\Lambda(M_t) - I] X_{t-1}, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket,$$

²²Also called the digital option. Chapter 12 considers pricing for such options within the market model with some special assumptions.

²³This terminology has been introduced in Section 1.1 of Chapter 1.

where I is an identity matrix of compatible dimensions;

$$K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = [\Lambda(m) - I]x_{t-1}, \quad m \in C_t(x_0, \dots, x_{t-1})\}.$$

Proposition 4.2.3. *Let $C_t(\cdot) \equiv C^*$, where C^* is a non-empty compact convex subset of \mathbb{R}^n . Then the set-valued mapping with compact convex values*

$$x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto K(x) = \left\{ y = (y^1, \dots, y^n) : \begin{aligned} y^i &= (M^i - 1)x^i, \\ i &= 1, \dots, n, \quad M = (M^1, \dots, M^n) \in C^* \end{aligned} \right\}$$

has the Lipschitz property in the Pompeiu–Hausdorff measure with a Lipschitz constant L_K not exceeding $\|C^* - e\|_2$, where $e = (1, \dots, 1)$ and $\|A\|_2 = \sup_{a \in A} \|a\|_2$.

Proof. We denote $L^i = M^i - 1$. Due to (4.2.22), $y \in K(x)$ is equivalent to $y^i = L^i x^i$, $i = 1, \dots, n$, where $L \in C' = C^* - e$. The support function of $K(x)$ takes the form

$$\begin{aligned} \sigma_{K(x)}(z) &= \sup_{y \in K(x)} \sum_{i=1}^n z^i y^i = \sup_{L \in C'} \sum_{i=1}^n z^i L^i x^i = \\ \sigma_{C'}((z^1 x^1, \dots, z^n x^n)) &= \sigma_{C'}(\Lambda(z)x), \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

where $\Lambda(z)$ is the diagonal matrix given by

$$\Lambda(z)_{ij} = \begin{cases} z^i & \text{for } i = j; \\ 0 & \text{for } i \neq j. \end{cases}$$

Let ρ be the Euclidean measure on \mathbb{R}^n , i.e., $\rho(a, b) = \|a - b\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a^i - b^i)^2}$.

Then the Pompeiu–Hausdorff measure h_ρ corresponding to ρ on the space of convex compact sets can be written as

$$h_\rho(A, B) = \max_{z: \|z\|_2=1} |\sigma_A(z) - \sigma_B(z)|. \quad (4.2.24)$$

For details, see the proof of Lemma 4.1.4. Therefore, using (4.2.23) and (4.2.24), we have

$$\begin{aligned} h_\rho(K(x), K(x')) &= \max_{z: \|z\|_2=1} |\sigma_{K(x)}(z) - \sigma_{K(x')}(z)| = \\ \max_{z: \|z\|_2=1} |\sigma_{C'}(\Lambda(z)x) - \sigma_{C'}(\Lambda(z)x')| &\leq \|C'\|_2 \sup_{z: \|z\|_2=1} \|\Lambda(z)\|_2 \|x - x'\|_2, \end{aligned}$$

where

$$\|\Lambda(z)\|_2 = \max_{x: \|x\|_2=1} \|\Lambda(z)x\| = \bigvee_{i=1}^n |z^i| = \|z\|_\infty.$$

Here, we utilize the fact that the support function σ_A is Lipschitzian with the constant $\|A\|_2$; see [168, Proposition 9.10]. Thus, considering the well-known relation $\|z\|_\infty \leq \|z\|_2 \leq \|z\|_1$ of the norms²⁴, we obtain

$$h_\rho(K(x), K(x')) \leq \|C'\|_2 \|x - x'\|_2 \leq \|C'\|_2 \|x - x'\|_1.$$

In other words, the set-valued mapping $x \mapsto K(x)$ is Lipschitzian with the constant $L_K \leq \|C'\|_2$. \square

Remark 4.2.2. In the model considered by V.N. Kolokoltsov [27, Chapter 13], the multiplicative factors were assumed to lie in some fixed intervals. In other words, the set C^* was chosen the rectangular parallelepiped $C^* = \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$, where $\alpha_i < \beta_i$, $i = 1, \dots, n$. Therefore, $C' = \prod_{i=1}^n [\alpha_i - 1, \beta_i - 1]$ and $\|C'\|_2 = \max_{y \in V} \|y\|_2$, where V is the set of 2^n vertices of C' . In this case,

$$L_K \leq \|C'\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (|\alpha_i - 1| \vee |\beta_i - 1|)^2}. \quad (4.2.25)$$

²⁴Any two of the norms are equivalent for a finite-dimensional normalized space.

Chapter 5. Mixed Strategies and Game Equilibrium

The initial problem statement presented in Chapter 1 is game-theoretic in nature and leads to the Bellman–Isaacs equations in pure strategies. This chapter introduces a mixed extension of pure “market” strategies.

In terms of mixed strategies, we formulate and prove criteria for relevant formalizations of the “no arbitrage” property.

The main results of the chapter concern the existence of game equilibrium in mixed “market” strategies under very general conditions. An example without equilibrium is provided.

In the case of no trading constraints, the results have an economically important interpretation: the most unfavorable mixed market strategies are risk-neutral probabilities.

The main results of this chapter were published in [213] and [197].

5.1 Mixed “Market” Strategies

With the Bellman–Isaacs equations derived, relying on economic considerations and the “smoothness” properties of the solutions, we proceed to the next fundamentally important stage with a transparent economic interpretation: transition to mixed “market” strategies. At this stage, probabilities arise, particularly risk-neutral probabilities under certain assumptions about trading constraints; see below.

Hedger’s mixed strategies make no sense because the bracketed expression in (BI) is a linear function¹ of h , and the set $D_t(\cdot)$ is convex.

Consider a class $\mathcal{P}_t(\cdot)$ of distributions² Q on \mathbb{R}^n (probability measures) satisfying the following properties.

¹Due to no transaction costs; see the assumption above.

²The domain \mathcal{A} of Q , i. e., the σ -algebra of all subsets of \mathbb{R}^n , can be chosen depending on a particular class $\mathcal{P}_t(\cdot)$. For example, we can take as \mathcal{A} the class of all subsets if $\mathcal{P}_t(\cdot)$ contains measures concentrated at most in a countable set of points. In other cases, we can take, e.g., a Borel σ -algebra, which is natural when the functions v_t are upper semicontinuous. In the general (“continuous”) case, the class of all subsets cannot be used due to the axiom of choice: it leads to the existence of Lebesgue unmeasurable sets. This problem can be eliminated by replacing the axiom of choice with an alternative axiom (e.g., the axiom of determinacy) in addition to the Zermelo–Fraenkel axioms of set theory; see [158].

- 1) For $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$, the (topological) support $\text{supp}(Q)$ of a measure Q is contained in the compact set $K_t(\cdot)$.
- 2) The class $\mathcal{P}_t(\cdot)$ includes all Dirac measures δ_x (degenerate distributions concentrated at the single point x , i.e., the support of the measure δ_x is equal to the singleton $\{x\}$).

A class $\mathcal{P}_t(\cdot)$ satisfying 1) and 2) is called a mixed extension of the class of “market” strategies. For example, a mixed extension of the class of pure strategies is the class of all probability measures $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ concentrated at most at $n + 1$ points of the set $K_t(\cdot)$.

The next condition is another fruitful property of the mixed extension. It will be used in Section 5.2 below.

- 3) The class $\mathcal{P}_t(\cdot)$ is closed with respect to forming finite mixtures of distributions. In other words, the set $\mathcal{P}_t(\cdot)$ of probability measures is convex.

Under properties 1)–3), we have a convex mixed extension (an admissible class of mixed strategies).

Among the admissible classes $\mathcal{P}_t(\cdot)$ satisfying conditions 1)–3), the minimal class $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ consists of all probability measures concentrated in a finite number of points from the compact set $K_t(\cdot)$. Among the admissible classes $\mathcal{P}_t(\cdot)$ satisfying conditions 1)–3), the maximal class $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$ consists of all probability measures³ with the support contained in $K_t(\cdot)$. Note that property 3) is violated for the mixed extension $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ if the support of $K_t(\cdot)$ contains more than $n + 1$ points.

We emphasize the absence of measurability (integrability) problems if $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))$: in this case, any function is integrable. In other cases, we impose auxiliary requirements; see below.

Lemma 5.1.1. *Conditions 1) and 2) on $\mathcal{P}_t(\cdot)$ ensure the invariable Bellman–Isaacs function (BI) when passing from pure to mixed strategies from the mixed extension $\mathcal{P}_t(\cdot)$ and consequently, the equality*

$$\sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy), \quad (5.1.1)$$

where w_t is given by (T).

Indeed⁴, the integrals on the right-hand side do not exceed the supremum of the integrand function on the compact set $K_t(\cdot)$: by property 1), $\text{supp}(Q) \subseteq K_t(\cdot)$, and the right-hand side of (5.1.1) does not exceed its left-hand counterpart. At the same time, due to condition 2), the class $\mathcal{P}_t(\cdot)$ of mixed strategies is an extension of the

³These measures are defined on the Borel σ -algebra (in the general case, on the σ -algebra of universally measurable subsets of \mathbb{R}^n).

⁴Condition 3) (the convexity of the class $\mathcal{P}_t(\cdot)$ of mixed strategies) is not employed to establish the lemma. However, it is crucial for proving the saddle point theorem below.

class of deterministic strategies since $\mathcal{P}_t(\cdot)$ contains Dirac measures. Therefore, the right-hand side of (5.1.1) is not smaller than the left-hand one.

Considering (5.1.1), the Bellman–Isaacs equations for the mixed extension the class $\mathcal{P}_t(\cdot)$ of “market” strategies take the following form:

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy) \text{ for } t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Introducing mixed strategies leads to considering price dynamics as a random process. Hence, we can study the realistic property of the stochastic (rather than deterministic) model of price dynamics. This issue is discussed in Chapter 6. The mixed strategy at a time instant t , i.e., the measure $Q_t(\cdot) \in \mathcal{P}_t(\cdot)$, has a probabilistic interpretation: $Q_t(\cdot)$ is a “candidate” for the conditional distribution of ΔX_t under a known price prehistory (denoted by the dot). More formally, to construct a probability measure \mathbb{Q} as a distribution of a random price process X_t , $t = 0, \dots, N$, the selector $Q_t(\cdot) \in \mathcal{P}_t(\cdot)$ must also satisfy a measurability condition, i.e. measurability of the mapping $x \mapsto Q_t(x)$, so that Ionescu Tulcea theorem could be applicable with respect to the corresponding (stochastic) transition kernels. The general sufficient conditions for the existence of such a selector will be presented in Chapter 8.

Note that *no measurability issues arise* when $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))$ with a fixed initial state $X_0 = x_0$. (In this case, the number of paths is finite.)

Mixed strategies can be adopted to formulate a “no arbitrage” criterion for NDSA and NDSAUP. The following theorem can be regarded as an analog of the first fundamental theorem of mathematical finance for the deterministic statement.⁵

Theorem 5.1.1. 1) *The condition of no deterministic sure arbitrage (NDSA) is equivalent to:*

$$\begin{aligned} &\text{There exists a measure } Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)) \text{ such that} \\ &\int yQ(dy) \in D_t^\circ(\cdot), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

2) *The condition of no deterministic sure arbitrage with unbounded profit (NDSAUP) is equivalent to:*

$$\begin{aligned} &\text{There exists a measure } Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)) \text{ such that} \\ &\int yQ(dy) \in \text{bar}(D_t(\cdot)), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Proof. Assertions 1) and 2) can be proved simultaneously. For this purpose, we denote by $D_t^*(\cdot)$ the convex cone $D_t^\circ(\cdot)$ for item 1) and the convex cone $\text{bar}(D_t(\cdot))$ for item 2). Using the geometrical condition (2.2.5) of NDSA for item 1) (see Proposition 2.2.3) and the geometrical condition (2.3.1) of NDSAUP for item 2) (see Theorem 2.3.1), we write both conditions as $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^*(\cdot) \neq \emptyset$.

⁵The proof of this result is much simpler than for the similar probabilistic statement, see [180].

Under condition (5.1.3) (or (5.1.4), respectively), there exists a point $y^* \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^*(\cdot) \neq \emptyset$ represented as a convex combination of points y_1, \dots, y_m from $K_t(\cdot)$. In other words, $y^* = \sum_{i=1}^m p_i y_i$ with some coefficients $p_i > 0$ such that $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. By Carathéodory's theorem, the convex hull of the set $K_t(\cdot) \subseteq \mathbb{R}^n$ consists of the convex combinations of at most $n + 1$ points of the set $K_t(\cdot)$; for example, see [175]. Therefore, m can be chosen not exceeding $n + 1$.

Thus, as Q we can take the measure $\sum_{i=1}^{n+1} p_i \delta_{y_i}$. (Note that some probabilities p_i can be zero.)

Conversely, let $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^*(\cdot) = \emptyset$. For any measure with a support contained in $K_t(\cdot)$, the barycenter $\int y Q(dy)$ lies⁶ in $\text{conv}(K_t(\cdot))$, and this set has an empty intersection with $D_t^*(\cdot)$. Hence, the barycenter does not lie in $D_t^*(\cdot)$. \square

Remark 5.1.1. 1) Under condition NDSA (or NDSAUP), Theorem 5.1.1 implies that for a fixed initial price $X_0 = x_0$, it is possible to construct the measure \mathbb{Q} discussed above for which the corresponding conditional distributions of ΔX_t under a given price history will satisfy (5.1.3) or (5.1.4) without the measurability requirement: the measure \mathbb{Q} yielded by the Ionescu Tulcea approach will be concentrated in a finite set of feasible price paths for $t = 0, \dots, N$, and their number will not exceed $(n + 1)N$.

2) If the cone $D_t^\circ(\cdot)$ is a singleton (and its point can only be 0), condition (5.1.3) implies the martingale property of the measure \mathbb{Q} considered in item (1) of this remark. In this case, ΔX_t , $t = 1, \dots, N$, are martingale differences (or equivalently, X_t , $t = 0, \dots, N$, is a martingale) with respect to the natural filtration generated by the process X . For $D_t^\circ(\cdot) = \{0\}$, it suffices that the set $D_t(\cdot)$ contains some neighborhood of the point 0. In particular, this condition holds for a market without trading constraints, i.e., if $D_t \equiv \mathbb{R}^n$. In this case, we obtain $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$, and the martingale property also arises in item 2) of Theorem 5.1.1.

3) In the case of no trading constraints, if $K_t(\cdot)$ were an unbounded closed set and $0 \in \text{cl}(K_t(\cdot))$, there would possibly be no martingale measure with the supports of conditional distributions of price increments contained in $K_t(\cdot)$. See an example in Remark 2.2.5.

5.2 Equilibrium in Mixed ‘Market’ Strategies

This section establishes the following relation between the values given by (5.2.1) and (5.2.2):

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy), \quad (5.2.1)$$

⁶See the general result in Chapter 7, Lemma 7.4.3. In the case under consideration (probability measures concentrated in a finite number of points), it directly follows from the definition of a convex hull.

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \inf_{h \in D_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy). \quad (5.2.2)$$

Of course, the integrals in (5.2.1) and (5.2.2) must have sense. As emphasized, any function will be integrable if the admissible class $\mathcal{P}_t(\cdot)$ of mixed strategies is chosen as $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ (the class of measures concentrated in a finite set of points from $K_t(\cdot)$).

Note that the function $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ is bounded: according to Theorem 1.2.1 of Chapter 1, we have $0 \leq v_t^* \leq C$ for all $t = 0, \dots, N$. Hence, $0 \leq w_t \leq C$.

Due to $0 \in D_t(\cdot)$, the infimum in (5.2.1) does not exceed the supremum for $h = 0$. Considering $w_t \leq C$, we therefore obtain

$$\rho_t \leq C. \quad (5.2.3)$$

The value $\rho_t(\cdot)$ figures in the Bellman–Isaacs equations (5.1.2) for mixed strategies, which can be written in the compact form

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot) \text{ for } t = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

In economic terms, $\rho_t(\cdot)$ can be interpreted as the minimum reserves⁷ to be created at the time instant $t - 1$ (where $t = 1, \dots, N$) for ensuring the complete coverage of option liabilities in the future, i.e., for possible payoffs at the time instants $t, t + 1, \dots, N$.

As mentioned in the Introduction, the Bellman–Isaacs equations (5.1.2) (or equivalently, equations (5.2.4)) arise in a control problem under uncertainty. For the sake of convenience, we will interpret the problem as a dynamic discrete-time game where a zero-sum two-player game arises at each step under a given price history (denoted by the circle). In this zero-sum game, the first player (hedger) seeks to minimize the reserves to cover possible future payoffs on a contingent liability by choosing a pure strategy $h \in D_t(\cdot)$; the second player (“market”) chooses the most unfavorable scenario for the hedger in the form of a mixed strategy, i.e., a conditional distribution $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$ given a known price path. Therefore, we consider the hedger–market game (at step t).

Recall some well-known concepts and facts from game theory. First, the following inequality always holds:

$$\rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot). \quad (5.2.5)$$

In particular, (5.2.3) and (5.2.5) imply $\rho'_t(\cdot) \leq \rho_t(\cdot) \leq C$. If

$$\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot) \quad (5.2.6)$$

for some mixed distribution $\mathcal{P}_t(\cdot)$, we say that the game with the mixed extension $\mathcal{P}_t(\cdot)$ has an equilibrium⁸ and call $\rho_t = \rho'_t$ the value of this game at the time instant t . If there

⁷In principle, ρ_t can be $-\infty$; in this case, ρ'_t is also $-\infty$.

⁸The proof of (5.2.5) is an easy mathematical exercise, but its game-theoretic interpretation seems more useful: for the hedger, $\rho_t(\cdot)$ ($\rho'_t(\cdot)$) can be considered the best outcome when the market (maximizing the risk) moves first (when the hedger moves first, respectively). Since the hedger seeks to minimize the risk, the right to move first may generally give him an advantage. This fact is reflected by inequality (5.2.5). In the case of equilibrium (5.2.6), the sequence of moves does not matter.

exist strategies $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$ and $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}_t(\cdot)$ for which equality (5.2.6) is valid, they form the saddle point $(h_t^*(\cdot), Q_t^*(\cdot))$ of the game, $t = 1, \dots, N$. Accordingly, we speak about the hedger–market game (at step t).

This section presents several results on sufficient conditions of equilibrium in the game. They all rest on the classical Kneser theorem [130]. For completeness and the reader's convenience, we state it below.

Theorem (Kneser). *Assume that:*

- 1° X and Y are two convex sets in a (real) linear space.
- 2° A numerical function $F(x, y)$ is affine⁹ in each of the variables $x \in X$ and $y \in Y$.
- 3° The set X is compact in a certain topology, and the functions $x \mapsto F(x, y)$ in this topology are lower semicontinuous for all $y \in Y$.

Then

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F(x, y) = \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x, y). \quad (5.2.7)$$

Of course, a similar assertion is true when condition 3° replaced by the following.

- 4° The set Y is compact in a certain topology, and the functions $y \mapsto F(x, y)$ in this topology are upper semicontinuous for all $x \in X$.

Then

$$\inf_{x \in X} \max_{y \in Y} F(x, y) = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F(x, y). \quad (5.2.8)$$

Remark 5.2.1. Note that the Kneser and Fan theorems have the same features:

- 1) The value of the game (the expressions (5.2.7) and (5.2.8)) is not claimed to be finite.
- 2) The infimum on the left-hand side of (5.2.7) can be replaced with the minimum, and the supremum on the right-hand side of (5.2.8) can be replaced with the maximum. Indeed, in the case 3°, the function $x \mapsto \sup_{y \in Y} F(x, y)$ is lower semicontinuous; in the case 4°, the function $y \mapsto \inf_{x \in X} F(x, y)$ is upper semicontinuous. In both cases, these functions have compact domains.

The interest in game equilibrium can be easily explained. Under rather general assumptions on $K_t(\cdot)$, $D_t(\cdot)$, and $v_t(\cdot)$, the equilibrium (5.2.6) exists, and the expression (5.2.2) for $\rho_t^*(\cdot)$ can be simplified using the explicit infimum formula. For convenience, recall the notations introduced above:

⁹The affine property in the Kneser theorem can be weakened to the convexity and concavity of F in x and y , respectively. This generalization is attributed to Ky Fan [87, Theorem 2].

σ_A is the support function of a set A , i.e.,

$$\sigma_A(y) = \sup_{h \in A} hy.$$

$\text{bar}(A)$ is the barrier cone¹⁰ of a set A , i.e.,

$$\text{bar}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \sigma_A(y) < +\infty\}.$$

Note that the cone polar¹¹ to $A^o = \{y \in \mathbb{R}^n : hy \leq 0 \text{ for all } h \in A\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \sigma_A(y) \leq 0\}$ is contained in $\text{bar}(A)$.

Proposition 5.2.1. *Let the functions w_t and the class of measures $\mathcal{P}_t(\cdot)$ be such that¹² the integrals $\int w_t(\cdot, y)Q(dy)$ are well-defined for any measure $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$. Then*

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\cdot, y)Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)} \left(\int yQ(dy) \right) \right]. \quad (5.2.9)$$

Proof. This assertion is elementary to establish: examining the expression (5.2.2) for $\rho'_t(\cdot)$, we obtain

$$\inf_{h \in D_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy]Q(dy) = \int w_t(\cdot, y)Q(dy) - \sup_{h \in D_t(\cdot)} h \int yQ(dy). \quad (5.2.10)$$

This equality yields (5.2.9). □

Remark 5.2.2.

1) According to formula (5.2.9), we have:

- Either NDSAUP holds, whose geometrical criterion is¹³

$$\text{conv} (K_t(\cdot)) \cap \text{bar} (D_t(\cdot)) \neq \emptyset, \quad (5.2.11)$$

and the supremum in (5.2.9) should be found only with respect to the measures $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$ satisfying $\int yQ(dy) \in \text{bar} (D_t(\cdot)) \neq \emptyset$;

- or

$$\text{conv} (K_t(\cdot)) \cap \text{bar} (D_t(\cdot)) = \emptyset, \quad (5.2.12)$$

and in this case¹⁴, $\rho'_t(\cdot) = -\infty$.

¹⁰This cone is convex and contains the point 0.

¹¹Strictly speaking, it is correct to consider the set A^o a cone polar to A if A is a cone. Some liberty of speech will be accepted here.

¹²For example, as $\mathcal{P}_t(\cdot)$ we can choose the class $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ of measures concentrated in a finite set of points from $K_t(\cdot)$ (to avoid additional requirements on the functions v_t^*). An alternative approach involves, e.g., the universal measurability of v_t^* (or any other smoothness property, e.g., semicontinuity).

¹³See Theorem 2.3.1 of Chapter 2.

¹⁴Under condition (5.2.12), we arrive at the equilibrium $\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot) = -\infty$, which corresponds to unbounded profit from sure arbitrage, and hedging a contingent liability of a written option becomes economically meaningless; see item 1 of Remark 5.2.7 below.

- 2) The value $\rho'_t(\cdot)$ in (5.2.1) will not change after replacing $D_t(\cdot)$ with its closure $\bar{D}_t(\cdot)$ since the support function remains the same under closing the set, i.e., $\sigma_{D_t(\cdot)} = \sigma_{\bar{D}_t(\cdot)}$. Without loss of generality, the trading constraints $D_t(\cdot)$ in the equilibrium (5.2.6) can be therefore considered closed sets.
- 3) Under general trading constraints (when all sets $D_t(\cdot)$ are not contained in the affine manifolds of dimension below n), due to the convexity of $D_t(\cdot)$, its inner has a closure coinciding with the closure of $D_t(\cdot)$. Without loss of generality, the sets $D_t(\cdot)$ in the equilibrium (5.2.6) can be considered open; see [175, Corollary 6.3.1].
- 4) In the equilibrium (5.2.6), equations (5.2.4) can be called the Bellman equations because hedging strategies disappear in (5.2.9), and optimization is performed over the mixed market strategies only.
- 5) In the case of no trading constraints ($D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$), the barrier cone $\text{bar}(D_t(\cdot))$ contains the single point 0. Under condition (5.2.11), formula (5.2.9) is simplified to

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot), \int y Q(dy)=0} \int w_t(\cdot, y) Q(dy). \quad (5.2.13)$$

Thus, maximization is performed over the “martingale” measures.

- 6) Due to $0 \in D_t(\cdot)$, we have $\sigma_{D_t(\cdot)}(y) \geq 0$ for all $y \in \mathbb{R}^n$. In particular, the polar cone takes the form $D_t^0(\cdot) = \{y : \sigma_{D_t(\cdot)}(y) = 0\}$.

Proposition 5.2.2. *Let $D_t(\cdot)$ be a compact convex set containing 0. Then the equilibrium (5.2.6) exists for the class $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$. Moreover, the infimum in (5.2.1) and (5.2.2) is reached for some $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$.*

Proof. The functional $F_{t,\cdot}$ defined by

$$F_{t,\cdot}(h, Q) = \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy)$$

is affine in each argument, the function $h \mapsto F_{t,\cdot}(h, Q)$ is continuous, the set D is non-empty, compact, and convex, and the set $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ is non-empty and convex. Therefore, applying the Kneser theorem [130], we establish the existence of (5.2.6). \square

Remark 5.2.3.

- 1) Recall that the value $\rho_t(\cdot)$ in (5.2.1) is independent of the chosen class $\mathcal{P}_t(\cdot)$ satisfying properties 1) and 2); see Lemma 5.1.1. Generally speaking, the value $\rho'_t(\cdot)$ in (5.2.2) depends on the particular choice of $\mathcal{P}_t(\cdot)$.

- 2) Under the conditions of Proposition 5.2.2 with the equilibrium $\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot)$, where the latter value is given by (5.2.9), the Bellman equations (5.2.4) need no additional properties of the Bellman functions v_t^* (or equivalently, those of the functions w_t).

We adopt the notations of formula (3.2.4) from Chapter 3:

$$\widehat{D}_t^a(\cdot) = \{h \in D_t(\cdot) : \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h) \leq a\}, \quad (5.2.14)$$

where¹⁵ $K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$.

Remark 5.2.4. According to Lemma 3.2.1 of Chapter 3, under Assumption 1.2.2 and the robust condition of no sure arbitrage with unbounded profit (RNDSAUP)¹⁶ with a convex set $D_t(\cdot)$ (Chapter 3), the trading constraints can be modified by replacing $D_t(\cdot)$ with the compact set $\widehat{D}_t^a(\cdot)$, where $a \geq C$, and the constant C is given by (1.2.2) and (1.2.3), without changing the value $\rho_t(\cdot)$ and hence, due to (5.2.4), without changing the solution $v_t^*(\cdot)$ of equation (BI).

Let

$$\begin{aligned} \rho_t^{(a)}(\cdot) &= \inf_{h \in \widehat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy); \\ \rho'_t{}^{(a)}(\cdot) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))} \inf_{h \in \widehat{D}_t^a(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy) = \\ &\sup_{Q \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))} \left[\int w_t(\cdot, y) Q(dy) - \sigma_{\widehat{D}_t^a(\cdot)} \left(\int y Q(dy) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

This equality holds by Proposition 5.2.1 since any function is integrable with respect to a measure $Q \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$. As the set $\widehat{D}_t^a(\cdot)$ is compact, we apply Proposition 5.2.2 to establish an equilibrium under the new trading constraints $\widehat{D}_t^a(\cdot)$:

$$\rho_t(\cdot) = \rho_t^{(a)}(\cdot) = \rho'_t{}^{(a)}(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot),$$

where $\rho'_t(\cdot)$ is given by (5.2.2) with the initial trading constraints $D_t(\cdot)$. However, the coincidence of $\rho_t^{(a)}(\cdot)$ and $\rho'_t{}^{(a)}(\cdot)$ requires additional study.

Elaborating the theory for noncompact convex sets $D_t(\cdot)$ (which can be unbounded) without additional requirements for the function $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ may cause significant technical complications; for example, see [179; 181] or [86]. Such considerations, therefore, go beyond the scope of this research. However, under additional assumptions on w_t , the corresponding result will be provided in Proposition 5.2.3 and Corollary 5.2.1 below.

At the same time, the case of a market without trading constraints can be reduced to Proposition 5.2.2 without additional requirements for the function $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ by

¹⁵Note that $\sigma_{K_t(\cdot)}(\cdot) = \sigma_{K_t^*(\cdot)}(\cdot)$.

¹⁶Recall that the geometrical criterion for RNDSAUP is $0 \in \text{int}\{z \in \mathbb{R}^n : (z + K_t^*(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset\}$.

assuming no arbitrage opportunities (NDAO). The corresponding result on $\rho_t^{(a)}(\cdot) = \rho_t^*(\cdot)$ will be proved in Theorem 5.3.1; see the next section of this chapter.

An alternative result on equilibrium is based on the following assumption (the smoothness of the solutions $v_t^*(\cdot)$ of the Bellman–Isaacs equations¹⁷):

For $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ the functions $\bar{x}_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_t)$ are upper semicontinuous. (USC)

Sufficient conditions for (USC) have been provided in Theorem 3.1.4 of Chapter 3: the upper semicontinuity of the compact-valued mappings $x \mapsto K_t(x)$, the lower semicontinuity of the set-valued mappings $x \mapsto D_t(x)$, and the upper semicontinuity of the payoff functions g_t , $t = 1, \dots, N$.

Proposition 5.2.3. *Let $D_t(\cdot)$ be a convex set containing the point 0.*

- 1) *If condition (USC) holds, there exists the equilibrium (5.2.6) for the class¹⁸ $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}(K_t(\cdot))$; in this case, the supremum is reached for some $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))$.*
- 2) *If condition (USC) holds with the compact set $D_t(\cdot)$, the finite value of the hedger–market game at step t is achieved at some saddle point represented by the optimal pair $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))$.*

Proof. By the Alexandroff theorem¹⁹, the weak convergence of the probability measures Q_n to the measure Q in Polish (separable completely metrizable) space with the Borel σ -algebra is equivalent to the fact that any upper semicontinuous and bounded above numerical function f satisfies the inequality

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f dQ_n \leq \int f dQ.$$

¹⁷Obviously, this assumption is equivalent to the upper semicontinuity of the functions $w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y)$.

¹⁸Recall that $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$ is the set of all probability measures on $K_t(\cdot)$ with the Borel σ -algebra.

¹⁹Here, we refer to §16 [2, Theorem 2] on the lower (upper) semicontinuity of a function whose argument runs through the set of probability measures, and the value is a measure of an open (closed, respectively) set. However, this result is easily generalized to the case of the integral of a semicontinuous function; for example, see [240, Theorem 8.1], called the Portmanteau theorem by the author. (Figuratively, this means “everything collected in one place.”) In the first edition (1968) of the well-known and highly cited book [32], Patrick Billingsley fairly attributed the theorem to Alexandroff’s papers published in 1940–1943; see his remark in § 2 of Chapter 1. However, in the second edition [33] of the book (1999), Billingsley decided to joke: on page 15, Alexandroff was replaced with fictional mathematician Portmanteau. Note that Billingsley’s prank more than succeeded: now, this result is often called Portmanteau’s theorem. The French-language version of Wikipedia has a witty remark on the subject: “Dans la deuxième édition de Convergence of Probability Measures, Billingsley attribue le théorème à Jean-Pierre Portmanteau, de l’université de Felletin, dans un papier que Jean-Pierre Portmanteau aurait publié en 1915 dans Annals of the University of Felletin, sous le titre farfelu “Espoir pour l’ensemble vide”. Il s’agit d’un canular : il n’y a pas de mathématicien portant le nom de Jean-Pierre Portmanteau, et il n’y a jamais eu d’université à Felletin. Et, surtout, il n’y a jamais eu d’espoir pour l’ensemble vide...”

By Theorem 1.2.1, the solutions of the Bellman–Isaacs equations are bounded above. Therefore, being affine in each variable, the functional

$$F_{t,\cdot}(h, Q) = \int [w_t(\cdot, y) - hy]Q(dy)$$

is upper semicontinuous in Q in a weak topology²⁰ on the set $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$ of all probability measures on $K_t(\cdot)$ with the Borel σ -algebra. Choosing as $\mathcal{P}_t(\cdot)$ the set $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$, which is compact in a weak topology, we again apply the Kneser theorem, this time on the “left” side of the functional F (i.e., with Assumption 4° instead of 3°, corresponding to the right side). Thus, there exists the equilibrium (5.2.6) with $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}(K_t(\cdot))$.

The supremum in the corresponding expressions is reached because an upper semicontinuous function reaches maximum on a compact set. Item 2) follows from item 1) and Proposition 5.2.2. \square

Corollary 5.2.1. *Assume that the following conditions hold: RNDSAUP (the robust condition of no deterministic sure arbitrage with unbounded profit)²¹, (USC) (upper semicontinuity of the objective functions), (B) (boundedness above of the payoff functions)²², and convex-valued $D_t(\cdot) \ni 0$ takes closed values, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.*

Then the finite value of the hedger–market game at step $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ is achieved at some saddle point represented by the optimal pair²³ $h_t^(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))$.*

Proof. By item 1) of Proposition 5.2.3, there exists the equilibrium (5.2.6) for the mixed extension $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}(K_t(\cdot))$; moreover, the supremum is achieved for some $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))$. Due to RNDSAUP and the closedness of $D_t(\cdot)$, we apply Lemma 3.2.1.

Like in Remark 5.2.4, we replace $D_t(\cdot)$ with the compact convex set $\widehat{D}_t^a(\cdot)$ (5.2.14), where $a \geq C$ and the constant C is given by (1.2.2) and (1.2.3).

For the new trading constraints, we apply item 2) of Proposition 5.2.3. Moreover, the inequalities

$$\rho_t(\cdot) = \rho_t^{(a)}(\cdot) \geq \rho_t^{\prime(a)}(\cdot) \geq \rho_t'(\cdot),$$

where the notations correspond to (5.2.15), turn into equalities due to the equilibrium in the original model. \square

Remark 5.2.5. In fact, Lemma 3.2.1 provides more information: for the model with the original trading constraints, the function $h \mapsto \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]$ achieves the minimum $\rho_t(\cdot)$ at some point $h^*(\cdot) \in \widehat{D}_t^C$, where the constant C is given by (1.2.2) and (1.2.3).

²⁰This is the weakest topology for which the functionals $Q \mapsto \int f dQ$ are continuous for any bounded continuous function $f : Y \mapsto \mathbb{R}$. Note that this topology is metrizable for a Polish space; for example, see [32]. Therefore, it suffices to consider the convergence of sequences (not nets).

²¹Recall that the compactness of $D_t(\cdot)$ is a sufficient condition for RNDSAUP.

²²According to Chapter 3, the two conditions (i.e., (USC) and (B)) hold under the upper semicontinuity of the set-valued mappings $x \mapsto K_t(x)$, the lower semicontinuity of the set-valued mappings $x \mapsto D_t(x)$, and the upper semicontinuity of the payoff functions g_t , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

²³A stronger assertion is presented in item 1) of Theorem 8.2.1.

Remark 5.2.6. As we believe, the boundedness of $D_t(\cdot)$ can be a quite realistic assumption from an economic point of view: leverage is usually restricted by collateral requirements and requirements for economic and regulatory capital. In addition, risk management often sets limits on portfolio risk indices and concentration; see Example 1.1.4 in Chapter 1. Moreover, it is hardly safe to use hedging strategies with unbounded large positions. Finally, unbounded positions can not be realised in practice.

Useful corollaries can be drawn from Proposition 2.2.3 of Chapter 2. It contains conclusions about the nature of arbitrage in the market at a time instant t for given sets $K_t(\cdot)$ and $D_t(\cdot)$ in terms of some game with the value $\pi_t(\cdot)$. The value $\pi_t(\cdot)$ is interpreted as the guaranteed (risk-free) profit from a one-step operation at a time instant t with admissible strategies. Here we need only items 1) and 2) of this proposition.

Recall that in the case of sure arbitrage ($\pi_t(\cdot) > 0$), we distinguish between two situations as follows. According to the terminology proposed in Chapter 2, sure arbitrage with unbounded profit (SAUP) holds at a time instant t if $\pi_t(\cdot) = +\infty$; sure arbitrage with bounded profit (SABP) holds at a time instant t if $0 < \pi_t(\cdot) < +\infty$.

Proposition 2.2.3 of Chapter 2 allows estimating $\rho_t(\cdot)$ and $\rho'_t(\cdot)$ in (5.2.1) and (5.2.2). Using $\pi_t(\cdot)$, we derive a lower bound for ρ' and an upper bound for ρ , better than (5.2.3).

Proposition 5.2.4. *The following inequalities hold:*

$$C - \pi_t(\cdot) \geq \rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot) \geq -\pi_t(\cdot). \quad (5.2.16)$$

Proof. Due to $0 \leq v_t(\cdot, x_{t-1} + y) \leq C$ for all $y \in K_t(\cdot)$, denoting $m(Q) = \int y Q(dy)$, we have

$$C + \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} [-hm(Q)] \geq \rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot) \geq \sup_{h \in D_t(\cdot)} \inf_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} [-hm(Q)].$$

Clearly, $m(Q)$ runs through $\text{conv}(K_t(\cdot))$ as Q runs through $\mathcal{P}_t(\cdot)$. (This result follows from the properties of the admissible class $\mathcal{P}_t(\cdot)$.)

Therefore,

$$C - \sup_{h \in D_t(\cdot)} \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} hy \geq \rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot) \geq - \min_{y \in \text{conv}(K_t(\cdot))} \sup_{h \in D_t(\cdot)} hy,$$

which yields (5.2.16) by equality (2.2.6). \square

Remark 5.2.7.

- 1) In the case of no trading constraints, when sure arbitrage holds, we have unbounded profit (SAUP); in this case, $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$.
- 2) Under SAUP ($\pi_t(\cdot) = +\infty$), inequalities (5.2.16) lead to the equilibrium $\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot) = -\infty$. Due to (5.2.3), when unbounded guaranteed profit can be gained, there is no need to create reserves for covering liabilities in the future.

- 3) Also, in the case $C = 0$ ($g_t \equiv 0, t = 1, \dots, N$), inequalities (5.2.16) lead to the equilibrium $\rho_t = \rho'_t = -\pi_t(\cdot)$.
- 4) Moreover, inequalities (5.2.16) together with item 2) of Proposition 2.2.3 imply $\rho'_t(\cdot) \geq 0$ under NDSA.

Remark 5.2.8. Now consider a European option with a terminal payoff function $g(x_0, \dots, x_N) = g(\cdot) \geq 0$ such that $g(\cdot) \leq C$. Formally letting $g_t \equiv -\infty$ for $t = 0, \dots, N - 1$ and $g_N = g(\cdot)$ in (5.2.4), we obtain the Bellman–Isaacs equations for this option:

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= \rho_t(\cdot) \text{ for } t = N, \dots, 1. \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

It is easy to demonstrate that $v_t^*(\cdot) \geq 0$ for all $t = 0, \dots, N$ under NDSA. Indeed, for $t = N$, this result follows from the nonnegativity of g . Using inequality (5.2.5) and item 3) of Remark 5.2.7, we have $\rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot) \geq 0, t = N, \dots, 1$. Therefore, according to (5.2.17), $v_{t-1}^*(\cdot) = \rho_t(\cdot) \geq 0$. Thus, $v_t^*(\cdot) \geq 0$ for all $t = 0, 1, \dots, N$; choosing $g_t \equiv 0$ for $t = 0, \dots, N - 1$ and $g_N = g$ gives the same Bellman–Isaacs function v_t^* in equations (5.2.4) as for $g_t = -\infty, t = 0, \dots, N - 1$. In other words, the European option is a particular case of the American option if NDSA holds. Moreover, in the case of equilibrium (5.2.6), we obtain the Bellman equations (5.2.17), where $\rho_{t-1}(\cdot) = \rho'_{t-1}(\cdot)$ is given by (5.2.9).

A Bermuda option can be considered by analogy: under NDSA, it becomes a particular case of the American option (some payoff functions are zero, and some are nonnegative).

The following question seems natural: when will equality (5.2.6) be violated, turning (5.2.5) into a strict inequality? Well, it is necessary to construct an example without equilibrium. Based on the results of this section, in such an example:

- 1) The $D_t(\cdot)$ should not be compact.
- 2) The function $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ should not be upper semicontinuous.
- 3) In the case of sure arbitrage, there should not be unbounded profit.
- 4) In the case of no trading constraints, NDAO should fail, and there should be no sure arbitrage.

Example 5.2.1. Consider a one-dimensional one-step multiplicative model without trading constraints; see Example 2.2.2 of Chapter 2. The parameters of this model guarantee the presence of arbitrage opportunities but no sure arbitrage. For the reader's convenience, we reproduce its description below.

The price X_t^1 of the single risky asset will be written without the superscript as X_t . The price dynamics of this asset are given by the multiplicative representation

$$X_t = M_t X_{t-1}, \quad t = 1, \dots, N,$$

where $X_0 > 0$.

It is a priori known that $M_t \in [\alpha, \beta]$, $\beta > \alpha > 0$. According to the terminology adopted in Section 1.1 of Chapter 1, this model is stationary and multiplicatively independent. Here, $K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = [x_{t-1}(\alpha - 1), x_{t-1}(\beta - 1)]$.

NDAO, the condition of no deterministic arbitrage opportunities, is obviously equivalent to $1 \in (\alpha, \beta)$: in one period, the price of the risky asset may both increase and decrease in the future. In other words, the return $R_t = M_t - 1$ on the risky asset during period t can be both positive and negative. If $\alpha = 1$ or $\beta = 1$, there is an arbitrage opportunity, but NDSA holds (no sure arbitrage). If $\alpha > 1$ or $\beta < 1$, there is sure arbitrage.

Next, consider the one-step particular case of this model with $N = 1$. Choosing $\alpha = 1$ and the initial price $X_0 = 1$ yields $K_1(1) = [0, b]$, where $b = \beta - 1 > 0$. We take a binary²⁴ call option with the payoff function²⁵ $g_1(x) = I_{(1,+\infty)}(x)$. Obviously, this function is not upper semicontinuous, although being lower semicontinuous. In this case, $v_1^*(1, 1 + y) = g_1(1 + y) = I_{(0,+\infty)}(y)$.

According to Lemma 5.1.1, in this model,

$$\rho_t(\cdot) = \min_{h \in \mathbb{R}^1} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [v_1^*(1, 1 + y) - hy] Q(dy) = \min_{h \in \mathbb{R}^1} \sup_{y \in K_1(1)} [I_{(0,+\infty)}(y) - hy].$$

Since

$$\sup_{y \in [0, b]} [I_{(0,+\infty)}y - hy] = \begin{cases} 1 & \text{if } h \geq 0, \\ 1 - bh & \text{if } h < 0, \end{cases} \quad (5.2.18)$$

the expression (5.2.18) takes the minimum value 1 for $h \geq 0$. Thus,

$$\rho_1(1) = 1.$$

This is the case when the market moves first. The cunning hedger's first move would undeservedly yield him the result

$$\rho'_1(1) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_1(\cdot)} \min_{h \in \mathbb{R}^1} \int [v_1^*(1, 1 + y) - hy] Q(dy).$$

Clearly,

$$\min_{h \in \mathbb{R}^1} \int [I_{(0,+\infty)}y - hy] Q(dy) = \begin{cases} -\infty & \text{if } m(Q) \neq 0, \\ 0 & \text{if } m(Q) = 0. \end{cases} \quad (5.2.19)$$

The equality $m(Q) = 0$ holds only if $Q = \delta_0$, i.e., the measure is concentrated at the point 0. Therefore, the expression (5.2.19) attains the maximum value 0 for $Q = \delta_0$; hence,

$$\rho'_1(1) = 0.$$

²⁴Such options are also called digital.

²⁵Here I_A denotes the indicator of a set A : $I_A(x) = 1$ for $x \in A$, and $I_A(x) = 0$ for $x \notin A$. The initial price choice corresponds to the so-called tie (the breakeven point).

Well, this example illustrates the essential nature of conditions (USC), the compactness of $D_t(\cdot)$, and (in the case of no trading constraints) NDAO for the existence of equilibrium 5.2.6.

No game equilibrium in this example is observed under a bifurcation: by analogy with the theory of dynamical systems, it is understood as a qualitative change in the model's behavior (in our case, the qualitative property is "no arbitrage") under an infinitesimal variation of its dynamic parameters.

□

In Section 2.3 of Chapter 2, we have posed the following question: will hedging make sense under sure arbitrage with bounded profit (SABP)? As discovered, the answer to this question is negative for the one-dimensional problem (with a single risky asset): the optimal strategy corresponds to gaining the maximum possible profit.

In the two-dimensional case, however, it is possible to give a positive answer, which indicates the economic feasibility of superhedging for rainbow options.²⁶

Example 5.2.2. Consider a one-step ($t \in \{0, 1\}$) model with two risky assets and multiplicatively independent price dynamics:

$$\begin{aligned} X_1^1 &= M_1^1 X_0^1, & M_1^1 &\in [\alpha^1, \beta^1] \\ X_1^2 &= M_1^2 X_0^2, & M_1^2 &\in [\alpha^2, \beta^2]. \end{aligned}$$

The initial prices are known:

$$X_0^1 = x_0^1 > 0, \quad X_0^2 = x_0^2 > 0.$$

Then²⁷

$$\Delta X_1 = X_1 - X_0 \in K = K_1(x_0) = [a^1(x_0), b^1(x_0)] \times [a^2(x_0), b^2(x_0)],$$

where $a^i = a^i(x_0) = (\alpha^i - 1)x_0^i$ and $b^i = b^i(x_0) = (\beta^i - 1)x_0^i$, $i = 1, 2$.

Let the trading constraints consist in forbidding short positions on risky assets and a limit $r > 0$ on the investment $h = (h^1, h^2)$ in risky assets. In other words,

$$h^1 \geq 0, \quad h^2 \geq 0, \quad h^1 x_0^1 + h^2 x_0^2 \leq r,$$

i.e., $h \in D = D_1(x_0)$, where D is a triangle²⁸ with the vertices $(0, 0)$, $(\varepsilon_1, 0)$, and $(0, \varepsilon_2)$, where $\varepsilon_1 = r/x_0^1 > 0$ and $\varepsilon_2 = r/x_0^2 > 0$.

Suppose that the hedger has a contingent liability on a straddle option²⁹ for the second asset. That is, the payoff function has the form

$$g(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = |x_1^2 - x_0^2| = |\Delta x_1^2| = |y^2|,$$

²⁶The number of risky assets in the (potential) payoff functions $g_t(\cdot)$ is at least two.

²⁷Note that in this example, the compact set K is convex.

²⁸Note that D is compact, $\text{bar}(D) = \mathbb{R}^n$, and hence $\text{bar}(D) \cap \text{conv}(K) = K$.

²⁹This is a combination of two options: long positions on call and put options for the same asset with the same exercise price (the current price of the underlying asset) and the same exercise time.

where $y^i = \Delta x_1^i$, $i = 1, 2$. Next, we impose the following conditions on the parameters α^i and β^i , $i = 1, 2$: $\beta^1 > \alpha^1 > 1$ and $\alpha^2 < 1 < \beta^2$. They guarantee the existence of sure arbitrage³⁰ for the first risky asset and no arbitrage opportunities for the second one.³¹ These conditions are equivalent to $b^1 > a^1 > 0$ and $a^2 < 0 < b^2$, respectively.

Since $D_t(\cdot)$ is compact in this example, by Proposition 5.2.2 there exists an equilibrium in the class of mixed strategies $\mathcal{P}^*(K)$, i.e., $\rho_t(\cdot) = \rho'(\cdot)$. We solve problem (5.2.9) in two stages: constrained optimization subject to $\int yQ(dy) = z$ at the first stage and optimization of the resulting intermediate solution with respect to z at the second stage.

The first stage reduces to finding the convex hull³² f^* of the function $f(y^1, y^2) = |y^2|$. In this example, this is easy due to the convexity of f and the rectangularity of K :

$$f^*(z_1, z_2) = \gamma z_2 + \delta, \quad z = (z_1, z_2) \in K,$$

where

$$\gamma = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \quad \delta = -\frac{2b^2a^2}{b^2 - a^2} > 0.$$

The second stage is to maximize the concave function

$$(z_1, z_2) \mapsto f^*(z_1, z_2) - \sigma_D(z_1, z_2)$$

with respect to $z = (z_1, z_2)$ on the set K . Here, the support function σ_D has the form

$$\sigma_D(z_1, z_2) = 0 \vee (\varepsilon_1 z_1) \vee (\varepsilon_2 z_2) = (\varepsilon_1 z_1) \vee (\varepsilon_2 z_2)$$

since $z_1 \geq a^1 > 0$. Now we choose α^2 and β^2 so that $\alpha^2 + \beta^2 > 2$, i.e., $a^2 + b^2 > 0$; then $\gamma > 0$. In addition, let $\gamma < \varepsilon_2$ and $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a^1 < b^2$. (This condition applies to the initial prices x_0 .) Then w achieves maximum for $z_1 = a_1$ and $\varepsilon_1 z_1 = \varepsilon_2 z_2$, i.e., at the point $z^* = (z_1^*, z_2^*) = (a^1, c^2) \in K$, where $c^2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a^1 = \frac{x_0^2}{x_0^1} a^1$ and $a^2 < c^2 < b^2$. This maximum is achieved for mixed strategies concentrated at most at three points: vertices of the rectangle K due to the convex payoff function. The point z^* lies on a side of the rectangle K , i.e., the segment connecting the vertices (a^1, a^2) and (a^1, b^2) . Therefore, the maximum is achieved for the mixed distribution concentrated at the two points (a^1, a^2) and (a^1, b^2) :

$$Q^* = q_1 \delta_{(a^1, a^2)} + \delta_{(a^1, b^2)},$$

where q_1 and q_2 satisfy the system of linear equations

$$\begin{cases} q_1 a^1 + q_2 b^2 = c^2, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

³⁰This means transactions only with this asset.

³¹Similar to the previous footnote.

³²General results on this topic are presented in Chapter 7.

These values are

$$q_1 = \frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2} > 0, \quad q_2 = \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2} > 0.$$

It is easy to find the minimizer $h^* \in D$ for the function $h \mapsto \varphi(h) = \bigvee_{y \in K'} (|y^2| - hy)$, where $K' = \{(a^1, a^2), (a^1, b^2)\}$. Since

$$\varphi(h) = (|a^2| - h^1 a^1 - h^2 a^2) \bigvee (|b^2| - h^1 a^1 - h^2 b^2) = -h^1 a^1 + (-a^2 - h^2 a^2) \bigvee (b^2 - h^2 b^2),$$

φ achieves minimum on D for

$$h^{2*} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} = \gamma > 0,$$

$$h^{1*} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} (\varepsilon_2 - \gamma) = \frac{r - \gamma x_0^2}{x_0^1} > 0.$$

Under the chosen parameters, the hedger's optimal strategy $h^* = (h^{1*}, h^{2*})$ is to take long positions on both risky assets: hedge the position on the second asset (as if the first asset was absent) by purchasing it for the amount $h^{2*} x_0^2 = \gamma x_0^2 > 0$ and invest in the first asset for (bounded) arbitrage by purchasing it for the amount $h^{1*} x_0^1 = r - \gamma x_0^2 > 0$ within the limit r .

The strategy $\check{h} = (\check{h}^1, \check{h}^2)$ corresponding to the maximum investment in the first (arbitrage) asset, i.e.,

$$\check{h}^1 = \varepsilon_1, \quad \check{h}^2 = 0,$$

yields the guaranteed result on potential losses

$$\check{v} = \sup_{y \in K} (g(x^0 + y) - \check{h}y) = \sup_{y^1 \in [a^1, b^1]} \sup_{y^2 \in [a^2, b^2]} (|y^2| - \varepsilon_1 y^1) = b^2 - \varepsilon_1 a^1.$$

The optimal result based on the strategy h^* is better:

$$v_0^* = u_1(z^*) = \left[\gamma \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a^1 \right) + \delta \right] - \varepsilon_1 a^1 < [\gamma b^2 + \delta] - \varepsilon_1 a^1 = b^2 - \varepsilon_1 a^1 = \check{v}$$

because $\gamma > 0$ and $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} a^1 < b^2$ due to the chosen parameters. □

5.3 Equilibrium in the Case of No Trading Constraints

This section considers the mixed extension $\mathcal{P}_t(\cdot)$ of the class of pure strategies³³ in the form $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$, which is the class of all probability measures with finite support contained in the compact set $K_t(\cdot)$. Note that this class is admissible

³³Recall that the mixed extension includes only probability measures with support contained in $K_t(\cdot)$ and all probability measures concentrated at a single point $y \in K_t(\cdot)$.

(convex). In the case of no trading constraints, $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, and formulas (5.2.1) and (5.2.2) become

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in \mathbb{R}^n} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy) \quad (5.3.1)$$

and

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \inf_{h \in \mathbb{R}^n} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy), \quad (5.3.2)$$

respectively.

The integrals in (5.3.1) and (5.3.2) are well defined with respect to a measure Q from $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$. (Any numerical function is integrable, so measurability is not needed.)

The main outcome of this section—Theorem 5.3.1 below—will be proved using auxiliary results. In particular, the following “folklore” fact is fruitful for further considerations.

Lemma 5.3.1. *Let Q be a probability measure on $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Then*

$$\int y Q(dy) \in \text{ri}(\text{conv}(\text{supp}(Q))).$$

Lemma 5.3.1 is immediate from a more general result; see [237, Theorem 1] for an arbitrary normalized space. However, its proof involved [237, Lemma 1] on the topological support of a measure, which was established incorrectly due to assuming the tightness property of the measure. Generally speaking, this property fails for a normalized space but holds for a complete separable space (particularly, for finite-dimensional spaces); see the classical result by Yu. V. Prokhorov [170]. The relevant property of topological support was discussed in [244]. Thus, a correct proof in [237] should assume that the normalized space is a separable Banach space. Meanwhile, the statement of [237, Lemma 1] remains valid for a separable metric space (not necessarily complete). We therefore reformulate [237, Theorem 1] by adding the separability assumption³⁴ for the normalized space X .

The barycenter (mean value) $m(Q) = \int y Q(dy)$ of a probability measure Q is defined through the Gelfand–Pettis integral, i.e., if there exists a vector $m(Q) \in X$ such that

$$\varphi(m(Q)) = \int \varphi(y) Q(dy)$$

for an arbitrary linear continuous functional φ on X .

Theorem (Borwein–Tijjs). *Let X be a separable normalized space, and Q be a probability measure defined on the corresponding Borel σ -algebra. If there exists a set $V \subseteq X$ such that*

³⁴In this context, we mention the measure problem [32, Appendix III]: the existence of a separable support of a measure defined on the Borel σ -algebra of a metric space. This set-theoretic problem is associated with the existence of measurable cardinals. Generally speaking, the answer depends on the choice of a particular axiomatic system of set theory. By the way, this situation is characteristic of the properties of topological carriers for general topological spaces; for example, see [187].

- a) $\text{cl}(V) = \text{supp}(Q)$
and
 b) $\text{ri}(\text{conv}(V)) \neq \emptyset$

then

$$m(Q) \in \text{ri}(\text{conv}(V)).$$

Remark 5.3.1. In a finite-dimensional space X , the relative interior of a non-empty convex set is always non-empty; for example, see [175, Theorem 6.2]. However, condition b) of this theorem may fail in the infinite-dimensional case.

As an illustration of this fact, we consider the Hilbert space ℓ^2 of square summable sequences with an orthonormal basis $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ and a discrete probability measure Q concentrated at the points $a_k \mathbf{e}_k$, where $a_k \neq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$, and $p_k = Q(\{a_k \mathbf{e}_k\}) > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Calculating the mean value $y = \int x Q(dx)$ using the Gelfand–Pettis integral yields $y = \sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k \mathbf{e}_k \in \ell^2$. Obviously, $y \notin \text{conv}(\text{supp}(Q))$ since the convex hull contains only finite convex combinations of the vectors $a_k \mathbf{e}_k$.

In this example, $\text{supp}(Q) = \{0, a_1 \mathbf{e}_1, a_2 \mathbf{e}_2, \dots\}$, and the zero vector 0 is the unique limit point. Therefore, condition a) will hold only for two choices of the set $V \subseteq X : V = \text{supp}(Q)$ and $V = \text{supp}(Q) \setminus \{0\}$. In each of the cases, $\text{ri}(\text{conv}(V)) = \text{int}(\text{conv}(V)) = \emptyset$ because an open ball with center $x \in X$ and an arbitrarily small radius ε contains points with all nonzero coordinates in the selected basis.³⁵

Now we provide a sufficient condition for NDAO (no deterministic arbitrage opportunities) in terms of “risk-neutral” probabilities.

Proposition 5.3.1. *Assume that there are no trading constraints. If for $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ there exist probability measures $Q_{t,\cdot}$ such that $\text{supp}(Q_{t,\cdot}) \subseteq K_t(\cdot)$, $\int y Q_{t,\cdot}(dy) = 0$, and $\dim(\text{conv}(\text{supp}(Q_{t,\cdot}))) = \dim(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, then NDAO holds.*

Proof. Clearly,

$$\text{conv}(\text{supp}(Q_{t,\cdot})) \subseteq \text{conv}(K_t(\cdot)), \quad (5.3.3)$$

and both sets figuring in (5.3.3) are compact and therefore closed. Supposing $\text{rbd}(\text{conv}(\text{supp}(Q_{t,\cdot}))) \subseteq \text{rbd}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$ leads to $\dim(\text{conv}(\text{supp}(Q_{t,\cdot}))) < \dim(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, by [175, Corollary 6.3.3], which contradicts the hypotheses of this proposition. Thus, we apply [175, Corollary 6.5.2] to obtain

$$\text{ri}(\text{conv}(\text{supp}(Q_{t,\cdot}))) \subseteq \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))). \quad (5.3.4)$$

Finally, Lemma 5.3.1 and inclusion (5.3.4) imply $0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, which is equivalent to NDAO. \square

The following result was proved in [93, Theorem 1.49].

³⁵Such a point can be the ball center $x \in X$ itself. Otherwise, if the coordinates of the vector x with numbers i_1, i_2, \dots are zero, we simply take nonzero values β_1, β_2, \dots such that $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \varepsilon^2$ and add the vector $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mathbf{e}_{i_k}$ to the vector x .

Proposition 5.3.2. Let P be a probability measure on $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, and $\mathfrak{N}(P)$ be the class of all probability measures equivalent to P that have finite mean³⁶, i.e., $\mathfrak{N}(P) = \{Q \sim P : \int \|y\|Q(dy) < \infty\}$. Then

$$M_P = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \int yQ(dy), Q \in \mathfrak{N}(P)\} = \text{ri}(\text{conv}(\text{supp}(P))).$$

Proposition 5.3.3. Let $K \subseteq \mathbb{R}^n$ be a compact set such that $0 \in \text{ri}(K^*)$, where $K^* = \text{conv}(K)$. We denote³⁷

$$r^*(K) = \inf_{h \in S_1(0) \cap \text{lin}(K)} \sigma_K(h). \quad (5.3.5)$$

Then $r^*(K) > 0$, and for any measures $Q^1 \in \mathcal{P}^*(K)$ and $Q^2 \in \mathcal{P}(K)$, there exist measures $\tilde{Q}^1 \in \mathcal{P}^*(K)$ and $\tilde{Q}^2 \sim Q^2$, respectively, such that

$$m(\tilde{Q}^i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.3.6)$$

$$\|Q^i - \tilde{Q}^i\|_{TV} \leq \frac{2\|m(Q^i)\|}{\|m(Q^i)\| + r^*(K)}, \quad i = 1, 2, \quad (5.3.7)$$

where $\|\mu\|_{TV}$ is the total variation norm of signed measure μ ; $m(Q) = \int yQ(dy)$; $\|\cdot\|$ is the Euclidean norm on \mathbb{R}^n .

Proof. In the space $L^* = \text{lin}(K)$ (equipped with the induced Euclidean norm), formula (5.3.5) defines the maximum radius of a ball inscribed in K^* and centered at the point 0. That is, $r^*(K) = \max\{r : \bar{B}_r^*(0) = \bar{B}_r(0) \cap L^* \subseteq K^*\}$. Obviously, $0 \in \text{ri}(K^*)$ implies $r^*(K) > 0$.

If $m(Q^i) = 0$ for $i = 1$ or $i = 2$, letting $\tilde{Q}^i = Q^i$ gives the desired result. Now suppose that $m(Q^i) \neq 0$. We denote

$$p(Q^i) = \frac{\|m(Q^i)\|}{\|m(Q^i)\| + R}, \quad (5.3.8)$$

where $R \in (0, r^*(K))$, and let

$$y(Q^i) = -\frac{1 - p(Q^i)}{p(Q^i)}m(Q^i) = -\frac{R}{\|m(Q^i)\|}m(Q^i). \quad (5.3.9)$$

In this case, $\|y(Q^i)\| = R < r^*(K)$, and $y(Q^i) \in -\frac{R}{\|m(Q^i)\|}$ because $m(Q^i) \in K^*$, $K^* \subseteq L^*$. Therefore,

$$y(Q^i) \in \bar{B}_R(0) \cap L^* \subseteq \text{ri}(K^*) \subseteq K^*. \quad (5.3.10)$$

Consequently, $y(Q^1)$ can be represented as a convex combination of m points³⁸ y^1, \dots, y^m from K , i.e.,

$$y(Q^1) = \sum_{j=1}^m q^j y^j$$

³⁶Here, $\|\cdot\|$ indicates any norm on \mathbb{R}^n (one of the equivalent norms).

³⁷According to the natural convention, $\inf \emptyset = +\infty$ and $1/\infty = 0$.

³⁸By Carathéodory's theorem, $m \leq n + 1$.

with some coefficients $q^j \geq 0$, $\sum_{j=1}^m q^j = 1$.

Letting $\widehat{Q}^1 = \sum_{j=1}^m q^j \delta_{y^j}$ yields $m(\widehat{Q}^1) = y(Q^1)$ and $\text{supp}(\widehat{Q}^1) \subseteq K$, i.e., $\widehat{Q}^1 \in \mathcal{P}^*(K)$.

Using Proposition 5.3.2 and the relation (5.3.10), we can find a measure $\widetilde{Q}^2 \sim Q^2$ such that $m(\widetilde{Q}^2) = y(Q^2)$.

Now let

$$\widetilde{Q}^i = (1 - p(Q^i))Q^i + p(Q^i)\widehat{Q}^i. \quad (5.3.11)$$

By construction, from (5.3.8), (5.3.9), and (5.3.11) it follows that $\widetilde{Q}^1 \in \mathcal{P}^*(K)$, $\widetilde{Q}^2 \sim Q^2$, and $m(Q^i) = 0$ for $i = 1, 2$ (equation (5.3.6) holds). In addition,

$$\|Q^i - \widetilde{Q}^i\|_{TV} = p(Q^i)\|Q^i - \widehat{Q}^i\|_{TV} \leq 2p(Q^i) = \frac{2\|m(Q^i)\|}{\|m(Q^i)\| + R}, \quad i = 1, 2;$$

due to the arbitrariness of $R \in (0, r^*(K))$, we obtain (5.3.7). \square

Remark 5.3.2. In fact, here we utilize only the closeness of Q^1 and \widetilde{Q}^1 established in Proposition 5.3.3. The closeness of Q^2 and \widetilde{Q}^2 is mentioned due to similar proof based on Proposition 5.3.2. This result will be used in Chapter 9, devoted to the relationship between the deterministic and stochastic approaches.

Theorem 5.3.1. *In the case of no trading constraints ($D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$), let NDAO hold, and the payoff function be bounded (Assumption 1.2.2). Then there exists the equilibrium (5.2.6) for $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))$, the infimum in (5.3.1) is reached for some h^* , and*

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(\cdot), m(Q)=0} \int w_t(\cdot, y)Q(dy), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (5.3.12)$$

Proof. We fix a time instant t and a price history, further denoted by circle for simplicity. Note that if $K_t(\cdot)$ is not of full dimension, the considerations can be reduced to the full-dimensional case (albeit, of small dimension) as follows. Let³⁹ $L_t(\cdot) = \text{lin}(K_t(\cdot))$; if $\dim(L_t(\cdot)) < n$, we expand $h \in \mathbb{R}^n$ into $h = h' + h''$, where $h' \in L_t(\cdot)$, $h'' \in L_t^\perp(\cdot)$, and $L_t^\perp(\cdot)$ is the orthogonal complement of $L_t(\cdot)$. Then, for $h \in \mathbb{R}^n$ and $y \in \text{conv}(K_t(\cdot))$, we have⁴⁰ $hy = h'y$. In other words, it suffices to consider the problem with the trading constraints $D_t^*(\cdot) \equiv L_t(\cdot)$.

Due to $w_t \geq$, we estimate the infimum on the right-hand side of (5.3.1) as a function of $h \in D_t^*(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \varphi_{t,\cdot}(h) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy]Q(dy) = \\ &= \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] \geq \\ &= \max_{y \in K_t(\cdot)} (-hy) = \max_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy) = \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h), \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

³⁹By the geometrical criterion for NDAO, the affine hull of K_t coincides with the linear hull.

⁴⁰Recall that hy stands for the scalar product of vectors.

where $K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$.

By the hypothesis of this theorem, NDAO holds, and by the criterion the point 0 belongs to the interior of $\text{conv}(K_t(\cdot))$ in the relative topology on $D_t^*(\cdot)$. Hence, there exists a closed ball $B_{r_t(\cdot)}(0)$ of radius $r_t(\cdot) > 0$ centered at zero point such that $D_t^*(\cdot) \cap B_{r_t(\cdot)}(0) \subseteq \text{conv}(K_t(\cdot))$. Therefore, for $h \in D_t^*(\cdot)$,

$$\max_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy) \geq \max_{y \in B_{r_t(\cdot)}(0) \cap D_t^*(\cdot)} (-hy) = r_t(\cdot) \|h\|, \quad (5.3.14)$$

where $\| \cdot \|$ denotes the Euclidean norm.

As $r_t(\cdot)$ we choose the maximum possible value for which inequality (5.3.14) holds (see formula (5.3.5)):

$$r_t^*(K_t(\cdot)) = \min_{h \in D_t^*(\cdot), \|h\|=1} \max_{y \in K_t^*(\cdot)} (-hy) = \min_{h \in D^*(\cdot), \|h\|=1} \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h).$$

Without loss of generality, suppose that the constant C from Proposition 1.2.2 is positive.⁴¹ Thus, choosing h with $\|h\| > \frac{C}{r_t^*(K_t(\cdot))}$ yields $\varphi_{t,\cdot}(h) > C$; for such vectors h , the infimum on the right-hand side of (5.3.1) cannot be obviously reached since $\inf_{h \in D_t(\cdot)} \varphi_{t,\cdot}(h) \leq C$.

For an arbitrary value $\delta^* \in (0, 1)$, let $\delta_t(\cdot) = \delta^* r_t^*(K_t(\cdot))$. We choose a sufficiently large value $R_t(\cdot) \geq \frac{C}{\delta_t(\cdot)}$ and let $D_t'(\cdot) = D_t^*(\cdot) \cap B_{R_t(\cdot)}(0)$. If $h \in D_t^*(\cdot)$ does not lie in $D_t'(\cdot)$, then $\|h\| > R_t(\cdot) \geq \frac{C}{\delta_t(\cdot)} > \frac{C}{r_t^*(K_t(\cdot))}$.

The function $h \mapsto \varphi_{t,\cdot}(h)$ is upper semicontinuous (and convex) and achieves minimum at some point $h^* = h_t^*(\cdot)$ of the compact (and convex) set $D_t'(\cdot)$. Hence,

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in \mathbb{R}^n} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] Q(dy) = \min_{h \in D_t'(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] Q(dy).$$

Now, since $D_t'(\cdot)$ is a compact convex set containing the point 0, we apply Proposition 5.2.2: there exists the equilibrium (5.2.6) for $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$, and formula (5.2.9) implies

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))} \left[\int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) - \sigma_{D_t'(\cdot)}(m(Q)) \right], \quad (5.3.15)$$

where $m(Q) = \int y Q(dy) \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \subseteq L_t(\cdot)$. Therefore, in this case,

$$\sigma_{D_t'(\cdot)}(m(Q)) = R_t(\cdot) \|m(Q)\|.$$

Denoting

$$\mathcal{M}_t^\delta(\cdot) = \{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot)) : \|m(Q)\| \leq \delta_t(\cdot)\},$$

from (5.3.15) we obtain the inequality

$$\begin{aligned} \rho_t(\cdot) &\geq \sup_{Q \in \mathcal{M}_t^\delta(\cdot)} \left[\int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) - \sigma_{D_t'(\cdot)}(0) \right] = \\ &\sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot)), m(Q)=0} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy). \end{aligned}$$

⁴¹Otherwise, we have the trivial case of zero payoff functions.

Let us show the opposite inequality:

$$\begin{aligned}
\rho_t(\cdot) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))} \left[\int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) - R_t(\cdot) \|m(Q)\| \right] = \\
&\left[\sup_{Q \in \mathcal{M}_t^\delta(\cdot)} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) - R_t(\cdot) \|m(Q)\| \right] \vee \\
&\left[\sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot)), \|m(Q)\| > \delta_t(\cdot)} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) - R_t(\cdot) \|m(Q)\| \right] \leq \\
&\sup_{Q \in \mathcal{M}_t^\delta(\cdot)} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) \vee [C - R_t(\cdot) \delta_t(\cdot)] = \\
&\sup_{Q \in \mathcal{M}_t^\delta(\cdot)} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy)
\end{aligned}$$

because $w_t \geq 0$, and due to the choice of $R_t(\cdot)$, we have $C - R_t(\cdot) \delta_t(\cdot) \leq 0$. We choose an arbitrary measure $Q \in \mathcal{M}_t^\delta(\cdot)$. According to Proposition 5.3.3, there exists $\tilde{Q} \in \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ such that

$$m(\tilde{Q}) = 0, \quad \|Q - \tilde{Q}\|_{TV} \leq \frac{2\|m(Q)\|}{\|m(Q)\| + r^*(K_t(\cdot))}. \quad (5.3.16)$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
\left| \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) - \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) \tilde{Q}(dy) \right| &\leq C \|Q - \tilde{Q}\|_{TV} \leq \frac{2\|m(Q)\|}{\|m(Q)\| + r^*(K_t(\cdot))} \\
&\frac{2C\delta_t(\cdot)}{\delta_t(\cdot) + r^*(K_t(\cdot))} = \frac{2c\delta^*}{\delta^* + 1}.
\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
\int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) &\leq \frac{2c\delta^*}{\delta^* + 1} + \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) \tilde{Q}(dy) \\
&\frac{2c\delta^*}{\delta^* + 1} + \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot)), m(Q)=0} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy).
\end{aligned}$$

Since $Q \in \mathcal{M}_t^\delta(\cdot)$ and $\delta^* \in (0, 1)$ are arbitrary, we arrive at the desired inequality as $\delta^* \rightarrow 0$. As a result,

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot)), m(Q)=0} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy). \quad (5.3.17)$$

Note that in the case of no trading constraints ($D_t(\cdot) = \mathbb{R}^n$), we have

$$\begin{aligned}
\rho'_t(\cdot) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot))} \left[\int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) - \sigma_{\mathbb{R}^n}(m(Q)) \right] = \\
&\sup_{Q \in \mathcal{P}_t^*(K_t(\cdot)), m(Q)=0} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy)
\end{aligned}$$

because

$$\sigma_{\mathbb{R}^n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y = 0; \\ \infty & \text{for } y \neq 0. \end{cases}$$

Considering (5.3.17), we obtain the equilibrium $\rho'_t(\cdot) = \rho_t(\cdot)$ for $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$. \square

Remark 5.3.3. The class of measures $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ in Theorem 5.3.1 can be narrowed to $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ (the class of all measures with finite supports in $K_t(\cdot)$ that contain at most $n + 1$ points). For details, see Chapter 7.

The supremum in (5.3.12) will be reached for some measure $Q^* \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ such that $m(Q^*) = 0$ when also requiring the upper semicontinuity of the functions $w_t(\cdot)$ (or equivalently, the upper semicontinuity of the functions $v_t^*(\cdot)$).⁴²

⁴²The corresponding sufficient conditions follow from Theorem 3.1.4: the payoff functions $g_t(\cdot)$ and the set-valued mappings $K_t(\cdot)$ should be upper semicontinuous.

Chapter 6. The Realistic Property of the Market Model and Its Criterion

In this chapter, we introduce the realistic property of the financial market model with an uncertain deterministic price evolution as the presence of (stochastic) market behavior scenarios described by mixed market strategies with supports coinciding with deterministic price dynamics, which can be considered realistic in the sense of a continuous dependence on the price history. This is formalized as the Feller property of the transition kernels for the conditional distributions of price increments given a known price history. Based on our more abstract results, we prove a criterion for the realistic property of the model in terms of some properties of the set-valued mapping describing the price evolution (its lower semicontinuity).

Interestingly, under the structural stability of the model (and additionally, the convexity and solidity of the continuous compact-valued mapping describing the price evolution), there exists a stochastic model with strongly Feller transition kernels for the conditional distributions of price increments given a known price history.

The main results of this chapter were published in [195] (the English version in [196]) and [215].

6.1 The Realistic Property of the Market Model

Within our approach, stochastic market behavior scenarios are realistic if the conditional distributions of the current price (a discrete-time stochastic process) continuously depend on the price history (in the weak topology). In a realistic stochastic price evolution model, the transition kernels Q_t corresponding to the conditional probabilities of the price $X_t \in \mathbb{R}^n$ at a time instant t given a known price history $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1} \in (\mathbb{R}^n)^t$ have the Feller property.

If for the distribution of the vector $\bar{X}_t = (\bar{X}_{t-1}, X_t)$ there exists a (regular) variant of the conditional distribution $P(X \in \cdot | \bar{X}_{t-1} = x) = Q_t(x, \cdot)$ with the Feller property, then this variant is unique for $x \in \text{supp}(P_{\bar{X}_{t-1}})$, where $P_{\bar{X}_{t-1}}$ is the distribution of the random vector \bar{X}_{t-1} , and $\text{supp}(\pi)$ denotes the (topological) support of the measure π . In this case, it is natural to choose the Feller regular conditional distribution, and the deterministic and stochastic approaches lead to the same concepts of “no arbitrage” when the reference probability measure is given by Feller transition kernels (using the Ionescu Tulcea theorem).

Note that the Feller property is a natural assumption in modeling physical and socio-economic processes. In addition, Markov processes satisfying the Feller property form an important class of random processes; for example, see [219] for details.

Within common engineering sense, we would hardly provide an example of a realistic stochastic financial model where the (regular) conditional price distributions given a known price history have no Feller variant. From an economic point of view, the following question seems natural: what objective reasons in the financial market explain the situation when small changes in the price history can significantly affect the behavior of current (or future) prices? In this case, of course, technical analysis should not be referred to scientific explanations.¹

By the way, in the classical Bachelier–Samuelson continuous-time model (and in the general case of continuous-time stochastic price dynamics described by a nondegenerate multidimensional diffusion process), the random process is Markovian with strongly Feller² transition probabilities. This fact follows from the Girsanov–Molchanov theorem [151].

Definition 6.1.1. *We call the financial market model with an uncertain price evolution realistic if there exist mixed market strategies with Feller transition kernels $P_t(x, \cdot)$ (the conditional distributions of X_t given a known price history $\bar{X}_{t-1} = x$) satisfying the consistency condition³*

$$\text{supp } P_t(x, \cdot) = x + K_t(x), \quad t = 1, \dots, N. \quad (6.1.1)$$

The consistency condition can be equivalently written for the conditional distributions $Q_t(x, \cdot)$ of the price increments ΔX_t given a known price history $\bar{X}_{t-1} = x$:

$$\text{supp } Q_t(x, \cdot) = K_t(x), \quad t = 1, \dots, N. \quad (6.1.2)$$

The following theorem expresses the main result of this chapter.

Theorem 6.1.1. *The financial market model with an uncertain deterministic price evolution⁴ is realistic if and only if the set-valued mappings $K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, are lower semicontinuous.*

This theorem directly follows from more general results presented in the next section.

¹An honest economist can still theoretically admit (but not justify) such a possibility in the very short term, considering the increased role of algorithmic (high-frequency) trading in recent years. As shown by practice, in some (yet unclear) market situations, algorithmic trading may provoke a sharp fall in prices (flash crash).

²For the definition, see Remark 6.5.1.

³This condition reflects the realistic property of deterministic price increment scenarios.

⁴In this case, the compactness of $K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, is not required: only its closedness is assumed, as for potential topological supports of probability measures. Note that for compact-valued mappings, lower semicontinuity implies lower h -semicontinuity; see [114, Theorem 2.68] and [114, Proposition 2.66].

6.2 The Properties of Feller Transition Kernels

We denote by $\text{supp}(Q)$ the topological support⁵ of a probability measure Q and by 2^Y the set of all subsets of Y .

The following result was proved, e.g., in [139, Lemma 4.3]. Nevertheless, we reproduce it below due to a simple proof for complete presentation.

Lemma 6.2.1. *Let Y be a separable metric space. Then the set-valued mapping $Q \mapsto \text{supp}(Q)$ is lower semicontinuous⁶ in the weak topology⁷ on the space of probability measures $\mathcal{P}(Y)$ defined on the Borel σ -algebra \mathcal{B}_Y .*

Proof. For an open set $G \in 2^Y$, according to the definition of a topological support,

$$\mathcal{M}_G = \{Q \in \mathcal{P}(Y) : \text{supp}(Q) \cap G \neq \emptyset\} = \{Q \in \mathcal{P}(Y) : Q(G) > 0\}.$$

We have to show the openness of the set \mathcal{M}_G or equivalently, the closedness of its complement: $(\mathcal{M}_G)^c = \{Q \in \mathcal{P}(Y) : Q(G) = 0\}$. If a sequence⁸ $Q_n \in (\mathcal{M}_G)^c$ converges weakly to Q^* , the classical Alexandroff theorem [2, §16, Theorem 2] implies $\liminf_{n \rightarrow \infty} Q_n(G) \geq Q^*(G)$; as a result, $Q^*(G) = 0$ and hence $Q^* \in (\mathcal{M}_G)^c$. \square

Definition 6.2.1. *For a given pair of measurable spaces (X, \mathcal{A}_X) and (Y, \mathcal{A}_Y) , a stochastic transition kernel P is defined as a numerical function $(x, A) \mapsto P(x, A)$ such that the functions $x \mapsto P(x, A)$ are⁹ \mathcal{A}_X -measurable for all $A \in \mathcal{A}_Y$ and the functions $A \mapsto P(x, A)$ are normalized (probability) measures on \mathcal{A}_Y for all $x \in X$.*

Considering only stochastic transition kernels below, we call them simply “transition kernels.”

Definition 6.2.2. *A transition kernel $Q = Q(x, B)$ satisfies the Feller property if the mapping $x \mapsto Q(x, \cdot)$ is continuous (in the weak topology on the space of probability measures).*

⁵The topological support of a measure on a topological space with the Borel σ -algebra is defined as the set of points with a positive measure for any neighborhood; this set is closed. However, without additional assumptions on the topological space, we cannot guarantee that the complement of the support (representable as the union of open sets of zero measure) has zero measure. No problem arises in the case of a countable base. Note that a topological support may be empty; for example, see [245, Chapter 1, Proposition 3.5] for Dieudonné’s example of a probability measure defined on the Borel σ -algebra of a compact Hausdorff space with empty support (where the measure is not regular).

⁶A set-valued mapping $F : X \mapsto 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ is lower semicontinuous if for any open set $G \subseteq Y$, the set $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ is open. For example, see [114, Definition 2.3], [114, Remark 2.4], and equivalent formulations in [114, Proposition 2.6].

⁷This is the weakest topology for which the functionals $Q \mapsto \int f dQ$ are continuous for any bounded continuous function $f : Y \mapsto \mathbb{R}$.

⁸The weak topology on $\mathcal{P}(Y)$ for a separable metric space Y is metrizable; for example, see [32, Appendix III, Theorems 5]. Therefore, it is possible to consider the sequences of measures instead of nets.

⁹Here \mathbb{R} is equipped with the Borel σ -algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Proposition 6.2.1. *Let X and Y be a topological space and a metric space equipped with the Borel σ -algebras \mathcal{B}_X and \mathcal{B}_Y , respectively. If a mapping $x \mapsto Q(x, \cdot) \in \mathcal{P}(Y)$, $x \in X$, is continuous in the weak topology on $\mathcal{P}(Y)$, then $Q = Q(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}_Y$, is a transition kernel; i.e., for any $B \in \mathcal{B}_Y$, the numerical function $x \mapsto Q(x, B)$ is \mathcal{B}_X -measurable.*

Proof. We denote by \mathcal{D} the class of all sets $B \in \mathcal{B}_Y$ such that the function $x \mapsto Q(x, B)$ is \mathcal{B}_X -measurable. Obviously, \mathcal{D} forms a Dynkin system; for example, see [9, Definition 4.1.1]. In other words:

- 1) $Y \in \mathcal{D}$ (since a constant function is measurable).
- 2) If $A, B \in \mathcal{D}$ and $A \subseteq B$, then $A \setminus B \in \mathcal{D}$ (since the difference of measurable functions is measurable).
- 3) If $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$ and $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, then $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$ (since the limit of a measurable function is measurable).

Note that the topology \mathcal{J}_Y on Y is contained in \mathcal{D} because, for an open set $G \subseteq Y$, the function $x \mapsto Q(x, G)$ is lower semicontinuous due to the continuity of the mapping $x \mapsto Q(x, \cdot)$: by the Alexandroff theorem¹⁰, the net of measures $Q(x_\alpha, \cdot)$ for a convergent net $x_\alpha \rightarrow x$ satisfies the property $\liminf Q(x_\alpha, G) \geq Q(x, G)$ for any $G \in \mathcal{J}_Y$. The lower semicontinuous function $x \mapsto Q(x, G)$ is \mathcal{B}_X -measurable since the set $\{x \in X : Q(x, G) > a\}$ is open and, hence, belongs to \mathcal{B}_X for any $a \in \mathbb{R}$; for example, see [190, Chapter 2, §4, Corollary of Lemma 1]. As the topology \mathcal{J}_Y is closed with respect to finite intersections, we apply the Dynkin system theorem (e.g., see [9, Theorem 4.1.2]). According to this theorem, \mathcal{D} contains the minimal σ -algebra containing \mathcal{J}_Y , i.e., the Borel σ -algebra \mathcal{B}_Y . Thus, the function $x \mapsto Q(x, B)$ is \mathcal{B}_X -measurable for any $B \in \mathcal{B}_Y$. \square

Proposition 6.2.2. *Let X and Y be a topological space and a separable metric space¹¹ equipped with the Borel σ -algebras \mathcal{B}_X and \mathcal{B}_Y , respectively. If a transition kernel $Q = Q(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}_Y$, has the Feller property, then the set-valued mapping $x \mapsto \text{supp}(Q(x, \cdot))$ is lower semicontinuous.¹²*

Proof. We define $\varphi(x) = Q(x, \cdot)$; the (single-valued) mapping $\varphi : X \mapsto \mathcal{P}(Y)$ is (weakly) continuous due to the Feller property of Q . Obviously,

$$\{x \in X : \text{supp}(\varphi(x)) \cap G \neq \emptyset\} = \varphi^{-1}(\mathcal{M}_G),$$

¹⁰It is naturally attributed to Alexandroff since the first result of such type was published in [2, §16, Theorem 2]. In fact, the required statement was presented in the monograph [38, Theorem 8.2.3] and [38, Corollary 8.2.4]. By the way, the proof of Lemma 6.2.1 also involves the Alexandroff theorem.

¹¹For a separable space Y , the weak topology on $\mathcal{P}(Y)$ is metrizable; for example, see [32, Appendix III, Theorem 5]. A measure on a separable space is itself separable. Therefore, we can consider sequences rather than nets of measures.

¹²This result establishes the necessity part in Theorem 6.1.1.

where

$$\mathcal{M}_G = \{Q \in \mathcal{P}(Y) : \text{supp}(Q) \cap G \neq \emptyset\}.$$

By Lemma 6.2.1, the set \mathcal{M}_G is open for an open set G , and its inverse image is open due to the continuity of φ . \square

6.3 Auxiliary Results

The main results, presented in Section 6.4, are based on several auxiliary ones.

Let (Y, ρ) be a separable metric space. We consider the linear space $BL(Y)$ of bounded Lipschitz functions $f : Y \mapsto \mathbb{R}$ with the norm¹³

$$\begin{aligned} \|f\|_{BL} &= \|f\|_L + \|f\|_\infty, \\ \|f\|_\infty &= \sup\{|f(y)| : y \in Y\}, \\ \|f\|_L &= \sup\left\{\frac{|f(y) - f(y')|}{\rho(y, y')} : y, y' \in Y, y \neq y'\right\}, \end{aligned}$$

and the normalized vector space $\mathcal{M}(Y)$ of charges (alternating measures) on the space Y with the Borel σ -algebra \mathcal{B}_Y equipped with the Dudley norm¹⁴:

$$\|\mu\|_D = \sup\left\{\left|\int f d\mu\right| : \|f\|_{BL} \leq 1\right\}.$$

The set of all normalized (probability) measures $\mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{M}(Y)$ is a closed convex subset of $\mathcal{M}(Y)$ with the metric ρ_D induced by the norm $\|\cdot\|_D$, i.e., $\rho_D(\pi_1, \pi_2) = \|\pi_1 - \pi_2\|_D$.

Lemma 6.3.1. *Let (Y, \mathcal{B}_Y) be a separable metric space with the Borel σ -algebra. Then any probability measure Q on (Y, \mathcal{B}_Y) can be approximated in the Dudley metric¹⁵ by probability measures with finite supports contained in the support Q in the sense that there exists a weakly convergent sequence of probability measures Q_n such that $\text{supp}(Q_n) \subseteq \text{supp}(Q)$ and $\|Q_n - Q\|_D \rightarrow 0$.*

Proof. We fix an arbitrary value $\varepsilon > 0$ and $Q \in \mathcal{P}(Y)$. If Y is finite, the conclusion becomes trivial. Assuming that Y is infinite, let $C = \{x_1, x_2, \dots\}$ be a countable set everywhere dense in Y , $S = \text{supp}(Q)$, and $B_\varepsilon(x)$ be the open ball of radius ε

¹³This space is Banach; for example, see [250], where this result was proved for the equivalent norm $\|f\|'_{BL} = \max(\|f\|_L, \|f\|_\infty)$.

¹⁴According to [110, Theorem 3.11], the normalized space $\mathcal{M}(Y)$ is incomplete, except the case of uniformly discrete spaces Y . (When there exists a value $r^* > 0$ such that $\rho(y_1, y_2) \geq r^*$ for all $y_1, y_2 \in Y$).

¹⁵It is attributed to a variety of different authors: the Kantorovich distance (the Kantorovich–Rubinstein distance in [38]), the Wasserstein distance, the Fortet–Mourier distance, the Dudley distance, and even Gini’s measure of discrepancy. We prefer the Dudley metric because of his contribution to the theory. Curious incidents occurred as well. Referring to [38, Theorem 8.1.3], Hou and Ob lój [113] defined a metric and called it the Levy–Prokhorov. However, in Bogachev’s book, it was mentioned as the Kantorovich–Rubinstein distance.

centered at x . We recursively construct a sequence of pairwise disjoint sets A_1, A_2, \dots such that¹⁶ $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq S$; in particular, $Q(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. We define $A_1 = B_\varepsilon(x_1)$, $A_{n+1} = B_\varepsilon(x_{n+1}) \setminus \sum_{i=1}^n A_i$, $n = 1, 2, \dots$, and $J = \{k \geq 1 : A_k \cap S \neq \emptyset\}$. If $n \notin J$, then $Q(A_n) = 0$ and hence $\sum_{k \in J} Q(A_k) = 1$. Next, we define¹⁷ $Q_\varepsilon = \sum_{k \in J} q_k \delta_{x_k^*}$, $q_k = Q(A_k)$, where the point $x_k^*, k \in J$, is chosen arbitrarily in $A_k \cap S \neq \emptyset$. Note that by construction, $A_k \subseteq B_\varepsilon(x_k)$, and the diameter of $A_k, k \in J$, does not exceed 2ε . Therefore, for an arbitrary numerical function f such that $\|f\|_{BL} \leq 1$,

$$\left| \int f dQ - \int f dQ_\varepsilon \right| \leq \sum_{k \in J} \int_{A_k} |f(x) - f(x_k^*)| Q(dx) \leq 2\varepsilon.$$

Hence, it follows that $\|Q - Q_\varepsilon\|_D \leq 2\varepsilon$. There exists a finite set of indices $I \subseteq J$ whose complement $I^c = J \setminus I$ satisfies the inequality¹⁸ $\delta(I) = \sum_{k \in I^c} q_k \leq \varepsilon$. Letting $Q'_\varepsilon = \sum_{k \in I} q'_k \delta_{x_k^*}$, $q'_k = q_k/1 - \delta$ yields $\|Q_\varepsilon - Q'_\varepsilon\|_{TV} = 2\delta(I) \leq 2\varepsilon$, where $\|\mu\|_{TV}$ is the total variation norm of a finite charge μ . Since $\|\mu\|_D \leq \|\mu\|_{TV}$, we have $\|Q - Q'_\varepsilon\|_D \leq \|Q - Q_\varepsilon\|_D + \|Q_\varepsilon - Q'_\varepsilon\|_D \leq 4\varepsilon$. By construction, $\text{supp}(Q'_\varepsilon) \subseteq \text{supp}(Q)$. Finally, according to [80, Theorem 11.3.3], for a separable metric space Y , the weak convergence of a sequence of probability measures is equivalent to the convergence in the Dudley metric. \square

Lemma 6.3.2. *Let F be a closed subset of a separable metric space Y . Then there exists a measure $Q \in \mathcal{P}(Y)$ such that $\text{supp}(Q) = F$.*

Proof. The case of a finite space F is trivial. Assume that F is infinite. Since F is separable with respect to the metric restricted to $F \times F$, there exists a countable everywhere dense subset $C = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq F$; for example, see [132, Chapter III, Section 7, §4, the lemma]. We choose an arbitrary sequence of positive numbers q_1, q_2, \dots such that $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = 1$ and let $Q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \delta_{x_n}$. Then, obviously, $\text{supp}(Q) = F$. \square

Proposition 6.3.1. *Let X and Y be a topological space and a separable metric space equipped with the Borel σ -algebras \mathcal{B}_X and \mathcal{B}_Y , respectively. If a set-valued mapping $S : X \mapsto 2^Y$ takes non-empty closed values and is lower semicontinuous, then the set-valued mapping $\mathcal{N} : X \mapsto \mathcal{P}(Y)$ given by*

$$\mathcal{N}(x) = \{Q \in \mathcal{P}(Y) : \text{supp}(Q) \subseteq S(x)\} \quad (6.3.1)$$

takes non-empty closed convex values and is¹⁹ h -lower semicontinuous for the metric induced by the Dudley norm in the space $\mathcal{P}(Y)$.

¹⁶In probability theory, $\sum_n A_n$ conventionally indicates the union $\bigcup_n A_n$ of pairwise disjoint sets.

¹⁷Here δ_x denotes the probability measure concentrated at a point x .

¹⁸If J is finite, we can choose $I = J$; in this case, $\delta = 0$.

¹⁹For a topological space X and a metric space (Y, ρ) , a set-valued mapping $F : X \mapsto 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ is called h -lower semicontinuous at a point $x_0 \in X$ if the Pompeiu deviation $e(F(x_0), F(x))$ of $F(x_0)$ from $F(x)$ is continuous at x_0 . Here, $e(A, B) = \sup\{\rho(a, B) : a \in A\}$ with $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$; for example, see [114, Definition 2.60].

Proof. Obviously, $\mathcal{N}(x) \neq \emptyset$ for all $x \in X$ since $S(x) \neq \emptyset$. For any $x_0 \in X$ and any $\varepsilon > 0$, we can indicate a neighborhood $V_\varepsilon(x_0)$ of the point x_0 such that, for any $x \in V_\varepsilon(x_0)$ and any measure $Q_0 \in \mathcal{N}(x_0)$, there exists a measure $Q_\varepsilon^x \in \mathcal{N}(x)$ such that $\|Q_0 - Q_\varepsilon^x\|_D < \varepsilon$. Let us verify this fact. By Definition (6.3.1), we have $\text{supp}(Q_0) \subseteq S(x_0)$ for $Q_0 \in \mathcal{N}(x_0)$. According to Lemma 6.3.1, there exists a measure Q_ε with a finite support $\text{supp}(Q_\varepsilon) = \{y^1, \dots, y^m\} \subseteq S(x_0)$ such that $\|Q_0 - Q_\varepsilon\|_D < \varepsilon/2$. (In other words, it can be represented as $Q_\varepsilon = \sum_{i=1}^m q_i \delta_{y^i}$, where $\sum_{i=1}^m q_i = 1$ and $q_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$.) Due to the lower semicontinuity of the set-valued mapping²⁰ $x \mapsto S(x)$, there exist neighborhoods $V_\varepsilon^i(x_0)$, $i = 1, \dots, m$, of the chosen point $x_0 \in X$ such that the sets $S(x) \cap B_{\varepsilon/2}(y^i)$ are non-empty for any $x \in V_\varepsilon^i(x_0)$, $i = 1, \dots, m$. Selecting the set $V_\varepsilon(x_0) = \bigcap_{i=1}^m V_\varepsilon^i(x_0)$ as the neighborhood of x_0 , we find that for any $x \in V_\varepsilon(x_0)$, there exist points $\hat{y}^i(\varepsilon, x) \in S(x)$ such that $\rho(y^i, \hat{y}^i(\varepsilon, x)) < \varepsilon/2$ for $i = 1, \dots, m$. Letting $Q_\varepsilon^x = \sum_{i=1}^m q_i \delta_{\hat{y}^i(\varepsilon, x)}$ gives

$$\|Q_\varepsilon - Q_\varepsilon^x\|_D \leq \sum_{i=1}^m q_i \|\delta_{y^i} - \delta_{\hat{y}^i(\varepsilon, x)}\|_D \leq \sum_{i=1}^m q_i \rho(y^i, \hat{y}^i(\varepsilon, x)) < \varepsilon/2.$$

Thus, $\|Q_0 - Q_\varepsilon^x\|_D \leq \|Q_0 - Q_\varepsilon\|_D + \|Q_\varepsilon - Q_\varepsilon^x\|_D < \varepsilon$ and, hence, the set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{N}(x)$ is h -lower semicontinuous in the metric induced by the Dudley norm in the space $\mathcal{P}(Y)$.

The closedness of $\mathcal{N}(x)$ is checked by noting that $Q \in \mathcal{N}(x)$ if and only if $Q((S(x))^c) = 0$. By the Alexandroff theorem, for a sequence $Q_n \in \mathcal{N}(x)$ weakly convergent to a measure Q^* , we have

$$0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} Q_n((S(x))^c) \geq Q^*((S(x))^c),$$

i.e., $Q^* \in \mathcal{N}(x)$. The convexity of $\mathcal{N}(x)$ is obvious. □

6.4 The Existence of Feller Transition Kernels with Measure Supports Given by a Set-Valued Mapping

Proposition 6.2.1 provides a necessary condition for the Feller property of the kernel Q : the lower semicontinuity of the set-valued mapping $x \mapsto \text{supp}(Q(x, \cdot))$. Slightly strengthening the requirements for the spaces X and Y presented in Section 6.2, we establish two propositions with converse facts as compared to Proposition 6.2.2.

Theorem 6.4.1. *Let X and Y be a normal countable paracompact space²¹ and a Polish space²² equipped with the Borel σ -algebras \mathcal{B}_X and \mathcal{B}_Y , respectively. If a set-valued mapping $S : X \mapsto 2^Y$ with non-empty closed values is lower semicontinuous,*

²⁰A set-valued mapping $F : X \mapsto 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ is lower semicontinuous at a point $x_0 \in X$ if for any open set $G \subseteq Y$, $G \cap F(x_0) \neq \emptyset$, there exists a neighborhood W_{x_0} of x_0 such that $G \cap F(x) \neq \emptyset$ for all $x \in W_{x_0}$.

²¹For example, see the definitions in the book [84, Sections 1.5 and 5.2]; a topological space is paracompact if every countable open cover of this space has a locally finite open refinement.

²²That is, a complete separable metric space.

then there exists a Feller transition kernel $Q = Q(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}_Y$, such that $\text{supp}(Q(x, \cdot)) \subseteq S(x)$.

Proof. The completion $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$ of the space of charges $\mathcal{M}(Y)$ is a Banach space with respect to the Dudley norm; moreover, $\mathcal{M}(Y)$ maps to $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$ by means of an isometric linear operator. (Therefore, the space $\mathcal{M}(Y)$ is embedded into the space $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$ as an everywhere dense set.) This completion can be uniquely defined up to an isometric linear isomorphism; for example, see [122, Theorem 2.5.2, 2.5.4]. By Theorem 1.11 from Prokhorov's classical paper [170], the space of probability measures $\mathcal{P}(Y)$ with the weak topology is metrizable by the Prokhorov²³ metric d_P ,

$$d_P(Q', Q) = \inf\{\epsilon > 0 : Q(B) \leq Q'(B^\epsilon) + \epsilon, Q'(B) \leq Q(B^\epsilon) + \epsilon \text{ for all } B \in \mathcal{B}^n\}, \quad (6.4.1)$$

where $B^\epsilon = [B]^\epsilon$, defined by (4.1.7), and this space is Polish. According to [79, Section 2, Corollary 2, 3], the inequalities

$$\begin{aligned} \|Q_1 - Q_2\|_D &\leq 2d_P(Q_1, Q_2), \\ d_P(Q_1, Q_2) &\leq \sqrt{\frac{3}{2}}\|Q_1 - Q_2\|_D \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

hold for any Q_1 and Q_2 from $\mathcal{P}(Y)$. These corollaries, together with Prokhorov's theorem mentioned above, imply the closedness of $\mathcal{P}(Y)$ in $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$ due to the completeness of $\mathcal{P}(Y)$ in the Dudley metric. Therefore, the subsets $\mathcal{P}(Y)$ closed in the Dudley norm are also closed in $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$.

By Proposition 6.3.1, the set-valued mapping $\mathcal{N} : X \mapsto \mathcal{P}(Y)$ defined by (6.3.1) is h -lower semicontinuous and, hence, lower semicontinuous; for example, see [114, Proposition 2.66]. The lower semicontinuity of \mathcal{N} in the space $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$ is equivalent to the fact that the set of points $\{x \in X : \mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{J}\}$ for any closed set $\mathcal{J} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}(Y)$ is closed in the space $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$. Since $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ and $\mathcal{P}(Y)$ is closed in $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$, we have

$$\{x \in X : \mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{J}\} = \{x \in X : \mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{J} \cap \mathcal{P}(Y)\},$$

²³We strongly disagree with attributing the metric in [51, Proposition 4.4] to Paul Lévy. The Lévy distance, introduced in [141], is suitable for metrizing the weak convergence of the space of probability measures on the real line \mathbb{R} equipped with the Borel σ -algebra. We denote it by d_L . We emphasize that when choosing the real line as a special case of a separable metric space, the Prokhorov metric d_P differs from the original Lévy metric d_L . (This follows from an example in the last paragraph and the inequality from [79, Corollary 2].) Sometimes d_P is called the Lévy–Prokhorov metric, perhaps because Prokhorov wrote that the introduced metric is “analogous to the Lévy distance for measures on the real line.” But what is the meaning of “analogous”? Supposedly, the matter concerns metrizing the weak convergence of probability measures. This is not convincing, however, since there are other metrics with the same property, e.g., the Dudley metric introduced in [78], but nobody recalls the Lévy metric in this connection. One might guess that it is because the Prokhorov metric looks like the Lévy distance. By the way, the Prokhorov metric also resembles the distance introduced by Hausdorff in his book [108]. Note that a more appropriate and fairer term is the Pompeiu–Hausdorff distance (metric); see [26] for the historical background. However, the one-sided (asymmetric) form of d_P in [51], noticed by Strassen [231], no longer “looks like” the original Lévy metric. The appropriate and fair name should be “the Strassen form of the Prokhorov metric.”

where $\mathcal{J} \cap \mathcal{P}(Y)$ is a closed subset of $\mathcal{P}(Y)$. Consequently, the mapping \mathcal{N} lower semicontinuous in the space $\mathcal{P}(Y)$ will be lower semicontinuous in the space $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$.

Further, $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$ is separable because $\mathcal{M}(Y)$ is so. The separability of $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$ can be easily checked. Indeed, using the Jordan expansion, we uniquely write a finite charge μ as the difference of mutually singular (nonnegative) finite measures μ^+ and μ^- : $\mu = \mu^+ - \mu^-$; for example, see [132, Section 1, §5]. Any finite measure ν can be approximated by measures of the form $r_n\pi$, where $\pi \in \mathcal{P}(Y)$ and $r_n \geq 0$ are rational numbers²⁴ with $r_n \rightarrow \|\nu\|_D = \|\nu\|_{TV} = \nu(Y)$ as $n \rightarrow \infty$. At the same time, $\mathcal{P}(Y)$ is separable. Let \mathcal{P}' be a countable set everywhere dense in $\mathcal{P}(Y)$. For a finite measure $\nu \neq 0$, we define $\pi = \frac{1}{\|\nu\|_D}\nu$ and let $\pi_n \in \mathcal{P}'$ and $\pi_n \rightarrow \pi$. Then

$$\|r_n\pi_n - \nu\|_D \leq |r_n - \|\nu\|_D| + \|\nu\|_D\|\pi_n - \pi\|_D \rightarrow 0.$$

Thus, in view of Proposition 6.2.1, the set-valued mapping \mathcal{N} is lower semicontinuous and takes non-empty convex closed values contained in the closed convex subset $\mathcal{P}(Y)$ of the separable Banach space $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$. Hence, we apply Theorem 3.1'' from Michael's classical paper [149], according to which \mathcal{N} has a continuous branch (selector) $x \mapsto Q(x, \cdot) \in \mathcal{N}(x)$. To complete the proof, it suffices to appeal to Proposition 6.2.1. \square

Slightly strengthening the requirements for the topological space X , we obtain the following result.

Theorem 6.4.2. *Let X and Y be a perfectly normal space²⁵ and a Polish space equipped with the Borel σ -algebras \mathcal{B}_X and \mathcal{B}_Y , respectively. If a set-valued mapping $S : X \mapsto 2^Y$ with non-empty closed values is lower semicontinuous, then there exists a Feller transition kernel $Q = Q(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}_Y$, such that²⁶ $\text{supp}(Q(x, \cdot)) = S(x)$.*

Proof. The set-valued mapping $\mathcal{N} : X \mapsto \mathcal{P}(Y)$ given by (6.3.1) is lower semicontinuous and takes non-empty convex closed values contained in the closed convex subset $\mathcal{P}(Y)$ of the separable Banach space $\widetilde{\mathcal{M}}(Y)$, which is the complement of the space of finite measures $\mathcal{M}(Y)$. Therefore, we apply Lemma 5.2 from Michael's classical paper [149]. According to this lemma, there exists a countable family of continuous branches (selectors) $x \mapsto Q_k(x, \cdot) \in \mathcal{N}(x)$, $x \in X$, $k = 1, 2, \dots$, such that the set of measures $\{Q_k(x, \cdot), k = 1, 2, \dots\}$ is dense in $\mathcal{N}(x)$ for any $x \in X$. Let $Q_x \in \mathcal{N}(x)$ be a measure for which $\text{supp}(Q_x) = S(x)$; this measure exists by Lemma 6.3.2. Due to the denseness of the set $\{Q_k(x, \cdot), k = 1, 2, \dots\}$ in $\mathcal{N}(x)$, there exists

²⁴Here, $\|\mu\|_{TV}$ is the total variation norm of a charge μ on the space (Y, \mathcal{B}) , i.e., $\|\mu\|_{TV} = \mu^+(Y) + \mu^-(Y)$. In the general (alternating) case, obviously, $\|\mu\|_D \leq \|\mu\|_{TV}$.

²⁵For example, see the definition in the book [84, Chapter 1, Section 1.5]: a topological space is called perfectly normal if it is normal and any closed set is a G_δ -set, i.e., is representable as the intersection of countably many open sets. A perfectly normal space is countable paracompact; for example, see [84, Corollary 5.2.5].

²⁶This result establishes the sufficiency part in Theorem 6.1.1.

a subsequence $Q_{k_l}(x, \cdot)$ depending on x with weak convergence to $Q_x \in \mathcal{N}(x)$. Therefore,

$$\liminf_{l \rightarrow \infty} Q_{k_l}(x, G) \geq Q_x(G) > 0 \quad (6.4.3)$$

for any open G such that $G \cap S(x) \neq \emptyset$. We define

$$Q^*(x, \cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k Q_k(x, \cdot),$$

where $q_k > 0$ and $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1$. It follows from (6.4.3) that $\text{supp}(Q^*(x, \cdot)) = S(x)$ for any $x \in X$. The function $x \mapsto Q^*(x, \cdot)$ is continuous in the weak topology since the series of continuous functions

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} q_k \int f(y) Q_k(x, dy)$$

with a bounded continuous function f converges uniformly:

$$\left| \sum_{k=1}^n q_k \int f(y) Q_k(x, dy) - \int f(y) Q^*(x, dy) \right| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} q_k \int f(y) Q_k(x, dy) \right| \leq \|f\|_{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} q_k.$$

Thus, in view of Proposition 6.2.1, Q^* is a Feller transition kernel. \square

Remark 6.4.1.

- 1) For the space $\mathcal{P}(Y)$ to be separable, the completeness of Y is not required; it suffices that Y be a separable metric space. For example, a countable everywhere dense set in $\mathcal{P}(Y)$ is the set of measures with finite supports contained in a countable everywhere dense subset Y and representable as a convex combination of Dirac measures (probability measures concentrated at a single point) with rational coefficients.²⁷
- 2) The conditions on the topological space X in Theorems 6.4.1 and 6.4.2 hold if X is a metric space.

6.5 The Existence of Strongly Feller Transition Kernels in the Strict Sense under Structural Stability

Consider the model without trading constraints, i.e., $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$. Under structural stability (the robust condition of no deterministic arbitrage opportunities, RNDAO) and stronger assumptions about the set-valued mappings $K_t(\cdot)$, Theorem 6.1.1 can be strengthened. Moreover, it can be demonstrated in a constructive manner.

²⁷For example, see [72, Proposition 2.5.40], where the authors forgot to mention the rationality of the coefficients (although they had this in mind).

Theorem 6.5.1. *Let the set K_0 of initial prices be convex and compact, the set-valued mappings $K_t(\cdot)$ be continuous and take convex compact values, and RNDAO hold. Then there exists a stochastic model satisfying the consistency condition (6.1.2) in which the kernels Q_t are strongly Feller in the strict sense.²⁸*

Proof. We denote by λ the Lebesgue measure on $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Let $Q_t, t = 1, \dots, N$, be transition kernels satisfying the consistency condition (6.1.2) such that, for any x , the measure $Q_t(x, \cdot)$ is absolutely continuous with respect to $\lambda(\cdot)$ and the (conditional) density of the price increments has the form

$$q_t(x, y) = \frac{I_{K_t(x)}(y)}{\lambda(K_t(x))} \quad \lambda - \text{a.e.} \quad (6.5.1)$$

The value²⁹ r_t^* given by (4.2.17) is positive due to RNDAO; see Proposition 4.2.2. Hence, the densities q_t (6.5.1) are well-defined because

$$0 < \pi^{n/2} \Gamma(1 + n/2) (r_t^*)^n \leq \lambda(K_t(x)) \leq \pi^{n/2} \Gamma(1 + n/2) \left(\max_{x \in B_{t-1}} \|K_t(x)\|_2 \right)^n < \infty,$$

where Γ denotes the gamma function. Since the compact sets $K_t(x)$ are convex, we have

$$\delta(x', x) = h_\rho(K_t(x'), K_t(x)) = \max_{u \in S_1(0)} |\sigma_{K_t(x')}(u) - \sigma_{K_t(x)}(u)|.$$

(This is the Hörmander formula expressing the Pompeiu–Hausdorff distance through support functions; for example, see [140, Theorem 14.1].)

Therefore, for any $u \in S_1(0)$,

$$\sigma_{K_t(x')}(u) \leq \sigma_{K_t(x)}(u) + \delta(x', x) \leq \gamma \sigma_{K_t(x)}(u),$$

where

$$\gamma = \gamma(x', x) = 1 + \frac{\delta(x', x)}{r_t^*}.$$

Similarly, we obtain the inequality $\sigma_{K_t(x)}(u) \leq \gamma \sigma_{K_t(x')}(u)$. Thus³⁰, $K_t(x') \subseteq \gamma K_t(x)$ and $K_t(x) \subseteq \gamma K_t(x')$. The total variation norm can be written as

$$\begin{aligned} \|Q_t(x', \cdot) - Q_t(x, \cdot)\|_{TV} &= \int |q_t(x', y) - q_t(x, y)| \lambda(dy) = \\ &= \frac{\lambda(K_t(x') \setminus K_t(x))}{\lambda(K_t(x'))} + \frac{\lambda(K_t(x) \setminus K_t(x'))}{\lambda(K_t(x))} + \\ &= \left| \frac{1}{\lambda(K_t(x'))} - \frac{1}{\lambda(K_t(x))} \right| \lambda(K_t(x') \cap K_t(x)). \end{aligned}$$

²⁸We follow the terminology of [173, Chapter 1, Definition 5.8.1]. The kernels Q_t are strongly Feller if the mapping $x \mapsto Q_t(x, \cdot)$ is continuous in the metric on the space of probability measures equipped with a σ -algebra induced by the total variation norm on the space of finite alternating measures.

²⁹Recall that it is the minimum distance between the point 0 and the boundary of the convex hull of the sets $K_t(x)$ over the price history x . (In our case, these sets are convex.)

³⁰In the general case (nonconvex sets), the inequality $\sigma_A(u) \leq \sigma_B(u)$ for all $u \in S_1(0)$ implies the inclusion $\text{conv}(A) \subseteq \text{cl}(\text{conv}(B))$.

We have the inequality

$$\lambda(K_t(x') \setminus K_t(x)) \leq \lambda(K_t(x') \setminus \gamma^{-1}K_t(x')) = (1 - \gamma^{-1})\lambda(K_t(x')).$$

By analogy,

$$\lambda(K_t(x) \setminus K_t(x')) \leq (1 - \gamma^{-1})\lambda(K_t(x)).$$

In addition,

$$\lambda(K_t(x') \cap K_t(x)) \leq \lambda(K_t(x')) \wedge \lambda(K_t(x))$$

and

$$|\lambda(K_t(x')) - \lambda(K_t(x))| = [\lambda(K_t(x')) - \lambda(K_t(x))] \vee [\lambda(K_t(x)) - \lambda(K_t(x'))] \leq (1 - \gamma^{-1})[\lambda(K_t(x')) \vee \lambda(K_t(x))].$$

The four inequalities above and the expression for the total variation norm yield the estimate

$$\|Q_t(x', \cdot) - Q_t(x, \cdot)\|_{TV} \leq [3(1 - \gamma^{-1})] \wedge 2 = \frac{3h_\rho(K_t(x'), K_t(x))}{h_\rho(K_t(x'), K_t(x)) + r_t^*} \wedge 2,$$

where $r_t^* > 0$ is given by (4.2.17). Thus, the transition kernels Q_t are strongly Feller in the strict sense. \square

Remark 6.5.1. For a continuous-time stochastic price dynamics model described by a nondegenerate multidimensional diffusion, the random process is Markovian with strongly Feller³¹ transition kernels; see the discussion in the beginning of this chapter. These transition kernels are even strongly Feller in the strict sense. This result is immediate from the following fact concerning the transition kernels acting from a locally compact space with a countable base to another one with the same properties: the composition of two strongly Feller transition kernels is strongly Feller in the strict sense [173, Chapter 1, Theorem 5.10].

³¹Let X be a topological space and Y be a metric space equipped with Borel σ -algebras \mathcal{B}_X and \mathcal{B}_Y , respectively. A transition kernel $Q = Q(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}_Y$, is called strongly Feller if the real-valued function $x \mapsto Q(x, B)$ is continuous for any $B \in \mathcal{B}_Y$.

Chapter 7. The Most Unfavorable Scenarios of Market Behavior and the Moment Problem

Under the assumption of a game equilibrium in mixed “market” strategies, we propose a two-stage method for solving the Bellman equations. The first stage concerns the general moment problem, whereas the second stage reduces to maximizing a concave function on a convex set.

According to the results presented below, mixed market strategies can be searched in a class of distributions concentrated in a finite number of points equal to the total number of assets (the risky and risk-free ones). In one case, we prove and use an original theorem for zero-sum games. In the other case, we employ a theory related to the general moment problem. All these results are combined in Theorem 7.3.2.

The general moment problem is also applied at the first stage of the method to construct a convex hull of a function. A particularly simple case arises in the absence of trading constraints: the second stage disappears, and for the most unfavorable mixed “market” strategies, the problem reduces to the well-studied superhedging problem within the corresponding probabilistic model.

The main results of this chapter were published in [208] (the English version in [207]) and [204].

7.1 The Two-Stage Method for Solving the Bellman Equations

We describe a general method for solving the deterministic superreplication problem assuming the existence of equilibrium (5.2.6) for the mixed extension $\mathcal{P}_t(\cdot)$. The pricing problem then reduces to the Bellman equations (5.2.4) with $\rho = \rho'$ (5.2.9), i.e.,

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\cdot, y) Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)} \left(\int y Q(dy) \right) \right], \quad (7.1.1) \\ & \quad t = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

where the functions w_t are given by (T).

The case $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) = \emptyset$ has been studied in Remark 5.2.2; it corresponds to the presence of SAUP (sure arbitrage with unbounded profit). In this case, there is an equilibrium; however, hedging becomes unreasonable, and the hedger's rational behavior consists in implementing arbitrage. Therefore, if equilibrium (5.2.6) takes place, it suffices to consider the case of no deterministic sure arbitrage with unbounded profit (NDSAUP), i.e., $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$. We proceed this way.

Let us find the supremum in formula (7.1.1) in two stages for each $t = 1, \dots, N$, starting from $t = N$.

Stage 1. For each $z \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))$, we solve a constrained optimization problem with respect to $Q \in \mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1})$ subject to $\int yQ(dy) = z$ to find

$$u_{t, \bar{x}_{t-1}}(z) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1}), \int yQ(dy)=z} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y)Q(dy); \quad (7.1.2)$$

Stage 2. We maximize the function $z \mapsto u_{t, \bar{x}_{t-1}}(z) - \sigma_{D_t(\bar{x}_{t-1})}(z)$ in $z \in \text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})) \cap \text{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))$ to find¹

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{z \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))} [u_{t, \cdot}(z) - \sigma_{D_t(\cdot)}(z)] \quad (7.1.3)$$

and

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot). \quad (7.1.3')$$

Concerning Stage 2, the set $D_t(\cdot)$ in applications is often analytically defined, and its support function can be found explicitly: $\sigma_{D_t(\cdot)}(z)$ for $z \in \text{bar}(D_t(\cdot))$.

Example 7.1.1.

- 1) In particular, the set $\sigma_{D_t(\cdot)}$ has been analytically defined in Example 1.1.4: according to formula (1.1.12),

$$D_t(\cdot) = \{h \in \mathbb{R}^n : \langle h, B_t(\cdot)h \rangle \leq d^2\},$$

where $d = \frac{L}{\gamma} > 0$, $B_t(\cdot)$ is a symmetric nonnegative definite matrix. In this example, $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{y = B_t(\cdot)x, x \in \mathbb{R}^n\}$; for $z \in \text{bar}(D_t(\cdot))$, we have

$$\sigma_{D_t(\cdot)}(z) = d\sqrt{\langle z, B_t^+(\cdot)z \rangle},$$

where B_t^+ is a pseudo inverse matrix. (It coincides with the inverse if B_t is nonsingular.)

¹The set to perform maximization is not necessarily closed. For example, a convex cone representing a barrier cone for some non-empty convex set was characterized in [234]: this cone must be a set of the type F_σ , i.e., can be written as a countable union of closed sets. This requirement seems obvious since the support function is lower semicontinuous.

- 2) Consider the case where the trading constraints $D_t(\cdot)$ are a convex cone, and $0 \in D_t(\cdot)$. In this case, the barrier cone for D_t is D_t° , i.e., the cone polar to D_t :

$$\text{bar}(D_t(\cdot)) = (D_t(\cdot))^\circ = \{y : hy \leq 0 \text{ for all } h \in D_t(\cdot)\};$$

the support function of the set D_t is the indicator function of its barrier cone, i.e.,

$$\sigma_{D_t(\cdot)}(z) = \begin{cases} 0 & z \in (D_t(\cdot))^\circ \\ +\infty & z \notin (D_t(\cdot))^\circ \end{cases},$$

As a result, the optimization problem (7.1.1) takes the form

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \bigvee_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \sup_{\int y Q(dy) \in (D_t(\cdot))^\circ} \int w_t(\cdot, y) Q(dy), t = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

where $w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y)$. Note that for conic trading constraints, condition NDSAUP is equivalent to condition NDSA. Its geometric criterion has the form $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap (D_t(\cdot))^\circ \neq \emptyset$, and the supremum in (7.1.4) is taken over a non-empty set; see Theorem 5.1.1. In this case, the problem of Stage 2 (see above) becomes simpler: the expression with support function in (7.1.1) disappears.

An application-relevant case concerns static trading constraints prohibiting short positions on risky assets from a set² $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, where $k \geq 1$:

$$D_t(\cdot) \equiv D = \{h \in \mathbb{R}^n : h^{i_1} \geq 0, \dots, h^{i_k} \geq 0\}. \quad (7.1.5)$$

In this case, the barrier cone³ has the form

$$\text{bar}(D) = \{y \in \mathbb{R}^n : y_j \leq 0 \text{ for } j \in I \text{ and } y_j = 0 \text{ for } j \notin I\}.$$

Here the supremum in (7.1.4) is taken over the class of probability measures for which the price process will be a supermartingale for each risky asset $j \in I$ and a martingale for $j \notin I$. This agrees with our interpretation of the most unfavorable market behavior (long positions on several risky assets). \square

The function $z \mapsto u_{t,\cdot}(z)$ is concave by Lemma 7.3.1, proved below in this section. Since the support function is convex, the function $z \mapsto u_{t,\cdot}(z) - \sigma_{D_t(\cdot)}(z)$ has the same property. Maximizing a concave function on the convex set $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))$ is a classical problem.

Let us concentrate on the problem arising at Stage 1. We begin by analyzing the class of optimal mixed strategies in a particular case, i.e., compact trading constraints.

²In particular, under the complete prohibition of short positions on risky assets ($k = n$), we have $D_t(\cdot) = [0, \infty)^n$.

³If $k < n$, which is a natural example from an economic point of view: the barrier cone does not reduce to the single point 0 and has an empty interior.

According to Proposition 5.2.2, there exists the equilibrium (5.2.6), with $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ as the class of admissible mixed strategies $\mathcal{P}_t(\cdot)$. (This is the class of all distributions with a finite support contained in $K_t(\cdot)$.) As it turns out, problem (7.1.1) and its first stage, problem (7.1.2), can be solved by optimizing over a narrower class of distributions with a support containing at most $n + 1$ points. This conclusion follows, e.g., from a general result on zero-sum games presented in the next section.

7.2 Finite Supports of Mixed Strategies in a Zero-Sum Game

This section presents a generalization of the result obtained by Bohnenblust, Karlin, and Shapley in [39]; also, see [249, Chapter 2, section 3, subsection 3.5, 3.6] and [10, Chapter 20, p. 736]. The generalization was published in the paper [207]. The redundant assumption on the continuity of the function f is replaced with semicontinuity, making our assumptions close to those introduced in the Kneser [130] and Fan [87] theorems. Moreover, we use quasiconvexity⁴ in the spirit of Sion's work [194]. In fact, this result improves the theorems mentioned for the case when one argument of the payoff function (appearing in the theorems in [130], [87], and [194]) takes values in a finite-dimensional convex compact set. In style, our proof resembles Davydov's one [66], resting, in turn, on Shnirelman's ideas [192]. However, the function f in [66] and [192] was supposed jointly continuous. Interestingly, our result was established when studying a financial problem (the pricing and hedging of a contingent claim on options) formalized within the guaranteed estimation method: the solution of the corresponding Bellman–Isaacs equation is based on the theorem below. The proof of this theorem is of interest. In addition, the following result is of independent interest.

Lemma 7.2.1. *Let:*

- 1° X be a non-empty compact convex subset of \mathbb{R}^n , $m \geq 1$, and Y be an arbitrary non-empty set.
- 2° $f(x, y)$ be a numerical function of arguments $x \in X$ and $y \in Y$ such that, for any $y \in Y$, the functions $x \mapsto f(x, y)$ are:
 - a) lower semicontinuous and
 - b) quasiconvex.

We define⁵

$$W = \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y), \quad (7.2.1)$$

⁴A function f defined on a convex subset A of a linear space is said to be quasiconvex if $f\left(\sum_{i=1}^m q_i x_i\right) \leq \bigvee_{i=1}^m f(x_i)$ for $q = (q_1, \dots, q_m) \in S_{m-1}$ and $x_1, \dots, x_m \in A$.

⁵From this point onwards, \bigvee indicates the binary associative (and commutative) operation of taking the maximum, which justifies the notation $\bigvee_{i=1}^k a_i$. Minimum in (7.2.1) is correct since the

$$W_m = \sup_{y_1 \in Y, \dots, y_{m+1} \in Y} \min_{x \in X} \bigvee_{i=1}^{m+1} f(x, y_i).$$

Then $W = W_m$.

Proof. As is easily checked, $W_m \leq W$. Indeed, for all $x \in X$ and $y_i \in Y$, $i = 1, 2, \dots, m+1$, we have

$$\bigvee_{i=1}^{m+1} f(x, y_i) \leq \sup_{y \in Y} f(x, y).$$

Hence, for all $y_i \in Y$, $i = 1, 2, \dots, m+1$,

$$\min_{x \in X} \bigvee_{i=1}^{m+1} f(x, y_i) \leq \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y),$$

and consequently,

$$\sup_{y_1 \in Y, \dots, y_{m+1} \in Y} \min_{x \in X} \bigvee_{i=1}^{m+1} f(x, y_i) \leq \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y).$$

Now we show the reverse inequality $W \leq W_m$. It is nontrivial only if Y contains more than $m+1$ elements. Indeed, since the operation \bigvee of taking the maximum is jointly continuous, the function $x \mapsto \bigvee_{i=1}^{m+1} f(x, y_i)$ will be lower semicontinuous and achieve minimum at some point from X (depending on y_1, \dots, y_{m+1}). Defining

$$C_y = \{x : f(x, y) \leq W_m\},$$

we obtain

$$\bigcap_{i=1}^{m+1} C_{y_i} \neq \emptyset$$

for any y_1, \dots, y_{m+1} from Y .

By assumption 2^oa), the sets C_y are closed and, hence, compact. By assumption 2^ob), they are convex. Thus, we apply the Helly theorem [109]:

$$\bigcap_{y \in Y} C_y \neq \emptyset.$$

Therefore, there exists a point $x^* \in X$ such that $f(x^*, y) \leq W_m$ for all $y \in Y$. Consequently,

$$W = \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) \leq \sup_{y \in Y} f(x^*, y) \leq W_m.$$

□

function $x \mapsto \sup_{y \in Y} f(x, y)$ is lower semicontinuous; moreover, this function can be $+\infty$. (Here, the neighborhoods of $+\infty$ are intervals of the form $(a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$.) Therefore, the minimum is achieved at some point of the compact set X .

For $m \geq 0$, consider the simplex

$$S_m = \{q = (q_1, \dots, q_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : q_i \geq 0, i = 1, \dots, m+1; \sum_{i=1}^{m+1} q_i = 1\} \quad (7.2.2)$$

and the class $\mathcal{P}^m(Y)$ of all probability measures on Y concentrated at most at $m+1$ points, i.e.,

$$\mathcal{P}^m(Y) = \{Q = \sum_{i=1}^{m+1} q_i \delta_{y_i} : q \in S_m, y_i \in Y, i = 1, \dots, m+1\}, \quad (7.2.3)$$

where δ_y is a probability measure concentrated at a point $y \in Y$.

Lemma 7.2.2. *If Y is a compact Hausdorff topological space, then the set $\mathcal{P}^m(Y) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ is compact in the weak topology.*⁶

Proof. Consider an arbitrary net Q^α , $\alpha \in I$, of measures from $\mathcal{P}^m(Y)$. Then a measure Q^α can be represented as $Q^\alpha = \sum_{i=1}^{m+1} q_i^\alpha \delta_{y_i^\alpha}$. Due to the compactness of Y and the simplex S_m , there exist subnet $q^{\alpha\beta} = (q_1^{\alpha\beta}, \dots, q_{m+1}^{\alpha\beta}) \in S_m$, $y_1^{\alpha\beta} \in Y, \dots, y_{m+1}^{\alpha\beta} \in Y$, converging to points $q^* = (q_1^*, \dots, q_{m+1}^*) \in S_m$ and $y_1^* \in Y, \dots, y_{m+1}^* \in Y$, respectively. In addition, the subnet $Q^{\alpha\beta}$ weakly converges to the measure $Q^* = \sum_{i=1}^{m+1} q_i^* \delta_{y_i^*}$, so $Q^* \in \mathcal{P}^m(Y)$. \square

Now we formulate and prove the theorem.

Theorem 7.2.1.

Consider a zero-sum game with the following assumptions:

- 1° *The first player chooses pure strategies in a space X that is a compact convex subset of \mathbb{R}^m , $m \geq 1$, whereas the second player chooses a mixed strategy, i.e., a distribution⁷ on a non-empty set Y equipped with the σ -algebra \mathcal{A} containing all singletons Y .*
- 2° *The payoff function $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, is such that, for any $y \in Y$:*

a) *the functions $x \mapsto f(x, y)$ are lower semicontinuous and*

⁶Recall that we operate the weakest topology for which the functions $Q \mapsto \int f dQ$ are continuous for any bounded continuous numerical function g on Y . (For a compact space Y , continuous numerical functions are always bounded.)

⁷That is, a probability measure on (Y, \mathcal{A}) , where the σ -algebra \mathcal{A} contains all singletons Y and the functions $y \mapsto f(x, y)$ must be measurable with respect to \mathcal{A} . In fact, a particular choice of \mathcal{A} is not needed for the first part of the theorem: it does not employ assumption 3°. In this part, we can suppose that, e.g., \mathcal{A} is the σ -algebra of all at most countable subsets of Y . Then the measurability condition is satisfied for any functions, and we consider only discrete distributions.

b) any convex combinations of functions from the family $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$, are quasiconvex.⁸

Then

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^m(Y)} \min_{x \in X} \int f(x, y) Q(dy), \quad (7.2.4)$$

where $\mathcal{P}^m(Y)$ is the class of all probability measures on Y concentrated at most at $m + 1$ points, i.e.,

$$\mathcal{P}^m(Y) = \left\{ Q = \sum_{i=1}^{m+1} q_i \delta_{y_i} : q \in S_m, y_i \in Y, i, i+1, \dots, m+1 \right\}, \quad (7.2.5)$$

$S_m = \{q = (q_1, \dots, q_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : q_i \geq 0, i = 1, \dots, m+1; \sum_{i=1}^{m+1} q_i = 1\}$, and δ_y denotes a probability measure concentrated at a point $y \in Y$.

3° Under the additional assumption that Y is a compact Hausdorff topological space and the functions $y \mapsto f(x, y)$ are upper semicontinuous for all x , the supremum on both sides of (7.2.4) can be replaced with the maximum.

Proof. Note that for any $x \in X$, $u \geq 0$, and $y_i \in Y$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, the function

$$q = (q_1, \dots, q_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} q_i f(x, y_i), \quad q \in S_n,$$

is affine and continuous. By assumption 2° b), the convex combination

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} q_i f(x, y_i), \quad x \in X,$$

is a quasiconvex function, for any $q \in S_n$ also satisfying lower semicontinuity due to assumption 2° a). According to the Sion theorem [194, Corollary 3.3], we have

$$\min_{x \in X} \max_{q \in S_n} \sum_{i=1}^{n+1} q_i f(x, y_i) = \max_{q \in S_n} \min_{x \in X} \sum_{i=1}^{n+1} q_i f(x, y_i). \quad (7.2.6)$$

Moreover, obviously,

$$\bigvee_{i=1}^{n+1} f(x, y_i) = \max_{q \in S_n} \sum_{i=1}^{n+1} q_i f(x, y_i). \quad (7.2.7)$$

In the case $Y = \{y_1, \dots, y_{n+1}\}$, where $n \geq 0$ and $n \leq m$, $\mathcal{P}^n(Y) = \mathcal{P}^m(Y)$. In view of (7.2.6) and (7.2.7), we arrive at (7.2.4).

⁸In other words, for any $p = (p_1, \dots, p_n) \in S_{n-1}$, $n \geq 1$, and arbitrary $y_i \in Y$, $i = 1, \dots, n$, the functions $x \mapsto \sum_{i=1}^n p_i f(x, y_i)$ are quasiconvex. In particular, the functions $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$, are quasiconvex.

If Y contains more than $m + 1$ elements, we address the lemma proved above. Let us fix an arbitrary number $\varepsilon > 0$ and choose $y_1^\varepsilon, \dots, y_{m+1}^\varepsilon$ from Y such that

$$\min_{x \in X} \bigvee_{i=1}^{n+1} f(x, y_i^\varepsilon) \geq \left[\sup_{y_1^\varepsilon \in Y, \dots, y_{m+1}^\varepsilon \in Y} \min_{x \in X} \bigvee_{i=1}^{n+1} f(x, y_i) \right] - \varepsilon = W - \varepsilon, \quad (7.2.8)$$

where W is given by (7.2.1). Applying (7.2.6) with $n = m$ and $y_i = y_i^\varepsilon, i = 1, \dots, m+1$, we note that the maximum over q on the right-hand side of (7.2.6) is achieved at some $q^\varepsilon \in Sm$. Defining $Q^\varepsilon = \sum_{i=1}^{m+1} q_i^\varepsilon \delta_{y_i^\varepsilon} \in \mathcal{P}^m(Y)$ and considering (7.2.6)–(7.2.8) yields

$$\min_{x \in X} \int f(x, y) Q^\varepsilon(dy) \geq W - \varepsilon.$$

Since $\varepsilon > 0$ is arbitrary, we have

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}^m(Y)} \min_{x \in X} \int f(x, y) Q(dy) \geq W.$$

The reverse inequality follows from the trivial relation

$$\min_{x \in X} \int f(x, y) Q^\varepsilon(dy) \leq \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = W$$

holding for any distribution inequality $Q \in \mathcal{P}^m(Y)$: the mean of a function does not exceed its supremum.

Under assumption 3^o, the maximum on the left-hand side of (7.2.1) is achieved due to the compactness of Y and the upper semicontinuity of the functions $y \mapsto f(x, y)$.

By the Alexandroff theorem⁹, for each $x \in X$ the function $Q \mapsto \int f(x, y) Q(dy)$ is upper semicontinuous in the weak topology on the space $\mathcal{P}(Y)$ of all Borel probability measures¹⁰ on Y . According to Lemma 7.2.2, the set $\mathcal{P}^m(Y) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ is compact. Thus, the function $Q \mapsto \int f(x, y) Q(dy)$ achieves maximum on $\mathcal{P}^m(Y)$. \square

Remark 7.2.1.

- 1) Assumption 2^o b) of Theorem 7.2.1 holds, e.g., in the one-dimensional case ($m = 1$) for $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ and a family of unimodal functions $x \mapsto f(x, y), y \in Y$, with a common minimizer (i.e., when there exists an argument $x^* \in [a, b]$ such that the functions $x \mapsto f(x, y), y \in Y$, are nonincreasing for $x \leq x^*$ and nondecreasing for $x \geq x^*$).
- 2) Assumption 2^o b) of Theorem 7.2.1 is satisfied for the convex functions $x \mapsto f(x, y), y \in Y$.

⁹See Theorem 2 in the paper [2, Section 16]. (More precisely, it established the lower (upper) semicontinuity of a function defined on a set of probability measures and representing a measure of an open set (a closed set, respectively).) However, this result can be easily extended to the case of an integral of a semicontinuous function; for example, see [232, Theorem 9.1.5].

¹⁰Here, we naturally define the domain \mathcal{A} of measures Q as the Borel σ -algebra. The functions $y \mapsto f(x, y)$ are measurable due to their upper semicontinuity.

- 3) If there exists a strictly monotonic and continuous numerical function φ such that the composition $\varphi \circ f$ satisfies the conditions in item 2 of this remark, i.e., the function $x \mapsto \varphi(f(x, y))$ is convex for all $y \in Y$ (particularly the functions $x \mapsto f(x, y)$ are quasiconvex¹¹ for all $y \in Y$), then

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^m(Y)} \min_{x \in X} \phi^{-1} \left(\int \phi(f(x, y)) Q(dy) \right).$$

- 4) The class $\mathcal{P}^m(Y)$ is not convex if Y contains more than $m + 1$ points.
- 5) A simple example below shows that the quasiconvexity of the functions $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ (rather than assumption 2° b) of Theorem 7.2.1) is not sufficient for (7.2.4): the presence of a common minimizer for the family of unimodal functions $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$, is an essential condition; see item 1 of this remark. Let

$$f(x, y) = 4 - (x - y)^2, \quad x \in [-1, 1] = X, \quad y \in \{-1, 1\} = Y.$$

Here, the functions $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$, are quasiconvex and unimodal (with unique but different minimizers). Clearly,

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = 3,$$

but

$$\max_{Q \in \mathcal{P}(Y)} \min_{x \in X} \int f(x, y) Q(dy) = 2.$$

To apply Theorem 7.2.1 in the case of compact sets $D_t(\cdot)$, we choose

$$X = D_t(\cdot), \quad Y = K_t(\cdot), \quad f(h, y) = w_t(\cdot, y) - hy. \quad (7.2.9)$$

Now we apply Theorem 7.2.1 in the case of no trading constraints ($D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$).

Proposition 7.2.1. *Assume that there are no trading constraints and no arbitrage opportunities (NDAO). In addition, let the functions v_t^* in equations (BI) be upper semicontinuous.¹² Then the optimality property of mixed “market” strategies for American, Bermuda, and European options is achieved in the class of risk-neutral probabilities such that the conditional distributions of price increments under a known price history are concentrated at most at $n + 1$ points.*

¹¹Note that a quasiconvex function is not necessarily representable as a composition of a strictly monotonic numerical function and a convex function. This fact was first observed by Fenchel [91].

¹²Sufficient conditions for the upper semicontinuity of v_t^* have been established in Theorem 3.1.4. In the case under consideration, they reduce to the upper semicontinuity of $K_t(\cdot)$ and $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$. (The static set-valued mappings $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$ are lower semicontinuous.)

Proof. For American, Bermuda, and European options, equations (BI) can be shortly written¹³ as equation (5.2.4). Let us present it again for convenience:

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot), \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

where $\rho_t(\cdot)$ is given by (5.2.1). In the general case, the function $g_t(\cdot)$ takes nonnegative values at the time instants t of possible payoffs (for American options, at all time instants; for Bermuda options, at some fixed time instants; for European options, at the expiration time), and $g_t(\cdot) \equiv -\infty$ at the other time instants (in the absence of payoff liabilities). However, NDAO implies NDSA; in addition, we have the inequalities

$$C \geq \rho_t(\cdot) \geq \rho_t'(\cdot) \geq 0, \quad (7.2.11)$$

where C is given by (1.2.3). Conditions (7.2.10) and (7.2.11) lead to $v_t^*(\cdot) \geq 0$, and the functions $g_t(\cdot)$ at all time instants $t = 1, \dots, N$ can be formally supposed nonnegative by letting $g_t(\cdot) \equiv 0$ instead of $g_t(\cdot) \equiv -\infty$ for the time instants without payoff liabilities.

Further we need the results from Section 5.3, recalled for convenience below. First, without losing generality¹⁴, we consider full-dimensional compact sets $K_t(\cdot)$, i.e., they are not contained in an affine manifold of a dimension less than n . In this case, $0 \in \text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, and a closed ball $\bar{B}_r(0)$ of some radius $r > 0$ centered at the point 0 is contained in $\text{conv}(K_t(\cdot))$; the maximum radius $r_t^*(\cdot)$ of such a ball in the full-dimensional case is given by formula (4.2.17). Due to the nonnegativity of $v_t^*(\cdot)$ (hence, of $w_t(\cdot)$), the expression (5.2.1) can be estimated as

$$\begin{aligned} \varphi_{t,\cdot}(h) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy) = \\ &= \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \geq \\ &= \max_{y \in K_t(\cdot)} (-hy) = \sigma_{K_t(\cdot)}(-h) \geq r_t^*(\cdot) \|h\|. \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

At the same time, we have the inequality

$$\inf_{h \in \mathbb{R}^n} \varphi_{t,\cdot}(h) = \rho_t(\cdot) \leq C. \quad (7.2.13)$$

Let¹⁵ $A \geq A_t^*(\cdot) = \frac{C}{r_t(\cdot)}$. With (7.2.12) and the above choice of A , the inequality $\|h\| > A$ implies the inequality $\varphi_{t,\cdot}(h) > C$. In view of (7.2.13), for any $A \geq A_t^*(\cdot)$ we obtain

$$\inf_{h \in \mathbb{R}^n} \varphi_{t,\cdot}(h) = \inf_{h \in B_A(0)} \varphi_{t,\cdot}(h).$$

¹³Formally, as suggested in Chapter 1, $g_0 \equiv -\infty$, but we assume that $g_0 \equiv 0$ due to the nonnegativity of $\rho_t(\cdot)$ for American options.

¹⁴NDAO is equivalent to $0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot)0))$, so the affine hull of $K_t(\cdot)$ is a linear subspace of $L_t(\cdot)$; the scalar product $hy, y \in K_t(\cdot)$, coincides with $h'y$, where h' is the orthogonal projection of h onto $L_t(\cdot)$.

¹⁵Here, we fix a time instant t and a price history, denoted by the dot.

In contrast to Section 5.3 (Proposition 5.2.2 based on the Kneser theorem on game equilibrium), here we employ Theorem 7.2.1. For this purpose, note that the function¹⁶

$$f(h, y) = w_t(\cdot, y) - hy,$$

treated below as the payoff function in a zero-sum game, satisfies the following properties.

- 1) The first player (hedger) chooses pure strategies h on a compact convex set $X = \bar{B}_A(0) \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, whereas the second player (“market”) chooses a mixed strategy in the form of a distribution¹⁷ Q on the set $Y = K_t(\cdot)$ equipped with the Borel σ -algebra.
- 2) The payoff function $f(h, y)$ is such that for any $y \in Y$, the functions $h \mapsto f(h, y)$ are affine (hence continuous).

According to Theorem 7.2.1:

- 1) We have the equality¹⁸

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^n(Y)} \min_{x \in X} \int f(x, y) Q(dy). \quad (7.2.14)$$

- 2) Moreover, since the set Y is compact, and the functions $y \mapsto f(x, y)$ are upper semicontinuous for all $x \in X$, *supremum* on both sides of (7.2.4) can be replaced by *maximum*.

Thus, there exist an equilibrium for the mixed extension $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$. The support function of the ball $\bar{B}_A(0)$ is $A\|h\|$. Using this fact and (5.2.9), for any $A \geq A_t^*(\cdot)$ we have

$$\rho_t(\cdot) = \max_{Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))} \left[\int w_t(\cdot, y) Q(dy) - A\|m(Q)\| \right], \quad (7.2.15)$$

where $m(Q)$ denotes the barycenter of the measure Q , i.e., $m(Q) = \int y Q(dy)$. For an arbitrary number $A > A_t^*(\cdot)$, let Q^A be a distribution on which the maximum in (7.2.15) is achieved. Then

$$\int w_t(\cdot, y) Q^A(dy) - A\|m(Q^A)\| = \rho_t(\cdot) \geq \int w_t(\cdot, y) Q^A(dy) - A'\|m(Q^A)\|$$

for any A' satisfying $A > A' > A_t^*(\cdot)$. Consequently, $(A - A')\|m(Q^A)\| \leq 0$ and $\|m(Q^A)\| = 0$. As a result,

$$\rho_t(\cdot) = \max_{Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot), \int y Q(dy)=0)} \int w_t(\cdot, y) Q(dy), \quad (7.2.16)$$

¹⁶With fixed time instant and price history.

¹⁷Distribution is a synonym of probability measure.

¹⁸Recall that $\mathcal{P}^n(Y)$ is the class of all probability measures on Y concentrated at most at $n + 1$ points.

and the conclusion follows.¹⁹ □

7.3 The General Moment Problem

Problem (7.1.2) refers to the moment problem.²⁰ Therefore, we can use the corresponding theoretical results; see the discussion below.

Recall that the optimum of an integral on the class of probability distributions with n moment constraints can be found among discrete distributions concentrated at most at $n + 1$ points. This result is valid under very general assumptions.

Let numerical functions f_0, f_1, \dots, f_n with argument from a set X be measurable with respect to a given σ -algebra \mathcal{A} of all subsets of X . We denote by $\mathcal{P}(X)$ the class of all probability measures on (X, \mathcal{A}) .

The moment problem is to find the supremum (or infimum) of the integral

$$\int f_0(x)\pi(dx) \tag{7.3.1}$$

for $\pi \in \mathcal{P}(X)$ such that

$$\int f_j(x)\pi(dx) = z_j^*, \quad j = 1, \dots, n, \tag{7.3.2}$$

where z_j^* are given numbers, $j = 1, \dots, n$. We denote by $I(z^*)$ the corresponding value of the supremum. By assumption, the integrals in (7.3.1) are at least well-defined or finite for all measures of the class $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$. (Of course, the integrals in (7.3.2) are finite.)

Also, we introduce the notations

$$\begin{aligned} f(x) &= (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n, \\ z^* &= (z_1^*, \dots, z_n^*) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Let²¹

$$\mathcal{P}^f(X) = \left\{ \int f d\pi : \pi \in \mathcal{P}(X), \int \|f\| d\pi < \infty \right\}. \tag{7.3.3}$$

For convenience, we adopt the linear operator

$$J(\pi) = \int f d\pi. \tag{7.3.4}$$

¹⁹Under fixed prices at the initial time instant, the measures $Q_t^*(x)$, $t = 1, \dots, N$, on which the maximum in (7.2.16) is achieved (the conditional distributions of price increments given $\bar{X}_{t-1} = x$) define a probability measure \mathbb{P} concentrated on a finite number of paths that is risk-neutral (martingale). Thus, \mathbb{P} generates a complete market model, see [121], and the well-known results of stochastic mathematical finance can be used to find the premium and the hedging strategy.

²⁰An alternative term is the Chebyshev–Markov problem: posed by P.L. Chebyshev, it was solved by his student A.A. Markov in the dissertation [144].

²¹An appropriate norm can be chosen arbitrarily: any two norms in \mathbb{R}^n are equivalent. The Pettis integral in \mathbb{R}^n can be understood coordinate-wise.

This operator is defined on $\mathcal{P}^f(X)$ and takes values in \mathbb{R}^n . Due to the problem statement with the constraints (7.3.2), we consider the classes of measures $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^f(X)$ only. Under another reasonable assumption for the moment problem, system (7.3.2) is feasible. This assumption is equivalent to the condition²²

$$z^* \in J(\mathcal{Q}). \quad (7.3.5)$$

(Otherwise, formally let $I(z^*) = -\infty$.)

In addition, we introduce the shorthand notations

$$\begin{aligned} E(z) &= J^{-1}(\{z\}) \cap \mathcal{Q} = \left\{ \pi \in \mathcal{Q} : \int f \, d\pi = z \right\}, \\ V &= J(\mathcal{Q}), \\ V_{-\infty} &= \{z \in V : I(z) = -\infty\}, \\ V_{>-\infty} &= \{z \in V : I(z) > -\infty\}, \\ V_{+\infty} &= \{z \in V : I(z) = +\infty\}, \\ V_{\neq\infty} &= \{z \in V : I(z) \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

Proposition 7.3.1. *Let \mathcal{Q} be a non-empty convex subclass of $\mathcal{P}^f(X)$. Assume that the integral $\int f_0 \, d\pi$ is well-defined (finite or infinite) for all measures $\pi \in \mathcal{Q}$. Then the function*

$$I(z) = \sup_{\pi \in E(z)} \int f_0 \, d\pi, \quad z \in J(\mathcal{Q}) \quad (7.3.7)$$

is concave.²³ In addition, the sets $E(z)$, $V_{-\infty}$, $V_{>-\infty}$, and $V_{+\infty}$ given by (7.3.6) are convex.²⁴ If the set $V_{-\infty}$ is non-empty, then $V_{>-\infty}$ is contained in its relative boundary²⁵; if $V_{+\infty}$ is non-empty, then $V_{\neq\infty}$ is contained in its relative boundary.

Proof. Suppose that there exist measures π_1 and π_2 in the class \mathcal{Q} such that $\int f_0 \, d\pi_1 = +\infty$ and $\int f_0 \, d\pi_2 = -\infty$. Then the integral $\int f_0 \, d\pi$ is ill-defined for their nontrivial mixture π , i.e., a convex combination of the form $\pi = q_1\pi_1 + q_2\pi_2 \in \mathcal{Q}$, where $q_1, q_2 > 0, q_1 + q_2 = 1$. However, this contradicts the hypotheses of the proposition. Therefore, if an infinite value of the integral $\int f_0 \, d\pi, \pi \in \mathcal{Q}$, belongs to admissible

²²Here, $J(\mathcal{Q})$ means the image of \mathcal{Q} under a mapping J given by (7.3.4).

²³The concave function I is defined as in the book [175]; it can take values $+\infty$ and $-\infty$ and be considered given on the entire space \mathbb{R}^n using an extension equal to $-\infty$ outside its (convex) domain of definition. For such an extension, the subgraph (hypograph) of the function $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y \leq I(x)\}$ must be a convex subset of \mathbb{R}^{n+1} .

²⁴Under the assumption that an empty set is convex.

²⁵In particular, the convex subset $V_{>-\infty}$ of the boundary of the convex set $V_{-\infty}$ has a smaller dimension than $V_{-\infty}$; see [175, Corollary 6.3.3]. By [175, Theorem 11.6] applied to the closure $\bar{V}_{-\infty}$ of the set $V_{-\infty}$ and $V_{>-\infty} \subseteq \bar{V}_{+\infty}$, there exists a support hyperplane to $\bar{V}_{+\infty}$ (and hence to $V_{+\infty}$) containing $V_{>-\infty}$.

values, it can be either $-\infty$ or $+\infty$ only. We introduce the sets

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{-\infty} &= \left\{ \pi \in \mathcal{Q} : \int f_0 d\pi = -\infty \right\}, \\ \mathcal{Q}_{+\infty} &= \left\{ \pi \in \mathcal{Q} : \int f_0 d\pi = +\infty \right\}, \\ \mathcal{Q}_{\neq\infty} &= \left\{ \pi \in \mathcal{Q} : \int |f_0| d\pi < +\infty \right\}.\end{aligned}$$

These three sets of measures are convex, pairwise disjoint, and give \mathcal{Q} in union; at least one of the sets $\mathcal{Q}_{-\infty}$ and $\mathcal{Q}_{+\infty}$ is empty. Note that the set $J(\mathcal{Q}')$ is convex for the convex class $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{P}^f(X)$. The convexity of the set $E(z)$ is obvious.

First, we consider the case where $\mathcal{Q}_{-\infty} \neq \emptyset$ (then automatically $\mathcal{Q}_{+\infty} = \emptyset$). If $\mathcal{Q}_{\neq\infty} = \emptyset$, then²⁶ $I(z) \equiv -\infty$. If $\mathcal{Q}_{\neq\infty} \neq \emptyset$, then $I(z) = -\infty$ for $E(z) \subseteq \mathcal{Q}_{-\infty}$ and $I(z) > -\infty$ for $E(z) \cap \mathcal{Q}_{\neq\infty} \neq \emptyset$. Note that the sets $V_{-\infty}$ and $V_{>-\infty} = J(\mathcal{Q}_{\neq\infty}) \neq \emptyset$ are convex, disjoint, and give V in union. If $V_{-\infty} \neq \emptyset$, then $V_{>-\infty}$ is contained in the relative boundary of $V_{-\infty}$. Indeed, if $z \in V_{>-\infty}$ and $z' \in V_{-\infty}$, then we have $\int f_0 d\pi = -\infty$ for $\pi \in E(z')$ and $\int |f_0| d\pi < +\infty$ for $\pi \in E(z)$. Choosing numbers $q \geq 0$ and $q' > 0$, $q + q' = 1$, we obtain the convex combination $qz + q'z' \in V_{-\infty}$.

Next, it suffices to check the concavity of the function I on the convex set $V_{>-\infty} \neq \emptyset$. On this set, the function I takes values from $(-\infty, +\infty]$. Therefore, the set $V_{>-\infty}$ can be represented as the union of two disjoint sets: $V_{+\infty}$ and $V_{\neq\infty}$.

If $V_{\neq\infty} = \emptyset$, then $I(z) \equiv +\infty$, and concavity²⁷ holds. Assume that $V_{\neq\infty} \neq \emptyset$.

We choose arbitrary points $z_1 \in V_{>-\infty}$ and $z_2 \in V_{>-\infty}$ and their convex combination $z = q_1 z_1 + q_2 z_2 \in V_{>-\infty} = J(\mathcal{Q}_{\neq\infty})$, where $q_1, q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 = 1$.

Let $V_{\neq\infty} \neq \emptyset$ but $V_{+\infty} = \emptyset$. Then $z_1 \in V_{\neq\infty}$ and $z_2 \in V_{\neq\infty}$, and for any $\varepsilon > 0$ there exist probability measures $\pi_1 \in E(z_1)$ and $\pi_2 \in E(z_2)$ such that $\int |f_0| d\pi_1 < +\infty$, $\int |f_0| d\pi_2 < +\infty$, and

$$\begin{aligned}\int f_0 d\pi_1 &\geq I(z_1) - \varepsilon, \\ \int f_0 d\pi_2 &\geq I(z_2) - \varepsilon.\end{aligned}$$

For a measure π representing a mixture of π_1 and π_2 with the weights q_1 and q_2 ($\pi = q_1 \pi_1 + q_2 \pi_2$), we have

$$\int f d\pi = q_1 z_1 + q_2 z_2 = z,$$

meaning that $\pi \in E(z)$ and

$$I(z) \geq \int f_0 d\pi \geq q_1 I(z_1) + q_2 I(z_2) - \varepsilon.$$

²⁶In the terminology of the book [175], such a concave function is improper with an empty effective domain.

²⁷In the terminology of [175], such a concave function is improper.

Since ε is arbitrary,

$$I(q_1 z_1 + q_2 z_2) \geq q_1 I(z_1) + q_2 I(z_2). \quad (7.3.8)$$

If $V_{\neq\infty} \neq \emptyset$, $V_{+\infty} \neq \emptyset$, and at least one of the numbers $I(z_1)$ and $I(z_2)$ is $+\infty$ (e.g., $I(z_1) = +\infty$), then for an arbitrarily large number a there exists a measure $\pi_1 \in E(z_1)$ such that $I(z_1) \geq a$. Let us fix a measure $\pi_2 \in E(z_2) \neq \emptyset$; then for the mixture $\pi = q_1 \pi_1 + q_2 \pi_2$, where $q_1 > 0$, $q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 = 1$, we have $\pi \in E(z)$ and

$$\int f_0 d\pi = q_1 \int f_0 d\pi_1 + q_2 \int f_0 d\pi_2 \geq q_1 a + q_2 \int f_0 d\pi_2.$$

Due to the arbitrariness of a , it follows that $I(z) = +\infty$, and inequality (7.3.8) turns into equality. Thus, the set $V_{+\infty}$ is convex, and the set $V_{\neq\infty}$ is contained in its relative boundary.²⁸

The case $\mathcal{Q}_{-\infty} = \emptyset$ is considered by analogy to proving the concavity of the function I on the convex set $V_{>-\infty} \neq \emptyset$. \square

Remark 7.3.1.

- 1) The function I will not take the value $-\infty$ (i.e., $\mathcal{Q}_{-\infty} = \emptyset$) under the following sufficient condition imposed on the function f_0 : there are constants $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ such that

$$f_0(x) \geq \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) + \alpha_{n+1}.$$

- 2) A sufficient condition for $\mathcal{Q}_{-\infty} = \emptyset$ can be formulated as requirements to the class \mathcal{Q} : for example, we can choose $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^*(X)$, where $\mathcal{P}^*(X)$ is the class of all probability measures with a finite support. In addition, this class \mathcal{Q} is a convex subclass of $\mathcal{P}^f(X)$, and the integral $\int f_0 d\pi$ is finite for all measures $\pi \in \mathcal{Q}$.
- 3) By analogy with item 1), the function I will not take the value $+\infty$ under the following sufficient condition imposed on the function f_0 : there are constants $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ such that

$$f_0(x) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) + \alpha_{n+1}.$$

Example 7.3.1. Consider an illustrative example for Proposition 7.3.1.

Consider three spaces $X_1 = [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, $X_2 = [0, +\infty)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, and $X = X_1 \times X_2 = [0, +\infty)^3 \subseteq \mathbb{R}^3$, each equipped with a corresponding Borel σ -algebra. On X_1 we define a family of probability measures \mathcal{Q}_1 represented as a mixture $q\delta_0 + (1-q)\pi'$, where $q \in [0, 1]$ and π' is an arbitrary probability measure on $[0, 1]$

²⁸Note that the set $V_{\neq\infty}$ is not necessarily convex; see an example below.

such that $0 < \int x \pi'(dx) < +\infty$, $\int x^2 \pi'(dx) = +\infty$. On X_2 we define the family of all probability measures \mathcal{Q}_2 . On $X = X_1 \times X_2$ we define a family of probability measures \mathcal{Q} with marginal distributions $A \mapsto \pi(A \times [0, +\infty)^2)$ from the family of measures \mathcal{Q}_1 and $B \mapsto \pi([0, +\infty) \times B)$ from the family of measures \mathcal{Q}_2 . The family of probability measures \mathcal{Q} is non-empty²⁹ and convex. We choose the function f_0 as $f_0(x) = x_1 x_2 - x_3^2$, where $(x_1, x_2, x_3) \in [0, +\infty)^3$. In this example, for the class \mathcal{Q} and the function f_0 , we obtain $V_{-\infty} = (0, +\infty) \times [0, +\infty)^2$, $V_{>-\infty} = \{0\} \times [0, +\infty)^2$, $V_{+\infty} = \{0\} \times (0, +\infty)^2$, and $V_{\neq\infty} = \{0\} \times \{0\} \times (0, +\infty) \cup \{0\} \times (0, +\infty) \times \{0\} \cup \{(0, 0, 0)\}$. Note that the set $V_{\neq\infty}$ in this example is not convex.

We are concerned with classes \mathcal{Q} representing convex subclasses of $\mathcal{P}^f(X)$ with an additional condition: \mathcal{Q} contains all probability measures concentrated at one point.³⁰ The class $\mathcal{P}^*(X)$ of all probability measures concentrated in a finite set of points from X is a minimal class with this property. Therefore, this condition can be written as

$$\mathcal{Q} \supseteq \mathcal{P}^*(X). \quad (7.3.9)$$

Under (7.3.9), a sufficient condition for the feasibility of (7.3.2) obviously consists in

$$z^* \in \text{conv}(f(X)). \quad (7.3.10)$$

In this case, there exists a convex combination $\sum_{i=1}^k q_i y^i = z^*$, $k \geq 1$, where $y^i \in f(X)$, $i = 1, \dots, k$, such that $y^i = f(x^i)$, $i = 1, \dots, k$, for some $x^i \in X$. As a result,

$$z^* = \sum_{i=1}^n q_i f(x^i) = \int f d\pi^*$$

for

$$\pi^* = \sum_{i=1}^k q_i \delta_{x^i}, \quad q = (q_1, \dots, q_k) \in S_{k-1},$$

where

$$S_{n-1} = \left\{ (p_1, \dots, p_n) : \sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Moreover, by Carathéodory's theorem, it is possible to choose $k \leq n + 1$ points.

The following nontrivial result holds without any additional assumptions: (7.3.10) is also necessary for the feasibility of system (7.3.2). The corresponding theorem was proved³¹ in [177, Theorem 2]; similar results were obtained almost simultaneously and independently in [174] and [156]. Then the results above can be formulated as follows³²:

²⁹For example, \mathcal{Q} includes direct products of measures from \mathcal{Q}_1 and \mathcal{Q}_2 .

³⁰Although such measures (Dirac measures) are defined on the class of all subsets of X , it may be convenient to consider measures on a fixed measurable space (X, \mathcal{A}) . In this case, a natural requirement is that all singletons be included in \mathcal{A} .

³¹Although the theorem in the original paper was established for an interval X on the real line \mathbb{R} , the author noted in the Introduction that many considerations remain valid for a general measurable space. In fact, the proof of [177, Theorem 1], directly implying Theorem 2, did not specify X .

³²Recall that $\mathcal{P}^n(X)$ is the class of all probability measures concentrated at most at $n + 1$ points from X .

Theorem 7.3.1. (Rogosinski–Richter–Mulholland–Rogers)

$$J(\mathcal{P}^f(X)) = J(\mathcal{P}^n(X)). \quad (7.3.11)$$

For \mathcal{Q} , a convex subclass of $\mathcal{P}^f(X)$ satisfying condition (7.3.9), we have the inclusions

$$\mathcal{P}^f(X) \supseteq \mathcal{Q} \supseteq \mathcal{P}^*(X) \supseteq \mathcal{P}^n(X).$$

As a corollary of the Rogosinski–Richter–Mulholland–Rogers theorem, in this case, we obtain

$$J(\mathcal{Q}) = J(\mathcal{P}^n(X)). \quad (7.3.12)$$

Note that by Carathéodory’s theorem,

$$J(\mathcal{P}^n(X)) = \text{conv}(f(X)).$$

Now suppose that the integral $\int f_0 d\pi$ is finite for all measures $\pi \in \mathcal{Q}$. Let us apply (7.3.12) not to the function f but to the vector function \tilde{f} obtained from f by adding one coordinate:

$$\hat{f}(x) = (f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

For $z \in \text{conv}(f(X))$ and $\pi \in E(z)$, we accordingly have

$$\int \tilde{f} d\pi = \left(\int f_0 d\pi, z \right) \in \text{conv}(\tilde{f}(X)) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Hence, there exist x_1, \dots, x_k from X such that

$$\int \tilde{f}(x) d\pi = \int \tilde{f}(x) d\pi^*,$$

where $\pi^* = \sum_{i=1}^k q_i \delta_{x_i}$ and $q = (q_1, \dots, q_k) \in S_{k-1}$, $k \geq 1$.

Thus, we have established the following result.

Proposition 7.3.2. For a convex class of measures $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^f(X)$ such that $\int |f_0| d\pi < \infty$ for all measures $\pi \in \mathcal{Q}$ and condition (7.3.9) is satisfied, the optimization problem (7.3.7) with moment constraints can be solved in the narrow class of measures $\mathcal{P}^*(X)$ concentrated in a finite number³³ of points of the set X .

Indeed, it suffices to restrict the analysis to the class $\mathcal{P}^n(X)$ of measures concentrated at most at $n + 1$ points of the set X . This result is immediate, e.g., from the following line of reasoning. Consider the optimization problem (7.3.7) for a convex class of measures $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^f(X)$ satisfying the conditions of Proposition 7.3.2. Let us choose $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^*(X)$ and denote

$$E^*(z^*) = \left\{ \pi \in \mathcal{P}^*(X) : \int f d\pi = z^* \right\}, \quad (7.3.13)$$

³³Applying inequality (7.3.11) to \tilde{f} instead of f reduces to $n + 2$ the number of measure support points required to solve the optimization problem. Note that [21, Theorem 5.1] can be established by analogy.

assuming condition (7.3.10) to be true. Thus, it is required to find $q = (q_1, \dots, q_k) \in S_{k-1}$, $k \geq 1$.

$$I(z^*) = \sup_{\pi \in E^*(z^*)} \int f_0(x) \pi(dx) = \sup_{\substack{k=1,2,\dots \\ x^1, \dots, x^k \in X}} \left[\max_{q \in L_k^n(x^1, \dots, x^k; z^*)} \sum_{i=1}^k q_i f_0(x^i) \right],$$

$$L_k^n(x^1, \dots, x^k; z^*) = \left\{ q \in S_{k-1} : \sum_{i=1}^k q_i f_j(x^i) = z_j^*, j = 1, \dots, n \right\}. \quad (7.3.14)$$

Maximizing the expression in square brackets of equality (7.3.14) is a standard linear programming problem. A well-known “folklore” result from linear programming theory is that the solution of the problem

$$\max_{p_1, \dots, p_k} \sum_{i=1}^k p_i f_0(x^i) \quad (7.3.15)$$

subject to the constraints

$$\begin{cases} p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k \\ \sum_{i=1}^k p_i = 1 \\ \sum_{i=1}^k p_i f_j(x^i) = z_j^*, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (7.3.16)$$

can be found among the vectors p with at most $n + 1$ nonzero components p_i ; for example, see [97, Chapter II, §11, Theorem VIII].

The proof involves an idea that the set of admissible values $p = (p_1, \dots, p_k)$ satisfying the constraints (7.3.16) is in this case bounded; therefore, it is also a compact convex set (moreover, a polyhedron), and the solution of (7.3.15) is reached at the extreme points of this set. This fact follows from the Steinitz theorem [230] for finite-dimensional spaces: every point of a convex compact set is a convex combination of its extreme points.³⁴

In this case, an extreme point has at most $n + 1$ nonzero components. To show it, assume on the contrary that an extreme point contains $l > n + 1$ nonzero components $p_i > 0, \dots, p_l > 0$. The homogeneous linear system of $n + 1$ equations

$$\sum_{m=1}^l u_{im} = 0,$$

$$\sum_{m=1}^l u_{im} f_i(x^{i_m}) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

³⁴This result is often referred to as the Krein–Milman theorem [135], which generalizes the Steinitz theorem to the nonconvex case. However, in the Krein–Milman theorem, the convex compact set (in a normalized space) belongs to the *closure* of the convex hull of its extreme points. Interestingly, Krein and Milman published their work [135] in 1940, almost simultaneously with Kantorovich’s paper [124] of 1939, where applications of linear programming were first proposed.

has a nontrivial solution, and the vector $(u_{i_1}, \dots, u_{i_l}) \neq 0$ can be chosen arbitrarily close to the zero vector. Then, choosing a sufficiently small solution and letting $u_i = 0$ for $i \notin \{i_1, \dots, i_l\}$, we obtain that the vectors $p + u$ and $p - u$ for $u = (u_1, \dots, u_n)$ also satisfy the constraints. Consequently, $p = \frac{1}{2}(p + u) + \frac{1}{2}(p - u)$, i.e., p is not an extremum.

It seems appropriate here to mention several results concerning the description of extreme points for a set of probability measures with moment constraints. The most general result of this type was presented in Winkler's paper. For our purposes, however, we need a particular case³⁵, i.e., a corollary of Winkler's theorem when the space is Polish.

Theorem (Winkler). *Let X be a Polish space with a Borel σ -algebra \mathcal{B} . For the set of all probability measures from $\mathcal{P}(X)$ satisfying the moment constraints (7.3.2), the extreme points are measures $Q \in \mathcal{P}^n(X)$ satisfying the following condition:*

$$\begin{aligned} &\text{If } \text{supp}(Q) = \{x_1, \dots, x_k\}, \text{ where } k \leq n + 1, \\ &\text{then the vectors } (f_1(x_i), \dots, f_n(x_i), 1), \quad i = 1, \dots, k, \text{ are linearly independent.} \end{aligned} \tag{LI}$$

A similar result was proved earlier by Karr [128, Theorem 2.1] under the additional assumption that the functions f_1, \dots, f_n are bounded and continuous and X is a compact metric space. Let us denote

$$f_{n+1} = I_X, \tag{7.3.17}$$

where I_A is the indicator of a set A (In other words, the function f_{n+1} is identically equal to one.) In Theorem 2.2 of the cited paper, a corollary of Theorem 2.1, a stronger assumption was imposed on the functions appearing in the moment constraints: for any set $\{x_1, \dots, x_{n+1}\} \subseteq X$, a matrix with the elements $f_i(x_j)$ $i = 1, \dots, n + 1; j = 1, \dots, n + 1$ is nonsingular. In this case, the extreme points are the measures concentrated at most at $n + 1$ points.³⁶ Note that the result [128, Theorem 2.2] was obtained much earlier by Karlin [125, Theorem 5], but the author did not refer to that paper.

Now, we introduce the set of measures

$$E^m(z) = \left\{ \pi \in \mathcal{P}^m(X) : \int f d\pi = z \right\}. \tag{7.3.18}$$

Consider the Bellman equations arising at Stage 1 above (i.e., for problem (7.1.2)). For these equations, some useful results from the general moment problem theory can be summarized as follows.

³⁵This theorem considers a general class of probability measures forming a simplex, as defined in the book [166, Section 9, Chapter 9], whose extreme points are Dirac measures (those concentrated in one point).

³⁶Under the hypotheses of this theorem, the extreme points can be measures concentrated at less than $n + 1$ points.

Proposition 7.3.3.

- 1) The system of constraints (7.3.2) is feasible if and only if (7.3.10).
- 2) For the feasible system of constraints (7.3.2), the supremum of the integral (7.3.1) on a convex class of measures $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}^f(X)$ such that $\int |f_0| d\pi < \infty$ for all $\pi \in \mathcal{Q}$ and (7.3.9) holds, can be found in the class of probability measures $\mathcal{P}^n(X)$ concentrated at most at $n + 1$ points of the set X , i.e.,

$$I(z^*) = \sup_{\pi \in E^n(z^*)} \int f_0(x) \pi(dx), \quad (7.3.19)$$

where $E^n(z^*)$ is given by (7.3.18).

With additional assumptions concerning topological properties, the following result is useful for our purposes.

Proposition 7.3.4. *Let X be a compact topological space, and let functions f_1, \dots, f_n be continuous.³⁷ Then $E^n(z^*)$ is compact in the weak topology on the space of measures $\mathcal{P}(X)$. Moreover, if the function f_0 is upper semicontinuous and bounded above, then for any $z \in \text{conv}(f(X))$ in (7.3.19) the maximum is achieved for some measure $\pi^{(z)} \in E^n(z) \subseteq \mathcal{P}^n(X)$ satisfying condition (LI), and the function I is upper semicontinuous on $\text{conv}(f(X))$.*

Proof. Clearly, due to the continuity of f , the set $E^n(z)$ given by (7.3.18) is compact in the weak topology³⁸ for any $z \in \text{conv}(f(X))$. According to the Alexandroff theorem, the function $\pi \mapsto \int f_0 d\pi$ is upper semicontinuous on $E^n(z)$ and therefore achieves maximum for some measure $\pi^{(z)} \in E^n(z)$.

Consider a net z_α of points from $\text{conv}(f(X))$ converging to the point $z^* \in \text{conv}(f(X))$. Let $a \in \mathbb{R}$ be the limit point of the net $I(z_\alpha)$. We extract a subnet z'_β such that $I(z'_\beta)$ converges to a . Since $\mathcal{P}^n(X)$ is compact in the weak topology, it is possible to extract from $\pi^{(z'_\beta)}$ a subnet $\pi^{(z''_\gamma)}$ converging to some measure $\pi^* \in \mathcal{P}^n(X)$, with $\int f d\pi^{(z''_\gamma)} \rightarrow \int f d\pi^* = z^*$ due to the continuity of f .

Now let f_0 be upper semicontinuous and bounded below. By the Alexandroff theorem, the upper limit of $I(z''_\gamma) = \int f_0 d\pi^{(z''_\gamma)}$, equal to a , does not exceed $\int f_0 d\pi^*$. In turn, this value does not exceed $I(z^*)$ given (7.3.19). Since a is arbitrary, we establish the upper semicontinuity of the function I at the point z^* . \square

As a corollary of items 1) and 2) of the remark, we obtain the following assertion refining Proposition 5.2.2, Theorem 5.3.1, and Proposition 5.2.3: the class of mixed “market” strategies can be narrowed to $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$, i.e., the class of all distributions on $K_t(\cdot)$ concentrated at most at $n + 1$ points.

³⁷Note that due to the continuity of f and the compactness of X , the set $f(X)$ is compact, and therefore the set $\text{conv}(f(X))$ is also compact. In addition, according to [251, Theorem 2.1, item (b)], the extreme points of the set of all regular normalized (probability) measures on X satisfying the constraints (7.3.2) are contained in $\mathcal{P}^n(X)$.

³⁸The weakest topology on $\mathcal{P}(X)$ in which the functions $\pi \mapsto \int f d\pi$ are continuous for numerical functions continuous on X .

Theorem 7.3.2.

- 1° Let the sets³⁹ $D_t(\cdot)$ be compact, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Then there exists the equilibrium (5.2.6) for the class $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$. In addition, the infimum in (BI) is reached for some $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$.
- 2° In the case of no trading constraints ($D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$) and no arbitrage opportunities NDAO, there exists the equilibrium (5.2.6), and the infimum in (BI) is reached for some $h_t^*(\cdot)$. Moreover, we have the equality⁴⁰

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)), \int y Q(dy)=0} \int w_t(\cdot, y) Q(dy) \quad (7.3.20)$$

for $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$.

- 3° Let the condition (USC) (upper semicontinuity of the objective functions $v_t^*(\cdot)$, $t = 0, \dots, N$) and the condition (B) (boundedness above of the payoff functions) be fulfilled.⁴¹
- Then for $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

- a) There exists the equilibrium (5.2.6) for the class⁴² $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}(K_t(\cdot))$; in this case, the supremum in (7.1.1) is reached for some $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$.
- b) In addition, if $D_t(\cdot)$ is compact, the finite value of the game is achieved at some saddle point represented by the optimal pair $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$.

Proof. Using the results of Chapter 5, namely Propositions 5.2.2 and 5.2.3, items 1°, 2° and 3° follow from the above considerations on the nature of solutions of the general moment problem, as applied to problem (7.1.2) at Stage 1. Item 3° also involves the weak compactness of the classes $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$, $t = 1, \dots, N$. \square

Returning to the moment problem (7.3.1), (7.3.2), let system (7.3.2) be feasible. Recall that the function f_{n+1} is defined by (7.3.17); obviously, $\int f_{n+1} d\pi = 1$ for all $\pi \in \mathcal{P}(X)$. In fact, the moment problem for probability measures can be formulated as its special case for arbitrary measures when we need to find the supremum (or infimum) of

$$\int f_0 d\mu$$

³⁹Recall that by assumption, the sets $D_t(\cdot)$ are convex and contain the point 0.

⁴⁰Equality (7.3.20) can be interpreted as follows: the optimal “market” behavior can be restricted to the class of distributions in which the prices form a martingale and conditional distributions of price increments are concentrated in a finite number of points. (As is easily shown, it suffices to consider the distributions of price increments concentrated at most at $n + 1$ points.) Thus, we obtain a game-theoretic interpretation of risk-neutral measures as the most unfavorable ones in the case of no trading constraints; see [219] for a discussion of the economic interpretation.

⁴¹Sufficient conditions for the upper semicontinuity of the functions v_t^* have been presented in Chapter 3, Theorem 3.1.4.

⁴²Here, $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$ denotes the set of all probability measures on $K_t(\cdot)$ with the Borel σ -algebra.

subject to the constraints

$$\begin{cases} \int f_j d\mu = z_j^*, & j = 1, \dots, n; \\ \int f_{n+1} d\mu = 1. \end{cases} \quad (7.3.21)$$

Assume that the function f_{n+1} is not linearly expressed through $f_j, j = 1, \dots, n$; this is equivalent to $\text{rang}(f_1, \dots, f_n, f_{n+1}) = \text{rang}(f_1, \dots, f_n) + 1$, where $\text{rang}(\cdot)$ denotes the rank of the system of functions in the linear algebra sense. Suppose that $\text{rang}(f_1, \dots, f_n, f_{n+1}) = k + 1 \leq n + 1$. Then there exist numbers j_1, \dots, j_k such that the functions f_{j_1}, \dots, f_{j_k} are linearly independent and

$$f_j = \sum_{m=1}^k \alpha_{j_m} f_{j_m} + \alpha_{n+1} f_{n+1}$$

for $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$. This means that for such j , the conditions $\int f_j d\mu = z_j^*$ follow from conditions (7.3.21) with $k + 1$ constraints on the functions f_j corresponding to the numbers $j \in \{j_1, \dots, j_k, n + 1\}$: for $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$, we have

$$\int f_j d\mu = \sum_{m=1}^k \alpha_{j_m} z_j^* + \alpha_{n+1}.$$

Therefore, without losing generality, we can assume that f_1, \dots, f_{n+1} are linearly independent.⁴³ This corresponds to the nondegeneracy of $f(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ in the sense that the dimension of the affine hull $f(X)$ equals n , i.e., $f(X)$ is not contained in any hyperplane.⁴⁴ Equivalently, $\text{conv}(f(X))$ has a non-empty interior; if this condition holds, we speak about the general position case.

For similar considerations, by a reasonable assumption, f_0 is not linearly expressed through f_1, \dots, f_n, f_{n+1} . Otherwise, $\int f_0 d\pi$ would take a constant value on $E(z^*)$ (thereby degenerating the problem): there would exist a vector $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ such that $f_0(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f_j(x)$ for all $x \in X$, implying

$$I(z^*) = \int f_0 d\pi = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j^* + \lambda_{n+1}$$

for all measures $\pi \in \mathcal{P}(X)$ with $\int \|f\| d\pi < \infty$.

Now we describe a useful method going back to Markov. It often solves the moment problem based on geometric considerations. Let $\text{conv}(f(X))$ have a non-empty interior (the general position case). Suppose that the convex class of measures \mathcal{Q} appearing in (7.3.7) satisfies the hypotheses of Proposition (7.3.2). In addition,

⁴³Of course, X must contain at least $n + 1$ points.

⁴⁴If $f(X)$ is contained in some hyperplane, there exist $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ and $\beta \in \mathbb{R}$ such that $\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) = \beta$ for all $x \in X$. This means that $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f_j = 0$ for $\lambda_j = \alpha_j, j = 1, \dots, n$ and $\lambda_{n+1} = -\beta$, i.e., f_1, \dots, f_{n+1} are linearly dependent. Conversely, if $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f_j = 0$ for some vector $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, then $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$: otherwise, λ_{n+1} would also turn into zero; so it suffices to choose $\alpha_i = \lambda_i, i = 1, \dots, n$, and $\beta = -\lambda_{n+1}$.

suppose⁴⁵ that $I(z) < +\infty$ for $z \in \text{conv}(f(X))$. We denote by B the subgraph (hypograph) of the function I :

$$B = \{(z, z_0) : z_0 \leq I(z), z \in \text{conv}(f(X))\}.$$

By Proposition 7.3.1, the function I is concave, and hence the subgraph B is a convex subset of \mathbb{R}^{n+1} with a non-empty interior (in the general position case). Assume that $I(z) < \infty$ for all $z \in \text{conv}(f(X))$. Then $(z, I(z)), z \in \text{conv}(f(X))$, are boundary points of B , and a support hyperplane⁴⁶ L_z of the form

$$L_z = \left\{ (z_0, z) : \sum_{j=0}^n \beta_j z_j = \gamma \right\} \quad (7.3.22)$$

can be constructed at each such point. We are concerned with the case $\beta_0 \neq 0$ in (7.3.22). Denoting

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta_0}, \quad \alpha_j = -\frac{\beta_j}{\beta_0}, \quad j = 1, \dots, n,$$

we have

$$L_z = \left\{ (z_0, z) : \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j + \alpha_{n+1} = z_0 \right\}. \quad (7.3.23)$$

For $\beta_0 \neq 0$ in (7.3.22), a sufficient condition is⁴⁷ $z \in \text{int}(\text{conv}(f(X)))$, where $\text{int}(\cdot)$ denotes the interior of a set.

For $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, the following conditions are equivalent:

1) The vector α is given by (7.3.23), where L_z indicates the support hyperplane for B at the point $(I(z), z)$.

2)

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j z_j + \alpha_{n+1} \geq I(z) \text{ for all } z \in \text{conv}(f(X)). \quad (7.3.24)$$

3)

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \int f_j d\pi + \alpha_{n+1} \geq \int f_0 d\pi \text{ for all } \pi \in \mathcal{P}(X) : \int \|f\| d\pi < \infty. \quad (7.3.25)$$

4)

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) + \alpha_{n+1} \geq f_0(x) \text{ for all } x \in X. \quad (7.3.26)$$

⁴⁵A sufficient condition has been provided in item 3) of Remark 7.3.1.

⁴⁶For example, see [175, Theorem 11.6].

⁴⁷In this case, the superdifferential of the function I is a non-empty bounded set; for example, see [175, Theorem 23.4].

The equivalence of 1) and 2) is trivial. Obviously, 2) \Leftrightarrow 3). 3) follows from 4), and 4) follows from 3) with $\pi = \delta_x$, $x \in X$.

We denote

$$A = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) + \alpha_{n+1} \geq f_0(x) \right\}. \quad (7.3.27)$$

Clearly, the set A is convex and closed.

Thus, we arrive at the following result, independently established by Richter [174], Isii [119], and Karlin [126].

Theorem (Richter–Isii–Karlin). *Let $I(z) < \infty$ for all $z \in \text{conv}(f(X))$, and $\text{int}(\text{conv}(f(X))) \neq \emptyset$. Then for $z \in \text{int}(\text{conv}(f(X)))$,*

$$I(z) = \inf_{\alpha \in A} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j z_j + \alpha_{n+1} \right), \quad (7.3.28)$$

where I is given by (7.3.7), and the convex class of measures \mathcal{Q} appearing in (7.3.7) satisfies the conditions of Proposition 7.3.2. The set A is given by (7.3.27). In addition, the infimum in (7.3.28) is reached for some $\alpha^* = \alpha^*(z) \in A$.

We introduce a function \hat{f}_0 , further called the (upper) envelope of the function f_0 with respect to the system of functions⁴⁸ $\{f_1, \dots, f_n, f_{n+1}\}$:

$$\hat{f}_0(x) = \inf_{\alpha \in A} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) + \alpha_{n+1} \right). \quad (7.3.29)$$

Proposition 7.3.5.

1) *If the envelope \hat{f}_0 is measurable⁴⁹, we have*

$$I(z) = \sup_{\pi \in E(z)} \int f_0 d\pi = \sup_{\pi \in E(z)} \int \hat{f}_0 d\pi \quad (7.3.30)$$

for $z \in \text{int}(\text{conv}(f(X)))$ under the hypotheses of the Richter–Isii–Karlin theorem. Thus, for such z , the function f_0 can be replaced by its envelope \hat{f}_0 when calculating the infimum in (7.3.30).

2) *Moreover, if there exists a measure π^z , $z \in \text{int}(\text{conv}(f(X)))$, for which the supremum is achieved in (7.3.7), then π^z -almost everywhere the function f_0 coincides with its envelope \hat{f}_0 .*

⁴⁸Recall that the function f_{n+1} identically one.

⁴⁹Measurability is not required for any measures from the class $\mathcal{P}^*(X)$, i.e., concentrated in a finite number of points.

Indeed, by the Richter–Isii–Karlin theorem, we have

$$I(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^* z_j + \alpha_{n+1}^* \quad (7.3.31)$$

for a fixed point $z \in \text{int}(\text{conv}(f(X)))$ and some $\alpha^* = \alpha^*(z) \in A$. From (7.3.29) and (7.3.27) it follows that

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j^* f_j(x) + \alpha_{n+1}^* \geq \hat{f}_0(x) \geq f_0(x),$$

yielding the inequalities

$$\sup_{\pi \in E(z)} \int \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^* f_j + \alpha_{n+1}^* \right) d\pi \geq \sup_{\pi \in E(z)} \int \hat{f}_0 d\pi \geq \sup_{\pi \in E(z)} \int f_0 d\pi = I(z).$$

Considering (7.3.31) and the relation

$$\int \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^* f_j + \alpha_{n+1}^* \right) d\pi = \sum_{j=1}^n \alpha_j^* z_j + \alpha_{n+1}^*$$

for any $\pi \in E(z)$, these inequalities turn into equality.

If there exists a measure $\pi^z, z \in \text{int}(\text{conv}(f(X)))$, for which the supremum in (7.3.7) is reached, then π^z -almost everywhere the function f_0 coincides with its envelope \hat{f}_0 due to equality (7.3.30) and the inequality $\hat{f}_0 \geq f_0$.

Remark 7.3.2.

- 1) In the general position case ($\text{int}(\text{conv}(f(X))) \neq \emptyset$), we have $I(z) < \infty$ for all $z \in \text{conv}(f(X))$ if the function I is finite at $n+1$ affine-independent points of $\text{conv}(f(X))$. Indeed, under this assumption, cases 1) and 3) of Remark 7.3.1 are eliminated.
- 2) If the set A given by (7.3.27) is non-empty, then $I(z) < \infty$ for all $z \in \text{conv}(f(X))$. Indeed, in this case, we obtain

$$f_0(x) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(x) + \alpha_{n+1}$$

for $\alpha \in A$ and $x \in X$, so

$$\int f_0 d\pi \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j + \alpha_{n+1}$$

for all measures $\pi \in E(z)$.

Note that in the general case, we cannot guarantee measurability of the set $f(X)$; the same applies to $\text{conv}(f(X))$. Universal measurability conditions for these sets are considered below.

7.4 Measurability in the General Moment Problem

Let $f : X \mapsto Y$ be a measurable mapping, where X is a Polish space with a Borel σ -algebra \mathcal{A} . Also, let Y be a separable metric space with a Borel σ -algebra \mathcal{B} and π be a measure on (X, \mathcal{A}) .

Lemma 7.4.1.

- 1) *There exists a Borel set $X' \in \mathcal{A}$ such that $\pi(X') = 1$ and $f(X') \in \mathcal{B}$. In other words, $f(X') \in \mathcal{B}_\pi$, where \mathcal{B}_π is the complement of \mathcal{B} with respect to the measure π .*
- 2) *The set X' can be chosen so that it will be represented as a countable union of compact sets⁵⁰ and simultaneously its image $f(X')$ will be represented as a countable union of compact sets.*

Proof. It suffices to reproduce the considerations from [183] with a slight modification. As is known, a probability measure π on a Borel σ -algebra \mathcal{A} of a Polish space X is dense, i.e., for any $\varepsilon > 0$ there exists a compact set K_ε such that $\pi(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$; for example, see the book [72, Theorem 2.5.11]. The class \mathcal{K} of all compact subsets of X can be chosen as a compact class⁵¹ approximating from below the Borel sets with respect to any measure on (X, \mathcal{A}) ; for example, see [72, Theorem 2.5.10]. Any measure on (X, \mathcal{A}) is thus compact by definition. By [183, Theorem 2], a compact measure is quasi-compact.⁵² According to [183, Theorem 1], a measure is quasi-compact if and only if it is perfect.⁵³ To obtain the required assertion, in the necessity part of the proof [183, Theorem 1] we should replace the intervals with rational ends (I_n) by a countable base in the space Y , e.g., spheres centered in a countable and everywhere dense set with rational radii.

However, it is also possible to propose a very simple alternative proof of the lemma. For this purpose, we utilize a variation of the Luzin theorem, e.g., [72, Theorem 2.5.15]: under the above assumptions on X, Y, f , and π , for any ε there exists a compact set K_ε such that $\pi(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, and the contraction $f|_{K_\varepsilon}$ of the function f to K_ε is continuous.

⁵⁰In particular, X' is of type F_σ , i.e., it can be represented as a countable union of closed sets. Any F_σ -subset of \mathbb{R}^n can be represented as a countable union of compact sets since \mathbb{R}^n is a σ -compact space.

⁵¹A compact class is a class of subsets of some space Ω such that any countable family of sets from this class with empty intersection contains a finite subfamily with empty intersection.

⁵²A normalized measure π on an arbitrary measurable space (Ω, \mathcal{F}) is quasi-compact if for any countable sequence $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \dots$, and any $\varepsilon > 0$, there exists $B \in \mathcal{F}$ such that $\{A_n \cap B, n = 1, 2, \dots\}$ forms a compact class.

⁵³See the definition and criteria for a perfect measure in V.V. Sazonov's article in the 1985 Mathematical Encyclopedia [145]. An equivalent definition used by Ryll-Nardzewski is as follows: a measure π on (Ω, \mathcal{F}) is perfect if for any measurable mapping $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, where the real line \mathbb{R} has a Borel σ -algebra \mathcal{B} , there exists $\Omega' \in \mathcal{F}$ such that $\pi(\Omega') = 1$ and $f(\Omega') \in \mathcal{B}$.

Now we choose a numerical sequence $\varepsilon_n \mapsto 0$ and let $X' = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\varepsilon_n}$. Then $\pi(X') = 1$ and

$$f(X') = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\varepsilon_n}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_{\varepsilon_n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f|_{K_{\varepsilon_n}}(K_{\varepsilon_n}).$$

Finally, note that a continuous image of a compact set is compact as well. \square

Let A_n , $n = 1, 2, \dots$, be a certain sequence of sets. We employ the notation $A_n \uparrow A$ when $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, and $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Lemma 7.4.2. *If $A_n \uparrow A$, then $\text{conv}(A_n) \uparrow \text{conv}(A)$.*

Proof. Since $\text{conv}(A_n) \subseteq \text{conv}(A)$ for any $n = 1, 2, \dots$, we have $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(A_n) \subseteq \text{conv}(A)$. Let us show the converse inclusion: $x \in \text{conv}(A)$ is equivalent to the existence of an integer $m \geq 0$, $q \in S_m = \{(q_1, \dots, q_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : q_i \geq 0, i = 1, \dots, m+1; \sum_{i=1}^m q_i = 1\}$, and $x_i \in A_{n_i}$, $i = 1, \dots, m+1$, such that $x = \sum_{i=1}^m q_i x_i$. Letting $N = \bigvee_{i=1}^{m+1} n_i$ gives $x_i \in A_N$ for $i = 1, \dots, m$ and consequently, $x \in \text{conv}(A_N)$. Thus, $\text{conv}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{conv}(A_n)$. \square

Corollary 7.4.1. *If $Y = \mathbb{R}^n$, then $\text{conv} f(X')$ is measurable with respect to \mathcal{B} .*

Indeed, according to Lemma 7.4.1, if $f(X') = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, $i = 1, 2, \dots$, where $K_i \subseteq K_{i+1}$ and K_i are compact sets⁵⁴, then we obtain $\text{conv} f(X') = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{conv}(K_i)$ by Lemma 7.4.2. At the same time, the convex hull of a compact set⁵⁵ contained in \mathbb{R}^n is itself compact, i.e., $\text{conv} f(X')$ can be represented as a countable union of compact sets.

Lemma 7.4.3. *Assume that $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, Q)$ is a probability space with a Borel σ -algebra \mathcal{B}^d and $Q(B) = 1$ for $B \in \mathcal{B}^d$. If the integral $\int x Q(dx)$ is finite⁵⁶, then*

$$\int_{\mathbb{R}^d} x Q(dx) \in \text{conv}(B).$$

Proof. ⁵⁷ Let

$$y = \int_{\mathbb{R}^d} x Q(dx).$$

Note that $y \in \text{cl}(\text{conv}(\text{supp}(Q)))$, where $\text{cl}(A)$ denotes the closure of A . For example, see [140, Theorem 3.6] for the case of a compact support in \mathbb{R}^n . In the general case, the support $\text{supp}(Q)$ can be represented as $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ of compact sets

⁵⁴Since a finite union of compact sets is compact, the sequence can be considered monotonic without losing generality, i.e., $K_i \uparrow f(X')$.

⁵⁵The compactness of the convex hull of a compact set is a property of finite-dimensional spaces, which vanishes in the infinite-dimensional case.

⁵⁶The one-dimensional integrals with respect to each coordinate of the vector y are finite, which is equivalent to $\int \|y\| Q(dy) < \infty$.

⁵⁷Lemma 7.4.3 and its proof were communicated to me by George Lowther.

K_i such that $K_i \subseteq K_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, and $Q(K_1) > 0$. Letting $dQ_{K_i} = \frac{I_{K_i}}{Q(K_i)}dQ$, we have $\int y Q_{K_i}(dy) \in \text{conv}(K_i) \subseteq \text{conv}(\bigcup_{j=1}^n K_j) = \text{conv}(\text{supp}(Q))$; passing to the limit as $i \rightarrow \infty$ yields $\int y Q_{K_i}(dy) = \int y \frac{I_{K_i}}{Q(K_i)}Q(dy) \rightarrow \int y Q(dy)$ since $\int \|y\|Q(dy) < \infty$ by Lebesgue's dominated convergence theorem. Therefore, the mean $\int y Q(dy)$ belongs to the closure of the convex hull of the support of the measure Q .

Let V be an affine hull of the support $\text{supp}(Q)$ of the distribution Q , then V is the smallest affine subspace (in particular, of minimal dimension) such that $Q(V) = 1$. Since the affine hull is closed in \mathbb{R}^d , it contains the closure of the convex hull of the support of Q , so $y \in V$. Suppose that $y \notin \text{conv}(B)$; then by the separation theorem [175, Theorem 11.2], there exists a nondegenerate⁵⁸ affine functional $L : V \mapsto \mathbb{R}$ such that⁵⁹

$$L(x) \geq 0 \text{ for any } x \in \text{conv}(B), \quad (7.4.1)$$

$$L(y) = 0. \quad (7.4.2)$$

Note that this separation is proper but, generally speaking, not strong in the terminology of [175]. Due to (7.4.2),

$$\int_V L(x)Q(dx) = L\left(\int_V xQ(dx)\right) = L(y) = 0,$$

and $L(x)$ is nonnegative almost everywhere by (7.4.1). Therefore, $L(x) = 0$ almost everywhere with respect to Q , i.e., $Q(V') = 0$ for $V' = \{x : L(x) = 0\}$. The affine manifold $V' \subseteq V$ has the dimension $\dim(V') = \dim(V) - 1$, which contradicts the minimality of V by its definition. Hence, $y \in \text{conv}(B)$. \square

Remark 7.4.1. Lemma 7.4.3 essentially rests on the finite-dimensionality of the space \mathbb{R}^n . Its statement becomes false in the infinite-dimensional case.

To illustrate this fact, consider the Hilbert space ℓ^2 of square summable sequences with the orthonormal basis $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ and a discrete probability measure Q concentrated at points $a_k \mathbf{e}_k$, where $a_k \neq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ and $p_k = Q(\{a_k \mathbf{e}_k\}) > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Calculating the mean value $y = \int x Q(dx)$ using the Gelfand–Pettis integral gives $y = \sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k \mathbf{e}_k \in \ell^2$. Obviously, $y \notin \text{conv}(\text{supp}(Q))$ since the convex hull contains only finite convex combinations of the vectors $a_k \mathbf{e}_k$.

To apply these results to the moment problem (7.3.1) and (7.3.2), we let $Y = \mathbb{R}^n$ and $f = g$ in Lemma 7.4.1 and choose $X' \subseteq X$ so that $X' \in \mathcal{A}$, $\pi(X') = 1$, and

⁵⁸Not being an identical constant.

⁵⁹According to [175, Theorem 11.2], for an affine manifold $M = \{y\}$ it is possible to find a hyperplane H containing it in the space V such that the convex relatively open set $C = \text{ri}(\text{conv}(B))$ belongs to one of the open half-spaces generated by H , i.e., there exists a (nondegenerate) affine functional L such that $L(x) = 0$ for $x \in H$ and $L(x) > 0$ for $x \in C$. In a finite-dimensional space, the affine functionals are continuous, and hence $L(x) \geq 0$ for $x \in \text{cl}(\text{ri}(\text{conv}(B))) = \text{cl}(\text{conv}(B)) \supseteq \text{conv}(B)$. In addition, $\text{conv}(B) \supseteq B \neq \emptyset$ since $Q(B) = 1$.

$g(X') \in \mathcal{B}^n$. We denote by Q_g the measure induced by the mapping $g : X \mapsto \mathbb{R}^n$, i.e., $Q_g(A) = \pi(g^{-1}(A))$ for $A \in \mathcal{B}^n$. With a change of variables in the Lebesgue integral, it follows that

$$\int_X g(x)\pi(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} yQ_g(dy).$$

To use Lemma 7.4.3, we choose $d = n$ and $B = g(X') \in \mathcal{B}^n$; then $g^{-1}(g(X')) \supseteq X'$ and consequently $Q_g(B) = 1$. Thus,

$$\int g(x)\pi(dx) \in \text{conv}(g(X')), \quad (7.4.3)$$

where $X' \subseteq X$, $X' \in \mathcal{A}$, and $g(X') \in \mathcal{B}^n$. By Corollary 7.4.1, we obtain $\text{conv}(g(X')) \in \mathcal{B}^n$. In particular, the following result has been established thereby.

Proposition 7.4.1. *If X is a Polish space with a σ -algebra \mathcal{A} and functions g_j , $j = 1, \dots, n$, are measurable with respect to the Borel σ -algebra \mathcal{B} on \mathbb{R} , then the sets $g(X)$ and $\text{conv}(g(X))$ are universally measurable.*

Remark 7.4.2. This proposition can also be obtained in a different, “less constructive,” way using results from the book [29].

By Definition 7.7 of this book, a Borel space is a homomorphic image of a Borel set of a Polish space (in particular, a Polish space is a Borel space in this terminology). According to Proposition 7.40 of this book, under a Borel measurable mapping of one Borel space into another, the image of an analytic set⁶⁰ is analytic as well. Corollary 7.42.1 of this book states that any analytic subset of a Borel space is universally measurable. In fact, this requires an additional assumption from descriptive set theory, the so-called axiom of projective determinacy⁶¹ [155]. Under this axiom, the image of a Borel measurable function in our case (for the moment problem), i.e., for $g : X \mapsto \mathbb{R}^n$, is universally measurable. For an arbitrary measure $\pi \in \mathcal{P}(X)$, there exist $B, B' \in \mathcal{B}^n$ such that $B \subseteq g(X) \subseteq B'$ and $\pi(B' \setminus B) = 0$, with $g^{-1}(B) \subseteq g^{-1}(g(X)) = X = g^{-1}(B')$, so $Q_g(B) = 1$. Any Borel set in \mathbb{R}^n can be approximated from below (with respect to the measure) by compact sets. Therefore, there exist compact sets K_i such that $K_i \subseteq K_{i+1}$ $i = 1, 2, \dots$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \subseteq B$ and $Q_g(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i) = 0$. Finally, we can apply the considerations from Corollary 7.4.1 to show the universal measurability of $\text{conv}(g(X))$.

7.5 Application of Results from General Moment Problem Theory

Consider a particular case of the moment problem with a compact set $X \subseteq \mathbb{R}^n$ and

$$f_j(y) = y_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

⁶⁰An analytic set was defined, e.g., in [29, subsection 7.6.1].

⁶¹This is a weakened version of the axiom of determinacy, where the assertion on the existence of a winning strategy in the infinite game applies only to projective sets.

In other words, the mapping f is identical:

$$f(y) = y \in \mathbb{R}^n.$$

Note that the linear independence of the functions $f_1, \dots, f_n, f_{n+1} \equiv 1$ on the domain X of the function f_0 is equivalent to the fact that X is not contained in any affine manifold of dimension smaller than n ; this corresponds to the general position case. Without loss of generality⁶², we consider the general position case below; this is equivalent to the condition $\text{int}(\text{conv}(X)) \neq \emptyset$.

In this case, the function appearing in (7.3.7) takes the form

$$I(z) = \sup_{\pi \in E(z)} \int f_0 d\pi, \quad z \in \text{conv}(X) \quad (7.5.1)$$

with the set $E(z)$ (7.3.6) written as

$$E(z) = \left\{ \pi \in \mathcal{Q} : \int x \pi(dx) = z, \text{supp}(\pi) \subseteq X \right\}; \quad (7.5.2)$$

here, the convex class of measures \mathcal{Q} defined on the Borel σ -algebra of all subsets of X contains all measures concentrated at one point, and the integrals $\int f_i d\pi$, $i = 0, \dots, n$, are finite for $\pi \in \mathcal{Q}$.

The next result is easily reduced, using Proposition 7.3.2, to a well-known fact of convex analysis; for example, see [175, Corollary 17.1.5]. Nevertheless, we provide a simple direct proof below.⁶³

Proposition 7.5.1. *The function $I(z)$, $z \in \text{conv}(X)$, is the convex envelope⁶⁴ of the function $f_0(x)$, $x \in X$, i.e., the smallest concave function defined on $\text{conv}(X)$ that majorizes f_0 on X .*

Proof. According to Lemma 7.3.1, the function $I(z)$ is concave. Let us check that if the concave function g defined on $\text{conv}(X)$ majorizes the function f_0 on X , then g majorizes $I(z)$ on $\text{conv}(X)$. Indeed, $\int g d\pi \geq \int f_0 d\pi$ for any measure π with a support contained in X . In view of (7.3.19), applying the Jensen inequality with measures from the class $E^*(z)$ given by (7.3.13), we obtain

$$g(z) \geq \sup_{\pi \in E^*(z)} \int g d\pi \geq \sup_{\pi \in E^*(z)} \int f_0 d\pi = I(z), \quad z \in \text{conv}(X).$$

□

Remark 7.5.1. We denote by $\hat{I}(z)$ the pointwise infimum at a point $z \in \text{conv}(X)$ of all affine functions majorizing the function f_0 on X . Also, the function \hat{I} is⁶⁵ the

⁶²Otherwise, the statement can be reduced to a problem of smaller dimension.

⁶³The compactness of the space X is not required here.

⁶⁴The convex envelope of an (arbitrary) numerical function is defined similarly to the convex envelope of a function.[175, Chapter 5].

⁶⁵For example, see [175, Theorem 12.1].

smallest upper semicontinuous concave function majorizing the function f_0 on X . (In particular, considering Proposition 7.5.1, \hat{I} majorizes I on $\text{conv}(X)$.) Moreover, $\hat{I}(z)$ coincides with the Legendre–Fenchel transform twice applied to $I(z)$; for concave functions, this transform is related to the corresponding transform (conjugation) of convex functions as the minus conjugation for a minus concave function.

On the set $\text{ri}(\text{conv}(X))$, coinciding with $\text{int}(\text{conv}(X))$ in the general position case, the concave function $I(z)$ is continuous⁶⁶ and coincides on this set with $\hat{I}(z)$. The contraction of \hat{I} to X coincides with the envelope \hat{f}_0 of the function f_0 (7.3.29). In the particular case under study, it takes the form

$$\hat{f}_0(x) = \inf_{\alpha \in A} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j + \alpha_{n+1} \right),$$

$$A = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j + \alpha_{n+1} \geq f_0(x), x \in X \right\}.$$

If the function f_0 is upper semicontinuous, then according to Proposition 7.3.4, the functions \hat{I} and I coincide on the whole set $\text{conv}(X)$, not just on its relative interior. Moreover, the supremum in (7.5.1) is reached, and the maximizer belongs to $\mathcal{P}^n(X)$.

The measure on which the maximum in (7.5.1) is reached may be nonunique. Among the maximizers, we choose a measure $\pi^{(z)} \in \mathcal{P}^n(X)$ with the minimum possible number $k = k(z)$ of affinely independent points of the support $\text{supp}(\pi^{(z)}) = \{x^1(z), \dots, x^k(z)\}$, where $1 \leq k \leq n + 1$. Then the system of functions⁶⁷ $f_1(x) = x_1, \dots, f_n(x) = x_n, f_{n+1} \equiv 1$, contracted to the support $\text{supp}(\pi^{(z)})$ has rank k . For this support, there is a unique vector $q(z) = (q_1(z), \dots, q_k(z))$ such that $q_i(z) > 0, i = 1, \dots, k$, and

$$\sum_{i=1}^k q_i(z) x^i(z) = z, \quad \sum_{i=1}^k q_i(z) = 1.$$

In other words, the vector q is unambiguously found from the system of linear equations

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k q_i(z) x_j^i(z) = z_j, & j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^k q_i(z) = 1, \end{cases} \tag{7.5.3}$$

where $x^i(z) = (x_1^i, \dots, x_n^i)$, $i = 1, \dots, k$.

Also, note that $f_0(x^i(z)) = \hat{f}_0(x^i(z)), i = 1, \dots, k$, for $z \in \text{ri}(\text{conv}(X)) = \text{int}(\text{conv}(X))$; see item (2) of Proposition 7.3.5. This can be useful for finding the points of the support $\text{supp}(\pi^{(z)}) = \{x^1(z), \dots, x^k(z)\}$.

⁶⁶For example, see [175, Theorem 10.1].

⁶⁷Here, it is appropriate to recall the characterization (LI) of the extreme points of the set of measures in Winkler's theorem.

Let us separate the case of the concave function f_0 . We emphasize that the domain X of the function f_0 is not assumed convex: for a function taking finite values (i.e., from \mathbb{R}), it is understood as the corresponding Jensen inequality for all convex combinations of points from X lying in X ; see [165, Definition 1]. The cited paper proved a theorem on the continuation of a function concave on X to $\text{conv}(X)$, using a construction similar⁶⁸ to ours in Proposition 7.5.1. In this case, the contraction of the function I on X therefore coincides with f_0 , and the maximizer $\pi^{(z)} \in \mathcal{P}^n(X)$, $z \in X$, with the minimum possible number $k(z)$ of affinely independent support points is obtained when $k(z) = 1$, i.e., when $\pi^{(z)} = \delta_z$.

In addition, note that the convex hull of the function f_0 convex on X coincides with the concave roof⁶⁹ constructed on the extreme points⁷⁰ of X .

Returning to the optimization problem (7.1.1) at Stage 1, i.e., problem (7.1.2), we have a moment problem of maximizing the integral (7.5.1) subject to the constraints (7.5.2), where

$$\begin{aligned} X &= K_t(\cdot), \\ z &\in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset, \\ f_0(y) &= w_t(\cdot, y), \\ I(z) = u_{t,\cdot}(z) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot), \int y Q(dy) = z} \int w_t(\cdot, y) Q(dy), \\ \mathcal{P}_t(\cdot) &= \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)). \end{aligned} \tag{7.5.4}$$

The concave function $z \mapsto I(z) = u_{t,\cdot}(z)$ is proper due to the inequalities $0 \leq w_t(\cdot, y) \leq C$, where the upper bound has been obtained in inequality (3.2.10).

If the function $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ is upper semicontinuous, then by item 3a) of Theorem 4.2.1, there exists a measure $Q_{t,\cdot}^z \in E^n(z)$ on which the integrals in (7.5.4) achieve maximum. $x^1, \dots, x^k \in X$. Hence, $f_0(x^i) = f_0^*(x^i)$, $i = 1, \dots, k$; moreover, $\sum_{i=1}^k q_i x^i = z$ for some $q \in S_{k-1}$ such that $q_i > 0$, $i = 1, \dots, k$. If $k = n + 1$, then $q \in S_n$, such that $q_i > 0$, $i = 1, \dots, n + 1$, is uniquely determined in the general position case from the system of linear equations

An important particular case arises for convex objective functions. As noted above, the solution of the optimization problem (7.5.4) in this case leads to constructing a concave roof.

The following simple example, however, has an important economic interpretation, showing the significance of elementary trading constraints prohibiting short positions.

Example 7.5.1. Consider a one-step multiplicative model similar to Example 2.2.2 from Chapter 2 but with trading constraints prohibiting short positions, i.e., $D_1(1) =$

⁶⁸With the difference that the author [165] considered convex functions with minimization instead of maximization over the set of measures from $\mathcal{P}^*(X)$ and constructed as the continuation the largest convex function minorizing a function given on X .

⁶⁹This term was introduced by Uhlmann [241]. The concept of a convex roof plays an essential role in quantum information theory.

⁷⁰These points can be defined for arbitrary sets X , as the extreme points of $\text{conv}(X)$, the convex hull of X .

$[0, \infty)$. Let $X_0 = 1$ and $K_1(1) = [a, b]$, where $-1 < a < 0 < b$. We choose a binary put option, “out of the money” at the initial time instant with the exercise price $1 + s$, where $s \in (a, 0)$, a upper semicontinuous payoff function, i.e., $g_1(x) = I_{(-\infty, 1+s)}(x)$; in this case, $v_1^*(1, 1+y) = g_1(1+y) = I_{(-\infty, s)}(y)$. Solving problem (7.1.2) at Stage 1 for⁷¹ $z \in (a, b) \cap (-\infty, 0] = (a, 0]$, we obtain the following result. The supremum in (7.1.2) is reached for distributions concentrated at most at two points. For $y \leq s$, the convex hull of the function $y \mapsto g_1(1+y)$ is 1; for $y \in [s, b]$, its graph is the segment connecting the points $(s, 1)$ and $(b, 0)$ in the plane; for $y \geq b$, this function is zero. The optimal mixed market strategy, the distribution Q^* , is concentrated at the two points s and b if $z \in (s, 0]$, i.e., $Q^* = q_1\delta_s + q_2\delta_b$, $q_1, q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = 1$. The condition $\int yQ^*(dy) = sq_1 + bq_2 = z$ implies

$$q_1 = q_1(z) = \frac{b-z}{b-s} \in (0, 1).$$

If $z \in (a, s]$, the most unfavorable mixed market strategy is concentrated at the single point z , i.e., $Q^* = \delta_z$. Due to (7.1.2) and (7.1.4), we obtain

$$u_1(z) = I_{(a,s]}(z) + q_1(z)I_{(s,0]}(z) = I_{(a,s]}(z) + \frac{b-z}{b-s}I_{(s,0]}(z)$$

for $z \in (a, 0]$. Considering (7.1.3) and (7.1.3'), it follows that⁷²

$$v_0^* = \rho_1 = \sup_{z \in (a, 0]} u_1(z) = 1,$$

with the supremum in problem (7.1.1) is reached on the single-point distributions $Q^* = \delta_z$ for $z \in (a, s]$. Since $s < 0$ by condition, all these measures are supermartingale measures but not martingale ones. Contrary to the common practical opinion that “risk-neutral” probabilities should always be used in option pricing, in this example with prohibiting short positions, this (unsubstantiated) risk-neutrality assumption would correspond to the value

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot), \int yQ(dy)=0} \int v_1^*(1, 1+y)Q(dy) = \frac{b}{b-s} < 1.$$

□

Suppose that there exists the equilibrium (5.2.6) and the supremum in (7.1.3) is reached for some $z_t^*(\cdot) \in \text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot))$. Furthermore, assume that for $z = z^*$, the supremum in (7.1.2) is reached for some distribution $Q_{t^*}^* \in E_t^n(z^*) = \{Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)) : \int zQ(dz) = z^*\}$ with a support $\text{supp}(Q_{t^*}^*) = \{y_t^1(\cdot), \dots, y_t^{m_t(\cdot)}(\cdot)\} \subseteq K_t(\cdot)$, where $m_t(\cdot) \leq n+1$. Then problem (BI) reduces to a simpler one with new constraints on possible price increments described by compact sets $K'_t(\cdot) \subseteq K_t(\cdot)$ containing a finite number of points: $K'_t(\cdot) = \{y_t^1(\cdot), \dots, y_t^{m_t(\cdot)}(\cdot)\}$.

⁷¹Here, $\text{bar}(D_1(1)) = (-\infty, 0]$; see Example 7.1.1.

⁷²Recall that $g_0 \equiv -\infty$ in the one-step model.

Thus, to determine the hedging strategy h_t at step $t = 1, \dots, N$, it suffices to hedge the contingent liability against the $m_t(\cdot)$ most unfavorable market scenarios at this step.

For this purpose, in principle, we can solve the minimization problem

$$\rho_{t-1}(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \varphi_{t,\cdot}(h), \quad (7.5.5)$$

where $\varphi_{t,\cdot}(h) = \bigvee_{y \in K'_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]$. Note that the function $h \mapsto \varphi_{t,\cdot}(h)$ is convex and polyhedral. The assumption $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$ is equivalent to NDSAUP by Theorem 2.3.1 from Chapter 2, so $\pi_t(\cdot) < \infty$. From Proposition 5.2.4 (see formula (5.2.16)) we have $\rho_{t-1}(\cdot) \geq -\pi_t(\cdot)$, i.e., the infimum in (7.5.5) is a finite number. The following fact seems useful here: $h^*(\cdot)$ minimizes the left-hand side of (7.5.5) if and only if there exists a subgradient $y_t^*(\cdot)$ of the function $\varphi_{t,\cdot}$ at the point $h_t^*(\cdot)$ that is the inner normal⁷³ to the set $D_t(\cdot)$; see [175, Theorem 27.4]. Note that the subdifferential of a polyhedral convex function is a polyhedral convex set [175, Theorem 23.10], and the set of outer normals to the set D at the point h^* is a closed convex cone. Another useful result was presented in [70, Chapter IV, Theorem 2.1]: a point h^* is the minimum point of a function $\varphi_{t,\cdot}(h)$ on $D_t(\cdot)$ if and only if

$$\inf_{h \in D_t(\cdot)} \bigvee_{j \in J_{t,\cdot}(h^*)} (h - h^*)y^j = 0,$$

where $J_{t,\cdot}(h^*) = \{j : v_t(\cdot, x_{t-1} + y) - h^*y^j = \varphi_{t,\cdot}(h^*)\}$.

7.6 The Case of No Trading Constraints

The problem of finding the supremum in (7.1.1) becomes particularly simple in the case of no trading constraints ($D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$) and no arbitrage opportunities (NDAO). In this case, by item 2) of Theorem 7.3.2, we solve the conditional optimization problem (7.1.2) at Stage 1 to find

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}_t^n(K_t(\cdot)), \int y Q(dy) = 0} \int w_t(\cdot, y) Q(dy); \quad (7.6.1)$$

Stage 2 is eliminated due to $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$. NDAO is equivalent to $0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, meaning that the vector $z^* = 0$ lies in the relative interior of $\text{conv}(f(X)) = \text{conv}(K_t(\cdot))$. Thus, the Richter–Isii–Karlin theorem is applicable (possibly in a linear space of a smaller dimension if the dimension of $K_t(\cdot)$ is less than n ; then we involve considerations by analogy to proving Theorem 5.3.1). Therefore, without losing generality, we can study the general position case.

Suppose that the suprema in (7.6.1) are reached. For a finite set of paths, the deterministic and probabilistic descriptions lead to the same (one-step) problem.

⁷³The inner normal y^* to a convex set D at a point h^* is the vector satisfying $(h - h^*)y^* \geq 0$ for all $h \in D$.

Therefore, by limiting the mixed strategy support Q to $n + 1$ points, we obtain a complete market model. Hence, it is possible to use any stochastic approach-based results on complete markets, particularly [121]; also, see [189] and theorem B^* (an extended version of the second fundamental theorem). Here, the condition of no arbitrage opportunities is the existence of a unique equivalent⁷⁴ martingale measure. In our statement, the most unfavorable mixed strategies of the measure $Q_t^*(\cdot)$ with the finite support $K_t'(\cdot)$ containing at most $n + 1$ points determine the corresponding conditional distributions of price increments under a given price history up to the current time instant t , so these increments form a martingale difference. Denoting⁷⁵ by $Q_t^*(\cdot)$ the most unfavorable mixed strategy at step t , we write the Bellman equations (7.1.1) as

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \int \int w_t(\cdot, y) Q_{t,t}^*(dy), \quad t = N, N-1, \dots, 1. \end{aligned} \quad (7.6.2)$$

where w_t is given by (T). For the random process $X_t, t = 0, \dots, N$, with a fixed value $X_0 = x_0$ and the distribution $Q_{t,x_0,\dots,x_{t-1}}^*$ of the conditional price increments ΔX_t under a known history $X_0 = x_0, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}$, equations (7.6.2) determine the Snell envelope⁷⁶ of the process $G_t = g_t(X_0, \dots, X_t), t = 1, \dots, N$. Note that the Snell envelope relates to the optimal stopping problem⁷⁷ when the option owner's strategy is choosing a stopping time (to exercise an American option); see [189, Chapter VI, Section 2]. Theorem 3 of this paragraph suggests a way to find the corresponding hedging strategy $H_t^* = h_t^*(\bar{X}_{t-1})$: Doob's decomposition for the supermartingale $V_t^* = v_t^*(\bar{X}_t)$ with respect to the unique martingale measure \mathbb{P}_* and the martingale representation as the martingale transformation⁷⁸ yield

$$H_t^* \Delta X_t = V_t^* - \mathbb{E}_*^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^*, \quad t = 1, \dots, N, \quad (7.6.3)$$

where $\mathbb{E}_*^{\mathcal{F}_t}$ denotes the expectation operator⁷⁹ with respect to the σ -algebra \mathcal{F}_t generated by the random variables X_0, \dots, X_t , i.e.,

$$\mathbb{E}_*^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* = \int v_t^*(X_0, \dots, X_{t+1}, X_{t+1} + y) Q_{t,X_0,\dots,X_{t-1}}^*(dy).$$

In other words, the strategy $h_t^*(\bar{x}_{t-1})$ is obtained from the system of linear equations

$$h_t^*(\bar{x}_{t-1})z = v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + z) - \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) Q_{t,\bar{x}_{t-1}}^*(dy),$$

⁷⁴The equivalence of measures defined on a finite set reduces to the coincidence of their supports.

⁷⁵For ease of notation when integrating over the measure.

⁷⁶The smallest supermartingale majorizing a given random process.

⁷⁷See [191, Chapter III, Section 1].

⁷⁸An adapted process $V_t, t = 0, 1, \dots$, is the martingale transformation of X using H if H is a predictable process, $\Delta V_t = H_t \Delta X_t$, and X is a martingale. (The definition in the textbook [190] also requires $V_0 = H_0 X_0$.)

⁷⁹Because the supports of the conditional distributions are finite, the equations and inequalities involving conditional expectations (usually understood "almost everywhere") here hold "everywhere."

when z runs through the price increment scenarios⁸⁰ from $K'_t(\bar{x}_{t-1}) = \text{supp}(Q_{t,\bar{x}_{t-1}}^*)$; the vector $h_t^*(\cdot)$ is chosen from the linear hull of the support of $K'_t(\cdot)$ that has dimension $m_t - 1$.

If the pricing and hedging problem is posed as superreplication with respect to \mathbb{P}_* for a European option (no trading constraints, the market without arbitrage opportunities), this is equivalent to replication due to market completeness for the reference measure \mathbb{P}_* . In this case, the process V^* is a martingale, and the Bellman equations (7.6.2) turn into

$$\begin{aligned} V_N^* &= g(\bar{X}_N), \\ V_{t-1}^* &= \mathbb{E}_*^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^*, \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned}$$

where g is the payoff function of the option at the terminal time instant, and (7.6.3) takes the form

$$H_t^* \Delta X_t = \Delta V_t^*, \quad t = 1, \dots, N.$$

Similarly to the previous case, the strategy $h_t^*(\cdot)$ is found from the system of linear equations for price increment scenarios from the support of the conditional distribution corresponding to the most unfavorable mixed market strategy with the unique martingale measure \mathbb{P}_* .

⁸⁰ Among all m_t scenarios, it suffices to take $m_t - 1$ linearly dependent ones.

Chapter 8. The Properties of Optimal “Market” Strategies and Their Supports

The behavior of the most unfavorable mixed “market” strategies with supports consisting of a finite number of points equal to the total number of assets (risky and risk-free) is of applied interest: superhedging reduces to hedging for this finite number of price evolution scenarios. Chapter 8 considers this problem.

Here, the most important results are Theorem 8.1.1 about the upper semicontinuity of a set-valued mapping of the price history into the class of mixed market strategies and Theorem 8.2.2 about the existence of a Borel measurable transition kernel for the optimal (most unfavorable) mixed market strategies. These theorems are based on the structural stability assumption of the model. Also, we investigate models with convex solutions of the Bellman–Isaacs equations; in this case, the optimal mixed market strategies are concentrated on the set of extreme points for the convex hull of the support.

The main results of this chapter were published in [201] and [198].

8.1 Smoothness Properties of Optimal Mixed “Market” Strategies and Their Supports

In this section, we obtain upper semicontinuity conditions for set-valued mappings of the price history into the class of optimal mixed “market” strategies.

Proposition 8.1.1. *Let X be a compact topological space with a Borel σ -algebra \mathcal{B}_X , Y be a separable metric space with a σ -algebra \mathcal{B}_Y , $\mathcal{P}(Y)$ be the set of all probability measures on (Y, \mathcal{B}_Y) , and $S : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ be an upper semicontinuous set-valued mapping¹, where $\mathcal{K}(Y)$ is the class of non-empty compact subsets of Y , and*

$$\mathcal{M}(x) = \{Q \in \mathcal{P}(Y) : \text{supp}(Q) \subseteq S(x)\}. \quad (8.1.1)$$

Then the set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{M}(x)$ is upper semicontinuous.

¹Due to compact-valuedness, (upper and lower) semicontinuity and h -semicontinuity coincide; see [114, Proposition 2.61] and [114, Proposition 2.66].

Proof. We fix an arbitrary number $\varepsilon > 0$ and choose an arbitrary point $x_0 \in X$. Due to the upper semicontinuity of the set-valued mapping $x \mapsto K(x)$, there exists a neighbourhood $U_\varepsilon(x_0)$ of the point x_0 such that, for all $x \in U_\varepsilon(x_0)$, the inclusions² $S(x) \subseteq \{y \in Y : \rho(y, S(x_0)) \leq \varepsilon\} = F_\varepsilon$ hold. Consider nets $x_\alpha \rightarrow x_0$, $Q_\alpha \in \mathcal{M}(x_\alpha)$. According to [114, Corollary 2.20], the image $S(X)$ (in the set-valued sense) is compact, and therefore the image of $\mathcal{M}(X)$ is also compact in the weak topology on $\mathcal{P}(Y)$, which is metrizable; see [170]. Hence, some subnet Q_{α_β} weakly converges to a measure $Q_0 \in \mathcal{P}(Y)$. Moreover, by the Alexandroff theorem [2], we have the inequality³ $\liminf_{\beta \rightarrow \infty} Q_{\alpha_\beta}(F_\varepsilon^c) \geq Q_0(F_\varepsilon^c) = 0$ because the set F_ε^c is open; thus, $\text{supp}(Q_0) \subseteq F_\varepsilon$. Since $\varepsilon > 0$ is arbitrary, we obtain $\text{supp}(Q_0) \subseteq S(x_0)$, i.e., $Q_0 \in \mathcal{M}(x_0)$. As the mapping $\mathcal{M}(\cdot)$ takes compact values, it is upper semicontinuous by [114, Proposition 2.19]. \square

The result below has been proved in Proposition 6.3.1: if X is a topological space (not necessarily compact) and $S : X \mapsto \mathcal{F}(Y)$ is a lower semicontinuous set-valued mapping, where $\mathcal{F}(Y)$ is the class of all closed subsets, then $\mathcal{M}(\cdot)$ given by (8.1.1) is h -lower semicontinuous. Thus, we arrive at the following assertion.

Proposition 8.1.2. *Under the conditions of Proposition 8.1.1, assume that the set-valued mapping $S : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ is lower semicontinuous. Then the set-valued mapping $\mathcal{M}(\cdot)$ given by (8.1.1) is continuous.*

Lemma 8.1.1. *Let X and Y be Hausdorff topological spaces and X be compact. If the set-valued mapping $K : X \mapsto \mathcal{K}(Y)$ is upper semicontinuous, then the set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{P}^n(K(x))$, $x \in X$, is upper semicontinuous for $n \geq 1$.*

Proof. Consider nets $x_\alpha \rightarrow x_*$, $Q_\alpha \in \mathcal{P}^n(K(x_\alpha))$. Note that Q_α can be represented as

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} p_\alpha^i \delta_{y_\alpha^i},$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_\alpha^i = 1, p_\alpha^i \geq 0, y_\alpha^i \in K(x_\alpha) \subseteq K(X).$$

By [114, Corollary 2.20], the image of $K(X)$ is compact due to the compactness of $K(\cdot)$. Considering the upper semicontinuity of $K(\cdot)$, by [114, Proposition 2.19], there exists a subnet for which $y_{\alpha_\beta}^i \rightarrow y_*^i \in K(x_*)$, $i = 1, \dots, n+1$. Due to the compactness of the simplex

$$S_n = \left\{ p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} p^i = 1, p^i \geq 0, i = 1, \dots, n+1 \right\},$$

it is possible to extract one more subnet such that $p_{\alpha_\beta\gamma} = (p_{\alpha_\beta\gamma}^1, \dots, p_{\alpha_\beta\gamma}^{n+1}) \rightarrow p_* \in S_n$. Thus, $Q_{\alpha_\beta\gamma} \rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} p_*^i \delta_{y_*^i} \in \mathcal{P}^n(K(x_*))$. Applying [114, Proposition 2.19] again, we establish the upper semicontinuity of $x \mapsto \mathcal{P}^n(K(x))$. \square

²Here, $\rho(y, A) = \inf\{\rho(y, z), z \in A\}$.

³Here, A^c is the complement of a set A in an appropriate space.

Let (Y, ρ) be a separable metric space. We introduce a linear space $BL(Y)$ of bounded Lipschitz functions $f : Y \mapsto \mathbb{R}$ with the norm

$$\begin{aligned} \|f\|_{BL} &= \|f\|_L + \|f\|_\infty, \\ \|f\|_\infty &= \sup\{|f(y)| : y \in Y\}, \\ \|f\|_L &= \sup\left\{\frac{|f(y) - (y')|}{\rho(y, y')} : y, y' \in Y, y \neq y'\right\}. \end{aligned}$$

We denote by $\mathcal{M}(Y)$ the normalized vector space of alternating measures (also called currents) on the space Y with the Borel σ -algebra \mathcal{B}_Y equipped with the Dudley norm

$$\|\mu\|_D = \sup\left\{\left|\int f d\mu\right| : \|f\|_{BL} \leq 1\right\}.$$

The set of all normalized (probability) measures $\mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{M}(Y)$ is a closed convex subset of $\mathcal{M}(Y)$ with the measure ρ_D generated by the norm $\|\cdot\|_D$, i.e., $\rho_D(\pi_1, \pi_2) = \|\pi_1 - \pi_2\|_D$. According to [80, Theorem 11.3.3], the weak convergence of a sequence of probability measures from $\mathcal{P}(Y)$ in the separable metric space Y is equivalent to convergence in the Dudley measure. In other words, the measure ρ_D generates a weak topology on $\mathcal{P}(Y)$.

Lemma 8.1.2. *Let X be a Hausdorff topological space, (Y, ρ) be a separable metric space, and $F : X \mapsto K(Y)$ be a lower semicontinuous mapping. Then the set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{P}^n(F(x))$, where $n \geq 0$, is h -lower semicontinuous⁴ with respect to the Dudley measure.*

Proof. Consider a measure $Q_0 \in \mathcal{P}^n(K(x_0))$, where x_0 is an arbitrary point of X . Then Q_0 can be represented as

$$\begin{aligned} Q_0 &= \sum_{i=1}^{n+1} q^i \delta_{y_0^i}, \quad y_0^i \in F(x_0), \\ q^i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} q^i = 1. \end{aligned}$$

Since F takes compact values, lower semicontinuity implies h -lower semicontinuity by [114, Proposition 2.68]. Therefore, for any $\varepsilon > 0$, there exists a neighborhood $V_\varepsilon(x_0)$ of the point x_0 such that $F(x) \subseteq \{y \in Y : \rho(y, F(x_0)) < \varepsilon\}$ for any $x \in V_\varepsilon(x_0)$. Hence, for every $y_0^i, i = 1, \dots, n+1$, it is possible to find $y^i \in F(x)$ such that $\rho(y_0^i, y^i) < \varepsilon$. Letting $Q = \sum_{i=1}^{n+1} q^i \delta_{y_0^i} \in \mathcal{P}^n(F(x))$ yields $\rho_D(Q_0, Q) < \varepsilon$, i.e., $\mathcal{P}^n(F(\cdot))$ is h -lower semicontinuous at the point x_0 . \square

Due to Lemma 3.2.1, the trading constraints⁵

$$\widehat{D}_t^a(\cdot) = \{h \in D_t(\cdot) : \sigma_{K_t(\cdot)}(-h) \leq a\},$$

⁴According to [114, Proposition 2.66], the h -lower semicontinuity of a set-valued mapping implies its lower semicontinuity.

⁵Here, σ_A denotes the support function of a set A , i.e., $\sigma_A(x) = \sup_{y \in A} \langle x, y \rangle$.

in the Bellman-Isaacs equations (BI) can be replaced without changing the values of the function $v_t^*(\cdot)$ by the compact sets $\widehat{D}_t^a(\cdot)$, where $a \geq C$ and the constant C is given by (1.2.3). Without loss of generality, we can assume⁶ that $C > 0$. By 5.2.2, we have a (game) equilibrium in the class of measures with a finite support contained in $K_t(\cdot)$. However, we will make assumptions about $D_t(\cdot)$, $K_t(\cdot)$, and $g_t(\cdot)$ guaranteeing the continuity of $v_t^*(\cdot)$ to apply Proposition 5.2.3. According to this proposition, an equilibrium exists for the class of all measures with a support contained in $K_t(\cdot)$.

Lemma 8.1.3. *For $t = 1, \dots, N$, let the compact-valued mappings $K_t(\cdot)$ be continuous, the **compact-valued** mappings $D_t(\cdot)$ be lower semicontinuous and closed, and the robust condition of no sure arbitrage with unlimited profit RND SAUP hold. Then the functional $J(x, Q)$, $x \in B_{t-1}$, $Q \in \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$, given by*

$$J(x, Q) = \int w_t(x, y)Q(dy) - \sigma_{\widehat{D}_t^a(x)} \left(\int yQ(dy) \right) \quad (8.1.2)$$

is jointly continuous (in all variables) on the compact set $B_{t-1} \times \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$, where $\mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$ is equipped with a weak topology.⁷

Proof. We fix $t \in \{1, \dots, N\}$ and consider sequences $x^n \in B_{t-1} \subseteq (\mathbb{R}^n)^t$, $Q^n \in \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$ such that $x^n \rightarrow x^*$ and $Q^n \rightarrow Q^*$ (weakly). It is obvious that $(x^*, Q^*) \in B_{t-1} \times \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$. According to Theorem 3.2.2, the solution $v_t^*(\cdot)$ of the Bellman-Isaacs equations (BI) is continuous; i.e., the function $(x, y) \mapsto w_t(x, y)$ is jointly continuous on the set $B_{t-1} \times K_t(B_{t-1})$, which is compact by Proposition 3.1.1 and Remark 3.1.4. Therefore, the function $w_t(\cdot, \cdot)$ is uniformly continuous on $B_{t-1} \times K_t(B_{t-1})$. In particular, the family of functions $y \mapsto w_t(x, y)$, $x \in B_{t-1}$, is equicontinuous and bounded.

Based on this observation, we verify the continuity of the first term in (8.1.2), i.e., $J_1(x, Q) = \int w_t(x, y)Q(dy)$, on $B_{t-1} \times \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$. We have

$$J_1(x^n, Q^n) - J_1(x^*, Q^*) = \left[\int w_t(x^n, y)Q^n(dy) - \int w_t(x^n, y)Q^*(dy) \right] + \int [w_t(x^n, y) - w_t(x^*, y)]Q^*(dy).$$

The first term (in square brackets) tends to zero by [80, Corollary 11.3.4]. The second term does the same since the integrand uniformly vanishes.

Concerning the continuity of the expression $J_2(x, Q) = \sigma_{\widehat{D}_t^a(x)} \left(\int yQ(dy) \right)$, note that y is bounded on the compact set $K_t(B_{t-1})$, i.e., $\sup_{y \in K_t(B_{t-1})} \|y\| = A_1 < \infty$; hence, $\| \int yQ(dy) \| \leq \int \|y\|Q(dy) \leq A_1$. In addition, since the set-valued mapping $x \mapsto \widehat{D}_t^a(x)$ is continuous, it follows that $\sup_{x \in B_{t-1}} \{ \|h\| : h \in \widehat{D}_t^a(x) \} = A_2 < \infty$

⁶For an American option, $C \geq 0$; if $C = 0$, the payoff function becomes trivial, $g_t(\cdot) \equiv 0$, being of no interest from an economic point of view.

⁷A weak topology on the space $\mathcal{P}(Y)$ of probability measures defined on a Borel σ -algebra \mathcal{B}_Y is metrizable if Y is a separable metric space; see [80, Theorem 11.3.3].

based on [168, Proposition 6.4]. According to [168, Proposition 9.10] and [168, Proposition 9.11], we have:

$$\begin{aligned} & \sigma_{\widehat{D}_t^e(x^n)} \left(\int y Q^n(dy) \right) - \sigma_{\widehat{D}_t^e(x^*)} \left(\int y Q^*(dy) \right) = \\ & \left[\sigma_{\widehat{D}_t^e(x^n)} \left(\int y Q^n(dy) \right) - \sigma_{\widehat{D}_t^e(x^n)} \left(\int y Q^*(dy) \right) \right] + \\ & \left[\sigma_{\widehat{D}_t^e(x^n)} \left(\int y Q^*(dy) \right) - \sigma_{\widehat{D}_t^e(x^*)} \left(\int y Q^*(dy) \right) \right] = \\ & A_2 \left| \int y Q^n(dy) - \int y Q(dy) \right| + A_1 h_\rho \left(\widehat{D}_t^a(x^n), \widehat{D}_t^a(x^*) \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Thus,

$$J(x^n, Q^n) = J_1(x^n, Q^n) - J_2(x^n, Q^n) \rightarrow J_1(x^*, Q^*) - J_2(x^*, Q^*) = J(x^*, Q^*).$$

□

Let the class $\mathcal{P}_t(\cdot)$ be the mixed extension of the class of pure strategies.⁸ We use the notations from Section 5.2, reproducing them here for the reader's convenience:

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] Q(dy), \quad (8.1.3)$$

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \inf_{h \in D_t(\cdot)} \int [w_t(\bar{x}_{t-1}, y) - hy] Q(dy). \quad (8.1.4)$$

Suppose that the integrals in (8.1.3) and (8.1.4) are well-defined with respect to the measure Q . The value $\rho_t(\cdot)$ appears in the Bellman–Isaacs equations for mixed strategies, which can be shortly written as

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot) \quad \text{for } t = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

Note that under assumption 1.2.2, the functions $\rho_t(\cdot)$ and $v_t^*(\cdot)$ are bounded above by the constant C .

Theorem 8.1.1. *Let⁹ the compact-valued mappings $K_t(\cdot)$ be continuous, the convex-valued mappings $D_t(\cdot)$ be weakly continuous¹⁰, the functions $g_t(\cdot)$ be continuous, $t = 1, \dots, N$, and the robust condition of no sure arbitrage with unbounded profit RNSAUP hold. Then the class of all optimal mixed strategies $\mathcal{P}_t^{opt}(\cdot)$ is non-empty and convex, and the set-valued mappings¹¹ $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x)$ and $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x)) \neq \emptyset$ are upper semicontinuous.*

⁸In accordance with the terminology of Chapter 5, the mixed extension includes only measures with a support contained in $K_t(\cdot)$ and all measures concentrated at one point $y \in K_t(\cdot)$.

⁹Recall that $K_t(\cdot) \neq \emptyset$ and $D_t(\cdot) \neq \emptyset$ because $0 \in D_t(\cdot)$.

¹⁰That is, lower semicontinuous and closed.

¹¹The class $\mathcal{P}^n(X)$ of all probability measures concentrated at most at $n + 1$ points of the space X is not convex if X contains more than $n + 1$ points.

Proof. We choose the mixed extension $\mathcal{P}_t(x) = \mathcal{P}(K_t(x)) \subseteq \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$ in the expressions (8.1.3) and (8.1.4) for $x \in B_{t-1}$. By Remark 3.1.4 and Proposition 3.1.1, the set $K_t(B_{t-1})$ is compact and the functions $g_t(\cdot)$ are bounded above on the compact sets $B_t, t = 1, \dots, N$. According to Theorem 3.1.4, the function $v_t^*(\cdot)$ (8.1.5) is upper semicontinuous and hence bounded on the compact set $B_t, t = 1, \dots, N$. Due to Proposition 5.2.3, there exists an equilibrium for the chosen mixed extension, i.e., $\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot)$, where $\rho_t(\cdot)$ and $\rho'_t(\cdot)$ are given by (5.3.1) and (5.3.2), respectively, and the integrals in these expressions are well-defined. As the mapping $x \mapsto D_t(\cdot)$ is closed, the sets $D_t(\cdot)$ are closed as well; see [114, Remark 2.12]. Besides, condition (8.1.1) holds, and consequently, the set $\widehat{D}_t^a(\cdot) = \{h \in D_t(\cdot) : \sigma_{K_t^*(\cdot)}(-h) \leq a\}$, where $K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$, is compact; see Remark 3.2.1. Following Lemma 3.2.1, $D_t(\cdot)$ can be replaced by $\widehat{D}_t^a(\cdot)$ without changing the value of $\rho_t(\cdot)$. According to item 2) of Proposition 5.2.3, there exists an equilibrium with the saddle point $(h_t^*(\cdot), Q_t^*(\cdot))$. Considering Proposition 5.2.1, we have

$$\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}(K_t(x))} J(x, Q), \tag{8.1.6}$$

where $J(x, Q)$ is given by (8.1.2). Based on Proposition 8.1.2 on the continuous set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{P}(K_t(x))$, Proposition 3.2.3 on the continuous set-valued mapping $x \mapsto \widehat{D}_t^a(x)$, and Lemma 8.1.3 on the continuous functional $J = J(x, Q), x \in B_{t-1}, Q \in \mathcal{P}(K_t(B_{t-1}))$, we may apply Berge's theorem on the maximum; see Theorem 3.1.3. According to it, the set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x)$ is upper semicontinuous on B_{t-1} for the set $\mathcal{P}_t^{opt}(x) \subseteq \mathcal{P}(K_t(x))$ of measures under which the functional J (8.1.6) achieves maximum on $\mathcal{P}(K_t(x))$. The convexity of $\mathcal{P}_t^{opt}(x)$ follows from the concavity of the functional $J(x, Q)$ in the variable Q and the convexity of the class $\mathcal{P}(K_t(x))$.

From Lemma 8.1.1 on the upper semicontinuity of the set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{P}^n(K_t(x))$ and [114, Proposition 2.45], which is applicable because we have $\mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x)) \neq \emptyset$ by Theorem 7.3.2, it follows that the set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$ is upper semicontinuous. \square

Corollary 8.1.1. *Under the hypotheses of Theorem 8.1.1, let the set $\mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$ be a singleton for any $x \in B_{t-1}$ (in particular, let the maximizer in (8.1.6) be unique), i.e.,*

$$\mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x)) = \{Q^*(x, \cdot)\}. \tag{8.1.7}$$

Then the transition kernel Q^ is Feller¹² and $Q^*(x, \cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(x))$.*

This result is immediate from the following elementary assertion.

Lemma 8.1.4. *Assume that X and Y are topological spaces, and $F : X \mapsto 2^Y$ is a set-valued mapping¹³ such that the set $F(x)$ is a singleton for all $x \in X$, i.e., the*

¹²The mapping $x \mapsto Q^*(x, \cdot)$ is continuous; therefore, Q^* is a transition kernel by Proposition 6.2.1.

¹³Here, 2^Y denotes the set of all subsets of Y .

representation $F(x) = \{f(x)\}$ holds for some single-valued function $f : X \mapsto Y$. Then the upper semicontinuity¹⁴ of $F(\cdot)$ is equivalent to the continuity of f .

The assertion follows directly from [114, Definition 2.1, (a)] and [114, Proposition 2.5, (c)]: the upper semicontinuity of $F(\cdot)$ is equivalent to the fact that for any closed set $C \subseteq Y$, the set $\{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\} = \{x \in X : f(x) \in C\} = f^{-1}(C)$ is closed as well.

The following simple example shows that the maximizer in (8.1.6) may be nonunique.

Example 8.1.1. Consider the one-step one-dimensional ($n = 1$) model without trading constraints. We fix x_0 and let $K_1(x_0) = [a, b]$, $a < b$. Assume that there exists an interval $[x', x'']$ such that:

- 1) $0 \in (x', x'') \cap (a, b)$.
- 2) The restriction of the payoff function $g_1(\cdot)$ to $[x', x'']$ is affine, $g_1(x) = \alpha x + \beta$, $x \in [x', x'']$.
- 3) Outside the interval $[x', x'']$, the payoff function satisfies the inequality $g_1(x) < \alpha x + \beta$.

Then the concave hull $g_1^*(\cdot)$ of the function $g_1(\cdot)$ coincides with it on $[x', x'']$, and any measure Q with a support $\text{supp}(Q) \subseteq [x', x'']$ and zero mean ($\int xQ(dx) = 0$) is an optimal mixed strategy; see Section 7.6.

8.2 The Existence of a Transition Kernel for Optimal Mixed Strategies

In [29, Section 7.4.3], probability measures were considered on a separable metrizable space depending on elements of another separable metrizable space. In particular, the following alternative definition of a transition kernel¹⁵ was formulated in [29, Definition 7.12].

Definition 8.2.1. *Let X and Y be separable metrizable spaces, $Q(x, \cdot) \in \mathcal{P}(Y)$, the space X be equipped with a Borel σ -algebra \mathcal{B}_X , and the (separable metrizable) space $\mathcal{P}(Y)$ be equipped with a Borel σ -algebra $\mathcal{B}_{\mathcal{P}(Y)}$. A transition kernel Q is a measurable mapping $x \mapsto Q(x, \cdot)$ from X into $\mathcal{P}(Y)$.*

Remark 8.2.1. Definition 8.2.1 is equivalent to Definition 6.2.1 introduced above in the case where the spaces X and Y are equipped with Borel σ -algebras [29, Proposition 7.26].

¹⁴A similar assertion will be valid if we replace the upper semicontinuity for $F(\cdot)$ with lower semicontinuity.

¹⁵In this book, the term “stochastic kernel” was used.

Using this fact, we easily obtain the following result from Theorem 8.1.1.

Corollary 8.2.1. *Under the hypotheses of Theorem 8.1.1, there exists a transition kernel¹⁶ Q such that $Q(x, \cdot) \in \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$ for $x \in B_{t-1}$.*

Proof. The set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$ is upper semicontinuous, hence strongly (Borel) measurable with respect to the measurable space $B_0^{(n-1)}$ with the σ -algebra of its Borel subsets and the Polish space $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ with the Borel σ -algebra.¹⁷ However, in our case, we can simply speak about the measurable¹⁸ set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$. The conclusion follows by the Kuratowski–Ryll Nardzewski selection theorem [114, Chapter 2, Theorem 2.1]. \square

A stronger assertion can be obtained using [29, Proposition 7.33]. We formulate it in terms of set-valued mappings as follows.

Theorem 8.2.1. *Let X be a metrizable space, Y be compact metrizable space, $B \subseteq X$ be a closed set, $F : B \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ be a closed set-valued mapping, a function $f : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$ be upper semicontinuous, where E denotes the graph the set-valued mapping F , and*

$$f^*(x) = \max_{y \in F(x)} f(x, y). \quad (8.2.1)$$

We denote by $F^(x) = \{y \in Y : f(x, y) = f^*(x)\}$ the set of maximizers in (8.2.1). Then the function f^* is upper semicontinuous and there exists a Borel measurable selector of the set-valued mapping $F^* : B \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$, i.e., a function $\varphi : B \rightarrow Y$ with the property*

$$f(x, \varphi(x)) = f^*(x), \quad x \in B. \quad (8.2.2)$$

Remark 8.2.2. An upper semicontinuous set-valued mapping is closed; see [114, Chapter 1, Proposition 2.22]. If a (Hausdorff) space X is locally compact, then a closed set-valued mapping F is upper semicontinuous. This follows from [114, Chapter 1, Corollary 2.20] and [114, Chapter 1, Proposition 2.23].

We also need another assertion for proving the existence of an optimal transition kernel.

Lemma 8.2.1. *Let X be a Hausdorff topological space, Y be a separable metric space, $B \subseteq X$ be a closed set, $F : B \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ be a closed set-valued mapping, and function $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ be upper semicontinuous, where E denotes the graph of F . Then:*

¹⁶See Definition 6.2.1.

¹⁷We follow the terminology of [114, Chapter 2, Definition 1.1]; note that there is a typo in item (a). A set-valued mapping $F(\cdot)$ is said to be strongly measurable with respect to a given σ -algebra \mathcal{F} (in our case, a Borel algebra) if $F^-(C) = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap C \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$ for any closed set $C \subseteq Y$ and measurable if $F^-(U) = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$ for any open set $U \subseteq Y$. Immediately, if $F(\cdot)$ is strongly measurable or measurable, then $\text{dom } F = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$. Without loss of generality, such mappings $F(\cdot)$ are assumed to have non-empty values.

¹⁸In general, strong measurability implies measurability [114, Chapter 2, Proposition 1.3], but for compact-valued set-valued mappings these two properties coincide [114, Chapter 2, Proposition 1.10].

- 1) The set $A = \{ (x, Q) : Q \in \mathcal{P}(Y), \text{supp}(Q) \subseteq F(x) \}$ is closed.
- 2) If the space Y is also compact, then the set $A^{(n)} = \{ (x, Q) : Q \in \mathcal{P}^n(Y), \text{supp}(Q) \subseteq F(x) \}$ is closed and the function $\psi(x, Q) = \int \varphi(x, y)Q(dy)$ is upper semicontinuous on the set $A^{(n)}$.

Proof.

- 1) Consider a net $(x_\alpha, Q_\alpha) \in A$ converging to (x, Q) . According to Lemma 6.2.1, the set-valued mapping $Q \mapsto \text{supp}(Q)$ is lower semicontinuous. Hence, for an arbitrary point $y \in \text{supp}(Q)$ and a given net Q_α , there exist points $y_\alpha \in \text{supp}(Q_\alpha)$ such that $y_\alpha \rightarrow y$. Due to the closedness of the graph E of the set-valued mapping $F : B \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$, the net (x_α, y_α) converges to the point $(x, y) \in E$, i.e., $y \in F(x)$. Thus, $\text{supp}(Q) \subseteq F(x)$, so the set A is closed.
- 2) By Lemma 7.2.2, the set $\mathcal{P}^n(Y)$ is compact and, consequently, closed.¹⁹ Therefore, the set $A^{(n)}$, like A , is closed.

Consider a net $(x_\alpha, Q_\alpha) \in A^{(n)}$ converging to (x, Q) . The measures Q_α are represented as $Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} q_\alpha^i \delta_{y_\alpha^i}$, where $\{y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^{n+1}\} \subseteq F(x_\alpha)$, $(q_\alpha^1, \dots, q_\alpha^{n+1}) \in S_n$, and the simplex S_n is given by (7.2.2). Using the compactness of the simplex S_n and the space Y , we can extract a subnet Q_{α_β} such that $y_{\alpha_\beta}^i \rightarrow y^i$, $q_{\alpha_\beta}^i \rightarrow q^i$, $i = 1, \dots, n+1$. Then $\sum_{i=1}^{n+1} q^i \delta_{y^i} = Q$, where $(q^1, \dots, q^{n+1}) \in S_n$, with $\{y^1, \dots, y^{n+1}\} \subseteq F(x)$ due to the closed set $A^{(n)}$. We denote

$$a = \limsup_{(x_\alpha, Q_\alpha) \rightarrow (x, Q)} \psi(x_\alpha, Q_\alpha), \quad b^i = \limsup_{(x_\alpha, Q_\alpha) \rightarrow (x, Q)} \varphi(x_\alpha, y_\alpha^i), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Let us choose a next subnet such that $\psi(x_{\alpha_{\beta_\gamma}}, Q_{\alpha_{\beta_\gamma}}) \rightarrow a$ and $\varphi(x_{\alpha_{\beta_\gamma}}, y_{\alpha_{\beta_\gamma}}^i) \rightarrow b^i$, $i = 1, \dots, n+1$. Considering the upper semicontinuity of the function φ on E , we have

$$a \leftarrow \psi(x_{\alpha_{\beta_\gamma}}, Q_{\alpha_{\beta_\gamma}}) = \sum_{i=1}^{n+1} q_{\alpha_{\beta_\gamma}}^i \varphi(x_{\alpha_{\beta_\gamma}}, y_{\alpha_{\beta_\gamma}}^i) \rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} q^i b^i \leq \sum_{i=1}^{n+1} q^i \varphi(x, y^i) = \psi(x, Q).$$

□

Theorem 8.2.2. *Under condition RND SAUP, assume that for $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, the compact-valued mappings $K_t(\cdot)$ are upper semicontinuous, the set-valued mappings²⁰ $D_t(\cdot)$ take closed values and are lower semicontinuous, and the payoff functions $g_t(\cdot)$ are upper semicontinuous. Let $R_t(x)$ be the set of optimal (most unfavorable) mixed strategies from $\mathcal{P}^n(K_t(x))$ under a given price history²¹ $x \in B_t$. Then*

¹⁹A compact set is closed in any enveloping Hausdorff space, particularly a metrizable one, such as the space of probability measures on Y with a Borel σ -algebra.

²⁰Recall that $D_t(\cdot)$ take convex values and $0 \in D_t(\cdot)$.

²¹The set of feasible paths B_t is defined by the relation (1.2.1).

- 1) The set $R_t(x) = \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$ of optimal mixed strategies from $\mathcal{P}^n(K_t(x))$ is non-empty, and there exists a game equilibrium. Moreover, a finite value of the hedger–market game at step t is reached for some saddle point, i.e., an optimal pair $h_t^*(\cdot) \in \widehat{D}_t^C$ with $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(x))$, where the set \widehat{D}_t^C is given by (3.2.4) and the constant C is given by formulas (1.2.2) and (1.2.3).
- 2) For the set-valued mapping R_t , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, there exists a measurable Borel selector, i.e., a transition kernel Q_t^* such that $Q_t^*(x, \cdot) \in R_t(x)$.

Proof.

- 1) According to Proposition 3.1.1, for $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, the sets of feasible paths B_t are compact and g_t is bounded above on B_t . Moreover, by Theorem 3.1.4, the solutions v_t^* of the Bellman–Isaacs equations are upper semicontinuous. Under condition RNDSAUP, see Remark 5.2.4, the trading constraints can be modified by replacing $D_t(\cdot)$ with the compact set $\widehat{D}_t^a(\cdot)$, where $a \geq C$, without changing the values of $\rho_t(\cdot)$. Due to Lemma 3.2.1, for the model with the initial trading constraints, the function $h \mapsto \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]$ achieves the minimum value $\rho_t(\cdot)$ at some point $h^*(\cdot) \in \widehat{D}_t^C$. In contrast to the proof of Corollary 5.2.1, we apply Theorem 7.2.1 instead of Proposition 5.2.3 based on the Kneser theorem. In the former theorem, we choose the nonempty convex compact set \widehat{D}_t^C as X , the set $K_t(\cdot)$ as Y , and the function²² $f(h, y) = w_t(\cdot, y) - hy$, arriving at the required result on the saddle point.
- 2) To apply Theorem 8.2.1, we use item 1 of this theorem, according to which there exists the equilibrium (5.2.6) for the mixed extension $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$. Proposition 5.2.1 reduces the original problem to solving the Bellman equations, defined by (7.1.1): at each step $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, it is required to maximize with respect to $Q \in \mathcal{P}^n(K_t(x))$ the expression

$$\chi_t(x, Q) = \int w_t(x, y)Q(dy) - \sigma_{D_t(x)} \left(\int yQ(dy) \right) \quad (8.2.3)$$

for each $x \in B_{t-1}$. The function w_t , related with v_t^* through the additive transformation (T), is upper semicontinuous. Therefore, we apply item 2 of Lemma 8.2.1 to show the upper semicontinuity of the function $(x, Q) \mapsto \int w_t(x, y)Q(dy)$. Since the set-valued mapping $D_t(\cdot)$ is lower semicontinuous and

$$\zeta_t(x, y) = -\sigma_{D_t(x)}(y) = - \sup_{h \in D_t(x)} hy = \inf_{h \in D_t(x)} [-hy], \quad (8.2.4)$$

the function ζ_t in (8.2.4) is upper semicontinuous by Berge’s theorem 3.1.1. Considering the compactness (hence boundedness) of the set $K_t(B_{t-1})$, the

²²Here, we omit the fixed time instant and price history.

function $Q \mapsto \int yQ(dy)$ is continuous for a weak topology. Thus, the function χ_t in (8.2.3) is upper semicontinuous on the set $A_t^{(n)} = \{(x, Q) : x \in B_{t-1}, Q \in \mathcal{P}^n(K_t(x))\}$.

Note also that the set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{P}^n(K_t(x))$ with the compact domain B_{t-1} is upper semicontinuous; see Lemma 8.1.1.

Now, let us choose the following elements in Theorem 8.2.1: the space $(\mathbb{R}^n)^t$ as X , the set B_{t-1} as B , the class $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ as Y , the set of measures $\mathcal{P}^n(K_t(x))$ as $F(x)$, and the function χ_t as f . (In this case, the graph of the set-valued mapping F is $E = A_t^{(n)}$.) This choice establishes the existence of a Borel measurable selector $x \mapsto Q_t^*(x, \cdot) \in \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$.

Finally, we refer to Remark 8.2.1 to complete the proof. □

Remark 8.2.3. As mentioned, under a fixed initial price x_0 , noted earlier, we construct a probability measure \mathbb{Q}_{x_0} for the optimal mixed market strategy with the transition kernels $Q_t^*(x, \cdot) \in \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$, $t = 1, \dots, N$; this measure is the distribution of the random price process \bar{X}_N with a finite number of paths not exceeding $(n+1)^N$. In addition, by Theorem 8.2.2, we can ensure the Borel measurability of the mapping (kernel) $x_0 \mapsto \mathbb{Q}_{x_0}$.

8.3 Some Properties of Supports in the Case of a Unique Optimal Market Strategy Concentrated at Most at $n + 1$ Points

In this section, we obtain sufficient conditions for continuous branches (selectors) for the supports of optimal market strategies containing no more than $n + 1$ points.

From this point onwards, assume that $\mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(K_t(x))$ is a singleton containing the measure $Q_t^*(x, \cdot)$. By Corollary 8.1.1, the mapping $x \mapsto Q_t^*(x, \cdot)$ is continuous. We denote by

$$S(x) = \text{supp}(Q_t^*(x, \cdot)) \tag{8.3.1}$$

the support of the measure $Q_t^*(x)$. According to Proposition 6.2.2, the set-valued mapping $x \mapsto S(x)$ is lower semicontinuous due to the Feller property of Q_t^* .

The nicest behavior of the set-valued mapping $S(\cdot)$ defined by (8.3.1) is observed in the case

$$|S(x)| = n + 1 \tag{8.3.2}$$

for all x , where $|A|$ denotes the number of points in a set A . We call (8.3.2) the maximum support cardinality condition.

Proposition 8.3.1. *Let X be a topological space, Y be a Hausdorff topological space, and $F : X \mapsto 2^Y$ be a lower semicontinuous set-valued mapping whose values are non-empty finite sets. Then:*

- 1) The function $x \mapsto |F(x)|$, $x \in X$, is lower semicontinuous.
- 2) If the function $x \mapsto |F(x)|$ takes a constant value, then F is continuous.

Proof. We fix an arbitrary $x \in X$ and let $F(x) = \{y_1, \dots, y_k\}$.

If $k = 1$, then $|F(x')| \geq |F(x)| = 1$ for all $x' \in X$, and property (1) holds at the point x . Consider assertion 2); in the case $k = 1$, by one of the equivalent definitions from [114, Proposition 2.5], the set-valued mapping F is lower semicontinuous if, for any open $G \subseteq Y$, the set $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ is open. However, $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\} = \{x \in X : f(x) \in G\} = f^{-1}(G)$, and the continuity of the function f is equivalent to the openness of the inverse images of open sets.

Now consider the case $k \geq 2$. Let V be an arbitrary open set such that $F(x) \subseteq V$. Since $F(x) = \{y_1, \dots, y_k\} \subseteq Y$ and the space Y is Hausdorff, for each pair $(i, j) \in \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$, there exist neighbourhoods of the points y_i and y_j , $V_j(y_i) \subseteq V$ and $V_i(y_j) \subseteq V$, respectively, such that $V_j(y_i) \cap V_i(y_j) = \emptyset$. Letting $V(y_i) = \bigcap_{j \in \{1, \dots, k\}, j \neq i} V_j(y_i)$, $i = 1, \dots, k$, yields the new pairwise disjoint neighbourhoods $V(y_i)$ of the points y_i , $i = 1, \dots, k$. Since F is lower semicontinuous, for $i \in \{1, \dots, k\}$ there exist neighbourhoods $U_i(x)$ of the point x such that $F(x') \cap V(y_i) \neq \emptyset$ for all $x' \in U_i(x)$. Choosing $U(x) = \bigcap_{i=1}^k U_i(x)$, we obtain $F(x') \cap V(y_i) \neq \emptyset$ for an arbitrary $x' \in U(x)$ and all $i \in \{1, \dots, k\}$. Thus, each of the k pairwise disjoint sets $V(y_i)$, $i = 1, \dots, k$, contains at least one point of the set $F(x')$ for each $x' \in U(x)$. Hence, $|F(x')| \geq |F(x)|$, which implies 1). If the function $x \mapsto |F(x)|$ is also supposed constant, then the set $F(x')$, $x' \in U(x)$, contains exactly k points, so each neighbourhood $V(y_i)$, $i = 1, \dots, k$, contains exactly one point of the set $F(x')$. Therefore, $F(x') \subseteq \bigcup_{i=1}^k V(y_i) \subseteq V$ for all $x' \in U(x)$, meaning that F is upper semicontinuous at the point x . Thus, F is continuous at the point x , and assertion 2) is proved for $k \geq 2$ as well. \square

Remark 8.3.1.

- 1) For $k = 1$, assertion 2) of Proposition 8.3.1 has been proved without using the Hausdorff property. In addition, under the hypotheses of Proposition 8.3.1, the lower semicontinuity of F in the case $k = 1$ can be replaced by upper semicontinuity; i.e., the continuity of the single-valued function f is also equivalent to this property; see Lemma 8.1.4.
- 2) When proving assertion 2) of Proposition 8.3.1 in the case $k \geq 2$, we have demonstrated that the lower semicontinuity of the set-valued mapping F (with a fixed finite number of elements $F(x)$) at a point implies its continuity at this point; see the definitions in [114, Remark 2.4]. (In the case $k = 1$, this result is obvious.)

- 3) For a metric space Y , assertion 2) was obtained in [137, Lemma 2]. That lemma stated²³ the h -continuity of F ; however, the upper (lower) semicontinuity of compact-valued mappings is equivalent to h -upper (lower) semicontinuity, and hence continuity is equivalent to h -continuity [114, Theorem 2.68].

We say that a set-valued mapping F , $|F(x)| = k \geq 1$ for all x , is decomposed into noncoincident branches if it can be represented as follows: $F(x) = \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$, where f_i , $i = 1, \dots, k$, are (single-valued) functions $f_i : X \mapsto Y$ such that $f_i(x) \neq f_j(x)$ for $i \neq j$, $x \in X$. The following result was proved by Zhukovskiy in the recent paper [255].

Theorem 8.3.1 (Zhukovskiy). *Let X be a linearly and simply connected²⁴ topological space, Y be a Hausdorff space, and $F : X \mapsto 2^Y$ be a continuous set-valued mapping into finite sets containing exactly $k \geq 1$ elements. Then F is decomposed into k continuous noncoincident branches.*

Remark 8.3.2.

- 1) The paper [255] generalizes the results of [186, Lemma 1], where the additional compactness requirement was imposed on the spaces X and Y in Theorem 8.3.1. In turn, Lemma 1 from [186] is based²⁵ on [162, Lemma 4]: if X is a simply connected compact topological space, Y is a compact metric space, and for every $x \in X$, the set $F(x)$ under a continuous set-valued mapping $F : X \mapsto 2^Y$ has exactly $k \geq 1$ connected components, then the graph of this set-valued mapping, i.e., the set $\{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$, has exactly k connected components.
- 2) The example in [255, Remark 2], namely, the set-valued mapping $F : X \mapsto Y$ with $X = Y = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ given by²⁶ the relation $F(x) = \{y \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : y^2 = x\}$ for $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, shows that the simple connectivity of the space Y is essential.
- 3) A sufficient condition under which a set-valued mapping into finite sets with a fixed number of elements is decomposed into noncoincident branches was provided in [137, Theorem 2]. However, in our opinion, this condition is difficult to check in practice.

The above results can be summarized as follows.

²³For the lower semicontinuity and h -lower semicontinuity of set-valued mappings according to [114, Definition 2.3], [114, Proposition 2.5], and [114, Definition 2.60]. In the general case, h -lower semicontinuity implies lower semicontinuity [114, Proposition 2.66] while upper semicontinuity implies h -upper semicontinuity; see [114, Definition 2.60] and [114, Proposition 2.61].

²⁴A simply connected space is a linearly connected space whose fundamental group is trivial, i.e., consists of unity. In other words, closed paths in such a space are homotopic to zero.

²⁵When referring to [162, Lemma 4], Schirmer replaced the compact metric space figuring in the lemma with a compact Hausdorff topological space (without explanation).

²⁶Here, \mathbb{C} denotes the set of complex numbers.

Proposition 8.3.2. *Let X be a linearly and simply connected space, Y be a Hausdorff space, and $F : X \mapsto 2^Y$ be a set-valued mapping into finite sets containing exactly $k \geq 1$ elements. Then F is decomposed into k continuous noncoincident branches if and only if F is lower semicontinuous.*

Proof. The sufficiency part follows from item 2) of Proposition 8.3.1 and Theorem 8.3.1.

Conversely, suppose that F is decomposed into continuous noncoincident branches, i.e., $F(x) = \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$, where the (single-valued) functions f_i are continuous, $i = 1, \dots, k$. By [168, Proposition 14.2], the set-valued mapping²⁷

$$F(x) = \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^k \{f_i(x)\} \right) = \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$$

is lower semicontinuous. □

Proposition 8.3.3. *Under the hypotheses of Theorem 8.1.1 and Corollary 8.1.1 (on the unique maximizer from $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$), let the compact sets K_0 and $K_t(x)$, $x \in B_{t-1}$, be convex and the set-valued mapping $x \mapsto S(x)$ given by (8.1.7) satisfy the maximum support cardinality condition (8.3.2). Then this mapping is continuous and can be decomposed into continuous noncoincident branches.*

Indeed, in this case, the sets B_t , $t = 0, \dots, N$, given by (1.2.1) are convex and therefore linearly and simply connected. As noted above, $x \mapsto S(x)$ is lower semicontinuous due to the Feller property of the kernel $Q_t^*(\cdot, \cdot)$; see Proposition 6.2.2.

Note that the maximum support cardinality condition (8.3.2) may fail if $K_t(\cdot)$ is nondegenerate (full-sized), i.e., when the affine hull of $K_t(\cdot)$ coincides with \mathbb{R}^n . In other words, the supports of optimal mixed strategies can degenerate and be concentrated at less than $n + 1$ points of $K_t(\cdot)$. For instance, consider Example 7.5.1, where $n = 1$. A more interesting example with $n = 2$ is presented in the next section.

8.4 The Convex Solutions of the Bellman Equations

An important and widespread real-life case is the convex payoff functions g_t for contingent liabilities on particular options. In this case, another economic applications-relevant assumption concerns the convexity of $K_t(\cdot)$, admitted throughout this section. Under the additional assumptions formulated below, the hereditary convexity of the solutions v_t^* , $t = N, \dots, 1$, of the Bellman–Isaacs equations is valid for special models, which can be called the generalized Kolokoltsov models. In the terminology of Section 1.1, this model is Markovian and multiplicatively independent. For convenience, we reproduce its description here. In this case, the deterministic price dynamics $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n) \in (0, \infty)^n$ are given in multiplicative form:

$$X_t^i = M_t^i X_{t-1}^i, \quad M_t = (M_t^1, \dots, M_t^n) \in C_t^*, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (8.4.1)$$

²⁷Here, $\text{cl}(A)$ denotes the closure of a set A .

where $X_0 \in (0, \infty)^n$ and C_t^* is a convex compact set²⁸, $C_t^* \subseteq (0, \infty)^n$. For the purposes of this section, we adopt a more convenient matrix representation of price dynamics:

$$\bar{X}_t = \Lambda(M_t)X_{t-1}, \quad M_t \in C_t^*, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (8.4.2)$$

where X_t is understood as a column vector, $t = 0, \dots, N$; for a vector $m = (m^1, \dots, m^n) \in \mathbb{R}^n$, we denote by $\Lambda(m)$ a diagonal matrix with main diagonal elements equal to m^1, \dots, m^n . Note an elementary but useful equality: for two column vectors $m = (m^1, \dots, m^n) \in \mathbb{R}^n$ and $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\Lambda(m)x = \Lambda(x)m. \quad (8.4.3)$$

Due to (8.4.3), under a known price history $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1}$, the price increment $Y_t = \Delta X_t$ and the multiplier M_t are related by the bijective affine transformation

$$\begin{aligned} Y_t &= \Lambda(x_{t-1})(M_t - e); \\ M_t &= e + \Lambda^{-1}(x_{t-1})Y_t, \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

where $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

From (8.4.4) it is clear that the price dynamics (8.4.2) have the Markovian type, i.e., the set $K_t(\cdot)$ is represented as $K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = K_t^*(x_{t-1})$, where

$$K_t^*(x_{t-1}) = \Lambda(x_{t-1})(-e + C_t^*). \quad (8.4.5)$$

Therefore, the sets $K_t^*(x_{t-1})$ are convex and compact.

From this point onwards, assume that the sets C_t^* have a non-empty interior. Then it follows from (8.4.5) that the convex sets $K_t^*(x_{t-1})$ possess the same property.

Lemma 8.4.1. *Consider the generalized Kolokoltsov model with the price dynamics defined by (8.4.2) and the trading constraints*

$$D_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = D_t^*(x_{t-1}) = \left(\Lambda(x_{t-1})\right)^{-1} \check{D}_t, \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (8.4.6)$$

where \check{D}_t is a closed convex cone. Assume that condition NDSA holds, whereas the payoff functions $\bar{x}_t \mapsto g_t(\bar{x}_t)$, $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on an American option are upper semicontinuous and bounded above (see (B)).

Then there exists an equilibrium for the mixed extension²⁹ $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}(K_t(\cdot))$. Moreover, the solutions v_t^* , $t = N, \dots, 0$ of equations (BI) take finite values and are solutions of the Bellman equations³⁰

$$\begin{aligned} v_N^*(\bar{x}_N) &= g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee_{P \in \mathcal{R}_t} \max \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P(dm), \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

²⁸Recall that in Chapters 13 and 14 of the book [27], Kolokoltsov assumed no trading constraints and considered the case of a fixed rectangle C_t^* .

²⁹Recall that $\mathcal{P}(E)$ denotes the class of all distributions on the space \mathbb{R}^n equipped with a Borel σ -algebra and a support contained in the closed set E .

³⁰In addition, if the payoff function depends only on the price at the current instant (i.e., $g_t(\bar{x}_t) = g_t^*(x_t)$), v_t^* will also depend only on this price (i.e., $v_t^*(\bar{x}_t) = v_t^*(x_t)$). This fact follows from Proposition 1.2.1 since the price dynamics and the trading constraints are Markovian.

where

$$\mathcal{R}_t = \left\{ P \in \mathcal{P}(C_t^*) : \int m P(dm) \in e + \check{D}_t^\circ \right\}. \quad (8.4.8)$$

Proof. First, note that condition USC holds. Indeed, as is easily verified, the set-valued mappings $D_t(\cdot)$ given by (8.4.6) are lower semicontinuous. Concerning the upper semicontinuity of the mappings $K_t(\cdot)$, these compact-valued mappings even satisfy the Lipschitz condition with respect to the Pompeiu–Hausdorff measure according to Proposition 4.2.3. Therefore, considering the upper semicontinuity of the payoff function, we can use Proposition 3.1.4.

Further, conditions NDSA, (B) and USC ensure the applicability of item 1) of Proposition 5.2.3: there exists an equilibrium for the mixed extension $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}(K_t(\cdot))$.

As a consequence of equilibrium, the functions v_s^* , $s \in \llbracket 0, N \rrbracket$, satisfy the Bellman equations (7.1.1). Moreover, since the trading constraints are conic, the barrier cone $\text{bar}(D_t(\cdot))$ coincides with the polar cone $(D_t(\cdot))^\circ$; see item 2 of Example 7.1.1. The support function of a convex cone coincides with the indicator function of its polar cone [175, Theorem 14.1]. Therefore, the Bellman equations (7.1.1) take the form

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \sup_{Q \in \mathcal{Q}_t(\cdot)} \int w_t(\cdot, y) Q(dy), \quad t \in \llbracket 1, N \rrbracket, \end{aligned} \quad (8.4.9)$$

where the functions w_t are given by (T) and

$$\mathcal{Q}_t(\cdot) = \left\{ Q \in \mathcal{P}(K_t(\cdot)) : \int y Q(dy) \in (D_t(\cdot))^\circ \right\}. \quad (8.4.10)$$

In the case of conic trading constraints, condition NDSAUP coincides with condition NDSA, so the set $\mathcal{Q}_t(\cdot)$ is non-empty by Theorem 5.1.1; besides, this set is compact (in a weak topology) since the polar cone $(D_t(\cdot))^\circ$ is closed. Therefore, the supremum in equations (8.4.9) is reached.

Now, considering the specifics of trading constraints, we note that

$$(D_t(\bar{x}_{t-1}))^\circ = \left((\Lambda(x_{t-1}))^{-1} \check{D}_t \right)^\circ = \Lambda(x_{t-1}) \check{D}_t^\circ. \quad (8.4.11)$$

Using (8.4.11) and the relations (8.4.4) and (8.4.5), we replace the variable $y = \Lambda(x_{t-1})(m - e)$ in formulas (8.4.9) and (8.4.10), where m is the new variable. As a result,

$$\begin{aligned} & \max_{Q \in \mathcal{Q}_t(\bar{x}_{t-1})} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy) = \\ & \max_{P \in \mathcal{P}(C_t^*), \int m P(dm) \in e + \check{D}_t^\circ} \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P(dm). \end{aligned} \quad (8.4.12)$$

The conclusion follows after substituting (8.4.12) into the Bellman equations (8.4.9). \square

Remark 8.4.1. In view of (8.4.4), there is a bijective (one-to-one) correspondence between the optimal mixed market strategies $Q_{t_i}^*$ (the distribution of price increments under a known price history, denoted by \cdot) and the multiplier distribution $P_{t_i}^*$. According to item a) of Theorem 7.3.2, the maximum with respect to Q is achieved for some measure $Q_{t_i}^* \in \mathcal{P}^n(K_t(x))$; in Lemma 8.4.1, the optimal multiplier distribution $P_{t_i}^* \in \mathcal{P}^n(C_t^*) \subseteq \mathcal{P}^*(C_t^*)$ corresponds to this measure. We can therefore replace the class of measures (8.4.8) (see the maximum in formula (8.4.7)) by the narrower class³¹

$$\mathcal{R}_t^n = \left\{ P \in \mathcal{P}^n(C_t^*) : \int m P(dm) \in e + \check{D}_t^\circ \right\}, \quad (8.4.13)$$

without changing the result in (8.4.7). In other words, for $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\max_{P \in \mathcal{R}_t^n} \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P(dm) = \max_{P \in \mathcal{R}_t} \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P(dm). \quad (8.4.14)$$

Remark 8.4.2. Imposing a stronger condition of no arbitrage in the lemma, RNDSAUP, allows applying Theorem 8.2.1 on the existence of a Borel measurable transition kernel. (Condition RNDSAUP implies NDSAUP, which coincides with NDSA in case of conic trading constraints.) In this case, we can speak not of mixed market strategies but of conditional distributions: $Q_{t_i}^*$ is the conditional optimal distribution of price increments at a time instant t given a known price history (denoted by \cdot), and $P_{t_i}^*$ is the corresponding optimal multiplier distribution.

Remark 8.4.3. Due to condition NDSA, according to Remark 5.2.8, European and Bermuda options are reduced to a special case of an American option with zero values of the payoff functions g_t at some (fixed) time instants (and nonnegative nonzero values at the other time instants). Thus, Lemma 8.4.1 applies to such options as well.

Remark 8.4.4. Since in the conditions of Lemma 8.4.1 the sets $K_t(\cdot)$ have a non-empty interior, the geometric criterion RNDSAUP is described by formula (2.4.3). In this case, the barrier cone coincides with the polar cone; using (8.4.11), the relations (8.4.4) and (8.4.5), we establish that condition RNDSAUP in Lemma 8.4.1 is equivalent to the geometric criterion

$$\text{int}(C_t^*) \cap (e + \check{D}_t^\circ) \neq \emptyset. \quad (8.4.15)$$

Similarly, using Theorem 2.3.1, we obtain the following geometric criterion for condition NDSAUP (in this case, it coincides with condition NDSA):

$$C_t^* \cap (e + \check{D}_t^\circ) \neq \emptyset. \quad (8.4.16)$$

Remark 8.4.5. For $x \in (0, \infty)^n$, the linear operator $h \mapsto (\Lambda(x))^{-1}h$ performs coordinatewise scaling. For a single coordinate, the scaling operator (i.e., multiplication by a positive number) has four closed invariant sets on \mathbb{R} : \mathbb{R} , $[0, +\infty)$, $(-\infty, 0]$, and $\{0\}$.

³¹Recall that $\mathcal{P}^n(E)$ denotes the class of distributions concentrated at most at $n+1$ points of a set E .

Let us divide the index set $J = \{1, \dots, n\}$ into four parts³², some of which may be empty:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \quad (8.4.17)$$

Now, as the cone \check{D}_t we choose $\prod_{i=1}^n E_i$, where

$$\begin{aligned} E_i &= \mathbb{R} \text{ if } i \in J_1, \\ E_i &= [0, +\infty) \text{ if } i \in J_2, \\ E_i &= (-\infty, 0] \text{ if } i \in J_3, \\ E_i &= \{0\} \text{ if } i \in J_4. \end{aligned}$$

Then the trading constraints (8.4.6) become independent of the price history. However, the constraint $h_j = 0$ on the j th coordinate of the hedging strategy means prohibiting positions on the j th asset; the constraint $h_j \leq 0$ means prohibiting long positions on the j th asset. Both constraints would hardly have an economic interpretation. Therefore, it is reasonable to choose $J_3 = J_4 = \emptyset$ for applications. Thus, the trading constraints with prohibited short positions on some assets are obtained as a special case of the trading constraints (8.4.6). There are no grounds to believe that this part should change over time. In other words, such trading constraints are naturally assumed to be stationary:

$$\begin{aligned} D_t(\cdot) &= \check{D}_t \equiv \prod_{i=1}^n E_i, \\ E_i &= \mathbb{R} \text{ if } i \in J_1, \\ E_i &= [0, +\infty) \text{ if } i \in J_2, \\ \{1, \dots, n\} &= J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (8.4.18)$$

In this case, the polar cone (coinciding with the barrier cone) has the form

$$(D_t(\cdot))^\circ = \check{D}_t^\circ \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : y_j = 0 \text{ if } j \in J_1 \text{ and } y_j \leq 0 \text{ if } j \in J_2\}. \quad (8.4.19)$$

Proposition 8.4.1. *Assume that the conditions of Lemma 8.4.1 hold. Then:*

- 1) *If the potential payoff functions $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, are convex³³, then the Bellman–Isaacs functions v_t^* , $t = 0, \dots, N$, given by (BI) are also convex.*
- 2) *If for $t = 1, \dots, N$, the payoff functions are convex in the last variable only, i.e., for any \bar{x}_{t-1} the function $x_t \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1}, x_t)$ is convex³⁴, then the functions $x_t \mapsto v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_t)$ are also convex (and upper semicontinuous).*

³²Here, we use the conventional notation of probability theory: the union of pairwise non-intersecting sets.

³³The functions $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, are supposed defined on the entire space $((0, +\infty)^n)^{t+1}$; therefore, their convexity implies continuity (for example, see [175, Corollary 10.1.1]), and the upper semicontinuity of payoff functions is automatically satisfied.

³⁴In addition, by Lemma 8.4.1, the function $g_t(\cdot)$ is upper semicontinuous.

- 3) If for $t = 1, \dots, N$ and some $j \in \{1, \dots, n\}$, the payoff functions are monotonic in the j th component of the last variable, i.e., for any values \bar{x}_{t-1} and x_t^i the function $x_t^j \mapsto g_t(\bar{x}_{t-1}, x_t)$, $i \neq j$, is nondecreasing (nonincreasing) for³⁵ $t = 1, \dots, N$, then the functions $x_t^j \mapsto v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_t)$, $t = 1, \dots, N$, are also nondecreasing (nonincreasing) and upper semicontinuous.³⁶

Proof. Let us prove claims 1) and 2) by induction using lemma 8.4.1. For $s = N$ the convexity (convexity on the last variable) of the function v_s^* is obvious because $v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot)$. Let v_s^* be convex for $s = N, \dots, t > 0$. Then v_{t-1}^* is also convex (convex on the last variable), which follows directly from the relations (8.4.7) since $x \mapsto \Lambda(m)x$ — a linear operator, and integrating and taking the maximum preserves the convexity of functions.

As for (3), the monotonicity preservation is due to the fact that the j th component of the vector $\Lambda(m)x_{t-1}$ is equal to $m^j x_{t-1}^j$, and $m^j > 0$. Thus, the monotonicity statement is obtained by reasoning by induction from the relations (8.4.7), since integrating and taking the maximum preserves the monotonicity of the functions.

We prove items 1) and 2) by induction using Lemma 8.4.1. For $s = N$, the convexity (in the last variable) of the function v_s^* is obvious because $v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot)$. Let v_s^* be convex for $s = N, \dots, t > 0$. Then v_{t-1}^* is also convex (in the last variable), which follows directly from the relations (8.4.7) since $x \mapsto \Lambda(m)x$ is a linear operator, while integrating and taking the maximum both preserve the convexity of functions.

As for item (3), monotonicity is preserved because the j th component of the vector $\Lambda(m)x_{t-1}$ equals $m^j x_{t-1}^j$ and $m^j > 0$. Thus, monotonicity is established by induction from the relations (8.4.7) since integrating and taking the maximum both preserve the monotonicity of functions. \square

Remark 8.4.6. The results of this section rest heavily on a special form of the model. In general, the example in Section 8.5 below shows that even under condition NDAO, stronger than NDSA, the heritability of convexity can be violated.

Consider now a special case of price dynamics when the sets C_t^* , $t \in \llbracket 1, N \rrbracket$, are rectangular parallelepipeds:

$$C_t^* = \prod_{i=1}^n [\alpha_t^i, \beta_t^i], \quad 0 < \alpha_t^i < \beta_t^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.4.20)$$

Assume that the trading constraints are stationary of form (8.4.18). In other words, short positions are prohibited on risky assets with indices from a non-empty set $I = J_2 \subseteq \{1, \dots, n\}$. (There are no trading constraints for the assets from the complement of I .)

Proposition 8.4.2. *Consider the model with price dynamics described by (8.4.2), the sets C_t^* given by (8.4.20), and the trading constraints consisting in prohibiting*

³⁵Like in the previous item of this proposition, the function $g_t(\cdot)$ is upper semicontinuous by Lemma 8.4.1.

³⁶Recall that the upper semicontinuity of a monotonic numerical function is equivalent to the right continuity of a nonincreasing function (the left continuity of a nonincreasing function).

short positions on risky assets with indices from a non-empty set $I \subseteq \{1, \dots, n\}$. Let the conditions of item 3) of Proposition 8.4.1 hold, including the assumptions of Lemma 8.4.1, but with a stronger condition of no arbitrage, RNDSAUP, and nondecreasing payoff functions in each j th component of the last price history variable by the time instant t (i.e., x_t) for $j \in I$.

Then for $t \in \{1, \dots, N\}$, the maximum in equations (8.4.7) is achieved for some measure $P_{t,\cdot}^* \in \mathcal{R}_{t,\cdot}^*$, where³⁷

$$\mathcal{R}_{t,\cdot}^* = \left\{ P \in \mathcal{P}^*(C_t^*) : \int m P(dm) \in e + \check{D}_t^\circ \right\}, \quad (8.4.21)$$

such that $\int m P_{t,\cdot}^*(dm) = e$, and the solution of the pricing problem coincides in this case with that without any trading constraints.

Proof. For given trading constraints, the distribution $P \in \mathcal{P}^n(C_t^*)$ belongs to the class of measures $\mathcal{R}_{t,\cdot}^n$ (8.4.13) if and only if³⁸ $\int m^i P(dm) \leq 1$ for $i \in I$ and $\int m^i P(dm) = 1$ for $i \notin I$. Using Remark 8.4.1, consider the optimal conditional multiplier distribution³⁹ $P_{t,\cdot}^* \in \mathcal{R}_{t,\cdot}^n$ and denote $\gamma_{t,\cdot}^i = \int m^i P_{t,\cdot}^*(dm)$. Suppose that $\gamma_{t,\cdot}^i < 1$ for some $i \in I$. Let $\Phi_t^i : C_t^* \rightarrow C_t^*$ be a mapping that “maximizes” the i th component, i.e., the i th component of the vector $\Phi_t^i(m)$ equals β_i , leaving the other components of Φ_t^i unchanged. If the random vector M_t has the conditional distribution $P_{t,\cdot}^*$, we denote by $\Phi_t^i \circ P_{t,\cdot}^*$ the distribution of the random vector $\Phi_t^i(M_t)$. For the trading constraints under study, considering (8.4.19) and the sets C_t^* (8.4.20), the geometric criterion for RNDSAUP for this model, i.e., (8.4.15), takes the following form: $1 < \beta_i^i$ for $i \in I$ and $\alpha_i^i < 1 < \beta_i^i$ for $i \notin I$. The inequalities $\gamma_{t,\cdot}^i < 1 < \beta_i^i$ allow us correctly determine the probability

$$q_{t,\cdot}^i = \frac{\beta_i^i - 1}{\beta_i^i - \gamma_{t,\cdot}^i} \in (0, 1)$$

and define the mixture of distributions

$$\widehat{P}_{t,\cdot}^i = q_{t,\cdot}^i P_{t,\cdot}^* + (1 - q_{t,\cdot}^i) \Phi_t^i \circ P_{t,\cdot}^* \in \mathcal{P}^*(C_t^*),$$

for which $\int m^i \widehat{P}_{t,\cdot}^i(dm) = 1$. Since the mean value of the other components remains unchanged, $\widehat{P}_{t,\cdot}^i \in \mathcal{R}_{t,\cdot}^*$. By the monotonicity assumption, using Proposition 8.4.1, we obtain the inequality

$$\int v_t^*((\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P_{t,\cdot}^*(dm) \leq \int v_t^*((\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) \widehat{P}_{t,\cdot}^i(dm).$$

³⁷Recall that $\mathcal{P}^*(E)$ denotes the class of distributions concentrated on a finite set of points from a set E .

³⁸Note that the maximum in (8.4.7) is taken over the class of multiplier distributions for which the price process will be a supermartingale for each risky asset with index $j \in I$ and a martingale for $j \notin I$. This corresponds to our interpretation of the optimal mixed “market” strategy as a probabilistic scenario of the most unfavorable market behavior.

³⁹See Remark 8.4.2.

It means that the conditional multiplier distribution $\widehat{P}_{t_i}^i \in \mathcal{R}_t^*$ yields the optimal mixed “market” strategy with $\int m^i \widehat{P}_{t_i}^i(dm) = 1$. Repeating this procedure for the distribution from \mathcal{R}_t^* if $\gamma_{t_i}^i < 1$ for some indices $i \in I$, we finally construct the conditional distribution $\widehat{P}_{t_i}^* \in \mathcal{R}_t^*$ with the barycenter $\int m \widehat{P}_{t_i}^*(dm) = e$ that satisfies the inequality

$$\int v_t^*((\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) P_{t_i}^*(dm) \leq \int v_t^*((\bar{x}_{t-1}, \Lambda(m)x_{t-1}) \widehat{P}_{t_i}^*(dm). \quad (8.4.22)$$

Thus, it corresponds to the optimal mixed “market” strategy, i.e., the conditional distribution $\widehat{Q}_{t_i}^* \in \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^*(K_t(x))$ of price increments under the given trading constraints.

Now we consider a model with the same price dynamics parameterization but without trading constraints. In this case, the class of distributions (8.4.8) becomes $\{P \in \mathcal{P}^n(C_t^*) : \int m P(dm) = e\}$. This class is contained in the class $\{P \in \mathcal{P}(C_t^*) : \int m P(dm) \in e + \check{D}_t^\circ\}$, where \check{D}_t° is given by formula (8.4.19). It provides the solution of the pricing problem under the trading constraints considered, by which the maximum in formula (8.4.7) is taken. Therefore, the solution of the pricing problem without trading constraints does not exceed that of the pricing problem with the corresponding trading constraints. However, the conditional distribution $\widehat{P}_{t_i}^*$ maximizing the integral in (8.4.7) and on the class of measures $\{P \in \mathcal{P}(C_t^*) : \int m P(dm) \in e + \check{D}_t^\circ\}$, where \check{D}_t° is given by (8.4.19), belongs to the class $\{P \in \mathcal{P}(C_t^*) : \int m P(dm) = e\}$, and hence maximizes the integral on this narrower class as well.

Thus, the solution of the pricing problem with given trading constraints coincides in this case with that of the problem without trading constraints. \square

Lemma 8.4.2. *If $X \subseteq \mathbb{R}^n$ is a convex compact set and the convex function f is upper semicontinuous and bounded on X . Then for a fixed point $z \in X$, the functional $Q \mapsto \int f dQ$ achieves maximum on the set⁴⁰*

$$E(z) = \left\{ Q \in \mathcal{P}(X) : \int y Q(dy) = z \right\}$$

for some distribution Q^* concentrated at most at $n + 1$ extreme points of X .

Proof. Due to the upper semicontinuity and boundedness of f , the function $Q \mapsto \int f dQ$ is also upper semicontinuous for a weak topology on $\mathcal{P}(X)$; for details, see the Alexandroff theorem. According to Proposition 7.3.3, there exists a distribution Q' concentrated at $k \leq n + 1$ points of X with the representation $Q' = \sum_{i=1}^k q_i \delta_{x^i}$, $q \in S_{k-1}$, $x^1, \dots, x^k \in X$, that maximizes the function $Q \mapsto \int f dQ$ on the (weakly) compact set $E(z)$. Based on Q' , we construct a distribution Q'' concentrated in a finite number of points from $\text{ext}(X)$, where $\text{ext}(\cdot)$ denotes the set of extreme points.

⁴⁰Here, $\mathcal{P}(X)$ denotes the class of all probability measures defined on a Borel σ -algebra of all subsets of X .

By the Steinitz theorem⁴¹ and Carathéodory's theorem [140, Theorem 2.4], for each point x^i , $t = 1, \dots, k$ we can specify $x^{ij} \in \text{ext}(X)$ and $p_{ij} \geq 0$, $j = 1, \dots, n+1$, such that $\sum_{j=1}^{n+1} p_{ij} = 1$, $\sum_{j=1}^{n+1} p_{ij} x^{ij} = x^i$, $t = 1, \dots, k$. Therefore,

$$\begin{aligned} \int f dQ' &= \sum_{i=1}^k q_i f(x^i) = \sum_{i=1}^k q_i f\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_{ij} x^{ij}\right) \leq \\ &\sum_{i=1}^k q_i \sum_{j=1}^{n+1} p_{ij} f(x^{ij}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n+1} q_{ij} f(x^{ij}) = \int f dQ'', \end{aligned}$$

where $q_{ij} = q_i p_{ij} \geq 0$ and $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n+1} q_{ij} = 1$.

Thus, the distribution $Q'' = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n+1} q_{ij} \delta_{x^{ij}}$ also maximizes the functional $Q \mapsto \int f dQ$ on $E(z)$, and Q'' is concentrated in a finite number of points⁴² of $\text{ext}(X)$. However, the functional $Q \mapsto \int f dQ$ on the set of distributions concentrated on $N \subseteq \text{ext}(X)$ with a given mean z , i.e., $\{Q \in \mathcal{P}(N), \int y Q(dy) = z\}$, where $z \in \text{conv}(N)$, achieves maximum on distributions concentrated at most at $n+1$ points; see Proposition 7.3.3). \square

Remark 8.4.7. Let the functions $v_t^*(\cdot)$ (the solutions of equations (BI)) be convex on \mathbb{R}^n . Then:

- 1) The functions $v_t^*(\cdot)$ are continuous [175, Theorem 10.1]. (The same applies to the convex payoff functions $g_t(\cdot)$.) Therefore, condition (USC) holds and, according to Proposition 5.2.2, there exists an equilibrium with the mixed extension $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$; moreover, $\mathcal{P}_t^{\text{opt}}(\cdot) \neq \emptyset$.
- 2) If the maximizer in the expression (8.1.6) is unique, i.e., $\mathcal{P}_t^{\text{opt}}(\cdot) = \{Q_t^*(\cdot)\}$ is a singleton, then by Lemma 8.4.2, the support of this optimal mixed strategy $\text{supp}(Q_t^*(\cdot)) \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot))$ and the number of points in the support is $|\text{supp}(Q_t^*(\cdot))| \leq n+1$. Moreover, under the conditions of Theorem 8.1.1, the mapping $x \mapsto Q_t^*(x)$ is (weakly) continuous, and hence $x \mapsto \text{supp}(Q_t^*(\cdot))$ is a lower semicontinuous set-valued mapping.
- 3) In the case where $K_t(\cdot)$ are convex polyhedra, i.e., can be represented as the convex hull of a finite number of points⁴³, the set of extreme points $\text{ext}(K_t(\cdot))$ is finite and $m = |\text{ext}(K_t(\cdot))| \geq n+1$; so $n+1$ of these m points constitute the support of the optimal mixed strategy.

Proposition 8.4.3. *Let the functions $v_t^*(\cdot)$ be convex on \mathbb{R}^n and the condition of no arbitrage be strengthened to the robust condition of no deterministic arbitrage opportunities RND AO. In addition, assume one of the following conditions:*

⁴¹A finite-dimensional version of the Krein–Milman theorem [140, Theorem 4.2].

⁴²Note that the set of extreme points is closed on the case $n \leq 2$ and may be open in the case $n > 2$.

⁴³According to [175, Theorem 19.1], the polyhedrality of a convex set is equivalent to its finite generatedness; in the case of compactness, such a set coincides with the convex hull of a finite number of points [140, Definition 2.2].

- 1) The set $K_t(\cdot)$ is strictly convex⁴⁴, $t = 1, \dots, N$.
- 2) $K_t(x)$ is a convex polyhedron with a constant number of vertices⁴⁵ independently of x , $t = 1, \dots, N$.
- Then, the set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(\text{ext}(K_t(x))) \neq \emptyset$ is upper semicontinuous.

Proof. If condition 1) of this proposition holds, then by [168, Corollary 9.2] (of Theorems 9.3 and 8.1 therein) the set-valued mapping $x \mapsto \text{cl}(\text{ext}(K_t(\cdot)))$ is h -continuous.⁴⁶ Note that in general, we can only guarantee that this mapping is h -lower semicontinuous⁴⁷; but under condition 2) of this proposition, we obtain h -continuity for $x \mapsto \text{ext}(K_t(x))$ using [137, Lemma 2]. According to Theorem 8.1.1, the set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{P}^{opt}(x)$ is upper semicontinuous. Similar to the end of proving Theorem 8.1.1, using Lemma 8.1.1, we establish the upper semicontinuity of the set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{P}^n(\text{ext}(K_t(x)))$; using [114, Chapter 1, Proposition 2.45], which is applicable because $\mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(\text{ext}(K_t(x))) \neq \emptyset$, we finally arrive at the upper semicontinuity of the set-valued mapping $x \mapsto \mathcal{P}_t^{opt}(x) \cap \mathcal{P}^n(\text{ext}(K_t(x)))$ by Theorem 8.1.1. \square

Proposition 8.4.4. *In the case of no trading constraints, let the condition of no sure arbitrage NDSA hold, the functions $v_t^*(\cdot)$ be convex on \mathbb{R}^n , the functions $g_t(\cdot)$ be convex, and the sets $K_t(\cdot)$ be convex polyhedra, $t = 1, \dots, N$.*

1) If

$$\begin{aligned} \text{for any } A \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot)) \text{ such that } |A| \leq n, \\ 0 \notin \text{ri}(\text{conv}(A)), \end{aligned} \quad (\text{IN})$$

then:

- a) There exists an optimal mixed strategy $Q_t^*(\cdot)$ with zero barycenter and $\text{supp}(Q_t^*(\cdot)) \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot))$ that satisfies the maximum support cardinality condition, i.e., $|\text{supp}(Q_t^*(\cdot))| \equiv n + 1$.
- b) The compact sets $K_t(\cdot)$ are full-dimensional, i.e., $\dim K_t(\cdot) = n$.
- c) The robust condition of no arbitrage opportunities RNDAO holds.
- 2) In addition, if $\mathcal{P}_t^{opt}(\cdot)$ contains a single element, i.e., $\mathcal{P}_t^{opt}(\cdot) = \{Q_t^*(\cdot)\}$ and the compact-valued mappings $K_t(\cdot)$ are continuous, $t = 1, \dots, N$, then the set-valued mapping $x \mapsto \text{supp}(Q_t^*(\cdot))$ is decomposed into n continuous

⁴⁴A set A is said to be strictly convex if for any $x, y \in A$ and $\lambda \in (0, 1)$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \text{int}(A)$. In other words, the boundary of the set A contains no segments (and coincides with the set of its extreme points).

⁴⁵The set of vertices of a convex polyhedron coincides with the set of its extreme points.

⁴⁶For compact-valued mappings, h -continuity and continuity are equivalent; see [114, Theorem 2.68].

⁴⁷For example, see a relevant construction in [168, Example 9.2].

noncoincident branches; moreover, each branch is a vertex of an n -simplex⁴⁸ that is contained in $K_t(\cdot)$ and its interior includes⁴⁹ the point 0.

Proof.

- 1) In the case of no trading constraints, conditions NDSAUP and NDSA are equivalent. Therefore, $\rho_t(\cdot) > -\infty$; moreover, $\rho'_t(\cdot) \geq 0$; see Remark 5.2.7, item 4). According to item 1 of Remark 8.4.7, there exists a game equilibrium, i.e., $\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot)$; moreover, there are optimal mixed market strategies maximizing the expression (5.2.9). Due to Lemma 8.4.2, there exists an optimal mixed strategy $Q_t^*(\cdot)$ with zero mean and a support $\text{supp}(Q_t^*(\cdot)) \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot))$, where $|\text{supp}(Q_t^*(\cdot))| \leq n + 1$. On the other hand, for an optimal mixed strategy with zero mean ($\int y Q_t^*(dy) = 0$), we have $0 \in \text{ri}(\text{conv}(\text{supp}(Q_t^*(\cdot))))$ [by 93, Theorem 1.49]. Therefore, condition (IN) implies $|\text{supp}(Q_t^*(\cdot))| \geq n + 1$. Thus, $|\text{supp}(Q_t^*(\cdot))| = n + 1$ for this mixed strategy due to condition (IN).

We denote $n' = \dim(\text{supp}(Q_t^*(\cdot)))$; since $\text{supp}(Q_t^*(\cdot)) \subseteq K_t(\cdot)$, we have $n' \leq \dim K_t(\cdot) \leq n$. Assume that $n' < n$. According to Carathéodory's theorem, there exist at most $n' + 1$ points x_1, \dots, x_k of $S(x)$ such that $0 \in \text{conv}(\{x_1, \dots, x_k\})$; in addition, there exist a natural number $m \leq k$ and numbers $q_{i_1} > 0, \dots, q_{i_m} > 0, \sum_{j=1}^m q_{i_j} = 1$ such that $\sum_{j=1}^m q_{i_j} x_{i_j} = 0$. Hence, $0 \in \text{ri}(\text{conv}(\{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}))$, which contradicts assumption (IN). Therefore, $n' = n$. However, in this case, we also have $\dim K_t(\cdot) = n$, i.e., $K_t(\cdot)$ are full-dimensional. Since $\dim(\text{supp}(Q_t^*(\cdot))) = \dim K_t(\cdot)$ and $\int y Q_t^*(dy) = 0$, by Proposition 5.3.1 the condition of no arbitrage opportunities NDAO holds, which is equivalent to $0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot))) = \text{ri}(K_t(\cdot))$. Finally, from the full dimension of $K_t(\cdot)$ it follows that $\text{ri}(K_t(\cdot)) = \text{int}(K_t(\cdot))$, which means that $0 \in \text{int}(K_t(\cdot))$. In turn, this inclusion is equivalent to condition RNDAO.

- 2) By Proposition 8.3.3, for the strategy $Q_t^*(\cdot)$ obtained in item 1) of the proof, the mapping $x \mapsto \text{supp}(Q_t^*(\cdot))$ is continuous. Hence, this set-valued mapping can be decomposed into $n+1$ continuous noncoincident branches: $\text{supp}(Q_t^*(\cdot)) = \{y_t^1(\cdot), \dots, y_t^{n+1}(\cdot)\} \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot))$. In addition, $\text{conv}(\{y_t^1(\cdot), \dots, y_t^{n+1}(\cdot)\})$ is a simplex and $0 \in \text{int}(\text{conv}(\{y_t^1(\cdot), \dots, y_t^{n+1}(\cdot)\}))$.

□

Under assumptions 1 of Proposition 8.4.1, we illustrate the behavior of the support of the optimal mixed strategy⁵⁰ Q_t^* , concentrated at the extreme points of $K_t(\cdot)$, using the two-dimensional ($n = 2$) Kolokoltsov model without trading constraints; see the model description at the beginning of this section.

⁴⁸An n -simplex is a solid polyhedron in \mathbb{R}^n with $n + 1$ vertices (its extreme points).

⁴⁹There may be several such n -simplexes.

⁵⁰Now, it will be more convenient to denote the optimal mixed strategy by $Q_{t,\cdot}$, instead of $Q_t(\cdot)$.

Example 8.4.1. The market dynamics are described by

$$\begin{aligned} X_t^1 &= M_t^1 X_{t-1}^1, & M_t^1 &\in [\alpha^1, \beta^1]; \\ X_t^2 &= M_t^2 X_{t-1}^2, & M_t^2 &\in [\alpha^2, \beta^2]. \end{aligned}$$

In this case, $K_t(\cdot)$ is a rectangle; denoting $a^i(x_{t-1}) = x_{t-1}(\alpha^i - 1)$ and $b^i(x_{t-1}) = x_{t-1}(\beta^i - 1)$, $i = 1, 2$, we have

$$K_t(\bar{x}_{t-1} = K_t(x_0, \dots, x_{t-1})) = [a^1(x_{t-1}), b^1(x_{t-1})] \times [a^2(x_{t-1}), b^2(x_{t-1})].$$

Assume that condition RNDAO holds. For the support $S_t(\cdot)$ of a mixed strategy concentrated at extreme points, i.e., the vertices of the rectangle $K_t(\cdot)$, RNDAO eliminates the case $|S_t(\cdot)| = 1$; moreover, if $|S_t(\cdot)| = 2$, it also excludes the possibility that the support $S_t(\cdot)$ consists of the endpoints of any rectangle side. Thus, if the support $S_t(\cdot)$ is concentrated at two points, these points are the endpoints of the diagonal (closed segments connecting opposite vertices of the rectangle $K_t(\cdot)$). Let the diagonal connecting the points $(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))$ and $(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))$ be called positive and the diagonal connecting the points $(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))$ and $(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))$ be called negative.⁵¹ Furthermore, it is easy to check that the point $\mathbf{0} = (0, 0)$ lies on the positive diagonal if and only if

$$\frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \alpha^2} \in (0, 1); \quad (8.4.23)$$

we denote this number by p . The point $\mathbf{0} = (0, 0)$ lies on the negative diagonal if and only if

$$\frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} = \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \in (0, 1); \quad (8.4.24)$$

we denote this number by q . If the point $\mathbf{0} = (0, 0)$ lies at the intersection of the diagonals, i.e., conditions (8.4.23) and (8.4.24) hold simultaneously, then $p = q = 1/2$. In addition, four possible cases arise when $|S_t(\cdot)| = 3$, meaning that (8.4.23) and (8.4.24) both fail:

$$\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \alpha^2} \neq \frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} \neq \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (8.4.25)$$

For this example, it is exactly⁵² condition (IN) from Proposition 8.4.4. Note that the coefficients α^1 , β^1 , α^2 , and β^2 are market model parameters and are not related to payoff function values. Summarizing the various cases, we find that the optimal mixed strategy concentrated at most at three extreme points (vertices) of $K_t(\cdot)$ will be concentrated:

⁵¹For a distribution with a support consisting of two or three extreme points of $K_t(\cdot)$ containing this diagonal, the random variables—the components of a random vector with this distribution—have a positive or negative correlation coefficient, respectively.

⁵²Considering that the point $\mathbf{0} = (0, 0)$ neither is a vertex of the rectangle $K_t(\cdot)$ nor lies on its sides.

- 1) at two points when conditions (8.4.23) and (8.4.24) hold simultaneously, i.e., the point $\mathbf{0} = (0, 0)$ lies at the intersection of the diagonals (two points always lie on one of the diagonals);
- 2) at two or three points if either (8.4.23) or (8.4.24) holds, i.e., the point $\mathbf{0} = (0, 0)$ lies on one of the diagonals (two points always lie on one of the diagonals);
- 3) at three points if both (8.4.23) and (8.4.24) fail, i.e., condition (8.4.25) holds (condition (IN) is valid in this case).

To find the optimal mixed strategy with $S_t(\cdot) \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot))$ and $|S_t(\cdot)| \leq 3$, we need information about the values of the Bellman function $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ at the vertices of the rectangle $K_t(\cdot)$. According to the results of Chapter 7, Sections 7.5 and 7.6, we construct the concave hull of the function $y \mapsto w_t(\cdot, y)$. It suffices to determine the “dominant” diagonal by checking the values that the affine functions defined on the diagonals by the values of the Bellman function $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ at the endpoints take at the intersection point of the diagonals. In other words, we should compare

$$\frac{1}{2} \left[w_t(\cdot, (a^1(\bar{x}_{t-1}), a^2(\bar{x}_{t-1}))) + w_t(\cdot, (b^1(\bar{x}_{t-1}), b^2(\bar{x}_{t-1}))) \right] \quad (8.4.26)$$

(the value for the positive diagonal) and

$$\frac{1}{2} \left[w_t(\cdot, (a^1(\bar{x}_{t-1}), b^2(\bar{x}_{t-1}))) + w_t(\cdot, (b^1(\bar{x}_{t-1}), a^2(\bar{x}_{t-1}))) \right] \quad (8.4.27)$$

(the value for the negative diagonal). When one of the expressions (8.4.26) and (8.4.27) takes a greater value, it corresponds to the dominant diagonal; if the expressions (8.4.26) and (8.4.27) have the same value, the concave hull of the Bellman function is an affine function.

According to the results of the paper [82], a solid polyhedron M_k in \mathbb{R}^n with k vertices ($k \geq n + 1$) can be written as a simplicial decomposition, i.e., the union⁵³ of $k - n$ subsets and n -simplexes⁵⁴ with vertices representing polyhedron vertices so that the interiors of these n -simplexes would be nonintersecting. For our example, there are two such decompositions: the division by the positive diagonal into two 3-simplexes (triangles) or by the negative diagonal into two other 3-simplexes (triangles); accordingly, we call these decompositions positive and negative.

If one of the expressions (8.4.26) and (8.4.27) is strictly greater than the other, then the decomposition corresponding to the dominant diagonal is of interest, and the concave hull is a piecewise affine function on triangles having the dominant diagonal as their common side. According to Sections 7.5 and 7.6, $\rho'_{t-1}(\cdot)$ is defined as the value of the concave hull of the function $y \mapsto w_t(\cdot, y)$ at the point $y = 0$. By Theorem 5.3.1, under 1.2.2, there exists an equilibrium in the class of mixed

⁵³This is the minimum possible number of n -simplexes in a simplicial decomposition.

⁵⁴An n -simplex is a solid polyhedron in \mathbb{R}^n with $n + 1$ vertices.

strategies concentrated in a finite number of points. Since RNDAO implies NDSA, a European option can be treated as a special case of an American option with $g_t(\cdot) \equiv 0$ for $t = 1, \dots, N-1$ and $g_N = g$, where g is a terminal payoff function; see the considerations after Remark 5.2.7. Thus, the positive diagonal dominates in the case

$$\begin{aligned} w_t \left(\cdot, \left(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}) \right) \right) + w_t \left(\cdot, \left(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}) \right) \right) > \\ w_t \left(\cdot, \left(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}) \right) \right) + w_t \left(\cdot, \left(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}) \right) \right). \end{aligned} \quad (8.4.28)$$

If (8.4.23) holds, i.e., the point $\mathbf{0} = (0, 0)$ lies on the positive diagonal, we have

$$Q_{t, \bar{x}_{t-1}}^* = p\delta_{(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))} + (1-p)\delta_{(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))}.$$

If the point $\mathbf{0} = (0, 0)$ belongs to the interior of a triangle with the vertex $(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))$ and the positive diagonal as one side (the upper triangle), which is the case under

$$\frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} > \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \alpha^2},$$

then

$$Q_{t, \bar{x}_{t-1}}^* = p_1\delta_{(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))} + p_2\delta_{(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))} + p_3\delta_{(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))},$$

where

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1 - \alpha^1}{\beta^1 - \alpha^1} > 0, \\ p_2 &= \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \alpha^2} > 0, \\ p_3 &= 1 - p_1 - p_2 > 0. \end{aligned}$$

If the point $\mathbf{0} = (0, 0)$ belongs to the interior of another triangle from this rectangle decomposition (the lower triangle), which is the case under

$$\frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} < \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \alpha^2},$$

then

$$Q_{t, \bar{x}_{t-1}}^* = p'_1\delta_{(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))} + p'_2\delta_{(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))} + p'_3\delta_{(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))},$$

where

$$\begin{aligned} p'_1 &= \frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} > 0, \\ p'_2 &= \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} > 0, \\ p'_3 &= 1 - p'_1 - p'_2 > 0. \end{aligned}$$

On the other hand, the negative diagonal dominates if

$$\begin{aligned} w_t \left(\cdot, \left(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}) \right) \right) + w_t \left(\cdot, \left(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}) \right) \right) < \\ w_t \left(\cdot, \left(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}) \right) \right) + w_t \left(\cdot, \left(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}) \right) \right). \end{aligned} \quad (8.4.29)$$

Similar to the previous case, if (8.4.24) holds, i.e., the point $\mathbf{0} = (0, 0)$ lies on the negative diagonal, then

$$Q_{t, \bar{x}_{t-1}}^* = q\delta_{(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))} + (1 - q)\delta_{(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))}.$$

If

$$\frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} > \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2},$$

then the point $\mathbf{0} = (0, 0)$ belongs to the interior of the triangle with the vertices $(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))$, $(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))$, and $(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))$ (that is the lower triangle); in this case,

$$Q_{t, \bar{x}_{t-1}}^* = q_1\delta_{(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))} + q_2\delta_{(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))} + q_3\delta_{(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))},$$

where

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} > 0, \\ q_2 &= \frac{1 - \alpha^1}{\beta^1 - \alpha^1} > 0, \\ q_3 &= 1 - q_1 - q_2 > 0. \end{aligned}$$

If

$$\frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} < \frac{1 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2},$$

then the point $\mathbf{0} = (0, 0)$ belongs to the interior of the upper triangle (from the negative diagonal) with the vertices $(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))$, $(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))$, and $(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))$; in this case,

$$Q_{t, \bar{x}_{t-1}}^* = q'_1\delta_{(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))} + q'_2\delta_{(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}))} + q'_3\delta_{(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}))},$$

where

$$\begin{aligned} q'_1 &= \frac{\beta^1 - 1}{\beta^1 - \alpha^1} > 0, \\ q'_2 &= \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - \alpha^2} > 0, \\ q'_3 &= 1 - q'_1 - q'_2 > 0. \end{aligned}$$

Finally, consider the case

$$\begin{aligned} w_t \left(\cdot, \left(a^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}) \right) \right) + w_t \left(\cdot, \left(b^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}) \right) \right) = \\ w_t \left(\cdot, \left(a^1(x_{t-1}), b^2(x_{t-1}) \right) \right) + w_t \left(\cdot, \left(b^1(x_{t-1}), a^2(x_{t-1}) \right) \right); \end{aligned} \quad (8.4.30)$$

since the concave hull of the Bellman function is affine, the optimal mixed strategy with the support $S_t(\cdot) \subseteq \text{ext}(K_t(\cdot))$ is not unique: any probability measure with the support described above in cases (1)–(3) and zero mean will be optimal.

Thus, the position of the point $\mathbf{0} = (0, 0)$ plays a key role. If (IN) holds (i.e., (8.4.25)), the point $\mathbf{0}$ will belong to the interior of the intersection of the two triangles, one from the positive rectangle decomposition and the other from the negative one.⁵⁵ If either (8.4.23) or (8.4.24) is satisfied, the optimal distributions will be concentrated at two endpoints of the diagonal containing the point $\mathbf{0} = (0, 0)$, or at the vertices of a triangle with the opposite diagonal as one side. If both (8.4.23) and (8.4.24) hold (i.e., the point $\mathbf{0} = (0, 0)$ lies at the intersection of the diagonals), the optimal distribution will be the one concentrated at the endpoints of a diagonal and assigning probability $1/2$ to them.

From an algebraic point of view, conditions (8.4.28)–(8.4.30) can be interpreted as those⁵⁶ for the strict supermodularity, strict submodularity, and modularity of the function $y \mapsto w_t(\cdot, y)$, respectively, on a lattice⁵⁷ of the four extreme points of $K_t(\cdot)$ with coordinatewise comparison. (For $y = (y^1, y^2)$ and $z = (z^1, z^2)$, the comparison relation $y \leq z$ holds if $y^1 \leq y^2$ and $z^1 \leq z^2$.)

Simple probabilistic reasoning is an alternative to the geometric approach based on concave hull construction. We denote by $\mathfrak{M}_t(\cdot)$ the class of all distributions with zero mean and a support concentrated at two or three extreme points of the rectangle $K_t(\cdot)$. If $Q \in \mathfrak{M}_t(\cdot)$ and $\text{supp}(Q)$ contains the endpoints of the nondominant diagonal, then $\mathfrak{M}_t(\cdot)$ and there exists a distribution Q' with a greater value of the Bellman function. Indeed, let $\pi > 0$ be the minimum probability among the two points on the nondominant diagonal. We denote by y_1 the corresponding endpoint of the diagonal, by y_2 another point of this diagonal, and by y_3 the remaining point of $\text{supp}(Q)$, lying on the dominant diagonal. We represent Q as⁵⁸

$$Q = \pi\delta_{y_1} + \pi\delta_{y_2} + (1 - 2\pi)Q_1,$$

where $\text{supp}(Q_1) \subseteq \{y_2, y_3\}$ due to the choice of π . If y_4 is one more point of the dominant diagonal, the distribution

$$Q' = \pi\delta_{y_3} + \pi\delta_{y_4} + (1 - 2\pi)Q_1$$

will have zero mean and a support $\text{supp}(Q') \subseteq \{y_2, y_3, y_4\}$. Obviously,

$$\int w_t(\cdot, y)Q(dy) - \int w_t(\cdot, y)Q'(dy) = \pi[(w_t(\cdot, y_1) + w_t(\cdot, y_2)) - (w_t(\cdot, y_3) + w_t(\cdot, y_4))] < 0.$$

⁵⁵In this case, there are two possible variants for the support concentrated in three vertices of the triangle.

⁵⁶For example, see [193, Definition 2.3.1].

⁵⁷For example, see the book [34, Chapter 1, Sections 1 and 4].

⁵⁸If $\pi = 1/2$, then as Q_1 we can take an arbitrary distribution with $\text{supp}(Q_1) \subseteq \{y_2, y_3\}$; in the case $\pi < 1/2$, the distribution Q_1 is uniquely determined.

Remark 8.4.8.

- 1) A kind of “degeneration” in this example, the case $|S_t(\cdot)| = 2$, is not the general position case; small “perturbations” in one of the parameters α^1 , β^1 , α^2 , or β^2 leads to the optimal mixed strategy with $|S_t(\cdot)| = 3$.
- 2) The effect observed in Example 8.4.1 when the point 0 lies at the intersection of the diagonals is typical of a dimension $n \geq 2$. It has some connection with the Steinitz theorem [229]: if $A \subseteq \mathbb{R}^n$ and $x \in \text{int}(\text{conv}(A))$, then there exist $2n$ points of A , $\{x_1, \dots, x_{2n}\} \subseteq A$, such that $x \in \text{int}(\text{conv}(\{x_1, \dots, x_{2n}\}))$. In the case $n = 1$, we have $n+1 = 2n$; for $n \geq 2$, $n+1 < 2n$. In Example 8.4.1 with $n = 2$, the point 0 belonging to the interior of the convex hull of four points will not necessarily belong to that of some three of the four points.
- 3) The paper [133] considered the guaranteed superhedging problem for a multiplicative Markovian market model (see the terminology in Section 1.1) without trading constraints. For the European rainbow option, the payoff function $g(\cdot)$ in [133] depends only on the prices of risky assets at the terminal time instant N , i.e.,

$$g(\bar{x}_N) = \psi(x_N) \tag{8.4.31}$$

for some function ψ .

Note that for such an option, as well as for an American option, the payoff functions $g_t(\cdot)$ are represented as

$$g_t(\bar{x}_t) = \varphi_t(x_t), \quad t = 1, \dots, N, \tag{8.4.32}$$

for some functions φ_t , and the random process corresponding to conditional distributions $P(X_t \in A | \bar{X}_t = \bar{x}_t) = Q_{t, \bar{x}_t}^*$, will be Markovian. Kolokoltsov [133] derived explicit formulas for the solutions in the two-dimensional case ($n = 2$) with the payoff function (8.4.31) assuming⁵⁹ its convexity at the terminal time instant and submodularity. In [115], explicit solutions were obtained for a similar problem in the three-dimensional case ($n = 3$) and the payoff function (8.4.31) assuming its convexity and submodularity. Chapter 13 of the book [27], written by V.N. Kolokoltsov, presented the main Theorem 13.2 for the n -dimensional case with the payoff function (8.4.31). Note that the Bellman function preserves submodularity, which holds for several options⁶⁰, e.g., “best of asset or cash,” “call on max,” and “multistrike.” The payoff functions on these options also have form (8.4.31); hence, potentially optimal candidates can be selected among the mixed strategies. A similar problem for submodular functions was solved in [146], but the authors did not mention any of the cited papers on submodularity.

⁵⁹In addition, the payoff function in [133] was supposed monotonic.

⁶⁰See the table below for the payoff functions on these (and other) options.

A particularly simple situation when the functions $v_t^*(\cdot)$ are convex on \mathbb{R}^n arises in the one-dimensional case ($n = 1$). In this case, $K_t(\cdot) = K_t^*(\cdot)$ takes the form $[a_t(\cdot), b_t(\cdot)]$, where $a_t(\cdot) \leq b_t(\cdot)$. The concave hull of a convex function f on a closed interval $[a, b]$ is the affine function coinciding with f at the limits of this interval:

$$f^*(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \quad (8.4.33)$$

Thus, the functional $Q \mapsto \int f dQ$ achieves maximum subject to the constraint $\int y Q(dy) = z \in (a, b)$ for a distribution concentrated on the set $\{a, b\}$ of the limits of the interval $[a, b]$. Apparently, this fact was first reported in 1994 by Dana and Jeanblanc-Picqué; we refer to the second edition [64] of their book.

In the case of the convex payoff functions $v_t^*(\cdot)$ on \mathbb{R}^n and no trading constraints, we easily write the Bellman equations with the optimal market strategy $Q_{t,\cdot}^*$ concentrated at the limits of the segments $K_t(\cdot) = K_t^*(\cdot)$ (see formula (7.6.2)):

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \vee \int w_t(\cdot, y) Q_{t,\cdot}^*(dy), \quad t = N, N-1, \dots, 1. \end{aligned} \quad (8.4.34)$$

The corresponding hedging strategies are easily calculated as well.

Example 8.4.2. Consider the multiplicative model from Example 2.2.2 of Chapter 2 (in the one-dimensional case without trading constraints) under the condition of no deterministic arbitrage opportunities NDAO. Assume that the payoff functions g_t , $t = 1, \dots, N$, are convex. Then, in the most unfavorable scenario (mixed market strategy), the conditional distributions of the price increments ΔX_t are concentrated at the points $x_t(\alpha - 1)$ and $x_t(\beta - 1)$ with probabilities q_- and q_+ given by the system of linear equations

$$\begin{aligned} q_- x_t(\alpha - 1) + q_+ x_t(\beta - 1) &= 0, \\ q_- + q_+ &= 1. \end{aligned}$$

The solution is $q_- = \frac{(1-\alpha)}{(\beta-\alpha)}$ and $q_+ = \frac{(\beta-1)}{(\beta-\alpha)}$. Recall that in this case, condition NDAO is equivalent to $\alpha < 1 < \beta$; hence, q_- and q_+ lie within the interval $(0, 1)$, which corresponds to their probabilistic interpretation. Moreover, the joint distribution of the random variables $M_t = \frac{X_t}{X_{t-1}}$, $t = 1, \dots, N$, is such that they are independent.⁶¹ This is due to the constraints $M_t \in [\alpha, \beta]$ independent of the price history, i.e., the prices evolve in accordance with the multiplicatively independent type.

The Bellman equations (8.4.34) take the form

$$\begin{aligned} v_N^*(x_0, \dots, x_N) &= g_N(x_0, \dots, x_N), \\ v_{t-1}^*(x_0, \dots, x_{t-1}) &= g_{t-1}(x_0, \dots, x_{t-1}) \vee \\ &\quad [q_- v_t^*(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}\alpha) + \\ &\quad q_+ v_t^*(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}\beta)], \end{aligned} \quad (8.4.35)$$

⁶¹In other words, we have the independence of logarithmic increments.

where $t = 1, \dots, N$. Considering 8.4.33, the optimal hedging strategy $h_t(\cdot)$ at a time instant t will be

$$h_t^*(x_0, \dots, x_{t-1}) = \frac{1}{x_{t-1}(\beta - \alpha)} [g_{t-1}(x_0, \dots, x_{t-1}) \vee v_t^*(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}\beta) - g_{t-1}(x_0, \dots, x_{t-1}) \vee v_t^*(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}\alpha)]. \quad (8.4.36)$$

In the case of European options, when $g_1 = \dots = g_{N-1} = 0$ and $g_N = g$ is a convex function, we obtain the difference equations

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= q_- v_t^*(\cdot, x_{t-1}\alpha) + q_+ v_t^*(\cdot, x_{t-1}\beta), \quad t = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (8.4.37)$$

and (8.4.36) is simplified to the formula

$$h_t^*(\cdot) = \frac{1}{x_{t-1}(\beta - \alpha)} [v_t^*(\cdot, x_{t-1}\beta) - v_t^*(\cdot, x_{t-1}\alpha)].$$

In particular, for European options with the payoff function $g(\bar{x}_N) = (x_N - B(\bar{x}_N))_+$ at the terminal time instant N (a call option with the exercise price $B(\bar{x}_t)$ dependent on the price path \bar{x}_t) or $g(\bar{x}_N) = (S(\bar{x}_N) - x_N)_+$ (a put option with the exercise price $S(\bar{x}_t)$ dependent on the price path \bar{x}_t), the convexity of g holds, e.g., for Asian options, lookback options, and plain vanilla options. In the case of Asian options, $B(\bar{x}_N) = S(\bar{x}_N) = \frac{1}{N+1} \sum_{t=0}^N x_t$; for lookback options, $B(\bar{x}_N) = \bigwedge_{t=0}^N x_t$ and $S(\bar{x}_N) = \bigvee_{t=0}^N x_t$; for plain vanilla options, $B(\bar{x}_N)$ and $S(\bar{x}_N)$ are constant.

For Asian options and lookback options, we introduce the notations $A_t = \frac{1}{t+1} \sum_{s=0}^t x_s$, $L_t = \bigwedge_{s=0}^t x_s$, and $N_t = \bigvee_{s=0}^t x_s$. The processes (X_t, A_t) , (X_t, L_t) , and (X_t, N_t) are Markovian, and it suffices to leave only two variables instead of the entire price path in the difference equations (8.4.37) for the Asian option and the lookback option. For example, consider a lookback call option; the difference equations (8.4.37) can be written as

$$v_t^*(x_0, \dots, x_t) = v_t \left(x_t, \bigwedge_{s=0}^t x_s \right),$$

where $v_t, t = N, N-1, \dots$, satisfy the recurrent relations

$$\begin{aligned} v_N(x_N, l_N) &= (x_N - l_N)_+, \\ v_{t-1}(x_{t-1}, l_{t-1}) &= q_- v_t(x_{t-1}\alpha, l_t \wedge x_{t-1}\alpha) + q_+ v_t(x_{t-1}\beta, l_t \wedge x_{t-1}\beta), \\ &t = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

In addition, the price evolution model with the independent variables $M_t, t = 1, \dots, N$, taking the values α and β with the probabilities q_- and q_+ , will coincide with the Cox–Ross–Rubinstein model⁶² if x_0 is fixed and the numbers α and β are

⁶²It is also called the binomial model; see [62].

related by $\alpha\beta = 1$. An advantage of the Cox–Ross–Rubinstein model is that lattice recombination occurs on a logarithmic scale: the random variables $Z_t = \ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) = \sum_{s=1}^t \ln M_s$, $t = 1, \dots, N$, take values on the lattice⁶³ $\{kd, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, where $d = \ln \beta = -\ln \alpha$. This reduces the number of possible values of the variable Z_t from 2^t to $t + 1$. Moreover, Z_t takes the value kd with the probability⁶⁴ $C_t^{(t+k)/2} q_+^{(t+k)/2} q_-^{(t-k)/2}$. In our case, recombination can be achieved by requiring the numbers $\ln \alpha$ and $\ln \beta$ to be rationally commensurable (i.e., their ratio $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ to be a rational number $r = -\frac{n}{m}$, where n and m are coprime natural numbers). (In other words, the fraction $\frac{n}{m}$ must be irreducible.) For the lattice step $d = \frac{\ln \beta}{m} = -\frac{\ln \alpha}{n}$, all values of the random variable Z_t , $t = 0, 1, \dots$ (with infinite time) will lie on the lattice $\{kd, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, and there exists no smaller sublattice on which all possible values of Z_t would lie due to the coprimeness⁶⁵ of n and m . Any real number can be approximated by rational numbers of the form $\frac{n}{m}$ with accuracy not exceeding $\frac{1}{m}$. Therefore, the initial problem with given numbers α and β can be replaced by a close one with α' and β' , where α' and β' will be rationally commensurable.

In numerical algorithms, recombination makes sense for lookback options but is meaningless for Asian options: the exercise price remains on the lattice in the former case but not in the latter case. \square

Remark 8.4.9. In the one-dimensional case, under condition NDAO without trading constraints, the above property (8.4.33) of the convex payoff function has the following economic interpretation for the one-step problem. Buying an option with a convex payoff function can be treated as “buying volatility” because it protects from the most “unfavorable” scenario (the most “volatile” price evolution when the price increments take values at the limits of the corresponding interval constraints). (In any case, if volatility is measured through the standard deviation of price increments, its maximum among all the risk-neutral probabilities will be achieved in this particular case.) On the other hand, buying an option with a concave payoff function can be treated as “selling volatility” (protection against the most “unfavorable” scenario with no price volatility): for the corresponding risk-neutral probabilities, the price increments are zero, i.e., have zero volatility measured as the standard deviation of price increments.

It is possible to present many examples of rainbow options with at least two risky assets⁶⁶ and convex payoff functions. For example, these options include European rainbow options; see Table 8.1.

For these options, we can apply the approach described above.

Of course, there are options whose functions are neither convex nor concave. They can be easily obtained by combining long and short positions on the European call and put options with the same exercise time, e.g., a collar. Binary (or digital) options provide another example of such options and even have a discontinuous

⁶³A lattice forms a discrete additive subgroup of the group \mathbb{R} .

⁶⁴Here, C_n^k stands for the binomial coefficient, the number of k -combinations of n elements.

⁶⁵For example, see [248].

⁶⁶The number of risky assets in such an option is also called the number of colors of the rainbow.

Table 8.1: Examples of European rainbow options with convex payoff functions

Option type	Payoff function
“Best of asset or cash”	$\max(S_1, S_2, \dots, S_n, K)$
“Call on max”	$\max(\max(S_1, S_2, \dots, S_n) - K, 0)$
“Put on min”	$\max(K - \min(S_1, S_2, \dots, S_n), 0)$
“Put 2 and Call 1”	$\max(S_1 - S_2, 0)$
“Multi-strike”	$\max(S_1 - K_1, S_2 - K_2, \dots, S_n - K_n, 0)$
“Pyramid”	$\max(S_1 - K_1 + S_2 - K_2 + \dots + S_n - K_n - K, 0)$
“Madonna”	$\max(\sqrt{(S_1 - K_1)^2 + \dots + (S_n - K_n)^2} - K, 0)$

payoff function. The European rainbow options in Table 8.2 are examples of rainbow options with nonconvex payoff functions.

Table 8.2: Examples of European rainbow options with nonconvex payoff functions

Option type	Payoff function
“Call on min”	$\max(\min(S_1, S_2, \dots, S_n) - K, 0)$
“Put on max”	$\max(K - \max(S_1, S_2, \dots, S_n), 0)$

8.5 Discontinuous Superhedging Price due to Possible Degeneracy of Optimal Mixed Market Strategies under Structural Instability

This section assumes the absence of trading constraints. The results below would have been relevant in Chapter 3 because they show the possibility of a discontinuous superhedging price under the structural instability of the model. However, the methods used here involve analysis of the most unfavorable (optimal) mixed market strategies.

It suffices to consider the one-step model to build an appropriate example. By Theorem 3.1.4, the function v_0^* is upper semicontinuous if K_0 is compact and the set-valued mapping $K_1(\cdot)$ is continuous. However, if condition NDAO holds but condition RNDAO does not, the function v_0^* may be discontinuous; similar behavior of the superhedging price⁶⁷ can also be observed in the probabilistic statement of the superhedging problem.⁶⁸

Example 8.5.1. Indeed, consider the one-step model with two risky assets and no trading constraints. Let $y^{(1)}$ and $y^{(2)}$ be two points on the plane \mathbb{R}^2 such that the line segment with these endpoints, $S = \text{conv}(\{y^{(1)}, y^{(2)}\}) \subseteq \mathbb{R}^2$, contains the point 0

⁶⁷From an economic point of view, the term “superhedging price” is lame. It would be more accurate to speak not of prices but the (minimum) current reserves required to cover a contingent liability on a written option.

⁶⁸In this case, the superhedging price is defined almost surely: it has no continuous version.

in its relative interior, i.e., $0 \in \text{ri}(S)$. We fix a vector⁶⁹ $l \in (\text{lin}(S))^\perp \cap S_1(0)$ and denote by $\bar{H}_l = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle l, y \rangle \geq 0\}$ the closed half-space with the normal vector l .

Letting $\delta(x) = \rho(x, \bar{H}_l) \wedge 1$ and $\epsilon(x) = (\rho(x, \bar{H}_l))^2 \wedge 1$, we choose the compact-valued mapping

$$K_1(x) = \{z^{(0)}(x), z^{(1)}(x), z^{(2)}(x)\},$$

where

$$z^{(0)}(x) = -\delta(x)l, \quad z^{(1)}(x) = y^{(1)} + \epsilon(x)l, \quad z^{(2)}(x) = y^{(2)} + \epsilon(x)l.$$

Note that the functions $z^{(0)}(\cdot)$, $z^{(1)}(\cdot)$, and $z^{(2)}(\cdot)$ are continuous⁷⁰ on \mathbb{R}^2 and constant on $\bar{H}_l : z^{(0)}(x) \equiv 0, z^{(1)}(x) \equiv y^{(1)},$ and $z^{(2)}(x) \equiv y^{(2)}$. The set-valued mapping $K_1(\cdot)$ is continuous since, by [114, Chapter 1, Theorem 1.15], we have the inequalities

$$\begin{aligned} h_\rho(K_t(x'), K_t(x)) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |\rho(y, K_t(x')) - \rho(y, K_t(x))| = \\ & \sup_{y \in \mathbb{R}^2} \left[\bigwedge_{i=1}^3 \|y - z^{(i)}(x')\| - \bigwedge_{i=1}^3 \|y - z^{(i)}(x)\| \right] \leq \\ & \sup_{y \in \mathbb{R}^2} \bigvee_{i=1}^3 \left| \|y - z^{(i)}(x')\| - \|y - z^{(i)}(x)\| \right| \leq \bigvee_{i=1}^3 \|z^{(i)}(x') - z^{(i)}(x)\| = \\ & |\delta(x') - \delta(x)| \vee |\epsilon(x') - \epsilon(x)|. \end{aligned}$$

Note that for $x \notin \bar{H}_l$, the set $\text{conv}(K_1(x))$ is a triangle with the point 0 in its interior. If $x \in \bar{H}_l$, then $\text{conv}(K_1(x)) \equiv S$ and $0 \in \text{ri}(S)$; according to the Jacod–Shiryaev geometric criterion, condition NDAO holds but condition RNDAO does not (being violated on S).

We choose as K_0 a convex compact set whose interior $\text{int}(K_0)$ has a nonempty intersection with the half-space \bar{H}_l and its complement (an open half-space). To ensure positive prices, the point $y^{(1)}$ must be placed in the open quadrant $(0, +\infty)^n$. (Obviously, in this case, K_0 can be chosen appropriately.)

Let $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be a convex nonnegative function (hence continuous) that satisfies the inequality

$$q_1 f(x, y^{(1)}) + q_2 f(x, y^{(2)}) > f(x, 0) \tag{8.5.1}$$

for $q_1 > 0, q_2 > 0, q_1 + q_2 = 1, q_1 y^{(1)} + q_2 y^{(2)} = 0$, and for all $x \in \mathbb{R}^2$. We define the (convex) payoff function $g_1 = g$ by

$$g(x_0, x_1) = f(x_0, x_1 - x_0). \tag{8.5.2}$$

The optimal mixed strategy $Q_1^*(x, \cdot)$ is concentrated at three points of $K_1(x)$ if $x \notin \bar{H}_l$ and at the two extreme points $y^{(1)}, y^{(2)}$ of the line segment $\text{conv}(K_1(x)) = S$

⁶⁹There are only two possible choices of l .

⁷⁰For a closed set A , the function $x \mapsto \rho(x, A)$ has the Lipschitz property with constant 1; for example, see [168, Lemma 5.1].

if $x \in \bar{H}_l$. (For this strategy, the right-hand of (7.3.20) achieves the maximum $v_0^*(x)$.) As we have already seen, the risk-neutrality condition for the optimal mixed strategies, $\int y Q_1^*(x, dy) = 0$, implies $q_0^*(x) = Q_1^*(x, \{0\}) > 0$ and $q_0^*(x)\epsilon(x) - (1 - q_0^*(x))\delta(x) = 0$ for $x \notin \bar{H}_l$; consequently, $q_0^*(x) = \frac{1}{1+\epsilon(x)/\delta(x)}$ and $v_0^*(x) = \int f(x, y) Q_1^*(x, dy) \rightarrow f(x, 0)$ as $\rho(x, \bar{H}_l) \rightarrow 0$, $x \in K_0$, $x \notin \bar{H}_l$. On the other hand, for $x \in \bar{H}_l$, the optimal mixed strategy is constant: $Q_1^*(x, \cdot) = q_1^*\delta_{y^{(1)}} + q_2^*\delta_{y^{(2)}}$, where q_1^* and q_2^* are positive and uniquely determined from the risk-neutrality condition. Therefore,

$$v_0^*(x) = \int f(x, y) Q^*(x, dy) = q_1^*f(x, y^{(1)}) + q_2^*f(x, y^{(2)}) > f(x, 0), \quad (8.5.3)$$

meaning that the function v_0^* is discontinuous on $K_0 \cap \{y \in \mathbb{R}^n : \langle l, y \rangle = 0\}$.

Next, we construct a related probabilistic model, choosing a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ as follows. The sample space Ω is the compact set $B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ (all feasible paths) equipped with the σ -algebra of all Borel subsets of Ω . The distribution $P = P_{X_0}$ of the random initial price vector X_0 and the transition kernel Q , where $Q_1(x, \cdot)$ is interpreted as a conditional distribution of the random price increment vector $X_1 - X_0 = \Delta X_1$ given $X_0 = x$, satisfy the consistency condition

$$\text{supp}(P) = K_0, \quad \text{supp}(Q_1(x, \cdot)) = K_1(x), \quad x \in B_0.$$

(This condition is a relation between stochastic and deterministic models.) The measure \mathbb{P} can be interpreted as the joint distribution⁷¹ of $X_0, \Delta X_1$ that corresponds to the pair P, Q .

Any equivalent martingale measure $\mathbb{P}' \sim \mathbb{P}$ is defined by $P' \sim P$ and the kernel Q' representing the conditional distribution of price increments ΔX_1 given $X_0 = x$:

$$Q'(x, \cdot) = q^{(0)}(x)\delta_{z^{(0)}}(x) + q^{(1)}(x)\delta_{z^{(1)}}(x) + q^{(2)}(x)\delta_{z^{(2)}}(x),$$

where $q^{(i)}(x) > 0$, $i = 1, 2, 3$, P -almost surely. (Without loss of generality, we can assume positivity for all $x \in K_0$.) For $x \notin \bar{H}_l$, the probabilities $q^{(i)}(x) > 0$, $i = 1, 2, 3$, are uniquely determined by the martingale property and $Q'(x, \cdot) = Q_1^*(x, \cdot)$; for $x \in \bar{H}_l$, we have a family of transition kernels⁷² parametrized by a (measurable) function $p : \bar{H}_l \rightarrow (0, 1)$ as follows:

$$Q'(x, \cdot) = p(x)\delta_0 + (1 - p(x))(q_1^*\delta_{y^{(1)}} + q_2^*\delta_{y^{(2)}}) = p(x)\delta_0 + (1 - p(x))Q_1^*(x, \cdot), \quad (8.5.4)$$

where the probabilities $q_1^* > 0$ and $q_2^* > 0$ are uniquely determined from the equations $q_1^* + q_2^* = 1$ and $q_1^*y^{(1)} + q_2^*y^{(2)} = 0$. Consider the payoff function g

⁷¹We describe the probability \mathbb{P} in the Ionescu Tulcea style, referring here to the theorem from [118] instead of Fubini's theorem. (Although the former theorem concerns countable products of measurable spaces, it holds for finite products as well.) This description has become conventional in publications on the robust approach to superhedging since [41].

⁷²Therefore, this example refers to incomplete markets [121, Theorem 6].

defined by (8.5.2), denoting by $v(x)$ the premium given $X_0 = x$. It is calculated using the standard probabilistic approach based on the constructed probability space. Recall that $v(x)$ equals the essential supremum over the set of equivalent martingale measures for the conditional expectation of $g(X_0, X_1)$ given $X_0 = x$, where g is defined by (8.5.2); for example, see [93, Chapter 7]. To find this value, we need to consider only the case $x \in \tilde{H}_l$ and maximize, according to (8.5.4), the expression

$$p(x)f(0) + (1 - p(x)) \int f(y)Q_1^*(x, dy) = \\ p(x)f(0) + (1 - p(x)) [q_1^*f(x, y^{(1)}) + q_2^*f(x, y^{(2)})].$$

In view of (8.5.1), $p(x)$ should be chosen closer to zero. Using (8.5.3), we finally conclude that $v(x) = v^*(x)$ for almost all x with respect to the measure $P = P_{X_0}$, and the function v has no continuous version.

Remark 8.5.1. As emphasized, the proposition about the continuous superhedging price (as a function of the price history) is not valid without strengthening the assumptions of [51, Section 3.2, Proposition 3.7]. Using our terminology, we equivalently reformulate this proposition as follows. In [51], the initial price was assumed fixed: $X_0 = x_0$. We adopt a slightly more general statement: the initial price takes values in some compact set $F_0 = K_0$. Let us denote

$$F_t(x) = x + K_t(x), \quad x \in B_{t-1}, \quad t = 1, \dots, N. \quad (8.5.5)$$

Consider a family of set-valued mappings $F_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$ and a family \mathcal{P}_t of stochastic kernels P_t , $t = 1, \dots, N$. A measure $P_t(\bar{x}_{t-1}, \cdot)$ is interpreted as a conditional distribution of X_t given a price history $\bar{X}_{t-1} = \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}$. A measure P_0 is interpreted as a (marginal) distribution of X_0 . The corresponding probability \mathbb{P} can be defined using the Ionescu Tulcea construction. We say that the consistency condition (a relation between stochastic and deterministic models) holds if

$$\text{supp}(P_t(x, \cdot)) = F_t(x), \quad x \in B_{t-1}, \quad t = 1, \dots, N \quad \text{and} \quad \text{supp}(P_0) = F_0. \quad (8.5.6)$$

The assumptions of [51, Proposition 3.7] are the following:

- 1° The set-valued mappings $F_t(\cdot)$ are compact-valued and uniformly⁷³ continuous.
- 2° The payoff function g on a European option is continuous.
- 3° The no quasi-sure arbitrage condition⁷⁴ holds with respect to the family $\mathcal{P}_t, t = 1, \dots, N$, which consists of all the kernels satisfying the consistency condition (8.5.6).

According to [51, Proposition 3.7], under assumptions 1°–3°, we have:

⁷³The *uniform* continuity of these mappings is a redundant assumption. In fact, it is used only for the arguments from the set of feasible paths B_{t-1} , which is compact.

⁷⁴In the case under consideration, this condition is equivalent to NDAO.

- a) The quasi-sure superhedging price V_t , $t = 0, \dots, N$, coincides with the almost sure superhedging price.
- b) The functions $V_t = v_t(\bar{X}_t)$, $t = 1, \dots, N$, are continuous.⁷⁵

Our Example 8.5.1 clarifies the origin of this mistake, showing that NDAO is still insufficient for the continuous superhedging price. On the other hand, in the case of no trading constraints, assumption 1° can be strengthened to condition RNDAO (structural stability) with supposing also that the (potential) payoff functions g_t on an American option⁷⁶ and the set-valued mappings $K_t(\cdot)$ are continuous⁷⁷ for $t = 1, \dots, N$. Then by Theorem 3.2.2 (also, by Theorem 4.2.1 and Proposition 4.2.2, constructively proved with estimating the modulus of continuity), the solutions v_t^* of the Bellman–Isaacs equations (BI) are continuous for $t = 1, \dots, N$.

Under the same assumptions ensuring the continuity of v_t^* , $t = 1, \dots, N$, the solutions v_t^* of equations (BI) coincide with the superhedging price for an American option in the standard probabilistic model satisfying the consistency condition 8.5.6; see Theorem 9.2.1. As a consequence,⁷⁸ the superhedging price in the standard probabilistic model admits a continuous version. Note that [51, Proposition 3.8] is valid since RNDAO holds.

In the erratum [50] to the paper [51], the authors proposed an additional assumption to [51, Proposition 3.7] concerning the set-valued mapping $L_t(\cdot) = \text{span}(K_t(\cdot))$ to obtain the continuous superhedging price as a function of the price history under condition NDAO. According to this assumption,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} L(x_k) \subseteq L(x) \text{ as } x_k \rightarrow x, \quad (8.5.7)$$

where the upper limit is understood in the Kuratowski sense. Note that in metric spaces, assumption (8.5.7) is equivalent to the closedness of the set-valued mapping⁷⁹ $L_t(\cdot)$.

We reformulate this result in the current terms and notations.

Theorem 8.5.1 (Carassus–Oblój–Wiesel). *Suppose that:*

- 1° *The compact-valued mappings $K_t(\cdot)$ are continuous; the initial price belongs to a compact set K_0 .*

⁷⁵This is a verbal expression from [51]; it would be more correct to say that the function $v_t(\cdot)$ admits a continuous version.

⁷⁶In particular, a European option can be considered a special case of an American option by letting $g_t \equiv 0$ for $t = 1, \dots, N$. For this, we just need condition NDSA, which follows from NDAO (and by far from RNDAO).

⁷⁷Continuity holds simultaneously for the set-valued mappings $K_t(\cdot)$ and $F_t(\cdot)$ related by (8.5.5). Recall that for compact-valued mappings, continuity is equivalent to h -continuity (i.e., continuity with respect to the Pompeiu–Hausdorff measure [114, Chapter 1, Theorem 2.68]).

⁷⁸Compared to [51, Proposition 3.7], our proof is longer and much more constructive.

⁷⁹This means that the graph of the set-valued mapping is closed.

2° The payoff function $g(\cdot)$ on a European option is continuous.

3° There are no deterministic arbitrage opportunities, i.e., condition NDAO holds.

4° The set-valued mapping $\text{span}(K_t(\cdot))$ is closed.

Then the superhedging prices $v_t^*(\cdot)$, $t = 0, \dots, N$, of the European option are continuous.

Remark 8.5.2. Obviously, assumptions 1°–3° are valid in Example 8.5.1 (with a discontinuous superhedging price) but assumption 4° fails.

We claim that Theorem 8.5.1 is a corollary of Theorem 3.2.2 about the continuous solutions of the Bellman–Isaacs equations for the market model with trading constraints. It suffices to consider a new model with the “naturally imposed” trading constraints $D_t(\cdot) = \text{span}(K_t(\cdot))$, $t = 1, \dots, N$. We call them naturally imposed because a better hedging result cannot be obtained through hedging strategies outside the sets $D_t(\cdot)$.

In the remainder of this section, let NDAO hold. Due to the Jacod–Shiryayev geometric criterion (2.2.7) for NDAO, the affine hull of $K_t(\cdot)$ coincides with its linear hull $\text{span}(K_t(\cdot))$. We denote $L_t(\cdot) = \text{span}(K_t(\cdot))$. If the dimension $\dim(L_t(\cdot))$ is less than n , consider the following representation of $h \in \mathbb{R}^n$: $h = h' + h''$, where $h' \in L_t(\cdot)$, $h'' \in L_t^\perp(\cdot)$, and $L_t^\perp(\cdot)$ is the orthogonal complement of $L_t(\cdot)$. Then for $h \in \mathbb{R}^n$ and $y \in \text{conv}(K_t(\cdot))$, we obtain⁸⁰ $hy = h'y$, so the problem statement with the naturally imposed trading constraints $D_t(\cdot) \equiv L_t(\cdot)$ has the same solution as equations (BI) without trading constraints.

As a corollary of Theorem 3.2.2, we establish a result on American options⁸¹ similar to Theorem 8.5.1. (This result will easily lead to Theorem 8.5.1.) For this purpose, we need a simple assertion as follows.

Lemma 8.5.1. *The lower semicontinuity of a set-valued mapping $F(\cdot)$ defined on a Hausdorff topological space with non-empty values in a topological vector space implies the lower semicontinuity of $\text{span } F(\cdot)$.*

Proof. Consider a net $x_\alpha \rightarrow x$ and a vector $z \in \text{span } F(x)$, therefore representable as the linear combination $\sum_{i=1}^k \lambda_i y^i$, where $y^i \in F(x)$. By [114, Chapter 1, Proposition 2.6, item (e)], there exist nets $y_\alpha^i \in F(x_\alpha)$ such that $y_\alpha^i \rightarrow y^i$, for $i = 1, \dots, k$. Thus, the net $z_\alpha = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_\alpha^i \in \text{span } F(x_\alpha)$ converges to z . The desired result is immediate from the proposition cited above. \square

Theorem 8.5.2. *Let assumptions 1°, 3°, and 4° of Theorem 8.5.1 be satisfied. Also, suppose that*

⁸⁰Recall that hy denotes the scalar product.

⁸¹According to this theorem, the superhedging price of an American option is continuous under the following sufficient conditions: the compact-valued mappings $K_t(\cdot)$ and the (potential) payoff functions $g_t(\cdot)$ are continuous, the trading constraints $D_t(\cdot)$ are closed and lower semicontinuous, and the robust condition of no deterministic sure arbitrage with unbounded profit RNSAUP holds.

2°a) The (potential) payoff functions $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, on an American option are continuous.

Then the superhedging prices $v_t^*(\cdot)$, $t = 0, \dots, N$, of the American option are continuous.

Proof. Consider a new model with the naturally imposed trading constraints $D_t(\cdot) = L_t(\cdot)$. Due to assumption 4°, the set-valued mappings $D_t(\cdot)$ are closed, whereas by assumption 1° and Lemma 8.5.1 they are lower semicontinuous. According to Remark 2.3.1, for the conic trading constraints $D_t(\cdot)$, the barrier cone $\text{bar}(D_t(\cdot))$ coincides with the polar cone $D_t^\circ(\cdot)$; in our case, this cone is $L_t^\perp(\cdot)$, the orthogonal complement of $L_t(\cdot)$. Condition NDAO for the initial system implies condition RNDSAUP for the new system with the naturally imposed trading constraints. It can be verified directly using the geometric criterion (2.4.1), being especially clear from the alternative geometric criterion of RNDSAUP, proved in Theorem 2.4.2. (In the latter criterion, the transversal intersection of $\text{ri}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$ with $\text{ri}(\text{bar}(D_t(\cdot)))$ is obvious.)

Thus, we have verified all the assumptions of Theorem 3.2.2 for the new model with the naturally imposed trading constraints. \square

Remark 8.5.3. To be honest, the structural stability of the new model is of formal, artificial character, simply needed to apply a mathematical result about the continuous superhedging price under condition RNDSAUP. In fact, according to our interpretation, the sets $K_t(\cdot)$ describe the price evolution uncertainty, which can be determined by both objective information (e.g., statistics) and the analyst's subjective opinion, so these sets cannot be exactly defined. At the same time, according to our interpretation, trading constraints should be specified precisely based on a priori rules. In the new model, the naturally imposed trading constraints are defined through $K_t(\cdot)$ and, in general, vary with $K_t(\cdot)$. Hence, they cannot be known exactly, except when the mappings $x \mapsto \text{span}(K_t(x))$ are constant. In this case, if the dimension of $\text{span } K_t(\cdot)$ is less than the number n of risky assets, we have redundant assets in the model; after their elimination, condition RNDAO will hold, which can be interpreted as the "true" structural stability.

According to Remark 5.2.8, under condition NDSA (which follows from condition NDAO), the superhedging problem for a European option is reduced to the corresponding problem for an American option by simply letting $g_t(\cdot) \equiv 0$ for $t = 1, \dots, N - 1$ and $g_N(\cdot) = g(\cdot)$. Thus, Theorem 8.5.1 is a direct corollary of Theorem 8.5.2, which is, in turn, a simple corollary of Theorem 3.2.2.

We need several elementary results to establish some properties concerning the dimension of $\text{span}(K_t(\cdot))$.

Lemma 8.5.2. *Let E be the k -dimensional Euclidean space with an orthonormal basis y^1, \dots, y^k . If*

$$\sum_{i=1}^k \|\tilde{y}^i - y^i\| < 1$$

for some vectors $\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^k$ from E , where $\|\cdot\|$ denotes the Euclidean norm with the scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$, i.e., $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, then these vectors $\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^k$ are linearly independent.

Proof. Assume on the contrary that the vectors $\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^k$ are linearly dependent. Then there exist a vector $z \in E$, $z \neq 0$, such that $\langle z, \tilde{y}^i \rangle = 0$, $i = 1, \dots, k$. By the Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz inequality,

$$\|\tilde{y}^i - y^i\| \|z\| \geq \langle \tilde{y}^i - y^i, z \rangle^2 = \langle y^i, z \rangle^2, \quad i = 1, \dots, k.$$

Summing these inequalities and dividing the result by $\|z\| \neq 0$, we obtain

$$\sum_{i=1}^k \|\tilde{y}^i - y^i\| \geq 1,$$

which is a contradiction. \square

Lemma 8.5.3. *Let $L(\cdot)$ be a lower semicontinuous set-valued mapping from a Hausdorff topological space into linear subspaces of \mathbb{R}^n . Then the function $x \mapsto \dim(L(x))$ is lower semicontinuous, where $\dim(L)$ stands for the dimension of L .*

Proof. Consider a net $x_\alpha \rightarrow x$. We have to show the inequality

$$\liminf_{x_\alpha \rightarrow x} \dim(L(x_\alpha)) \geq \dim(L(x)). \quad (8.5.8)$$

If $\dim(L(x)) = 0$, this is trivial. Let $\dim(L(x)) = k \geq 1$; then there exist k linear independent vectors y^1, \dots, y^k belonging to $L(x)$. Without loss of generality, assume that they form an orthonormal basis of $L(x)$. Due to the lower semicontinuity of the set-valued mapping L , by [114, Chapter 1, Proposition 2.6, item (e)], there exist nets $y_\alpha^i \in L(x_\alpha)$ such that $y_\alpha^i \rightarrow y^i$, $i = 1, \dots, k$. According to 8.5.2, there exists an α^* such that the vectors y_α^i , $i = 1, \dots, k$, are linearly independent for all $\alpha \succeq \alpha^*$. Therefore, $\dim(L(x_\alpha)) \geq k$ for those α , and (8.5.8) holds. \square

Lemma 8.5.4. *Let $L(\cdot)$ be a set-valued mapping from a Hausdorff topological space into linear subspaces of \mathbb{R}^n . Then the function $x \mapsto \dim(L(x))$ is upper semicontinuous.*

Proof. Consider a net $x_\alpha \rightarrow x$. We have to show the inequality

$$\limsup_{x_\alpha \rightarrow x} \dim(L(x_\alpha)) \leq \dim(L(x)). \quad (8.5.9)$$

We denote $d = \limsup_{x_\alpha \rightarrow x} \dim(L(x_\alpha)) \leq n$. There exists α^* such that $\dim(L(x_\alpha)) \leq d$ for all $\alpha \succeq \alpha^*$ and $\dim(L(x_{\alpha_\beta})) = d$ for some subnet x_{α_β} . Let $y_\beta^1, \dots, y_\beta^d$ be an orthonormal basis in $L(x_{\alpha_\beta})$. We fix an orthonormal basis e^1, \dots, e^n in \mathbb{R}^n . Then there exists an orthogonal transformation $U_\beta \in O(n)$, where $O(n)$ denotes an orthogonal group of dimension n , such that $y_\beta^i = U_\beta e^i$, $i = 1, \dots, d$. As $O(n)$ is compact, there exists a subnet $U_{\beta_\gamma} \rightarrow W \in O(n)$; in particular, $y_{\beta_\gamma}^i \rightarrow W e^i$, $i = 1, \dots, d$. Since the set-valued mapping $L(\cdot)$ is a closed, we have $W e^i \in L(x)$, $i = 1, \dots, d$, and this vector system is an orthonormal basis in $L(x)$. Consequently, $\dim(L(\cdot)) \geq d$, i.e., inequality (8.5.9) holds. \square

Proposition 8.5.1. *Let assumptions 1° and 4° concerning $K_t(\cdot)$ be satisfied, $t = 1, \dots, N$. Then $\dim(\text{span}(K_t(\cdot)))$ is constant on each connected component of the set of feasible paths B_{t-1} , $t = 1, \dots, N$.*

Proof. On the one hand, condition 4° implies the upper semicontinuity of the function $x \mapsto \dim(\text{span}(K_t(x)))$; see Lemma 8.5.4. On the other, by Lemmas 8.5.1 and 8.5.3, condition 1° implies its lower semicontinuity. Therefore, the function $x \mapsto \dim(\text{span}(K_t(x)))$ is continuous. Since the continuous image of a connected set is connected, the function $\dim(\text{span}(K_t(\cdot)))$ is constant on each connected component of the set B_{t-1} . \square

Remark 8.5.4. 1) In fact, the compactness of the sets $K_t(x)$, $x \in B_{t-1}$, is not needed in Proposition 8.5.1.

- 2) According to Proposition 3.1.1, for upper semicontinuous compact-valued mappings $K_t(\cdot)$, the set of feasible paths B_t is compact. Hence, each component of a point $x \in B_t$ coincides with its quasi-component; see [84, Theorem 6.1.22].

Chapter 9. The Relationship between the Deterministic and Probabilistic Problem Statements without Trading Constraints

This chapter explores the relationship between the deterministic and probabilistic approaches to the superhedging problem, for models satisfying the consistency condition: the supports of conditional distributions of price increments given a known price history coincide with the compact-valued mapping describing deterministic price dynamics. In the case of no trading constraints, under very general conditions, we show that the “probabilistic” Bellman function does not exceed the “deterministic” counterpart. Sufficient conditions for their coincidence are provided in Theorem 9.2.1 under the assumed continuity of the solutions of equations (BI) (see the conditions formulated in Chapters 3 and 4, including the structural stability of the model).

Also, it is proved that the probabilistic models close in the sense of various probability metrics, including the Prokhorov metric, preserve structural stability.

The main results of this chapter were published in [206] and [215].

9.1 A Constructive Method to Design a Parametric Family of Equivalent Measures with a Given Barycenter

The idea of this construction goes back to the paper [176]. Also, we refer to [189, vol. 2, Chapter V, §2d].

Let Y be a random vector in the space \mathbb{R}^n , i.e., $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, with a distribution $P_Y = P$ on $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. We denote by

$$M_Y(\theta) = \mathbb{E}e^{\theta Y} = \int e^{\theta y} P_Y(dy), \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \quad (9.1.1)$$

the generating function of moments, which takes values on $(0, +\infty]$. Let

$$\Theta = \{\theta : M_Y(\theta) < \infty\},$$

assuming that the interior of Θ is non-empty:

$$\text{int}(\Theta) \neq \emptyset. \quad (9.1.2)$$

In addition, we denote by

$$K_Y(\theta) = \ln M_Y(\theta) \quad (9.1.3)$$

the generating function of cumulants¹ and by P^θ a distribution that has the following density with respect to P :

$$\frac{dP^\theta}{dP} = \frac{e^{\theta y}}{M_Y(\theta)} > 0, \theta \in \Theta. \quad (9.1.4)$$

The measure P^θ is said to be obtained from P by the Esscher transform [85]. Since the measures P^θ and P are equivalent, they have the same support. Suppose also that the distribution P satisfies the nondegeneracy condition

$$\text{int}(\text{conv}(\text{supp}(P))) \neq \emptyset, \quad (9.1.5)$$

where $\text{conv}(A)$ is the convex hull of a set A and $\text{supp}(P)$ is the topological support of the distribution P .

Note that:

- 1) The set Θ is convex.
- 2) When extended to the complex plane \mathbb{C} , the generating function $M_Y(\theta)$ is an analytic function in the domain

$$\Theta' = \{\theta \in \mathbb{C} : \text{re}(\theta) \in \text{int}(\Theta)\},$$

where $\text{re}(z)$ stands for the real part of a complex number z .

- 3) The derivatives of the function $M_Y(\theta)$ with respect to the parameters $\theta_1, \dots, \theta_n$ can be calculated by (consecutive) differentiation under the integral sign, i.e.,

$$\frac{\partial^{k_1, \dots, k_n} M_Y}{\partial \theta^{k_1}, \dots, \partial \theta^{k_n}}(\theta) = M_Y(\theta) \int y^{k_1} \dots y^{k_n} P^\theta(dy) = \mathbb{E}[Y_1^{k_1} \dots Y_n^{k_n} e^{\theta Y}]; \quad (9.1.6)$$

for example², see [53, Lemma 18.1]

As is easily checked,

$$\nabla K_Y(\theta) = \int y P^\theta(dy) \quad (9.1.7)$$

¹They are also called semi-invariants, mixed in the multidimensional case.

²Several results below are close to those presented in §18 of the cited book (about exponential families of probability distributions). However, the peculiarities of presentation, terminology, and notation complicate referring to this source directly.

for $\theta \in \Theta$, i.e., the right-hand side of (9.1.7) is the mean for the distribution P^θ , where ∇ denotes the gradient and

$$\nabla^2 K_Y(\theta) = \int \left[y - \int y P^\theta(dy) \right] \left[y - \int y P^\theta(dy) \right]^T P^\theta(dy). \quad (9.1.8)$$

In other words, the right-hand side of (9.1.8) is the covariance matrix for the distribution P^θ , where ∇^2 denotes the Hessian. The nonsingularity of the covariance matrix (9.1.8) for some $\theta \in \Theta$ (and hence for any $\theta \in \Theta$) is equivalent to condition (9.1.5). It follows then from (9.1.5) that the function $\theta \mapsto K_Y(\theta)$ is strictly convex on $\text{int}(\Theta)$. Now let us assume

$$\Theta = \mathbb{R}^n, \quad (9.1.9)$$

which strengthens (9.1.2). Consider the Cramer function³

$$I(y) = K_Y^*(y) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^n} [\theta y - K_Y(\theta)], \quad (9.1.10)$$

which is conjugate to the function $K_Y(\theta)$ (the Fenchel transform). Thereby, all conditions of [175, Theorem 26.5] are satisfied, and the functions K_Y^* and K_Y are related by the Legendre transform:

$$K_Y^*(y) = (\nabla K_Y)^{-1}(y)y - K_Y(\nabla K_Y)^{-1}(y), \quad (9.1.11)$$

where $(\nabla K_Y)^{-1}$ is the inverse of the function ∇K_Y . Moreover, ∇K_Y homeomorphically maps $\text{int}(\text{dom}(K_Y)) = \mathbb{R}^n$ into $\text{int}(\text{dom}(K_Y^*))$ and

$$\nabla K_Y^* = (\nabla K_Y)^{-1}, \quad (9.1.12)$$

where $\text{dom}(f) = \{x : f(x) < \infty\}$ is the effective domain of a convex function f . Thus, the maximum in (9.1.10) is achieved at the point $\theta^* = (\nabla f)^{-1}(y)$.

Lemma 9.1.1. *Under assumption (9.1.9),*

$$\text{int}(\text{conv}(\text{supp}(P))) \subseteq \text{dom}(K_Y^*) \subseteq \text{cl}(\text{conv}(\text{supp}(P))). \quad (9.1.13)$$

Proof. We denote $h = \frac{1}{\|\theta\|}\theta$ for $\theta \neq 0$ and $\lambda = \|\theta\|$. Then $\theta = \lambda h$, h lies on the unit sphere centered at the origin, $S_1(0)$. Since $0y - K(0) = 0$,

$$0 \leq \sup_{\theta \in B_r(0)} [\theta y - K_Y(\theta)] < \infty,$$

and we investigate the finiteness of the supremum in (9.1.10) for $\|\theta\| \geq r$ and sufficiently large numbers r .

$$\sup_{\theta: \|\theta\| \geq r} [\theta y - K_Y(\theta)] = \sup_{h \in S_1(0)} \sup_{\lambda \geq r} \lambda \left[h y - \frac{1}{\lambda} K(\lambda h) \right]. \quad (9.1.14)$$

³In the pioneering publication on large deviations [63], this function described the exponential decrease rate of the tails of distributions for the sums of independent random variables.

Note that the function

$$\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}K(\lambda h) = \ln \left\{ \left[\mathbb{E} \left(e^{hY} \right)^\lambda \right]^{\frac{1}{\lambda}} \right\}$$

is monotonically increasing by the Lyapunov inequality; for example, see [190, Chapter II, §6, formula 27]. Moreover⁴, we have

$$\left[\mathbb{E} \left(e^{hY} \right)^\lambda \right]^{\frac{1}{\lambda}} \rightarrow \text{vrai max} \langle h, Y \rangle \tag{9.1.15}$$

as $\lambda \rightarrow \infty$; see [105, Chapter VI, Section 6.1, Theorem 193]. Next,

$$\text{vrai max } hY = \sup \{ hy, y \in F \} = \sigma_F(h) = \sigma_{\text{conv}(F)}(h), \tag{9.1.16}$$

where $F = \text{supp}(P)$. The inequality $hy < \sigma_F(h)$ holds for all $h \in S_1(0)$ and is equivalent to $y \in \text{int}(\text{conv}(F)) \neq \emptyset$ due to the nondegeneracy condition (9.1.5); see [175, Theorem 13.1]. In this case, from (9.1.14) we obtain $I(y) < \infty$. If $y \notin \text{cl}(\text{conv}(F))$, by [175, Theorem 13.1] there exists a $h^* \in S_1(0)$ such that $\langle h^*, Y \rangle > \sigma_F(h^*)$, and hence $I(y) = +\infty$ due to (9.1.13). \square

Corollary 9.1.1. $\text{int}(\text{dom } K_Y^*) = \text{int}(\text{conv}(\text{supp}(P)))$.

In view of (9.1.13), it suffices to refer to [175, Theorem 6.3], according to which⁵ $\text{ri}(\text{cl}(C)) = \text{ri}(C)$ for a convex set C ; due to (9.1.5), $\text{ri}(C) = \text{int}(C)$.

Summarizing the above considerations and results, we obtain a constructive way to design an equivalent measure with a given barycenter as a parameter that continuously depends on this parameter.

Theorem 9.1.1. *Let the distribution P satisfy the nondegeneracy condition (9.1.5) and the corresponding generating function M_Y of moments (9.1.1) be finite everywhere. Then for any given $y^* \in \text{int}(\text{conv}(\text{supp}(P)))$, the Esscher transform P^{θ^*} with the parameter $\theta^* = (\nabla K_Y)^{-1}(y^*)$ has the barycenter $\int y P^{\theta^*}(dy) = y^*$, and y^* continuously depends on θ^* .*

Remark 9.1.1.

- 1) The finiteness condition holds for M_Y if the support $\text{supp}(P_Y) = \text{supp}(P)$ is compact.
- 2) Theorem 9.1.1 is a constructive method to design an equivalent measure for an arbitrary distribution P satisfying the nondegeneracy condition (9.1.5). For this purpose, it suffices to choose the density $q > 0$ (i.e., $\int q(y)P(dy) = 1$) decreasing fast enough at infinity, namely, the functions $y \mapsto q(y)e^{\theta y}$ must be bounded for each $\theta \in \mathbb{R}^n$. For example, let⁶ $q(y) = ce^{-\|y\|_2^2}$, where c is the

⁴We use the notation $\text{vrai max } X$, where X is a random variable, the effective upper bound of X in the terminology of [105]. The number $\text{vrai max } X$ from the extended real line $\mathbb{R} \cap \{+\infty\}$ can be defined as $\sup(\text{supp}(P_X))$, i.e., as the maximum growth point of the distribution of the random variable X if it is bounded, and $+\infty$ otherwise. The term “essential supremum,” often figuring in the literature, is lame because it applies to a family of random variables and represents a random variable (not a number).

⁵Here and below, $\text{ri}(A)$ denotes the relative interior of a convex set A .

⁶Here $\| \cdot \|_2$ denotes the Euclidean norm in \mathbb{R}^n .

normalizing constant, i.e., $c^{-1} = \int e^{-\|y\|^2} P(dy)$; the distribution $P' \sim P$ with the density $\frac{dP'}{dP} = q$ satisfies condition (9.1.10), and Theorem 9.1.1 can be applied to it.

- 3) If the distribution P does not satisfy the nondegeneracy condition (9.1.5), nevertheless, this case can also be reduced to the application of Theorem 9.1.1. In this case, let the affine manifold on which P is concentrated have a dimension below n , i.e., $\text{aff}(\text{supp}(P)) = a + L$, where $a \in \mathbb{R}$ and L is a linear subspace of \mathbb{R}^n of dimension $k < n$. Then for the random vector $\widehat{Y} = \varphi(Y - a)$, where $\varphi : L \mapsto \mathbb{R}^k$ is an isomorphism of linear spaces, the distribution $P_{\widehat{Y}}$ is nondegenerate on \mathbb{R}^k . Considering item 2) of this remark, the proposed design method of an equivalent measure with a given barycenter is universal: it allows constructing a measure $Q_{y^*} \sim P$ such that $\int y Q(dy) = y^*$ for any $y^* \in \text{ri}(\text{conv}(\text{supp}(P)))$.

9.2 The Relationship between the Deterministic and Probabilistic Approaches to Superreplication

Here, we discuss the case of no trading constraints and no arbitrage opportunities.

In this section, it becomes necessary to introduce probabilistic terminology. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{P})$ be a probability space with a filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0, \dots, N}$, where $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, \dots, X_t)$ is a σ -algebra generated by random vectors X_0, \dots, X_t with values in \mathbb{R}^n that describes the evolution of discounted prices for n risky assets. Without loss of generality, assume that $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N$. The measure \mathbb{P} will be called the reference measure. We denote by $\mathfrak{M}(X)$ the set of equivalent martingale measures, i.e., such that the process X_t , $t = 0, \dots, N$, is a martingale with respect to the measure $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)$ and $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$. No arbitrage opportunities, assumed below, is equivalent to the fact that $\mathfrak{M}(X) \neq \emptyset$; for example, see [189, Chapter V, §2e].

Let ξ_t be an adapted process. Consider the generalized Snell envelope, i.e., the minimal majorant U_t^* of the process ξ_t , which is a supermartingale with respect to any measure $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)$. This means that:

- 1) $U_t^* \geq \xi_t$ for $t = 0, 1, \dots, N$ a.s.⁷
- 2) If η is a supermartingale with respect to any measure $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)$ that is a majorant of ξ_t , then $\eta \geq U_t^*$ a.s.

Obviously, the process U_t^* is given by the recurrence relation

$$\begin{aligned} U_N^* &= \xi_N, \\ U_{t-1}^* &= \xi_{t-1} \vee \text{ess sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} U_t^*, \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned} \tag{9.2.1}$$

⁷Almost surely with respect to any measure from $\mathfrak{M}(X)$, since the measures are equivalent, or with respect to the reference measure \mathbb{P} .

where $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{A}}$ denotes the conditional expectation with respect to the σ -algebra \mathcal{A} for the measure \mathbb{Q} ; for example, see [93, Theorem 6.52].

Now let $\xi_t \geq 0$ be the potential payoffs for an American option. To establish a relationship with the deterministic problem statement, assume that $\xi_t = g_t(x_0, \dots, x_t)$, $t = 1, \dots, N$. By the optional decomposition theorem [92] (see also [93, Theorem 7.5]), there exists a predictable process H_t^* , $\Delta U_t^* \leq H_t^* \Delta X_t$ a.s. for $t = 1, \dots, N$, that is a superhedging strategy with the minimum estimate U_t^* (9.2.1) of the reserves needed at the time instant t to fulfill a.s. the contingent liabilities from selling the option.

A European option with terminal payoffs ζ can be studied as a particular case. It suffices to consider the process $\xi_t = 0$ for $t = 0, \dots, N - 1$ and $\xi_N = \zeta$; then

$$\begin{cases} \xi_N^* = \zeta, \\ \xi_{t-1}^* = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} \xi_t^*, \quad t = N, \dots, 1. \end{cases} \quad (9.2.2)$$

For a European option, the nonnegative random variable $\Delta C_t = H_t^* \Delta X_t - \Delta U_t^*$ can be interpreted as the reserves made at step t to cover the uncertainty due to market incompleteness. (A market is complete when there exists a replicating strategy; e.g., see [189, Chapter V, §4f.]) Completeness is equivalent to the uniqueness of an equivalent martingale measure, i.e., $\mathfrak{M}(X)$ contains the single element \mathbb{Q}^* . Obviously, $U^* = \xi^*$ in (9.2.2) is a martingale with respect to $\mathbb{Q}^* \sim \mathbb{P}$, so $\Delta C = 0$ a.s. Completeness is also equivalent to the following property: the supports of conditional distributions of the price increments ΔX_t given \mathcal{F}_{t-1} are a.s. sets with a finite number of elements not exceeding $n + 1$; for details, see [121].

From this point onwards, assume that

$$\xi_t \leq C_1 \text{ a.s. for } t = 0, \dots, N, \quad (9.2.3)$$

and

$$\|\Delta X_t\| \leq C_2 \text{ a.s. for } t = 1, \dots, N. \quad (9.2.4)$$

Requirements (9.2.3) and (9.2.4) will be called the consistency conditions for the “deterministic” and “probabilistic” problem statements. In addition, let

$$\xi_t = g_t(X_1, \dots, X_t) \text{ a.s.} \quad (9.2.5)$$

Also, suppose that the functions v_t^* , the solutions of equations (BI), where $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$ (no trading constraints) are universally measurable.

Let the transition kernel $P_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$ be the regular conditional distribution of ΔX_t under a known price history X_0, \dots, X_{t-1} that corresponds to the measure \mathbb{P} . This means that for a random variable $Y \geq 0$ measurable with respect to \mathcal{F}_t (i.e., when $Y = \varphi(X_0, \dots, X_t)$ for some universally measurable function φ), we have⁸

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} \eta = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} \varphi(X_0, \dots, X_t) = \psi(X_0, \dots, X_{t-1})$$

⁸Equalities and inequalities involving the conditional expectation should be understood \mathbb{P} —almost surely.

for some universally measurable function ψ and

$$\psi(x_0, \dots, x_{t-1}) = \int \varphi(x_0, \dots, x_{t-1}, \bar{x}_{t-1} + y) P_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy).$$

As mentioned in Chapter 1, when establishing analogies between two approaches, “deterministic” and “probabilistic”, we suppose that the probability measure $dy \mapsto P_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$ has a compact support $K_t(x_0, \dots, x_{t-1})$. This assumption is equivalent to condition (9.2.4). In this case, P_t and K_t are defined almost surely with respect to the measure \mathbb{P} . Then the “probabilistic” condition of no arbitrage opportunities almost surely implies the “deterministic” condition of no arbitrage opportunities NDAO; see [121] and also [189, Theorem A*], an extended version of the first fundamental theorem. Without loss of generality, assume that⁹ (9.2.3) and (9.2.4) hold everywhere, $P_t(\bar{x}_{t-1}, \cdot)$ and $K_t(\bar{x}_{t-1}) = \text{supp}(P_t(\bar{x}_{t-1}, \cdot))$ are defined everywhere, and $0 \in \text{ri}(\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})))$ for all $\bar{x}_{t-1} \in (\mathbb{R}^n)^t$.

Note that the set-valued mapping $\bar{x}_{t-1} \mapsto K_t(\bar{x}_{t-1})$, where $K_t(\bar{x}_{t-1})$ is a compact support of the conditional distribution $A \mapsto P(\bar{x}_{t-1}, A)$, is measurable¹⁰ since $\{\bar{x}_{t-1} : K_t(\bar{x}_{t-1}) \cap G\} = \{\bar{x}_{t-1} : P(\bar{x}_{t-1}, G) > 0\}$. (Conditional distributions are taken with respect to the reference measure \mathbb{P} .)

The transition kernel $Q_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$ for the regular conditional distribution of ΔX_t under a known price history that corresponds to the measure $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ is defined by analogy.

Let us denote by

$$Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \text{ for } \mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)$$

the density (the Radon—Nikodym derivative) and by

$$Z_t = \frac{d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}} \quad t = 0, 1, \dots, N,$$

the local densities, where $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}$ and $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$ are the restrictions of the measures \mathbb{Q} and \mathbb{P} , respectively, to the σ -algebra $\mathcal{F}_t \in \mathcal{F}$. The process Z_t , $t = 0, 1, \dots, N$, is a nonnegative martingale with respect to \mathbb{P} and $Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_t} Z$. In this case, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ is equivalent to $Z > 0$ a.s. Moreover, as is easily seen¹¹,

$$\{Z_t = 0\} \subseteq \{Z_{t+1} = 0\} \subseteq \{Z = 0\} \text{ a.s.}$$

Therefore, the random variable

$$\eta_t = \frac{Z_t}{Z_{t-1}} \quad t = 1, 2, \dots$$

⁹With choosing a new probability space appropriately.

¹⁰Let (X, \mathcal{A}) be a measurable space and Y be a metric space. A set-valued mapping $X \ni x \mapsto F(x) \subseteq Y$ is measurable if $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$ for any open set $G \subseteq Y$. This property was called weak measurability in [111], but for compact-valued mappings, it coincides with measurability [111, Theorem 3.1], defined therein as $\{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$ for all closed $B \subseteq Y$.

¹¹The notation $A \subseteq B$ a.s. means $\mathbb{P}(A \setminus B) = 0$, or, equivalently, $I_A \leq I_B$ a.s., where I_A is the indicator of an event A .

is well-defined almost surely. Thus, η_t is a \mathcal{F}_t -measurable random variable and $\eta_t > 0$ and $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \eta_t = 1$ a.s.

To consider regular conditional distributions, we assume for convenience that η_t is defined for all $\omega \in \Omega$ and $\eta_t > 0$ everywhere; for those ω with $12 \eta_{t-1}(\omega) = 0$, it suffices to let $\eta_t(\omega) = \theta_t(\omega)$, where $\theta_t(\omega)$ is some adapted process such that $\theta_t(\omega) > 0$ and $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{t-1}} \theta_t = 1$ (e.g., choose the process θ_t identically equal to one). Since $\eta_t \in \mathcal{F}_t$, we have $\eta_t = z_t(X_0, \dots, X_t)$ for some Borel measurable function z_t .

If the random variable $Y \geq 0$ is measurable with respect to \mathcal{F}_t , then

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} Y = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} (ZY)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} Z} = \frac{1}{Z_{t-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_t} (ZY) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} \left(\frac{Z_t}{Z_{t-1}} Y \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} z_t Y. \quad (9.2.6)$$

In view of (9.2.6) and the previous remarks, the transition kernels

$$Q_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy) = z_t(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) P_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$$

can be defined everywhere, so $q_t(x_0, \dots, x_{t-1}, y) = z_t(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y)$ is a variant of the density of the measure $dy \mapsto Q_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$ with respect to the measure $dy \mapsto P_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$, i.e., the conditional density of ΔX_t with zero mean given a known price history. In this case, $Z_t > 0$ and the support of the measure $dy \mapsto Q_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$ coincides with that of the measure $dy \mapsto P_t(x_0, \dots, x_{t-1}, dy)$, i.e., with the compact set $K_t(x_0, \dots, x_{t-1})$.

Let $\mathfrak{M}'(X)$ be the class of martingale measures absolutely continuous with respect to the reference measure, i.e., the process $X_t, t = 0, 1, \dots, N$, is a martingale for $\mathbb{Q}' \in \mathfrak{M}'(X)$, and $\mathbb{Q}' \ll \mathbb{P}$. Let $\mathfrak{M}(X)$ be the class of equivalent martingale measures.

Lemma 9.2.1. *Under the condition of no arbitrage opportunities, we have*

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_t} Y = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q}' \in \mathfrak{M}'(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}^{\mathcal{F}_t} Y$$

for any arbitrary bounded random variable Y .

Proof. Since $\mathfrak{M}(X) \subseteq \mathfrak{M}'(X)$,

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_t} Y \leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q}' \in \mathfrak{M}'(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}^{\mathcal{F}_t} Y$$

The absence of arbitrage opportunities is equivalent to $\mathfrak{M}(X) \neq \emptyset$. Let $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)$, $\mathbb{Q}' \in \mathfrak{M}'(X)$, and z_t and z'_t be the densities given by (9.2.6) for \mathbb{Q} and \mathbb{Q}' , respectively.

For $\varepsilon \in (0, 1)$, we choose $z_t^\varepsilon = (1 - \varepsilon)z'_t + \varepsilon z_t$. Since by agreement $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N$, the measure \mathbb{Q}^ε with the density (the Radon–Nikodym derivative)

$$\frac{d\mathbb{Q}^\varepsilon}{d\mathbb{P}} = Z^\varepsilon = Z_N^\varepsilon = Z_0 \prod_{s=1}^N z_s^\varepsilon \geq \varepsilon^N \prod_{s=1}^N z_s = \varepsilon^N \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} > 0$$

¹²The event $\{\omega : Z_{t-1}(\omega) = 0\}$ has zero measure.

with respect to the measure \mathbb{P} is equivalent to the reference measure: $\mathbb{Q}^\varepsilon \sim \mathbb{P}$. The martingale property of \mathbb{Q}^ε is obvious from its construction, i.e., $\mathbb{Q}^\varepsilon \in \mathfrak{M}(X)$.

At the same time, due to (9.2.6),

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\varepsilon}^{\mathcal{F}_t} Y = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_t} z_t^\varepsilon Y = (1 - \varepsilon) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_t} z_t' Y + \varepsilon \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_t} z_t Y = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\varepsilon}^{\mathcal{F}_t} Y + \varepsilon (\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\varepsilon}^{\mathcal{F}_t} Y - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_t} Y),$$

so

$$\left| \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\varepsilon}^{\mathcal{F}_t} Y - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_t} Y \right| \leq 2\varepsilon C,$$

where $|Y| \leq C$ a.s. Therefore,

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_t} Y \leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_t} Y + 2\varepsilon C.$$

The desired inequality follows by the arbitrariness of ε . \square

Proposition 9.2.1. *Under the condition of no arbitrage opportunities and no trading constraints, let the consistency conditions (9.2.3) and (9.2.4) hold and the functions v_t^* given by (BI) be universally measurable.¹³ Then for U_t^* defined by (9.2.1) and $V_t^* = v_t^*(\bar{X}_t)$, $t = 0, \dots, N$, we have the inequality*

$$U_t^* \leq V_t^* \text{ a.s. for } t = 0, \dots, N. \quad (9.2.7)$$

Proof. We prove this result by induction. For $t = N$, inequality (9.2.7) obviously holds, even turning into equality. Assume that inequality (9.2.7) is valid for $s = N, \dots, t$. We have to demonstrate that it holds for $s = t - 1$. By the inductive hypothesis,

$$U_t^* \leq V_t^* \text{ a.s.} \quad (9.2.8)$$

Let $Q_t(x, A)$ be the transition probability equal to the regular conditional distribution of ΔX_t given $\bar{X}_{t-1} = x$ with respect to the measure $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X) \neq \emptyset$ due to no arbitrage opportunities. We fix an arbitrary measure $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)$. It follows from (9.2.8) that

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} U_t^* \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* = f_t^{\mathbb{Q}}(\bar{X}_{t-1}) \text{ a.s.}^{14}, \quad (9.2.9)$$

where

$$f_t^{\mathbb{Q}}(x) = \int w_t(x, y) Q_t(x, dy).$$

Note that the function $(x, y) \mapsto w_t(x, y)$ is universally measurable since v_t^* has this property. Therefore, the integrals $\int w_t(x, y) Q(dy)$ are well-defined and¹⁵

$$f_t^{\mathbb{Q}}(x) \leq \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(K_i(\cdot)), m(\mathbb{Q})=0} \int w_t(x, y) Q(dy) = \rho_t'(x),$$

¹³The measurability of these functions can be guaranteed under additional assumptions; for example, see Theorem 3.1.4.

¹⁴With respect to the reference measure \mathbb{P} .

¹⁵Here, $\mathcal{P}(K)$ denotes the class of all distributions with a support K .

where $\rho'_t(x)$ is given by (5.2.13) for an admissible mixed extension $Q \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))$ (in the case of no trading constraints). Moreover, $\{Q \in \mathcal{P}(K_t(\cdot)) : \int yQ(dy) = 0\} \neq \emptyset$ due to no arbitrage opportunities.¹⁶ According to (5.2.5), $\rho'_t \leq \rho_t$, and the recurrence relations (BI) can be shortly written as¹⁷

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \bigvee \rho_t(\cdot), \quad t = N, \dots, 1.$$

Hence,

$$g_{t-1}(x) \bigvee f_t^Q(x) \leq g_{t-1}(x) \bigvee \rho_t(x) = v_{t-1}^*(x). \quad (9.2.10)$$

As is well known¹⁸, there exists a countable family $\{\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2, \dots\} \subseteq \mathfrak{M}(X)$ such that

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* = \sup_{i \in \{1, 2, \dots\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_i}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* = \sup_{i \in \{1, 2, \dots\}} f_t^{\mathbb{Q}_i}(\bar{X}_{t-1}) \text{ a.s.} \quad (9.2.11)$$

Applying (9.2.9) and (9.2.10) for $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_i, i = 1, 2, \dots$, and (9.2.11) yields

$$U_{t-1}^* = \xi_{t-1} \bigvee \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\mathcal{F}_{t-1}} U_t^* \leq g_{t-1}(\bar{X}_{t-1}) \bigvee \rho_t(\bar{X}_{t-1}) = v_{t-1}^*(\bar{X}_{t-1}) = V_{t-1}^* \text{ a.s.}$$

due to (9.2.1) □

Remark 9.2.1. Inequality (9.2.7) can be strict. For example, consider the following one-dimensional one-step problem assuming no arbitrage opportunities: the initial price $x_0 > 1$ is fixed; the price increments lie in the compact set $K_1(x_0) = [-1, 1]$; the probability measure \mathbb{P} on $\Omega = [-1, 1]$ with the support $[-1, 1]$ is non-atomic (e.g., the uniform distribution); \mathcal{F} is a Borel σ -algebra; the risky asset has the price $X_1(\omega) = \omega + x_0$. In this case, the measure \mathbb{P} “does not see” individual price increment points, including the point 0; more formally, the measure¹⁹ δ_0 is singular with respect to \mathbb{P} . The payoff function $g_1(x) = I_{\{x_0\}}(x)$ is upper semicontinuous and the corresponding supremum is reached²⁰ on the martingale measure when the increment ΔX_1 is zero, i.e., for the conditional distribution $Q = \delta_0$. Thus, $V_1^* = 1$; at the same time, obviously, $U_1^* = 0$ a.s. The problem is that the optimal mixed strategies concentrated at most at $n + 1$ points of the space \mathbb{R}^n (in the case of n risky assets) are typically singular with respect to the reference measure \mathbb{P} .

In the case of a finite sample space Ω , the “deterministic” and “stochastic” statements of the superhedging problem obviously lead to the same result. In the general case, U^* and V^* will coincide under some “smoothness” conditions. The next theorem provides sufficient conditions of this kind.

¹⁶We can suppose that $Q_t(x, \cdot)$ is chosen so that $0 \in \operatorname{ri}(K_t^*(x))$ for all x , where $K_t^*(x) = \operatorname{conv}(K_t^*(x))$.

¹⁷Formally, $g_0(\cdot) \equiv 0$.

¹⁸This fact—the essential supremum of a family of random variables coincides a.s. with the supremum over a countable subfamily of these random variables—was established, e.g., when proving [93, Theorem A.37].

¹⁹Here and below, δ_a denotes a probability measure concentrated at a point a .

²⁰In this example, sufficient conditions for the validity of items 2) and 3) a) of Theorem 7.3.2 are satisfied.

Theorem 9.2.1. *In the case of no trading constraints, let the robust condition of no deterministic arbitrage opportunities RNDAO hold²¹, the potential payoff functions g_t , $t = 1, \dots, N$, be continuous, and the set-valued mappings $\bar{x}_{t-1} \mapsto \bar{K}_t(\bar{x}_{t-1})$, $t = 1, \dots, N$, be continuous in the Pompeiu–Hausdorff metric. Then the functions v_t^* , $t = 0, \dots, N$, given by (BI) are continuous and*

$$U_t^* = V_t^* = v_t^*(X_1, \dots, X_t), \quad t = 0, \dots, N \quad \text{a.s.} \quad (9.2.12)$$

Proof. The continuity (and even uniform continuity) of v_t^* has been established in Theorem 4.2.1 and Proposition 4.2.2, including an estimate of the modulus of continuity. Let us prove by induction that $U_t^* \geq V_t^*$ a.s. Indeed, this inequality obviously holds for $s = N$. Assuming its validity for $s = N, \dots, t$, where $t \geq 1$, we will show it for $s = t - 1$.

Using the inductive hypothesis, i.e., $U_t^* \geq V_t^*$ a.s., and Lemma 9.2.1, we obtain

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{P} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} U_t^* \geq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{P} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{P} \in \mathfrak{M}(X)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^*, \quad \text{a.s.} \quad (9.2.13)$$

for an arbitrary measure $\mathbb{P}' \in \mathfrak{M}'(X)$. In addition,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}'}^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* = \int w_t(\bar{X}_{t-1}, y) q_t'(\bar{X}_{t-1}, y) P_t(\bar{X}_{t-1}, dy), \quad (9.2.14)$$

where $y \mapsto q_t'(x, y) \geq 0$ is the density of the (regular) conditional distribution of ΔX_t given $\bar{X}_{t-1} = x$ that corresponds to the measure $\mathbb{P}' \in \mathfrak{M}'(X)$ with respect to the regular conditional distribution $P_t(x, \cdot)$ of the random vector ΔX_t given $\bar{X}_{t-1} = x$ for the reference measure \mathbb{P} . Let us now construct a conditional density $y \mapsto qT'(x, y)$ with an “almost optimal” value in (9.2.14).

Using items 2) and 3a) of Theorem 7.3.2, consider $Q_t^*(x, \cdot)$, $x \in B_{t-1}$, the optimal mixed market strategy at step t concentrated at $m_t(x) \leq n + 1$ points of $K_t(x) = \operatorname{supp}(P_t(x, \cdot))$, i.e., the measure represented as

$$\begin{aligned} Q_t^*(x, \cdot) &= \sum_{j=1}^{n+1} q_t^j(x) \delta_{y_t^j}(x), \\ q_t^j(x_{t-1}) &\geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} q_t^j(x) = 1, \\ \int y Q_t^*(x, dy) &= \sum_{j=1}^{n+1} y_t^j(x) q_t^j(x) = 0, \\ y_t^j(x) &\in K_t(x), \quad j = 1, n + 1, \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

²¹In the case of no trading constraints, this condition is equivalent to $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(K_t(\cdot)))$, $t = 1, \dots, N$; see Proposition 2.4.1. Theorem A* from [189, Chapter V, §2e] implies $\mathfrak{M}(X) \neq \emptyset$.

that²² satisfies the optimality equality

$$g_{t-1}(x) \vee \int w_t(x, y) Q_t^*(x, dy) = g_{t-1} \vee \sum_{j=1}^{n+1} w_t(x, y_t^j(x)) q_t^j(x) = v_{t-1}^*(x). \quad (9.2.16)$$

Since the variables of the function $q_t^j = q_t^j(x, y)$ lie in different spaces, $x \in \mathbb{R}^{(t-1)n}$ and $y \in \mathbb{R}^n$, we use the following notations to avoid confusion: balls in the space $\mathbb{R}^{(t-1)n}$ will be in bold type, i.e., $\mathbf{B}_r(x)$, and those in the space \mathbb{R}^n , in body type, i.e., $B_r(x)$.

We fix an arbitrary number $\delta > 0$. Since the functions v_{t-1}^* and g_t are uniformly continuous on B_{t-1} , and the function v_t^* is uniformly continuous on B_t , there exist $\varepsilon' = \varepsilon'(\delta, t) > 0$, $\varepsilon'' = \varepsilon''(\delta, t) > 0$, $\varepsilon''' = \varepsilon'''(\delta, t) > 0$, and $\delta' = \delta'(\delta, t) \in (0, \delta)$ such that for all $x \in B_{t-1}$ and $y \in K_t(x)$,

$$\sup_{x' \in \mathbf{B}_{\varepsilon'}(x)} |g_{t-1}(x') - g_{t-1}(x)| \leq \delta, \quad (9.2.17)$$

$$\sup_{x' \in \mathbf{B}_{\varepsilon''}(x)} |v_{t-1}^*(x') - v_{t-1}^*(x)| \leq \delta, \quad (9.2.18)$$

$$\sup_{x' \in \mathbf{B}_{\varepsilon'''}(x), y' \in B_{\delta'}(y)} |w_t(x', y') - w_t(x, y)| \leq \delta. \quad (9.2.19)$$

Due to the lower semicontinuity of the set-valued mapping $x \mapsto K_t(x)$, for each x and the corresponding elements $y_t^j(x) \in K_t(x)$, $j = 1, \dots, n+1$, there exists a number $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ such that

$$\{x' : K_t(x') \cap B_{\delta'}(y_t^j(x)) \neq \emptyset\} \supseteq \mathbf{B}_{\varepsilon(x)}(x) \quad (9.2.20)$$

for all $j = 1, \dots, n+1$. Letting $\varepsilon^*(x) = \varepsilon(x) \wedge \varepsilon' \wedge \varepsilon'' \wedge \varepsilon'''$, we extract the finite subcovering $\{\mathbf{B}_{\varepsilon^*(x)}(x_i), i = 1, \dots, k\}$ from the open covering $\{\mathbf{B}_{\varepsilon^*(x)}(x), x \in B_{t-1}\}$ of the compact set B_{t-1} .

Next, we introduce the sets

$$A_1 = \mathbf{B}_{\varepsilon^*(x_1)}(x_1) \cap B_{t-1} \quad (9.2.21)$$

$$A_{i+1} = [\mathbf{B}_{\varepsilon^*(x_i)}(x_i) \setminus \bigcup_{l=1}^i A_l] \cap B_{t-1}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Without loss of generality, assume that all A_i , $i = 1, \dots, k$, are non-empty (excluding, if necessary, those sets that are empty). Note that the sets A_i , $i = 1, \dots, k$, are measurable, pairwise disjoint, and form B_{t-1} in union. By construction, for any $x' \in A_i$, we have $K_t(x') \cap B_{\delta'}(y_t^j(x_i)) \neq \emptyset$ for all $j = 1, \dots, n+1$; see (9.2.20). Therefore, $P_t(x', B_{\delta'}(y_t^j(x_i))) > 0$, $j = 1, \dots, n+1$, and we correctly determine the densities as follows: for $x \in B_{t-1}$,

$$q_t^*(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^k I_{A_i}(x) \sum_{j=1}^{n+1} q_t^j(x_i) \frac{I_{B_{\delta'}(y_t^j(x_i))}(y)}{P(x, B_{\delta'}(y_t^j(x_i)))}}{\sum_{i=1}^k I_{A_i}(x) \sum_{j=1}^{n+1} q_t^j(x_i)} \quad (9.2.22)$$

²²If the measure $Q_t^*(x, \cdot)$ is concentrated at $m(x) < n+1$ points of $K_t(x)$, then the “missing” $n+1 - m(x)$ points for which $q_t^j(x) = 0$ can be chosen arbitrarily from $K_t(x)$, but the functions $x \mapsto y_t^j(x)$ should be measurable.

and

$$P_t^*(x, dy) = q_t^*(x, y)P_t(x, dy). \quad (9.2.23)$$

Obviously, the transition kernel $P_t^*(\cdot, \cdot)$ satisfies the normalization condition.

Let

$$u_{t-1}(x') = g_{t-1}(x') \bigvee \int w_t(x', y)P_t^*(x, dy). \quad (9.2.24)$$

If $x' \in A_i \subseteq B_{\varepsilon^*}(x_i)$, where $i \in \{1, \dots, k\}$, we have inequalities (9.2.17)–(9.2.19) and the support of the measure $P_t^*(x', \cdot)$ is $K_t(x') \cap B_{\delta'}(y_t^j(x_i))$. In view of (9.2.22) and (9.2.16), the expression (9.2.24) with such an element x' satisfies the inequalities

$$\begin{aligned} u_{t-1}(x') &\geq (g_t(x_i) - \delta) \bigvee \left[\sum_{i=1}^{n+1} q_t^j(x_i) (w_t(x_i, y_t^j(x_i)) - \delta) \right] = \\ &\left[g_t(x_i) \bigvee \sum_{i=1}^{n+1} q_t^j(x_i) w_t(x_i, y_t^j(x_i)) \right] - \delta = \\ &v_{t-1}^*(x_i) - \delta \geq v_{t-1}^*(x') - 2\delta. \end{aligned} \quad (9.2.25)$$

The conditional distribution $P_t^*(x, \cdot)$ of the price increments ΔX_t given $\bar{X}_{t-1} = x$ does not ensure, however, that the random vectors ΔX_t , $t = 1, \dots, N$, are martingale differences.

For $x' \in A_i$, where $i \in \{1, \dots, k\}$, we denote

$$\hat{y}_i^j(x') = \int y \frac{I_{B_{\delta'}(y_t^j(x_i))}(y)}{P(x', B_{\delta'}(y_t^j(x_i)))} P_t(x, dy), \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (9.2.26)$$

Since $\hat{y}_i^j(x') \in K_t(x') \cap B_{\delta'}(y_t^j(x_i))$,

$$\|\hat{y}_i^j(x') - y_t^j(x_i)\| \leq \delta' < \delta, \quad j = 1, \dots, n+1.$$

According to (9.2.15),

$$\sum_{j=1}^{n+1} q_t^j(x_i) y_t^j(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, n+1,$$

and also

$$\sum_{j=1}^{n+1} q_t^j(x_i) = 1.$$

Therefore, the mean

$$y_t^*(x) = \int y P_t^*(x, dy) \quad (9.2.27)$$

satisfies the inequality

$$\|y_t^*(x)\| \leq \sum_{i=1}^k I_{A_i}(x) \sum_{j=1}^n q_t^j(x_i) \|\hat{y}_i^j(x_i) - y_t^j(x_i)\| \leq \delta' < \delta. \quad (9.2.28)$$

We construct a kernel $P'_t(x, dy) = q'_t(x, y)P_t(x, dy)$ “close” to the kernel $P_t^*(x, dy) = q_t^*(x, y)P_t(x, dy)$ with the property $\int y P'_t(x, dy) = 0$ for $x \in B_{t-1}$. Using Lemma 4.1.5, note that the continuous function $x \mapsto r(K_t^*(x))$, where $r(\cdot) = \min\{\sigma_K(h), \|h\| \leq 1\}$, achieves a minimum $R_t^* > 0$ on the compact set B_{t-1} . Based on the construction from the proof of Proposition 5.3.3, for $R_t \in (0, R_t^*)$ let

$$p_t(x) = \frac{\|y_t^*(x)\|}{\|y_t^*(x)\| + R_t}, \quad (9.2.29)$$

$$P'_t(x, \cdot) = (1 - p_t(x))P_t^*(x, \cdot) + p_t(x)\widehat{P}_t(x, \cdot),$$

where \widehat{P}_t is a transition kernel, $\widehat{P}_t(x, \cdot) \ll P_t(x, \cdot)$, $\widehat{P}_t(x, dy) = \hat{q}_t(x, y)P_t(x, dy)$, and \hat{q}_t has the following properties:

If $y_t^*(x) = 0$, then

$$\hat{q}_t(x, y) = q_t^*(x, y); \quad (9.2.30)$$

otherwise ($y_t^*(x) \neq 0$),

$$\hat{y}_t(x) = \int y \hat{q}_t(x, y) P_t(x, dy) = -\frac{R_t}{\|y_t^*(x)\|} y_t^*(x) \in \text{int}(K_t^*(x)), \quad (9.2.31)$$

where $K_t^*(x) = \text{conv}(K_t(x))$.

Such an element \hat{q}_t exists by Theorem 9.1.1. Indeed, we denote

$$\begin{aligned} \mu_t(x, \theta) &= \int e^{-\theta y} P_t(x, dy) > 0, \\ \varkappa_t(x, \theta) &= \ln \mu_t(x, \theta), \quad x \in B_{t-1}, \quad \theta \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (9.2.32)$$

Obviously, these functions are Borel measurable (jointly). Consider the Esscher transform²³

$$P_t^\theta(x, dy) = q_t^\theta(x, y)P_t(x, dy). \quad (9.2.33)$$

Then the gradient with respect to θ takes the form

$$\nabla_\theta \varkappa_t(x, \theta) = \int y P_t^\theta(x, dy) = y_t(x, \theta) \in \text{int}(K_t^*(x)),$$

and the Hessian with respect to θ ,

$$\nabla_\theta^2 \varkappa_t(x, \theta) = \int [y - y_t(x, \theta)][y - y_t(x, \theta)]^T P_t^\theta(x, dy),$$

is positive definite due to the full dimension of the support $K_t(x)$, which follows from assumption RND AO. In particular, the function $\theta \mapsto \varkappa_t(x, \theta)$ is strictly convex; its conjugate by the variable θ ,

$$\varkappa_t^*(x, z) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^n} (\theta z - \varkappa_t(x, \theta)), \quad \theta \in \mathbb{R}^n, \quad (9.2.34)$$

²³The item 2 of Remark 9.1.1 is applicable to the conditional distributions as well.

is convex in the variable z , Borel measurable (jointly), and continuous within the effective domain in the variable z , i.e., on the set

$$\{z : \varkappa_t^*(x, z) < \infty\} = \text{int}(K_t^*(x)),$$

by Corollary 9.1.1. Moreover, this conjugate²⁴ is continuously differentiable, and the gradient with respect to z has the form

$$\nabla_z \varkappa_t^*(x, z) = F_{t,x}^{-1}(z), \quad (9.2.35)$$

where $F_{t,x}(\theta) = \nabla_\theta \varkappa_t(x, \theta)$ and $F_{t,x}^{-1}$ is the inverse mapping for $F_{t,x}$. Of course, the function $\nabla_z \varkappa_t^*$ is jointly measurable.

Now, let

$$\theta_t^*(x) = \varkappa_t^*(x, \hat{y}_t(x)). \quad (9.2.36)$$

The function θ_t^* is then measurable; for

$$\widehat{P}_t^*(x, dy) = P^{\theta_t^*(x)}(x, dy),$$

we have

$$\hat{q}_t(x, y) = q_t^{\theta_t^*(x)}(x, y).$$

The function

$$f_t(\theta, x, y) = q_t^\theta(x, y),$$

where q_t^θ is given by (9.2.33), is jointly measurable and continuous in the variable θ . Therefore,

$$\hat{q}_t(x, y) = f_t(\theta_t^*(x), x, y)$$

is also jointly measurable and

$$\int y \widehat{P}_t^*(x, dy) = \int y P^{\theta_t^*(x)}(x, dy) = \hat{y}_t(x) \quad (9.2.37)$$

due to (9.2.35) and (9.2.36). According to Proposition 5.3.3, considering (9.2.28)–(9.2.31), (9.2.35), and (9.2.36), we obtain

$$\begin{aligned} \int y P_t'(x, dy) &= 0, \\ \|P_t'(x, \cdot) - P_t^*(x, \cdot)\|_{TV} &\leq \frac{2\|y_t^*(x)\|}{\|y_t^*(x)\| + R_t} \leq \frac{2\delta}{\delta + R_t}, \quad x \in B_{t-1}; \end{aligned}$$

since $R_t \in (0, R_t^*)$ is arbitrary,

$$\|P_t'(x, \cdot) - P_t^*(x, \cdot)\|_{TV} \leq \frac{2\delta}{\delta + R_t^*}. \quad (9.2.38)$$

²⁴The matter concerns the Legendre transform for a fixed $x \in B_{t-1}$.

Using inequality (9.2.38),

$$\begin{aligned} & \left| g_t(x) \vee \int w_t(x, y) P_t'(x, dy) - g_t(x) \vee \int w_t(x, y) P_t^*(x, dy) \right| \leq \\ & \left| \int w_t(x, y) P_t'(x, dy) - \int w_t(x, y) P_t^*(x, dy) \right| \leq C_t' \frac{2\delta}{\delta + R_t^*}, \end{aligned}$$

where $C_t' = \sup_{z \in B_t} v_t^*(z) \leq C < \infty$ by Proposition 1.2.2. Hence,

$$u_{t-1}^*(x) = g_{t-1}(x) \vee \int w_t(x, y) P_t'(x, dy) \geq u_{t-1}(x) - \frac{2C_t'\delta}{\delta + R_t^*} \geq v_{t-1}^* - 2\delta \left(1 + \frac{C_t'}{\delta + R_t^*} \right).$$

With inequality (9.2.13), we have

$$\begin{aligned} U_{t-1}^* &= g_{t-1}(\bar{X}_{t-1}) \vee \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{P} \in \mathfrak{M}(X)} U_t^* \geq g_{t-1}(\bar{X}_{t-1}) \vee \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_{t-1}}} V_t^* = \\ & u_{t-1}^*(\bar{X}_{t-1}) \geq V_{t-1}^* - 2\delta \left(1 + \frac{C_t'}{\delta + R_t^*} \right) \text{ a.s.} \end{aligned}$$

Due to the arbitrariness of $\delta > 0$,

$$U_{t-1}^* \geq V_{t-1}^*.$$

Finally, using Proposition 9.2.1, we arrive at

$$U_t^* = V_t^*, \quad t = 0, \dots, N.$$

□

9.3 Preservation of Structural Stability for Close Stochastic Models

For a monotonically nondecreasing function $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, we define the upper generalized inverse by

$$f^{[-1]}(y) = \inf\{x \in [0, \infty) : f(x) > y\} = \sup\{x \in [0, \infty) : f(x) \leq y\},$$

which is nondecreasing and right continuous, and the lower generalized inverse by

$$f^{[-1]}(y) = \sup\{x \in [0, \infty) : f(x) < y\} = \inf\{x \in [0, \infty) : f(x) \geq y\},$$

which is nondecreasing left-continuous. Evidently, $f^{[-1]}(y) \geq f^{[-1]}(y)$. If f is strictly increasing, then $f^{[-1]}(y) = f^{[-1]}(y)$, and the coinciding generalized inverse functions are continuous.

Let us denote by $H_u = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle u, y \rangle > 0\}$ the open half-space with the normal vector u . Consider the following distances (metrics) on the space of probability measures²⁵ on $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$:

- the Prokhorov metric given by (6.4.1);
- the metric

$$l_\infty(Q', Q) = \inf\{\epsilon > 0 : Q(B) \leq Q'(B^\epsilon), Q'(B) \leq Q(B^\epsilon) \text{ for all } B \in \mathcal{B}^n\},$$

where $B^\epsilon = [B]^\epsilon$, defined by (4.1.7);

- the metric

$$d_{UC}(Q', Q) = \sup_{A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n)} |Q'(A) - Q(A)|, \quad (9.3.1)$$

where $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n)$ is the class of all non-empty convex and compact subsets of \mathbb{R}^n .

Remark 9.3.1. The same value is obtained if the supremum in (9.3.1) is taken over all the Borel²⁶ convex subsets of \mathbb{R}^n ; denote this supremum by $d'_{UC}(Q', Q)$.

Indeed, the inequality $d_{UC} \leq d'_{UC}$ is obvious. Now fix an arbitrary $\epsilon > 0$ and choose a Borel convex set $A_\epsilon \subseteq E$ such that $|Q'(A_\epsilon) - Q(A_\epsilon)| > d'_{UC}(Q', Q) - \epsilon$. In a metric space every measure defined on Borel σ -algebra is regular, hence there exists a closed set $F_\epsilon \subseteq A_\epsilon$ such that $Q'(A_\epsilon \setminus F_\epsilon) < \epsilon$ and $Q(A_\epsilon \setminus F_\epsilon) < \epsilon$. Moreover, \mathbb{R}^n is Polish, so because of its tightness property, there exists a compact set $K_\epsilon \subseteq E$ such that $Q'(E \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ and $Q(E \setminus K_\epsilon) < \epsilon$. Denote $N_\epsilon = \text{conv}(F_\epsilon \cap K_\epsilon)$. Then N_ϵ is a convex compact, $A_\epsilon \supseteq N_\epsilon \supseteq (F_\epsilon \cap K_\epsilon)$ and $d_{UC}(Q', Q) \geq |Q'(N_\epsilon) - Q(N_\epsilon)| > d'_{UC}(Q', Q) - 5\epsilon$. As $\epsilon > 0$ is arbitrary, we obtain $d_{UC} \geq d'_{UC}$, whence $d_{UC} = d'_{UC}$.

Theorem 9.3.1. *Let Q_t be the transition kernels of the original model that correspond to the conditional distribution of price increments given a known price history, and let \tilde{Q}_t be those of the perturbed model. Assume that in the initial model, condition RNDAO holds for the supports of transition kernels using the consistency condition (6.1.1) of the probabilistic and deterministic models.*

- 1) Then²⁷ $p_t^*(x) = \inf_{u \in S_1(0)} Q_t(x, H_u) > 0$, and the perturbed model with transition kernels \tilde{Q}_t satisfies RNDAO if it is close to the original one in the sense that

$$d_{UC}(\tilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < p_t^*(x).$$

²⁵Unlike a metric, a distance can take infinite values. Note that l_∞ is the minimum distance with respect to the distance on the space of random vectors defined by $L_\infty(X', X) = \text{vrai max } \rho(X', X)$; for example, see (7.5.15) in [171]. The metric d_{UC} is a generalization of the Kolmogorov metric d_K defined for probabilities on the real line \mathbb{R} (with a Borel σ -algebra). On \mathbb{R} , these two metrics are equivalent: $d_K \leq d_{UC} \leq 2d_K$. Note that the metric d_{UC} is used, e.g., to estimate the rate of convergence in the multidimensional central limit theorem; see [23]. The Prokhorov metric d_P metrizes the weak topology on the space of probabilities on a separable metric space.

²⁶A convex subset of \mathbb{R}^n can be non-measurable, if we accept by default the axiom of choice. Consider the union of the open unit ball in \mathbb{R}^2 and Vitali set, constructed as a subset of the unit circle (see, e.g., [152], pages 100 and 101). The obtained set is convex but is not Borel measurable.

²⁷In this case, the supports of $Q_t(x, \cdot)$ and $\tilde{Q}_t(x, \cdot)$ are not necessarily compact.

2) Suppose that the supports of $\widetilde{Q}_t(x, \cdot)$ and $Q_t(x, \cdot)$ are compact. Then the perturbed model with kernels \widetilde{Q}_t satisfies RNDAO if it is close to the original one in the sense that²⁸

$$l_\infty(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < s_t^*(x),$$

where $s_t^*(x) = r(K_t(x)) > 0$ and r is given by (4.1.8).

3) There exists a number $d_t^*(x) \in (0, 1)$ defined by the measure $Q_t(x, \cdot)$ such that the perturbed model with kernels \widetilde{Q}_t satisfies RNDAO if²⁹

$$d_P(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < d_t^*(x).$$

Moreover, if the supports of $Q_t(x, \cdot)$ are compact, then it suffices to let

$$d_t^*(x) = \phi_{t,x}^{[-1]}(r(K_t(x))), \quad (9.3.2)$$

where r is given by (4.1.8),

$$\phi_{t,x}(z) = z + \psi_{t,x}^{[-1]}(z),$$

and

$$\psi_{t,x}(u) = \inf_{y \in K_t(x)} Q(x, \bar{B}_u(y)). \quad (9.3.3)$$

Proof.

1) Due to the consistency relation (6.1.1) of the probabilistic and deterministic models, the geometric criterion (2.4.8) for RNDAO is equivalent to the condition $Q_t(x, H_u) > 0$ for any $u \in S_1(0)$. Consider $O(n)$, the orthogonal group³⁰ for an n -dimensional space. This group of continuous transformations has transitive action on the unit sphere $S_1(0)$: fixing some vector $e \in S_1(0)$, we obtain³¹

$$\inf_{u \in S_1(0)} Q_t(x, H_u) = \inf_{\Theta \in O(n)} \Theta \circ Q_t(x, H_e).$$

Since $O(n)$ is a compact topological group, the mapping $\Theta \mapsto \Theta \circ Q_t(x, \cdot)$ is continuous with respect to the weak topology on the space of probability measures. The set H_e is open, and hence, by the Alexandroff theorem [2], the function $\Theta \mapsto \Theta \circ Q_t(x, H_e)$ is lower semicontinuous and achieves

²⁸For the original model, condition RNDAO is equivalent to $r(K_t(x)) > 0$ for any x and t .

²⁹In this case, the supports of the measures $Q_t(x, \cdot)$ and $\widetilde{Q}_t(x, \cdot)$ are not necessarily compact.

³⁰This is the group of isometric (distance-preserving) transformations of the Euclidean n -dimensional space with a single fixed point, which we choose equal to 0 (the origin). Equivalently, it can be represented as the group of orthogonal matrices of dimensions $n \times n$ with matrix multiplication as the group operation.

³¹For two measurable spaces (X, \mathcal{A}) and (Y, \mathcal{B}) and an $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -measurable mapping $f : X \rightarrow Y$, the image of a measure π on (X, \mathcal{A}) under the mapping f is denoted by $f \circ \pi$ (or $\pi \circ f^{-1}$) and is given by $f \circ \pi(B) = \pi(f^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}$.

minimum for some $\Theta^* = \Theta_{t,x}^* \in O(n)$. Denoting $u^* = \Theta^*(e)$, we have $p_t^*(x) = Q_t(x, H_{u^*}) > 0$ and using Remark 9.3.1 we obtain the inequalities

$$\left| \inf_{u \in S_1(0)} \widetilde{Q}_t(x, H_u) - \inf_{u \in S_1(0)} Q_t(x, H_u) \right| \leq \sup_{u \in S_1(0)} |\widetilde{Q}_t(x, H_u) - Q_t(x, H_u)| \leq d_{UC}(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)).$$

Consequently,

$$\inf_{u \in S_1(0)} \widetilde{Q}_t(x, H_u) \geq p_t^*(x) - d_{UC}(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) > 0,$$

and the conclusion follows.

2) The definition of the measure l_∞ directly yields

$$h_\rho(\widetilde{K}_t(x), K_t(x)) \leq l_\infty(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)),$$

where $\widetilde{K}_t(x) = \text{supp}(\widetilde{Q}_t(x, \cdot))$ and $K_t(x)$ is given by (6.1.1). For the original model, condition RNDAO implies $r(K_t(\cdot)) > 0$. Recall that the function $K \mapsto r(K)$ is Lipschitz with constant 1 on the space $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ of non-empty convex compact sets in \mathbb{R}^n with the Pompeiu–Hausdorff metric; see Lemma 4.1.4. Hence, $|r(\widetilde{K}_t(x)) - r(K_t(x))| \leq h_\rho(\widetilde{K}_t(x), K_t(x))$ and

$$r(\widetilde{K}_t(x)) \geq r(K_t(x)) - h_\rho(\widetilde{K}_t(x), K_t(x)) \geq r(K_t(x)) - l_\infty(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)),$$

which establishes the desired result.

3) We fix some t and x . Due to condition RNDAO, $\text{conv}(K_t(x)) \supseteq \widetilde{B}_{r(K_t(x))}(0)$. In the case of an infinite set $K_t(x)$, we choose an arbitrary number $\delta \in (0, r(K_t(x)))$. Then there exists a convex polyhedron $P_\delta \subseteq \widetilde{B}_{r(K_t(x))}(0) \subseteq \text{conv}(K_t(x))$ such that $h_\rho(P_\delta, \widetilde{B}_{r(K_t(x))}(0)) < \delta$; for example, see [140, Theorem 14.6]. Therefore, $P_\delta \supseteq \widetilde{B}_{r(K_t(x))-\delta}(0)$. This polyhedron is the convex hull of a finite set of its vertices; since all vertices belong to $\text{conv}(K_t(x))$, it can be represented as a convex combination of a finite set of vectors from $K_t(x)$. (In fact, convex combinations of $n + 1$ vectors are sufficient by Carathéodory’s theorem.) Hence, regardless of whether $K_t(x)$ is finite or not, there exists a finite set $\{y_1, \dots, y_m\} \subseteq K_t(x)$ depending on δ such that $\text{conv}(\{y_1, \dots, y_m\}) \supseteq \widetilde{B}_{r(K_t(x))-\delta}(0)$; clearly, $m \geq n + 1$.

Let us introduce two nondecreasing functions³²

$$\zeta_{t,x}(u) = \min_{i=1, \dots, m} Q_t(x, \bar{B}_u(y_i)) > 0$$

and

$$\eta_{t,x}(z) = z + \zeta_{t,x}^{[-1]}(z).$$

³²Note that the functions $\zeta_{t,x}$, and therefore $\eta_{t,x}$, depend on the choice of δ .

Suppose that

$$d_P(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < \eta_{t,x}^{[-1]}(r(K_t(x)) - \delta).$$

We choose $\delta^* > 0$ such that

$$\delta^* < \eta_{t,x}^{[-1]}(r(K_t(x)) - \delta) - d_P(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot))$$

and ϵ such that

$$d_P(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < \epsilon < \eta_{t,x}^{[-1]}(r(K_t(x)) - \delta) - \delta^*.$$

Since $\epsilon > d_P(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot))$, we have $\widetilde{Q}_t(x, \bar{B}_{u+\epsilon}(y)) \geq Q_t(x, \bar{B}_u(y)) - \epsilon$ for any $y \in K_t(x)$ and an arbitrary number $u \geq 0$. Hence, $\widetilde{Q}_t(x, \bar{B}_{u+\epsilon}(y_i)) \geq \zeta_{t,x}(u) - \epsilon$ for all $i = 1, \dots, m$. Choosing u such that $u \in (\zeta_{t,x}^{[-1]}(z), \zeta_{t,x}^{[-1]}(z) + \delta')$, where $\delta' < \delta^*$, gives $\zeta_{t,x}(u) > \epsilon$ and $\widetilde{K}_t(x) \cap \bar{B}_{u+\epsilon}(y_i) \neq \emptyset$ for all $i = 1, \dots, m$. So we can choose $\tilde{y}_i \in \widetilde{K}_t(x) \cap \bar{B}_{u+\epsilon}(y_i)$, $i = 1, \dots, m$. With this choice of ϵ and u ,

$$r(K_t(x)) - \delta > \eta(\epsilon + \delta^*) \geq \epsilon + \zeta_{t,x}^{[-1]}(\epsilon) + \delta^* \geq u + \epsilon.$$

Therefore, $r(K_t(x)) - \delta - u - \epsilon > 0$ and

$$\text{conv}(\widetilde{K}_t(x)) \supseteq \text{conv}(\{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m\}) \supseteq B_{r(K_t(x)) - \delta - u - \epsilon}(0).$$

Thus, condition RND AO holds for the perturbed model if $d_P(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < d_t^*(x)$, where $d_t^*(x) = \eta_{t,x}^{[-1]}(r(K_t(x)) - \delta)$.

Now consider the case of a compact set $\text{supp}(K_t(x))$. The function $y \mapsto Q_t(x, B_u(y)) > 0$ is lower semicontinuous by the Alexandroff theorem, so $\inf_{y \in K_t(x)} Q_t(x, B_u(y)) > 0$ for $u > 0$. Note that the function $\psi_{t,x}$ defined by (9.3.3) satisfies the inequality $\psi_{t,x}(u) > 0$ for $u > 0$. Because $y \mapsto Q_t(x, \bar{B}_u(y)) > 0$ is upper semicontinuous, $\psi_{t,x}$ has the same property. Moreover, it is nondecreasing and hence right continuous, and $\psi_{t,x}(u) = 1$ for sufficiently large values u . For small positive values u , we have

$$\begin{aligned} \psi_{t,x}(0) &= \lim_{u \downarrow 0} \psi_{t,x}(u) = \inf_{u > 0} \inf_{y \in K_t(x)} Q_t(x, \bar{B}_u(y)) = \\ &= \inf_{y \in K_t(x)} \inf_{u > 0} Q_t(x, \bar{B}_u(y)) = \inf_{y \in K_t(x)} Q_t(x, \{y\}). \end{aligned}$$

Consequently, $\psi_{t,x}(0)$ is positive if and only if $K_t(x)$ is a finite set; otherwise, it equals 0. Note that the function $\phi_{t,x}$ defined by (9.3.2) is strictly monotonically increasing, and hence $\phi_{t,x}^{[-1]}(\cdot)$ is continuous, $\phi_{t,x}^{[-1]}(0) = 0$, and $\phi_{t,x}^{[-1]}(u) > 0$ for $u > 0$. For the original model, condition RND AO is equivalent to $r(K_t(\cdot)) > 0$, and hence $\phi_{t,x}^{[-1]}(r(K_t(x))) > 0$. If $d_P(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) <$

$\phi_{t,x}^{\lfloor -1 \rfloor}(r(K_t(x)))$, we choose $\delta^* > 0$ such that $\delta^* < \phi^{\lfloor -1 \rfloor}(r(K_t(x))) - d_P(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot))$ and also choose ϵ_0 such that

$$d_P(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < \epsilon_0 < \phi^{\lfloor -1 \rfloor}(r(K_t(x))) - \delta^*.$$

Let us denote $\delta_0 = u - \psi_{t,x}^{\lfloor -1 \rfloor}(\epsilon_0)$; if $\delta_0 > 0$, i.e., $u > \psi_{t,x}^{\lfloor -1 \rfloor}(\epsilon_0)$, then $\psi_{t,x}(u) > \epsilon_0$ and $\widetilde{Q}_t(x, \widetilde{B}_{u+\epsilon_0}(y)) \geq \psi_{t,x}(u) - \epsilon_0 > 0$ for any $y \in K_t(x)$. As a result, $\widetilde{K}_t(x) \cap \widetilde{B}_{u+\epsilon_0}(y) \neq \emptyset$ for any $y \in K_t(x)$. Recall that for an arbitrary $\delta > 0$, there exists a finite set $\{y_1, \dots, y_m\} \subseteq K_t(x)$ depending on δ such that $\text{conv}(\{y_1, \dots, y_m\}) \supseteq \widetilde{B}_{r(K_t(x))-\delta}(0)$. We choose $\delta > 0$ and $\delta_0 > 0$ such that $\delta + \delta_0 < \delta^*$. Then, we can choose points $\tilde{y}_i \in \widetilde{K}_t(x) \cap \widetilde{B}_{u+\epsilon_0}(y_i)$, $i = 1, \dots, m$, depending on δ . With this choice of the model parameters,

$$r(K_t(x)) > \phi(\epsilon_0 + \delta^*) \geq \delta^* + \epsilon_0 + \psi_{t,x}^{\lfloor -1 \rfloor}(\epsilon_0) > \delta + u + \epsilon_0.$$

Therefore, $r(K_t(x)) - \delta - u - \epsilon_0 > 0$ and $\text{conv}(\widetilde{K}_t(x)) \supseteq \text{conv}(\{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m\}) \supseteq B_{r(K_t(x))-\delta-u-\epsilon_0}(0)$. Thus, condition RNDAO holds for the perturbed model if $d_P(\widetilde{Q}_t(x, \cdot), Q_t(x, \cdot)) < d_t^*(x)$, where $d_t^*(x) = \phi_{t,x}^{\lfloor -1 \rfloor}(r(K_t(x)))$.

□

Remark 9.3.2. The metric d_{UC} generates a stronger topology³³ than the weak one. Note also that $d_{UC}(Q', Q) \leq \frac{1}{2} \|Q' - Q\|_{TV}$, and the convergence in the total variation norm is stronger. Therefore, the result of [164] follows from part 1 of Theorem 9.3.1; moreover, our proof is shorter.

Also, the Prokhorov metric satisfies the inequality $d_P \leq l_\infty$. The convergence of distributions in the metric l_∞ implies weak convergence and is obviously stronger.

Item 3 of Theorem 9.3.1 can be employed for other metrics, e.g., using inequalities (6.4.2).

³³If $d_{UC}(Q_n, Q) \rightarrow 0$, then we have weak convergence; taking into account Remark 9.3.1, this follows, e.g., from [33, Example 2.3]. On the other hand, if a sequence of non-atomic measures Q_n converges to a Dirac measure δ_a , then $d_{UC}(Q_n, \delta_a) \equiv 1$.

Chapter 10. Numerical Solution Based on an Approximating Model with Accuracy Estimation

This chapter introduces a new concept, the structural stability threshold of a model. This threshold is the maximum perturbation (in Pompeiu–Hausdorff measure) of the compact sets describing the price dynamics that preserves the structural stability of the model (the robust condition of no sure arbitrage with unbounded profit) under a given price history. An expression for the structural stability threshold is provided in Theorem 10.1.1.

Based on results concerning the structural stability threshold, we estimate the sensitivity of the solutions of the Bellman equations (BI) to uniformly small perturbations of the compact sets describing the price dynamics of the original model with trading constraints represented as the Motzkin decomposition. The sensitivity estimates are given in Theorem 10.2.1.

As shown below, without the structural stability of the model, the uniformly small approximation of the compact sets describing the price dynamics of the original model cannot guarantee the uniform closeness of the solutions of the Bellman equations even in the case of no trading constraints and preserving the condition of no arbitrage opportunities under approximation. In addition, we demonstrate that structural instability may result in the discontinuous solutions of the Bellman–Isaacs equations.

The choice of adequate numerical methods for the pricing and hedging problems is discussed in detail. For the two classes of models mentioned, we describe precalculations (performed before solving the Bellman equation) to determine restrictions on the error that guarantee a given accuracy of option premium calculation.

The following test examples are selected for simulation: the market dynamics are described by the generalized Kolokoltsov model with a set of multipliers (a rectangle or an ellipse); static trading constraints prohibiting short positions (a model with unbounded trading constraints) and dynamic trading constraints (Example 1.1.4) are considered; the options are the European “Put on Max” option (a nonconvex payoff function) and the European “Call on Max” option (a convex payoff function).

A numerical experiment is carried out for these test examples, which confirms the effectiveness of the numerical methods and algorithms.

Finally, we described the structure of the developed software package and its prospects [220].

The main results of this chapter were published in [216] (the English version in [217]), [202], [203], and [4].

10.1 Structural Stability Threshold

As noted in Section 2.4, usually the trading constraints described by set-valued mappings $D_t(\cdot)$ are defined exactly, i.e., have no measurement errors.¹ The same applies to the option payoff functions. We therefore assume that the payoff functions $g_t(\cdot)$ on an American option, as well as the trading constraints described by $D_t(\cdot)$, are known exactly. Our attention will be focused on the compact-valued mappings $K_t(\cdot)$ describing the uncertain price dynamics: they are naturally considered approximate due to the inevitable statistical error of a stochastic description of market prices. (This description is, in principle, adopted to define the compact sets $K_t(\cdot)$.)

For the original market model, a natural way of solving the problem² approximately is to construct a perturbed market model in which the compact sets describing the price dynamics uncertainty have a simple structure (e.g., they represent finite sets). The solution for the perturbed market model will not lose its economic sense (i.e., will have qualitative properties similar to those of the original system) only when preserving structural stability. Thus, a numerical solution with a given error based on the perturbed market model with price increments lying in the compact set $\tilde{K}_t(\cdot)$ must satisfy RNSAUP, the robust condition of no deterministic sure arbitrage with unbounded profit. To verify this condition, we conceptualize the structural stability threshold of the model.

Note that the convex hull $\text{conv}(K_t(\cdot))$ of the compact sets $K_t(\cdot)$ describing market dynamics, but not the sets themselves, always appears in the “no arbitrage” conditions. Therefore, when analyzing “no arbitrage” properties, it is reasonable to describe the closeness of the compact sets $K_t(\cdot)$ using the following semimetric³ on the class $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ of all non-empty compact subsets of \mathbb{R}^n :

$$p_\rho(A_1, A_2) = h_\rho(\text{conv}(A_1), \text{conv}(A_2)). \quad (10.1.1)$$

Moreover, for non-empty compact sets A_1 and A_2 , we have the inequality [168, Proposition 5.2, formula 5.12]

$$h_\rho(\text{conv}(A_1), \text{conv}(A_2)) \leq h_\rho(A_1, A_2). \quad (10.1.2)$$

¹The matter concerns statistical errors.

²Recall that it is required to find the minimum amount of reserves to cover a contingent liability on a written option and an appropriate hedging strategy depending on the price history.

³It is also possible to modify robustness definitions for a certain “no arbitrage” property using the semimetric p_ρ (10.1.1) instead of the metric h_ρ . Inequality (7.2.13) indicates that the definitions modified in this way will be based on a weaker (but relevant) formalization of closeness. Note that on the class $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n)$ of non-empty convex compact subsets of \mathbb{R}^n , this semimetric becomes a metric coinciding with the Pompeiu–Hausdorff measure.

Without loss of generality, from this point onwards assume that the convex sets $D_t(\cdot)$ are closed: criteria for “no arbitrage” can be formulated in terms of the support function of the set $D_t(\cdot)$.

Suppose that the trading constraints $D_t(\cdot)$ for the initial and perturbed model are the same, differing only in the compact sets describing the uncertain price dynamics, $K_t(\cdot)$ and $\tilde{K}_t(\cdot)$, respectively.

Definition 10.1.1. *Let the robust condition of no arbitrage RNDSAUP hold for the original model. Under a given price history, the structural stability threshold of the model at a time instant t is the value $\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) > 0$ defined as follows: if condition RNDSAUP holds for any perturbations $\tilde{K}_t(\cdot)$ of the model, then the structural stability threshold is $+\infty$; otherwise, it is determined by two conditions:*

- a) *For any perturbed model such that $p_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)) < \mathfrak{p}_t(K_t(\cdot))$, we have RNDSAUP.*
- b) *There exists a perturbed model for which $p_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)) > \mathfrak{p}_t(K_t(\cdot))$ and condition RNDSAUP fails.*

We need some auxiliary results.⁴

Definition 10.1.2. *Sets A and B are stably intersecting if there exists a number $\varepsilon > 0$ such that $\tilde{B}_\varepsilon(0) \subseteq \{z \in \mathbb{R}^n : (z + A) \cap B \neq \emptyset\}$.*

This definition directly implies the symmetry of the stable intersection with respect to two sets $A \neq \emptyset$ and $B \neq \emptyset$. Note that the geometric criterion (2.4.1) for the robust condition of no sure arbitrage with unbounded profit RNDSAUP (see item 1) of Theorem 2.4.1) can be therefore formulated as the stable intersection of the sets $\text{conv}(K_t(\cdot))$ and $\text{bar}(D_t(\cdot))$.

As it turns out, for two sets $A \neq \emptyset$ and $B \neq \emptyset$, the negation of the stable intersection property is equivalent to the property introduced in [153], where⁵ such sets were said “to form an extremal system.” Item (i) of Theorem 2.2 proved therein can be formulated in terms of the stable intersection property as follows: sets A and B are stably intersecting if and only if $0 \in \text{int}(A - B)$; moreover, the condition $\text{int}(A) \cap B \neq \emptyset$ (or $\text{int}(B) \cap A \neq \emptyset$) implies stable intersection.

We denote⁶

$$\mathfrak{n}(A, B) = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-B}(l) = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{B-A}(l). \quad (10.1.3)$$

Note that $A \cap B \neq \emptyset$ is equivalent to $0 \in A - B$, implying $\mathfrak{n}(A, B) \geq 0$.

⁴Let us adopt the conventions $\inf \emptyset = +\infty$ and $+\infty + a = a + (+\infty) = +\infty$ for $a \in \mathbb{R}$.

⁵The cited authors developed a variational geometric approach to studying convex sets in locally convex topological vector spaces (generally speaking, infinite-dimensional) without any assumptions about completeness and closedness.

⁶The minimum in (10.1.3) is achieved due to minimizing a lower semicontinuous function on a compact set. The case $\mathfrak{n}(A, B) = +\infty$ is not excluded here.

Lemma 10.1.1. *Let A and B be non-empty convex sets. Then $\mathfrak{n}(A, B)$ is positive if and only if the sets A and B intersect stably; in this case,*

$$\mathfrak{n}(A, B) = \mathfrak{l}(A, B), \quad (10.1.4)$$

where

$$\mathfrak{l}(A, B) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : \bar{B}_\varepsilon(0) \subseteq \{z \in \mathbb{R}^n : (z + A) \cap B \neq \emptyset\}\}. \quad (10.1.5)$$

Proof. From Definition (10.1.5) it follows that the positivity of $\mathfrak{l}(A, B)$ is equivalent to that the set $\{z \in \mathbb{R}^n : (z + A) \cap B \neq \emptyset\}$ has a non-empty interior containing the point 0 (i.e., that the sets A and B intersect stably).

Suppose that $\mathfrak{l}(A, B) > 0$. Note that $(z + A) \cap B \neq \emptyset$ is equivalent to $0 \in z + A - B$, which implies

$$\sigma_{z+A-B}(u) = \langle z, u \rangle + \sigma_{A-B}(u) \geq 0 \quad (10.1.6)$$

for all $u \in \mathbb{R}^n$.

We choose an arbitrary number $\delta \in (0, \mathfrak{l}(A, B))$. If inequality (10.1.6) holds for all shifts z such that $\|z\| \leq \delta$, then

$$\sigma_{A-B}(u) \geq \sup_{z \in \bar{B}_\delta(0)} \langle -z, u \rangle = \delta \|u\|$$

for all $u \in \mathbb{R}^n$. Due to the arbitrariness of $\delta \in (0, \mathfrak{l}(A, B))$, we hence obtain

$$\mathfrak{n}(A, B) = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-B}(l) \geq \mathfrak{l}(A, B) > 0. \quad (10.1.7)$$

Conversely, let

$$\mathfrak{n}(A, B) = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-B}(l) = \varepsilon^* > 0$$

For all $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\sigma_{A-B}(u) \geq \varepsilon^* \|u\| = \sigma_{\bar{B}_{\varepsilon^*}(0)}(u);$$

therefore, $\bar{B}_{\varepsilon^*}(0) \subseteq \text{cl}(A - B)$ [168, Proposition 9.5]. It follows that $\text{cl}(A - B)$ has a non-empty interior. Since the Minkowski sum $A - B = A + (-B)$ of the convex sets is convex, $\text{int}(\text{cl}(A - B)) = \text{int}(A - B)$; see [175, Theorem 6.3]. In particular, the open ball is $B_{\varepsilon^*}(0) \subseteq \text{int}(A - B) \subseteq A - B$. Hence, choosing an arbitrary vector $z \in B_{\varepsilon^*}(0)$, we have $-z \in A - B$, i.e., $(z + A) \cap B \neq \emptyset$, and consequently, $\varepsilon^* \leq \mathfrak{l}(A, B)$. Considering the reverse inequality (10.1.7), we arrive at the required result (10.1.4). \square

Theorem 10.1.1. *Assume that the original model satisfies RNDSAUP, the robust condition of no deterministic sure arbitrage with unbounded profit. Then:*

1) *The structural stability threshold is positive and equals⁷*

$$\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) = \mathfrak{n}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))); \quad (10.1.8)$$

⁷Without loss of generality, the sets $D_t(\cdot)$ are considered closed because the closure of $D_t(\cdot)$ does not change the barrier cone $\text{bar}(D_t(\cdot))$.

moreover⁸,

$$\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) = \inf_{l \in S_1(0) \cap (-\text{rec}(D_t(\cdot)))} \sigma_{K_t(\cdot)}(l). \quad (10.1.9)$$

2) If the set $D_t(\cdot)$ is bounded⁹, the structural stability threshold takes an infinite value, $\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) = +\infty$.

3) If the set $D_t(\cdot)$ is unbounded, the supremum in formula (10.1.9) is reached and

$$|\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) - \mathfrak{p}_t(\widetilde{K}_t(\cdot))| \leq p_\rho(K_t(\cdot), \widetilde{K}_t(\cdot)). \quad (10.1.10)$$

Proof. If the sets $D_t(\cdot)$ are compact, then $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \mathbb{R}^n$; according to the geometric criterion (2.4.1) for RNDSAUP, the “no arbitrage” condition RNDSAUP holds for any perturbation $\widetilde{K}_t(\cdot)$ of the model. By the definition of the structural stability threshold, $\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) = +\infty$ and $\mathfrak{n}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))) = +\infty$. Moreover, in this case, the recession cone of the set $D_t(\cdot)$ reduces to a singleton containing the zero vector, and we have (10.1.9) based on the empty set convention.

If the set $D_t(\cdot)$ is unbounded, its recession cone will have at least one ray $\{\lambda h^*, \lambda \geq 0\}$ contained in this cone.¹⁰

The supremum in (10.1.9) is reached due to the closedness of the recession cone of the set $D_t(\cdot)$ (which is closed by the assumption above), the continuity of the support function of the compact set, and the compactness of the unit sphere.

Since RNDSAUP is equivalent to condition (2.4.1), we have

$$\mathfrak{n}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))) > 0,$$

and use Lemma 10.1.1 (formula (10.1.4)) by letting $A = \text{conv}(K_t(\cdot))$ and $B = \text{bar}(D_t(\cdot))$. The support function of a convex cone (whose closedness is not required)¹¹ equals the indicator function of its polar cone (automatically closed) [175, Theorem 14.1]. On the other hand, the polar cone for the barrier cone of a non-empty closed convex set equals the recession cone of this set [175, Corollary 14.2.1]. Considering these facts, we obtain

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))) &= \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{\text{conv}(K_t(\cdot)) - \text{bar}(D_t(\cdot))}(l) = \\ &= \min_{l \in S_1(0)} \left[\sigma_{\text{conv}(K_t(\cdot))}(l) + \sigma_{-\text{bar}(D_t(\cdot))}(l) \right] = \\ &= \min_{l \in S_1(0) \cap (-\text{rec}(D_t(\cdot)))} \sigma_{\text{conv}(K_t(\cdot))}(l) = \min_{l \in S_1(0) \cap (-\text{rec}(D_t(\cdot)))} \sigma_{K_t(\cdot)}(l). \end{aligned} \quad (10.1.11)$$

Further, consider the case where the sets $D_t(\cdot)$ are unbounded. Representing the Pompeiu–Hausdorff measure for convex sets through the difference of the support

⁸According to [175, Theorem 8.4], a non-empty closed convex set is bounded if and only if its recession cone consists of a zero vector only. Also, recall the accepted convention $\inf \emptyset = +\infty$.

⁹Particular models with compact trading constraints are given in Examples 1.1.1–1.1.4.

¹⁰Note that if the trading constraints $D_t(\cdot)$ are closed cones containing the point 0, then $\text{rec}(D_t(\cdot)) = D_t(\cdot)$.

¹¹Note that a barrier cone is not necessarily closed.

functions [140, Theorem 14.1], we have the estimate

$$\begin{aligned} & \left| \min_{l \in S_1(0) \cap (-\text{rec}(D_t(\cdot)))} \sigma_{\text{conv}(K_t(\cdot))}(l) - \min_{l \in S_1(0) \cap (-\text{rec}(D_t(\cdot)))} \sigma_{\text{conv}(\tilde{K}_t(\cdot))}(l) \right| \leq \\ & \sup_{l \in S_1(0) \cap (-\text{rec}(D_t(\cdot)))} |\sigma_{\text{conv}(K_t(\cdot))}(l) - \sigma_{\text{conv}(\tilde{K}_t(\cdot))}(l)| \leq \\ & \sup_{l \in S_1(0)} |\sigma_{\text{conv}(K_t(\cdot))}(l) - \sigma_{\text{conv}(\tilde{K}_t(\cdot))}(l)| = h_\rho(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{conv}(\tilde{K}_t(\cdot))) = p_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)). \end{aligned} \quad (10.1.12)$$

Due to (10.1.11) and (10.1.12), the inequality $p_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)) < \mathfrak{n}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot)))$ implies

$$\mathfrak{n}(\text{conv}(\tilde{K}_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))) > 0;$$

hence, the perturbed model satisfies condition RNDSAUP. Thus,

$$\mathfrak{n}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))) \leq \mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)).$$

On the other hand, we choose an arbitrarily small number $\delta > 0$. By Definition (10.1.5), for $r = \mathfrak{n}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))) + \delta$ there exists a shift $z = z(\delta, t, \cdot)$ such that $\|z\| = r$ and $(z + \text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) = \emptyset$. For the perturbed model $\tilde{K}_t(\cdot) = z + K_t(\cdot)$, we have $\text{conv}(\tilde{K}_t(\cdot)) = z + \text{conv}(K_t(\cdot))$ and

$$p_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)) = h_\rho(\text{conv}(K_t(\cdot)), z + \text{conv}(K_t(\cdot))) = \max_{l \in S_1(0)} |\langle l, z \rangle| = \|z\| = r.$$

Hence, it follows that

$$\mathfrak{n}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot))) \geq \mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)),$$

which establishes equality (10.1.8) considering (10.1.11). Finally, inequality (10.1.10) is immediate from (10.1.12). \square

For applications, we need conditions under which the structural stability threshold $\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot))$ is a positive constant bounded below, uniformly over the set of feasible paths B_t , i.e.,

$$\inf_{x \in B_{t-1}} \mathfrak{p}_t(K_t(x)) = \mathfrak{p}_t^* > 0. \quad (10.1.13)$$

To establish sufficient conditions for the property (10.1.13), we introduce the value

$$\mathfrak{m}(A, B) = \sup_{b \in B} \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-b}(l) = \sup_{b \in B} \min_{l \in S_1(0)} [\sigma_A(l) - \langle b, l \rangle] \quad (10.1.14)$$

Proposition 10.1.1.

1) *The following inequality holds:*

$$\mathfrak{m}(A, B) \leq \mathfrak{n}(A, B). \quad (10.1.15)$$

2) If A_1 and A_2 are non-empty compact sets, then

$$|\mathbf{m}(A_1, B) - \mathbf{m}(A_2, B)| \leq p_\rho(A_1, A_2). \quad (10.1.16)$$

3) A set B intersects the interior $\text{int}(A)$ of a convex set A if and only if $\mathbf{m}(A, B) > 0$.

Proof. 1) Note that

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(A, B) &= \sup_{b \in B} \min_{l \in S_1(0)} [\sigma_A(l) - \langle b, l \rangle] \leq \\ & \min_{l \in S_1(0)} \sup_{b \in B} \sup_{a \in A} \langle a - b, l \rangle = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-B}(l) = \mathbf{n}(A, B). \end{aligned}$$

2) Since A_1 and A_2 are non-empty compact sets, their support functions are bounded. Therefore, for any $b \in B$,

$$\begin{aligned} & |\mathbf{m}(A_1, B) - \mathbf{m}(A_2, B)| \leq \\ & \sup_{b \in B} \left[\min_{l \in S_1(0)} [\sigma_{A_1}(l) - \langle b, l \rangle] - \min_{l \in S_1(0)} [\sigma_{A_2}(l) - \langle b, l \rangle] \right] \leq \\ & \sup_{l \in S_1(0)} |\sigma_{A_1}(l) - \sigma_{A_2}(l)| = p_\rho(A_1, A_2). \end{aligned}$$

3) Note that $\mathbf{m}(A, B) > 0$ is equivalent to the condition

$$\min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-b^*}(l) = \varepsilon > 0$$

with some $b^* \in B$. In turn, this condition is equivalent to the inclusion $A - b^* \supseteq B_\varepsilon(0)$, i.e., $A \supseteq B_\varepsilon(b^*)$. □

We proceed with some auxiliary results. Let $A \subseteq \mathbb{R}^n$ be a non-empty convex set of full dimension¹² and not coinciding¹³ with \mathbb{R}^n .

Then $x \in \text{cl}(A)$ is equivalent to $\sigma_A(l) - \langle x, l \rangle \geq 0$ for any $l \in S_1(0)$, where $S_1(0) = \{l : \langle l, l \rangle = 1\}$ is the unit sphere centered at the point 0, and $x \in f(A)$ is equivalent to $\sigma_A(l) - \langle x, l \rangle > 0$ for any $l \in S_1(0)$ [175, Theorem 13.1]. We introduce a valuable function for further considerations:

$$d_A(x) = \min_{l \in S_1(0)} [\sigma_A(l) - \langle x, l \rangle] = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{A-x}(l). \quad (10.1.17)$$

From (10.1.17) it follows that the function $x \mapsto d_A(x)$ is concave. In addition, this function is bounded above by an affine function due to the assumption $A \neq \mathbb{R}^n$: there exists a vector $l^* \in S_1(0)$ such that $\sigma_A(l^*) < \infty$, and hence $d_A(x) \leq \sigma_A(l^*) - \langle x, l^* \rangle$.

¹²We call a set $A \subseteq \mathbb{R}^n$ full-dimensional if its affine hull $\text{aff}(A)$ coincides with the entire space \mathbb{R}^n , which is equivalent to the non-empty interior of its convex hull, $f(\text{conv}(A)) \neq \emptyset$.

¹³In this case, the set A has a non-empty boundary.

For $x \notin \text{cl}(A)$, we have the equality $d_A(x) = -\rho(x, A)$, where $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$, $\rho(x, y) = \|x - y\|$, and $\|\cdot\|$ denotes the Euclidean norm. Indeed, in this case, for any $y \in \text{cl}(A)$,

$$d_A(x) = \min_{l \in S_1(0)} [(\sigma_A(l) - \langle y, l \rangle) + (\langle y, l \rangle - \langle x, l \rangle)] \geq \min_{l \in S_1(0)} [\langle y, l \rangle - \langle x, l \rangle] = -\|x - y\|,$$

which yields the lower bound $d_A(x) \geq -\rho(x, A)$. On the other hand, $\rho(x, A) = \rho(0, A - x) = \min\{\rho(0, z) : z \in \text{cl}(A - x)\}$, and the minimum is achieved at a single point¹⁴ $z^* \in \text{cl}(A - x)$ and equals $\|z^*\| > 0$ due to the assumption $0 \notin \text{cl}(A) - x = \text{cl}(A - x)$. According to [175, Theorem 27.4], the minimum of the function $z \rightarrow \|z\|^2$ on the set $\text{cl}(A - x)$ is achieved at a point $z^* \in \text{cl}(A - x)$ if and only if the antigradient at this point, $-2z^*$, is normal to the set $\text{cl}(A - x)$. In other words, $-2z^*$ lies in the cone normal to $\text{cl}(A - x)$, i.e., $\langle z - z^*, -2z^* \rangle \leq 0$ for all $z \in \text{cl}(A - x)$. Let us choose $l^* = -\|z^*\|^{-1}z^* \in S_1(0)$; then from the latter inequality it follows that $\langle z, l^* \rangle \leq \langle z^*, l^* \rangle$ for any $z \in \text{cl}(A - x)$. Thus, $\sigma_{A-x}(l^*) = \langle z^*, l^* \rangle = -\|z^*\|$. However, due to (10.1.17), we have the inequality $d_A(x) \leq \sigma_{A-x}(l^*) = -\rho(x, A)$.

The concave function $d_A(\cdot)$ finite everywhere is continuous; since $d_A(x) > 0$ for $x \in f(A)$ and $d_A(x) < 0$ for $x \notin \text{cl}(A)$, we obtain $d_A(x) = 0$ for $x \in \text{bd}(A)$.

For $x \in f(A)$, the value $d_A(x)$ is the maximum radius of a closed ball centered at the point x and contained in the set $\text{cl}(A)$. Indeed, there exists a number $\varepsilon > 0$ such that $\text{cl}(A) \supseteq \bar{B}_\varepsilon(x)$. Further, $\text{cl}(A) \supseteq \bar{B}_\delta(x)$ is equivalent to $\text{cl}(A - x) \supseteq \bar{B}_\delta(0)$, being, in turn, equivalent to $\sigma_{A-x}(z) \geq \delta\|z\|$ [168, Proposition 9.5]. The latter condition is equivalent to $d_A(x) \geq \delta$ by (10.1.17).

The value $d_A(x)$ can be characterized as the sign-variable distance between the point x and the boundary of the set A : positive for $x \in \text{int}(A)$, zero for $x \in \text{bd}(A)$, and negative for $x \notin \text{cl}(A)$. This fact is obvious in the cases $x \notin \text{cl}(A)$ and $x \in \text{bd}(A)$. If $x \in f(A)$, consider balls $\bar{B}_{d_A(x) + \varepsilon_k}(x)$, where $\varepsilon_k > 0$ and $\varepsilon_k \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$. We choose points $y_k \in \bar{B}_{d_A(x) + \varepsilon_k}(x)$ such that $\|y_k - x\| = d_A(x) + \varepsilon_k$ and $y_k \notin \text{cl}(A)$ and choose a convergent subsequence $y_{k_m} \rightarrow y^*$. Then $\|y^* - x\| = d_A(x)$, so $y^* \in \bar{B}_{d_A(x)} \subseteq \text{cl}(A)$, and any neighborhood of the point y^* has points from the complement of the set $\text{cl}(A)$, i.e., $y^* \in \text{bd}(A)$. Thus, $\rho(x, \text{bd}(A)) \leq d_A(x)$; the inverse inequality follows from the inclusion $\bar{B}_{d_A(x)} \subseteq \text{cl}(A)$.

Finally, the function $x \mapsto d_A(x)$ satisfies the Lipschitz condition with constant 1. If points x_1 and x_2 both lie in $\text{cl}(A)$ or $\mathbb{R}^n \setminus f(A)$, then this property is immediate from [168, Lemma 5.1]. Now let $x_1 \in f(A)$ and $x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \text{cl}(A)$. We connect these points with the segment $[x_1, x_2]$. A point in the relative interior of this segment, x^* , lies on the boundary $\text{bd}(A)$ and $\|x_2 - x_1\| = \|x_2 - x^*\| + \|x^* - x_1\|$. Therefore,

$$\begin{aligned} |d_A(x_2) - d_A(x_1)| &\leq |d_A(x_2) - d_A(x^*)| + |d_A(x^*) - d_A(x_1)| \leq \\ &\|x_2 - x^*\| + \|x^* - x_1\| = \|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

¹⁴The uniqueness of the point closest to a closed set is a characteristic property of convex sets [140, Theorem 9.3].

For a convex set $A \neq \mathbb{R}^n$ with a non-empty interior and a non-empty set $B \subseteq \mathbb{R}^n$, from (10.1.14) we have

$$m(A, B) = \sup_{b \in B} d_A(b), \quad (10.1.18)$$

where $d_A(\cdot)$ is given by (10.1.17). Summarizing the above properties of the sign-variable distance $d_A(\cdot)$, we arrive at the following result.

Proposition 10.1.2. *Let $A \subset \mathbb{R}^n$ be a non-empty convex set of full dimension.*

- 1) *If the set B intersects $\text{int}(A)$, then $m(A, B)$ is the “greatest”¹⁵ radius of an open ball contained in the set A when its center is chosen from the set $B \cap \text{int}(A)$ or, equivalently, the distance between “the farthest” point of $B \cap \text{int}(A)$ and $\text{bd}(A)$, the boundary of the set A .*
- 2) *If $m(A, B) \leq 0$, then*

$$m(A, B) = -\text{dist}(A, B).$$

Hereinafter, assume that the uncertain price dynamics are described by the nondegenerate model¹⁶, in which the compact sets $K_t(\cdot)$ are full-dimensional, i.e., condition (2.4.2) holds. In this case, the robust condition of no arbitrage RNDSAUP is equivalent to the geometric condition (2.4.3).

Theorem 10.1.2. *Consider the nondegenerate price dynamics model (with condition (2.4.2)) under the robust condition of no deterministic sure arbitrage with unbounded profit RNDSAUP. Assume that for each $t = 1, \dots, N$, the set-valued mappings $\text{conv}(K_t(\cdot))$ and $\text{bar}(D_t(\cdot))$ are lower semicontinuous whereas the compact-valued mappings $K_t(\cdot)$ are upper semicontinuous.¹⁷ Then for $t = 1, \dots, N$, the functions $x \mapsto m(\text{conv}(K_t(x)), \text{bar}(D_t(x)))$ are lower semicontinuous and*

$$\inf_{x \in B_{t-1}} p_t(K_t(x)) > 0. \quad (10.1.19)$$

Proof. Note that the upper semicontinuity of the compact-valued mapping $K_t(\cdot)$ will be preserved when passing to the closure¹⁸ of the convex hull $\text{conv}(K_t(\cdot))$; see [114, Proposition 2.42]. Therefore, the compact-valued mapping $K_t^*(\cdot) = \text{conv}(K_t(\cdot))$ is continuous; according to [114, Corollary 2.69], continuity and h -continuity are equivalent for compact-valued mappings.

¹⁵We mean the supremum. If the set B is closed, the supremum in (10.1.18) is reached due to the continuous function $d_A(\cdot)$; generally speaking, the maximizer is not unique.

¹⁶The nondegeneracy of the model in the initial problem statement is quite natural. However, degenerate price dynamics models may arise when passing to a (mathematically) equivalent problem where the compact sets $K_t(\cdot)$ are replaced by the supports of the most unfavorable mixed market strategies (if they are reached) concentrated at most at $n+1$ points; as an illustration, see Example 8.4.1. In addition, degeneracy may occur under an inappropriate numerical approximation of the model.

¹⁷For the lower semicontinuity of the set-valued mapping $\text{conv}(K_t(\cdot))$, it suffices to require the lower semicontinuity of the set-valued mapping $K_t(\cdot)$ [114, Proposition 2.42].

¹⁸The convex hull of a compact set in \mathbb{R}^n is itself compact.

Using item 2 of Proposition 10.1.1 and the Lipschitz property of the function $x \mapsto d_A(x)$ (with the Lipschitz constant 1), we obtain

$$\begin{aligned} & |d_{K_t^*(x_1)}(y_1) - d_{K_t^*(x_2)}(y_2)| \leq \\ & |d_{K_t^*(x_1)}(y_1) - d_{K_t^*(x_2)}(y_1)| + |d_{K_t^*(x_2)}(y_1) - d_{K_t^*(x_2)}(y_2)| \leq \quad (10.1.20) \\ & h_\rho(K_t^*(x_1), K_t^*(x_2)) + \|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

From inequalities (10.1.20) it follows that the function $(x, y) \mapsto d_{K_t^*(x)}(y)$ is jointly continuous. By Berge's theorem 3.1.1 (see item 1° of Remark 3.1.5), considering the lower semicontinuity of the set-valued mapping $\text{bar}(D_t(\cdot))$, the function

$$x \mapsto \mathfrak{m}(\text{conv}(K_t(x)), \text{bar}(D_t(x))) = \sup_{y \in \text{bar}(D_t(x))} d_{K_t^*(x)}(y)$$

is lower semicontinuous. Due to the upper semicontinuity of the compact-valued mapping $K_t(\cdot)$, the path set B_{t-1} is compact; see Proposition 3.1.1. Therefore, the lower semicontinuous function $x \mapsto \mathfrak{m}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \text{bar}(D_t(\cdot)))$ achieves minimum at some point $x_{t-1}^* \in B_{t-1}$, and this minimum is positive due to the “no arbitrage” criterion (2.4.3) and item 1 of Proposition 10.1.2. The conclusion follows based on item 1 of Proposition 10.1.1 (inequality (10.1.15)) and equality (10.1.8) from item 1 of Theorem 10.1.1. \square

Remark 10.1.1. It may be difficult to verify the lower semicontinuity of the set-valued mapping $\text{bar}(D_t(\cdot))$ in terms of the properties of the set-valued mapping $D_t(\cdot)$. Exceptions are:

- the case of static trading constraints $D_t(\cdot) \equiv D$ (in particular, no trading constraints, i.e., $D = \mathbb{R}^n$),
- the case where $D_t(\cdot)$ is a compact-valued mapping (in this case, $\text{bar}(D_t(\cdot)) \equiv \mathbb{R}^n$).

In these two cases, the lower semicontinuity of the set-valued mapping $\text{bar}(D_t(\cdot))$ automatically holds.

Remark 10.1.2. The case of no trading constraints ($D_t(\cdot) = \mathbb{R}^n$) corresponds to the equalities $\text{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$ and $\text{rec}(D_t(\cdot)) = \mathbb{R}^n$, and condition RNDSAUP is equivalent to RNDAO, the robust condition of no deterministic arbitrage opportunities (see the criterion (2.4.8)). Thus, if condition RNDSAUP is true, then condition (2.4.2) automatically holds (i.e., the price dynamics are nondegenerate). In this case, the structural stability threshold is

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_t(K_t(\cdot)) &= \mathfrak{n}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \{0\}) = \inf_{l \in S_1(0)} \sigma_{K_t(\cdot)}(l) = \\ & d_{\text{conv}(K_t(\cdot))}(0) = \mathfrak{m}(\text{conv}(K_t(\cdot)), \{0\}), \end{aligned} \quad (10.1.21)$$

coinciding with the maximum radius of the ball centered at the point 0 contained in the set $\text{conv}(K_t(\cdot))$ or, equivalently, with the distance between the point 0 and

$\text{bd}(\text{conv}(K_t(\cdot)))$, the boundary of the set $\text{conv}(K_t(\cdot))$. (This distance is positive due to condition RNDAO.)

Thus, in the case of no trading constraints, the structural stability threshold $\mathfrak{p}_t(K_t(\cdot))$ coincides with $r(K_t(\cdot))$, where r is given by (4.1.8), and the best uniform lower bound \mathfrak{p}_t^* of the structural stability threshold (by the price history, see formula (10.1.13)) coincides with the value r_t^* (4.2.17), which appears in the estimated modulus of continuity of the Bellman–Isaacs function (see Proposition 4.2.2).

Example 10.1.1. As an example of calculating the structural stability threshold, consider the generalised Kolokoltsov’s model with price dynamics (8.4.1), where

$$C^* = \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]; \quad 0 < \alpha_i < \beta_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

and with trading constraints (7.1.5), in our case completely prohibiting any short positions, i.e.,

$$D_t(\cdot) \equiv D = [0, \infty)^n, \quad t = 1, \dots, N. \quad (10.1.22)$$

We use the notation $C' = C^* - e$. Since the set D is a cone, its barrier cone $\text{bar}(D)$ coincides with the polar cone D° , in this case coinciding with the cone $-D$. Therefore, condition NDSAUP for this model, (10.5.12), can be written as $C' \cap (-\infty, 0]^n \neq \emptyset$, where $C' = C^* - e$ and $e = (1, \dots, 1)$. Note that it is equivalent to the inequalities $\alpha_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$. Clearly, if at least one value α_j is 1, condition RNDSAUP will fail: an arbitrarily small shift of the set $K_t(\cdot)$ by the vector εe_i , where $\varepsilon > 0$ and e_i is a vector whose i th component is 1 and the others are 0, has an empty intersection with $\text{bar}(D) = -D$. Thus, in this case, condition RNDSAUP will hold under the inequalities

$$\alpha_i < 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.1.23)$$

We fix a time instant $t = 1, \dots, N$. According to (4.2.23), the support function has the form

$$\sigma_{K_t(x)}(z) = \sup_{y \in K_t(x)} \sum_{i=1}^n z^i y^i = \sup_{L \in C'} \sum_{i=1}^n z^i L^i x^i = \sigma_{C'}((z^1 x^1, \dots, z^n x^n)) = \sigma_{C'}(\Lambda(z)x),$$

where $\Lambda(z)$ is a diagonal matrix with

$$\Lambda(z)_{ij} = \begin{cases} z^i & \text{for } i = j, \\ 0 & \text{for } i \neq j. \end{cases}$$

Note that $\Lambda(z)x = \Lambda(x)z$ since the i th component of this vector is $z_i x_i$. For the static trading constraint (10.1.22), D is a closed convex cone, so $\text{rec}(D) = D$.

Assume that the initial price vector is known: $X_0 = x_0$, and its components are positive. Using formula (10.1.9) for the feasible price vector at a time instant $t - 1$ (see Theorem 10.1.1), we have $x \in \prod_{i=1}^n [x_0^i \alpha_i^{t-1}, x_0^i \beta_i^{t-1}]$ and

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) = \min_{l \in S_1(0) \cap (-\infty, 0]^n} \sigma_{K_t(x)}(l) = \min_{l \in S_1(0) \cap (-\infty, 0]^n} \sigma_{C'}(\Lambda(x)l). \quad (10.1.24)$$

The support function $\sigma_{C'}$ of the parallelepiped C' at the point $u = (u_1, \dots, u_n)$ is

$$\sigma_{C'}(u) = \sum_{i=1}^n (\alpha'_i u_i) \vee (\beta'_i u_i),$$

where $\alpha'_i = \alpha_i - 1$ and $\beta'_i = \beta_i - 1$. In addition,

$$\bar{\sigma}_{C'}(u) = \sum_{i=1}^n \alpha'_i u_i \quad (10.1.25)$$

for the vector $u \in (-\infty, 0]^n$. Also, $\alpha'_i < 0$ due to (10.1.23). Considering the positive components of the vector x , from (10.1.24) and (10.1.25) it follows that

$$\mathbf{p}_t(K_t(x)) = \min_{l \in S_1(0) \cap (-\infty, 0]^n} \sum_{i=1}^n \alpha'_i x_i l_i. \quad (10.1.26)$$

We introduce the change of variables

$$l_i = -\sqrt{q_i}, \quad (q_1, \dots, q_n) \in S_{n-1},$$

where S_{n-1} denotes the $(n-1)$ -dimensional simplex, i.e.,

$$S_{n-1} = \{q = (q_1, \dots, q_n) : q_i \geq 0, i = 1, \dots, n; \sum_{i=1}^n q_i = 1\}.$$

Then the minimization problem (10.1.26) can be written as

$$\mathbf{p}_t(K_t(x)) = \min_{q \in S_{n-1}} \sum_{i=1}^n (-\alpha'_i) x_i \sqrt{q_i}. \quad (10.1.27)$$

The concave function (10.1.27) achieves minimum at the extreme points of the simplex S_{n-1} , i.e., for $q = e_i$, $i = 1, \dots, n$. For this example, the structural stability threshold is

$$\mathbf{p}_t(K_t(x)) = \bigwedge_{i=1}^n (1 - \alpha_i) x_i, \quad (10.1.28)$$

and

$$\inf_{x \in B_{t-1}} \mathbf{p}_t(K_t(x)) = \bigwedge_{i=1}^n (1 - \alpha_i) x_i^i \alpha_i^{t-1}. \quad (10.1.29)$$

Remark 10.1.3. Example 10.1.1 is largely illustrative since the result is intuitively clear. However, replacing the rectangular parallelepiped with an ellipsoid complicates the things: in this case, we have to solve a nonlinear programming problem (generally speaking, in a numerical way).

Consider the ellipsoid

$$C^* = \{m = (m^1, \dots, m^n) : \langle \Gamma^{-1}(m - \mu), m - \mu \rangle \leq 1\}, \quad (10.1.30)$$

where Γ is a symmetric positive definite (hence, nonsingular) matrix¹⁹ and $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Its support function has the form

$$\sigma_{C^*}(h) = \langle \mu, h \rangle + \sqrt{\langle \Gamma h, h \rangle}.$$

The parameters of the ellipsoid E are chosen so that $E \subseteq (0, \infty)^n$, which is equivalent to the system of inequalities

$$\langle \mu, e_i \rangle > \sqrt{\langle \Gamma e_i, e_i \rangle}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.1.31)$$

where e_i denotes a vector whose coordinates are all 0 except the i th coordinate equal to 1. Since

$$\sigma_{K_t(x)}(z) = \sigma_{C'}(z) = \langle \Lambda(x)(\mu - e), z \rangle + \sqrt{\langle \Lambda(x)\Gamma\Lambda(x)z, z \rangle},$$

$K_t(x)$ is also an ellipsoid, and the structural stability threshold takes the form²⁰

$$p_t(K_t(x)) = \min_{l \in S_1(0) \cap (-\infty, 0]^n} \left[\langle \Lambda(x)(\mu - e), l \rangle + \sqrt{\langle \Lambda(x)\Gamma\Lambda(x)l, l \rangle} \right]. \quad (10.1.32)$$

10.2 Sensitivity to Small Perturbations of Compact Sets Describing Uncertain Price Dynamics

As noted in Section 2.4, typically trading constraints described by set-valued mappings $D_t(\cdot)$ are known exactly, i.e., have no measurement errors. One exception is the model from Example 1.1.4, where the trading constraints are set by the risk management department of a financial institution that takes contingent liabilities from selling an option. This department establishes limits on a particular indicator²¹ of market risk for the hedging portfolio. In the example mentioned, the widespread Value-at-Risk (VaR) and the Bachelier market price dynamics model have been chosen. In practice, a certain statistical estimate of this indicator is used, meaning that the indicator is determined with some statistical error. However, the rules for calculating the risk indicator by the price history \bar{x}_t are often fixed (e.g., see (10.5.14) and (10.5.15)): in reality, $D_t(\bar{x}_t)$ is determined by the price history precisely.

Below, we suppose that the payoff functions $g_t(\cdot)$ for an American option and the trading constraints described by $D_t(\cdot)$ are known exactly. Our attention will be focused on the compact-valued mappings $K_t(\cdot)$ describing the uncertain price dynamics: they are naturally considered approximate due to the inevitable statistical error of a stochastic description of market prices. (This description is, in principle, adopted to define the compact sets $K_t(\cdot)$.)

¹⁹For convenience, we interpret Γ as some covariance matrix and Γ^{-1} , its inverse, as the corresponding precision matrix.

²⁰With an appropriate change of the variables in this case, the structural stability threshold can be found by minimizing a positive definite quadratic form subject to mixed quadratic and linear constraints.

²¹Also called a risk measure.

In this case, it makes sense to consider approximate systems with an accuracy comparable to the known error. However, we have to preserve structural stability, which may require corrections to the original uncertain price dynamics model. Therefore, it may be appropriate to “coarsen” the description of the original market dynamics²² defined by the compact sets $K_t(\cdot)$, replacing them with the expanded ones²³

$$\check{K}_t(\cdot) = [K_t(\cdot)]^{\delta_t(\cdot)}, \quad t = 1, \dots, N, \tag{10.2.1}$$

for a given value $\delta_t(\cdot) \geq 0$.

The new market dynamics corresponding to (10.2.1) will be called *the regularizing coarsening at the level $\delta_t(\cdot)$* for the original market dynamics.

Lemma 10.2.1. *The support functions of the sets $A \neq \emptyset$ and $[A]^\delta$ have the relation²⁴*

$$\sigma_{[A]^\delta}(h) = \sigma_A(h) + \delta \|h\|. \tag{10.2.2}$$

In addition,

$$\mathbf{n}([A]^\delta, B) = \mathbf{n}(A, B) + \delta, \tag{10.2.3}$$

$$\mathbf{m}([A]^\delta, B) = \mathbf{m}(A, B) + \delta. \tag{10.2.4}$$

Proof. By the properties of the Minkowski sum, we have

$$\begin{aligned} \text{conv}([A]^\delta) &= \text{conv}(A + B_\delta(0)) = \text{conv}(A) + \text{conv}(B_\delta(0)) = \\ &= \text{conv}(A) + B_\delta(0) = [\text{conv}(A)]^\delta, \end{aligned}$$

which implies (10.2.2). Based on this equality, Lemma 10.1.1, and formula (10.1.4), we obtain

$$\mathbf{n}([A]^\delta, B) = \min_{l \in S_1(0)} \sigma_{[A]^\delta - B}(l) = \min_{l \in S_1(0)} [\sigma_{[A]^\delta}(l) + \sigma_{-B}(l)] = \mathbf{n}(A, B) + \delta.$$

According to (10.1.17) and (10.1.18), using (10.2.2) yields

$$\mathbf{m}([A]^\delta, B) = \sup_{b \in B} \min_{l \in S_1(0)} [\sigma_{[A]^\delta}(l) - \langle x, l \rangle] = \mathbf{m}(A, B) + \delta.$$

□

²²Intuitively, for full-dimensional compact sets $K_t(\cdot)$, the transition to the coarse model shall increase the structural stability threshold: the interior $\text{conv}(K_t(\cdot))$ will expand, and the geometric condition (2.4.3) will remain valid under a stronger perturbation of the system when holding for the original system. A more precise result is given below; see Proposition 10.2.1.

²³Recall that we adopt the notations $[A]^\delta = A + \bar{B}_\delta(0)$, $\delta \geq 0$, and the convention $+\infty + a = +\infty$ for $a \in \mathbb{R}$.

²⁴Note that for a non-empty convex set $A \neq \mathbb{R}^n$, the operation $[A]^\delta$ smoothens, in a certain sense, the boundaries of the set A : at an arbitrary boundary point of the set $[A]^\delta$, the normal cone for $[A]^\delta$ consists of a single ray [169, Theorem 6.1].

Proposition 10.2.1. *Under condition RNDSAUP, for $\delta_t(\cdot) \geq 0$,*

$$\mathbf{p}_t([K_t(\cdot)]^{\delta_t(\cdot)}) = \mathbf{p}_t(K_t(\cdot)) + \delta_t(\cdot), \quad t = 1, \dots, N. \quad (10.2.5)$$

In other words, if the structural stability threshold of the model at the time instant t (under a known price history) is finite, the regularizing coarsening of the original market dynamics at the level $\delta_t(\cdot) > 0$ will increase the structural stability threshold by $\delta_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$. In addition,

$$p_\rho([K_t(\cdot)]^{\delta_t(\cdot)}, K_t(\cdot)) = \delta_t(\cdot). \quad (10.2.6)$$

Proof. Formula (10.2.5) follows from formula (10.1.8) of Theorem 10.1.1 and formula (10.2.3) of Lemma 10.2.1. Formula (10.2.6) follows from (10.2.2). \square

We define the sets of feasible paths \check{B}_t on the time interval $[0, t]$ by

$$\begin{aligned} \check{B}_0 &= [K_0]^{\delta_0}; \\ \check{B}_t &= \{(\bar{x}_{t-1}, x_t) : \bar{x}_{t-1} \in \check{B}_{t-1}, x_t \in x_{t-1} + [K_t(\bar{x}_{t-1})]^{\delta_t(\bar{x}_{t-1})}\} = \\ &\{\check{x}_t : x_0 \in \check{K}_0, \Delta x_1 \in \check{K}_1(x_0), \dots, \Delta x_t \in \check{K}_t(\check{x}_t)\}, \quad t = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (10.2.7)$$

Let us denote²⁵

$$\check{\delta}_t = \inf\{\delta_t(x), x \in \check{B}_{t-1}\}. \quad (10.2.8)$$

The next result is immediate from Definition (10.1.19) and Proposition 10.2.1.

Corollary 10.2.1. *Consider $\check{K}_t(\cdot)$, the regularizing coarsening at the level $\delta_t(\cdot)$ for the original market dynamics. Under condition RNDSAUP, the uniform (by the price history) structural stability threshold $\check{\mathfrak{p}}_t^*$ of this coarsening is not smaller than $\mathfrak{p}_t^* + \check{\delta}_t$.*

Let $\delta(\cdot) = (\delta_1(\cdot), \dots, \delta_N(\cdot))$, where $\delta_t(\cdot)$ denotes the error in determining $K_t(\cdot)$ at step²⁶ t , be known from some considerations (e.g., statistical estimates based on retrospective data or expert assessments). In this case, if condition RNDSAUP holds for the original model, then we can apply the regularizing coarsening of the original system at the level coinciding with the data error.²⁷ If condition RNDSAUP fails, this may indicate an incorrect statement of the problem. A possible reason may also be the inconsistency of observed market data within the model. The idea of decreasing the data precision to achieve a correct statement was used in [222]. In addition, structural stability may be lost due to an (incorrect) numerical approximation of the original market dynamics. The result below may be useful from a practical point of view: it shows how to correct the model, data, or numerical method.

²⁵The value $\check{\delta}_t$ can be interpreted as the minimum regularization level at step t .

²⁶In this interpretation, it seems logical to suppose that $\delta_0 = 0$ (no error at the initial time instant).

²⁷For the coarsened system, condition RNDSAUP will be preserved when holding for the original system. Moreover, the structural stability threshold will be increased by $\delta_t(\cdot)$; see Proposition 10.2.1.

Corollary 10.2.2. *Let the price dynamics be nondegenerate in the sense (2.4.2) and $E_t = \{x \in B_{t-1} : \mathbf{m}(\text{conv}(K_t(x), \text{bar}(D_t(x))) \leq 0\} \neq \emptyset$. Then the original model does not satisfy RNDSAUP; however, this condition will hold after the regularizing coarsening of the original market dynamics at the level $\delta_t(x) > -\mathbf{m}(\text{conv}(K_t(x), \text{bar}(D_t(x))))$ for $x \in E_t, t = 1, \dots, N$.*

This result is immediate from items 1 and 2 of Proposition 10.1.2 and formula (10.2.4).

However, for another problem statement with $K_t(\cdot)$ approximated by the compact-valued mapping $\tilde{K}_t(\cdot)$ at a time instant t , we can interpret $\delta_t(\cdot)$ differently, i.e., as the requirement

$$h_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)) \leq \delta_t(\cdot) \tag{10.2.9}$$

imposed at step t on the calculation error (under a given price history).

Note that the price dynamics of the “perturbed” model corresponding to the “approximate” compact-valued mappings $\tilde{K}_t(\cdot), t = 1, \dots, N$, generates a new set of feasible paths:

$$\tilde{B}_t = \{\tilde{x}_t : x_0 \in \tilde{K}_0, \Delta x_1 \in \tilde{K}_1(x_0), \dots, \Delta x_t \in \tilde{K}_t(\tilde{x}_{t-1})\}.$$

In what follows, we use the inclusion²⁸ $\tilde{K}_t(\cdot) \subseteq \check{K}_t(\cdot) = K_t^{\delta(\cdot)}(\cdot)$; in this case²⁹, $h_\rho(K_t(\cdot), \check{K}_t(\cdot)) = e_\rho(\check{K}_t(\cdot), K_t(\cdot)) = \delta_t(\cdot)$. Therefore, the set of feasible paths \tilde{B}_t of the perturbed model is contained in the set \check{B}_t given by the relations (10.2.7).

Recall that the initial problem statement involves defining the set-valued mappings $x \mapsto K_t(x)$ and $x \mapsto D_t(x)$ and the function $x \mapsto g_t(x)$ for all $x \in (\mathbb{R}^n)^t$. The same applies to the dynamics of the approximate model, i.e., $x \mapsto \tilde{K}_t(x)$ is defined for all $x \in (\mathbb{R}^n)^t$. For an approximate solution of the problem, however, we need just the arguments $x \in \check{B}_t$ at step t .

Lemma 10.2.2. *Let the compact-valued mappings $x \mapsto K_t(x)$ be upper semicontinuous on B_{t-1} and the functions $\delta_t(\cdot)$ be upper semicontinuous, $t = 1, \dots, N$. Then the set-valued mappings $x \mapsto \check{K}_t(x) = K_t^{\delta(x)}(x)$ are upper semicontinuous on \check{B}_{t-1} , and the sets $\check{B}_t, t = 0, \dots, N$ are compact.*

Proof. Note that the sets $\check{K}_t(\cdot) = K_t^{\delta(\cdot)}(\cdot)$ are compact. Let us prove the lemma by induction. For the initial time instant $s = 0$, the set \check{B}_0 is compact. Assume that for $s = t \geq 0$, the set \check{B}_t is compact. Resting on the upper semicontinuity criterion for compact-valued mappings [114, Chapter 1, Proposition 2.19], for $s = t + 1$, we consider a sequence³⁰ of pairs (x_n, y_n) such that $y_n \in K_{t+1}^{\delta(x_n)}(x_n)$ and $x_n \rightarrow x$. We

²⁸Recall that $[A]^\delta = A + \tilde{B}_\delta(0), \delta \geq 0$.

²⁹The Pompeiu deviation has the form $e_\rho(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B)$; in a normalized space (in our case, \mathbb{R}^n), the Pompeiu deviation for the Euclidean metric $\rho(x, y) = \|x - y\|_2$ is given by $e_\rho(A, B) = \text{int}\{r \geq 0 : A \subseteq B + B_r(0)\}$. The Pompeiu–Hausdorff distance is defined as $h_\rho(A, B) = e_\rho(A, B) \vee e_\rho(B, A)$.

³⁰There is no need to use nets: we operate metric spaces.

choose $y'_n \in K_{t+1}(x_n)$ such that $\|y'_n - y_n\|_2 \leq \delta(x_n)$ and a subsequence $y'_{n_k} \rightarrow y' \in K_{t+1}(x)$, which exists by the criterion [114, Chapter 1, Proposition 2.19]. Then $\limsup \|y' - y_{n_k}\|_2 \leq \limsup \delta(x_{n_k}) \leq \delta(x)$. Therefore, we can extract a convergent subsequence $y_{n_{k_m}} \rightarrow y$ with $\|y' - y\|_2 \leq \delta(x)$, i.e., $y \in K_t^{\delta(x)}(x)$. Thus, the mapping $\check{K}_t(\cdot)$ is upper semicontinuous, and hence the mapping $x \mapsto F(x) = x + \check{K}_t(x)$ has the same property. By the inductive hypothesis, the set B_t is compact; according to Remark 3.1.4, the image $F(B_t)$ is therefore compact as well. Since the closed set B_{t+1} (see Remark 3.1.3) is contained in the compact set $B_t \times F(B_t)$, the set \check{B}_{t+1} is compact. \square

Our goal is to estimate the sensitivity of the solutions of the Bellman–Isaacs equations (BI) to the uniformly small perturbations of the compact sets $K_t(\cdot)$ within the original price dynamics model. We *do not impose any conditions concerning smoothness or even measurability* for the compact-valued mappings $\check{K}_t(\cdot)$ describing the price dynamics of the perturbed model.

Consider two classes of models with special trading constraints that may arise in practice³¹; in particular, see Examples 1.1.1–1.1.5. From this point onwards, assume that the sets $D_t(\cdot)$ are closed.

1) *The models with conic trading constraints:*

For $t = 1, \dots, N$ and any price history x , the sets $D_t(x)$ describing the trading constraints are convex cones.

2) *The models with bounded trading constraints:*

For $t = 1, \dots, N$ and any price history x , the sets $D_t(x)$ describing the trading constraints are bounded.

Both of these classes can be considered as special cases of a class with more general trading constraints, namely, when the sets $D_t(\cdot)$ are represented as the Motzkin decomposition. This is the class of convex sets written as the Minkowski sum of a closed convex cone and a compact convex set (such sets are automatically closed).³² We denote the class of such subsets of \mathbb{R}^n by $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. The class of convex sets represented as the Motzkin decomposition was introduced in [100]. The properties of sets from the class $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ were studied in [102] and [101]. A generalization of this class was proposed in [120].

The cone included in the Motzkin decomposition of some closed convex set is uniquely defined: it is the recession cone of this set [175, Corollary 9.1.2]. Generally speaking, the compact component in the Motzkin expansion is defined ambiguously. However, the sets from $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ in the partition of which the cones have zero

³¹To the best of our knowledge, there are no economically meaningful models in which the trading constraints $D_t(\cdot)$ are unbounded for some price histories and simultaneously bounded for other price histories.

³²The Minkowski sum of a closed convex set and a compact convex set is closed. This assertion follows from [114, Chapter 1, Proposition 2.16].

linear dimension³³, admit the minimal decomposition (with the minimal compact component). Such sets from $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ have a clear geometric interpretation: they are closed convex sets with the bounded set of their extreme points, as established in [102, Theorem 11.(i)]. Note that generally, we can apply a procedure for extracting a linear subset³⁴ described in [175, Chapter II, §8].

Thus, the models with conic trading constraints are obtained from the Motzkin decomposition if the recession cone does not reduce to the vector 0 for any price history; the models with bounded trading constraints arise when the recession cone reduces to the vector 0 for any price history.

Remark 10.2.1. For the trading constraints $D_t(\cdot)$ represented as the Motzkin decomposition $D_t(\cdot) = D_t^1(\cdot) + D_t^2(\cdot)$, where the first component in the Minkowski sum is conic and the second is compact, the barrier cone coincides with the polar cone $(D_t^1(\cdot))^\circ$.

Indeed, in view of item 2) of Example 7.1.1, we have

$$\text{bar}(D_t^1(\cdot) + D_t^2(\cdot)) = \text{bar}(D_t^1(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t^2(\cdot)) = (D_t^1(\cdot))^\circ \cap \mathbb{R}^n = (D_t^1(\cdot))^\circ.$$

Example 10.2.1. Consider a model with trading constraints represented as the Motzkin decomposition, which has a certain economic interpretation. Suppose that the risk management department of a company calculates a statistical measure of risk based on the price history, e.g., as in Example 1.1.4. In addition, the resulting trading constraints $D_t^2(\cdot)$ are compact convex sets containing the point 0. It seems natural to assume that the point 0 is an inner point of $D_t^2(\cdot)$, and the dependence on the price history is continuous. The trading strategies from the set $D_t^2(\cdot)$ are admissible. The risk management department only seeks to avoid traders taking (excessively risky) short positions, so adding long positions to admissible trading strategies leads to new admissible trading strategies. Thus, the resulting trading constraints are represented as the Motzkin decomposition:

$$D_t(\cdot) = D_t^1(\cdot) + D_t^2(\cdot), \quad t \in \{1, \dots, N\},$$

where the set $D_t^1(\cdot) = \text{rec}(D_t(\cdot)) \equiv [0, \infty)^n$ denotes the recession cone for $D_t(\cdot)$ and the compact-valued mappings $D_t^2(\cdot)$ are continuous.³⁵

Structural stability is required for the solution of (BI) for the perturbed system, considered as an approximate solution of (BI) for the original system, not to lose economic sense (i.e., have properties similar to the solutions of (BI) for the original system). For the models with bounded trading constraints, this is automatically satisfied.

For the models with unbounded trading constraints, we have to guarantee the robust condition of no sure arbitrage with unbounded profit RNDSAUP. A sufficient

³³Such a cone contains no linear subspaces; here, we adhere to the terminology of [175, Chapter II, §8].

³⁴This is the maximal linear subspace contained in the recession cone. For example, such a case may arise if there are no trading constraints on part of the assets.

³⁵Note that the sets $D_t^2(\cdot)$ in this example are not minimal in the Motzkin decomposition.

condition is that at each step, this error be less than the structural stability threshold introduced in Section 10.1.

According to Lemma 3.2.1, which assumes condition RNDSAUP and the closedness of the sets $D_t(\cdot)$, for any $a \geq C_t^*$ with C_t^* defined by (4.2.1) we have

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] = \inf_{h \in \widehat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]. \quad (10.2.10)$$

The set $\widehat{D}_t^a(\cdot)$ is given by (3.2.4), and it is compact. However, in some cases (particularly in this section), we will use the notations (3.2.11) and (3.2.12) for convenience:

$$\begin{aligned} E_t^a(x) &= \{h \in \mathbb{R}^n : \sigma_{K_t(x)}(h) \leq a\}, \\ \widehat{D}_t^a(x) &= D_t(x) \cap E_t^a(x). \end{aligned} \quad (10.2.11)$$

They simplify the description of the perturbed model:

$$\widehat{E}_t^a(x) = \{h \in \mathbb{R}^n : \sigma_{\widehat{K}_t(x)}(h) \leq a\}. \quad (10.2.12)$$

Lemma 10.2.3. *Under some price history x , let the closed set $D_t(x)$ be unbounded, the structural stability threshold be $\mathfrak{p}_t(K_t(x)) > 0$, and $a > 0$. Then³⁶*

$$\|\text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x)\|_2 \leq \frac{a}{\mathfrak{p}_t(K_t(x))}. \quad (10.2.13)$$

Proof. Since the set $D_t(x)$ is unbounded, the recession cone $\text{rec}(D_t(x))$ is nonzero, i.e., it contains at least one ray. Note that for $a > 0$, the set

$$\frac{1}{a} E_t^a(x) = \{h : \sigma_{K_t(x)}(-h) \leq 1\} = \{h : \sigma_{-K_t^*(x)}(h) \leq 1\}$$

is Minkowski polar for $-K_t^*(\cdot)$; see [140, formula 70] and [140, Theorem 12.2]. According to [140, Theorem 6.6, item a)], the point 0 is an interior point of the set polar to $-K_t^*(x)$: it is bounded due to compactness [140, Theorem 2.6]. Therefore, $0 \in \text{int}(E_t^a(x))$, so the convex set $\text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x)$ contains points differing from 0. Consequently, for a sufficiently small number $\theta > 0$,

$$\left[\theta^{-1}(\text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x))\right] \cap S_1(0) \neq \emptyset. \quad (10.2.14)$$

We fix $\theta > 0$ satisfying condition (10.2.14) and consider the set

$$F_t^a(x, \theta) = \{h \in \text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x) : \|h\| = \theta\}. \quad (10.2.15)$$

Note that $h \in F_t^a(x, \theta)$ is equivalent to $h = \theta l$, where $l \in \left[\theta^{-1}(\text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x))\right] \cap S_1(0)$, so $F_t^a(x, \theta) \neq \emptyset$. For any vector $h \in \text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x)$, we have

³⁶Recall that $\|A\|_2 = \sup\{\|z\|_2 : z \in A\}$, where $\|h\|_2$ denotes the Euclidean norm.

$\sigma_{K_t(x)}(-h) \leq a$, which gives the inequalities

$$\begin{aligned}
 a &\geq \sup_{h \in F_t^a(x, \theta)} \sigma_{K_t(x)}(-h) = \theta \sup_{l \in \left[\theta^{-1} \left(\text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x) \right) \right] \cap S_1(0)} \sigma_{K_t(x)}(-l) \geq \\
 &\theta \inf_{l \in \left[\theta^{-1} \left(\text{rec}(D_t(x)) \cap E_t^a(x) \right) \right] \cap S_1(0)} \sigma_{K_t(x)}(-l) \geq \\
 &\theta \inf_{l \in \left[\theta^{-1} \left(\text{rec}(D_t(x)) \right) \right] \cap S_1(0)} \sigma_{K_t(x)}(-l) = \\
 &\theta \inf_{l \in -\text{rec}(D_t(x)) \cap S_1(0)} \sigma_{K_t(x)}(l) = \theta \mathbf{p}_t(K_t(x)).
 \end{aligned}
 \tag{10.2.16}$$

Thus, $\theta \leq \frac{a}{\mathbf{p}_t(K_t(x))}$, and the conclusion follows. □

Remark 10.2.2. 1) A closed convex set containing the origin contains its recession cone [175, Corollary 8.3.2], so $D_t(\cdot) \supseteq \text{rec}(D_t(\cdot))$.

2) Recall that by Theorem 10.1.1, condition RNDSAUP implies $\mathbf{p}_t(K_t(\cdot)) > 0$.

3) Adopting the natural convention $\frac{a}{0} = +\infty$ for $a > 0$, we trivially obtain inequality (10.2.13) in the case $\mathbf{p}_t(K_t(x)) = 0$. Moreover, with another natural convention $\frac{a}{+\infty} = 0$ for $a \in \mathbb{R}$, inequality (10.2.13) will trivially hold if the closed set $D_t(x)$ is bounded.

We denote

$$\check{\mathbf{p}}_t^* = \inf_{x \in \check{B}_{t-1}} \mathbf{p}_t(K_t(x))
 \tag{10.2.17}$$

and

$$\check{\delta}_t^* = \sup_{x \in \check{B}_{t-1}} \delta_t(x),
 \tag{10.2.18}$$

where $\delta_t(x)$ specifies the calculation error requirements; see formula (10.2.9).

Theorem 10.2.1. *Consider the original model in which the functions $g_t(\cdot)$ and the compact-valued mappings $K_t(\cdot)$ are continuous, the functions $\delta_t(\cdot)$ are upper semicontinuous, $t = 1, \dots, N$, and the set-valued mappings $D_t(\cdot)$ are closed and lower semicontinuous³⁷, with $D_t(\cdot)$ represented as the Motzkin decomposition*

$$D_t(\cdot) = D_t^1(\cdot) + D_t^2(\cdot), \quad t \in \{1, \dots, N\},
 \tag{10.2.19}$$

where the set $D_t^1(\cdot) = \text{rec}(D_t(\cdot))$ is the recession cone for $D_t(\cdot)$ and the compact-valued mappings $D_t^2(\cdot)$ are continuous. In addition, let the functions $\delta_t(\cdot)$ be upper semicontinuous, $t = 1, \dots, N$, and the calculation errors satisfy the constraints³⁸

$$\inf_{x \in \check{B}_{t-1}} \left[\mathbf{p}_t(K_t(x)) - \delta_t(x) \right] = \gamma_t > 0 \quad t = 1, \dots, N.
 \tag{10.2.20}$$

³⁷These conditions on $g_t(\cdot)$, $K_t(\cdot)$, and $D_t(\cdot)$, together with condition RNDSAUP (which follows from both assumption 1) and assumption 2) below), ensure the continuous solutions of the Bellman-Isaacs equations; see Theorem 3.2.2.

³⁸Inequalities (10.2.20) imply $\check{\mathbf{p}}_t^* \geq \gamma_t > 0$. In turn, the inequality $\check{\mathbf{p}}_t^* > 0$ yields condition RNDSAUP; sufficient conditions for $\check{\mathbf{p}}_t^* > 0$ have been formulated in Theorem 10.1.2. Also, inequality (10.2.20) holds if $\delta_t^* < \check{\mathbf{p}}_t^*$.

Then the errors of solving the Bellman–Isaacs equations approximately can be estimated as³⁹

$$\sup_{x \in \check{B}_t} |v_t^*(x) - \tilde{v}_t^*(x)| \leq \sum_{s=t+1}^N [\omega_{v_s^*}^{\check{B}_s}(\check{\delta}_s^*) + R_s^* \check{\delta}_s^*], \quad (10.2.21)$$

where $\check{\delta}_t^* < \infty$;

$$R_t^* = \frac{\check{C}_t^* + \check{b}_t^* + \check{\delta}_t^* \check{d}_t^*}{\gamma_t} + \check{d}_t^*; \quad (10.2.22)$$

$$\check{C}_t^* = \bigvee_{s=t}^N \check{C}_s, \quad (10.2.23)$$

$$\check{C}_t = \sup_{x \in \check{B}_t} g_t(x);$$

$$\check{b}_t^* = \max_{x \in \check{B}_{t-1}} \max_{h \in -D_t^2(x)} \sigma_{K_t(x)}(h); \quad (10.2.24)$$

$$\check{d}_t^* = \max_{x \in \check{B}_{t-1}} \|D_t^2(x)\|_2, \quad (10.2.25)$$

and the moduli of continuity $\omega_{v_t^*}^{\check{B}_t}(\cdot)$ in (10.2.21) can be estimated by the recurrent relations⁴⁰ (4.2.4).

Proof. According to Lemma 10.2.2, the sets \check{B}_t are compact, meaning that the upper semicontinuous function $\delta_t(x)$ achieves a maximum value $\delta_t^* < \infty$ on \check{B}_t .

The arguments of $v_t^*(\cdot)$ and $\tilde{v}_t^*(\cdot)$ (the solutions of the Bellman–Isaacs equations for the original and perturbed system, respectively) will be considered from the set \check{B}_{t-1} (10.2.7) since $B_t \subseteq \check{B}_t$ and $\tilde{B}_t \subseteq \check{B}_t$, $t = 0, \dots, N$. We denote

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \quad (10.2.26)$$

and

$$\tilde{\rho}_t(\cdot) = \inf_{h \in \tilde{D}_t(\cdot)} \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy], \quad (10.2.27)$$

where $\tilde{w}_t(\tilde{x}_{t-1}, y) = \tilde{v}_t^*(\tilde{x}_{t-1}, x_{t-1} + y)$.

The Bellman–Isaacs equations can be written as

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \bigvee \rho_t(\cdot), \quad t = N, \dots, 1 \end{aligned} \quad (10.2.28)$$

(for the original system) and

$$\begin{aligned} \tilde{v}_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \bigvee \tilde{\rho}_t(\cdot), \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned} \quad (10.2.29)$$

³⁹Under the convention that the sum over an empty set of indices is zero.

⁴⁰Hence, the right-hand side of inequality (10.2.21) vanishes as $\check{\delta}_t^* \rightarrow 0$, $t = 0, \dots, N$, i.e., the solution of the Bellman–Isaacs equations for the perturbed model is uniformly close to its counterpart for the original model.

(for the perturbed system). Therefore,

$$|v_N^*(\cdot) - \tilde{v}_N^*(\cdot)| = 0.$$

By Lemma 4.1.1 and formula (4.1.3), for $t = N, \dots, 1$, from inequalities (10.2.28) and (10.2.29) we obtain

$$|v_{t-1}^*(\cdot) - \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot)| \leq |g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot) - g_{t-1}(\cdot) \vee \tilde{\rho}_t(\cdot)| \leq |\rho_t(\cdot) - \tilde{\rho}_t(\cdot)|, \quad t = N, \dots, 1. \tag{10.2.30}$$

Assume that for $t = 1, \dots, N$, there are compact sets $D_t^*(\cdot) \subseteq D_t(\cdot)$ such that

$$\sup_{x \in \tilde{B}_t} \|D_t^*(x)\|_2 = R_t^* < \infty \tag{10.2.31}$$

and the following inclusions simultaneously hold for any $x \in \check{B}_{t-1}$:

$$D_t(x) \cap E_t^{C_t^*}(x) \subseteq D_t^* \tag{10.2.32}$$

and

$$D_t(x) \cap \tilde{E}_t^{\tilde{C}_t^*}(x) \subseteq D_t^*, \tag{10.2.33}$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{C}_t^* &= \bigvee_{s=t}^N \tilde{C}_s, \\ \tilde{C}_t &= \sup_{x \in \tilde{B}_t} g_t(x). \end{aligned}$$

Then

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t^*} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \tag{10.2.34}$$

and

$$\tilde{\rho}_t(\cdot) = \inf_{h \in \tilde{D}_t^*} \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy]. \tag{10.2.35}$$

In view of (10.2.30) and Lemma 4.1.1, formula (4.1.1), we have the inequality

$$|v_{t-1}^*(\cdot) - \tilde{v}_{t-1}^*(\cdot)| \leq \sup_{h \in D_t^*(\cdot)} \left| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy] \right|. \tag{10.2.36}$$

Next,

$$\begin{aligned} & \left| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy] \right| \leq \\ & \left| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \right| + \\ & \left| \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [\tilde{w}_t(\cdot, y) - hy] \right|. \end{aligned} \tag{10.2.37}$$

The first term on the right-hand side of inequality (10.2.37) is estimated using Lemma 4.1.3, item 2, through the estimated moduli of continuity⁴¹ of the function $y \mapsto w_t(\cdot, y) + hy$. In addition, for $h \in D^*(\cdot)$, we have the inequality $\|h\|_2 \leq R_t^*$ by assumption (10.2.31). As a result,

$$\left| \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] - \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] \right| \leq \omega_{w_t}^{\check{B}_t}(h_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot))) + \|h\|_2 h_\rho(K_t(\cdot), \tilde{K}_t(\cdot)) \leq \omega_{w_t}^{\check{B}_t}(\check{\delta}_t^*) + R_t^* \check{\delta}_t^*. \tag{10.2.38}$$

(This inequality uses the uniform continuity of the functions v_t^* (or equivalently, the functions w_t) on a compact⁴² set \check{B}_t , which holds by Theorem 4.2.1.

The second term on the right-hand side of inequality (10.2.37) does not exceed

$$\sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} |w_t(\cdot, y) - \tilde{w}_t(\cdot, y)| \leq \sup_{y \in \tilde{K}_t(\cdot)} |w_t(\cdot, y) - \tilde{w}_t(\cdot, y)|. \tag{10.2.39}$$

From (10.2.36)–(10.2.39) it follows that

$$\begin{aligned} & \sup_{\bar{x}_{t-1} \in \check{B}_{t-1}} |v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) - \tilde{v}_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1})| \leq \\ & \omega_{w_t}^{\check{B}_t}(\check{\delta}_t^*) + R_t^* \check{\delta}_t^* + \sup_{\bar{x}_{t-1} \in \check{B}_{t-1}} \sup_{y \in \tilde{K}_{t-1}} |v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - \tilde{v}_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y)| = \\ & \omega_{w_t}^{\check{B}_t}(\check{\delta}_t^*) + R_t^* \check{\delta}_t^* + \sup_{\bar{x}_t \in \check{B}_t} |v_t^*(\bar{x}_t) - \tilde{v}_t^*(\bar{x}_t)|, \end{aligned}$$

Denoting

$$\varepsilon_t = \sup_{x \in \check{B}_t} |v_t^*(x) - \tilde{v}_t^*(x)|, \tag{10.2.40}$$

we obtain the recurrence inequalities

$$\begin{aligned} \varepsilon_N &= 0; \\ \varepsilon_{t-1} &\leq [\omega_{w_t}^{\check{B}_t}(\check{\delta}_t^*) + R_t^* \check{\delta}_t^*] + \varepsilon_t, \quad t = N, \dots, 1, \end{aligned} \tag{10.2.41}$$

and hence

$$\varepsilon_t \leq \sum_{s=t+1}^N [\omega_{w_s}^{\check{B}_s}(\check{\delta}_s^*) + R_s^* \check{\delta}_s^*]. \tag{10.2.42}$$

Now we construct compact sets $D_t^*(\cdot) \subseteq D_t(\cdot)$ satisfying (10.2.31). The function

$$x \mapsto \max_{h \in -D_t^2(x)} \sigma_{K_t(x)}(h)$$

is upper semicontinuous and therefore achieves maximum on the compact set \check{B}_{t-1} . In (10.2.24), this maximum has been denoted by \check{b}_t^* . If $h \in D_t(x) \cap E_t^a(x)$, it can be represented as $h = h_1 + h_2$, where $h_1 \in D_t^1(x)$ and $h_2 \in D_t^2(x)$. Consequently,

$$\sigma_{K_t(x)}(h_1) = \sigma_{K_t(x)}(h - h_2) \leq \sigma_{K_t(x)}(h) + \sigma_{K_t(x)}(-h_2) \leq a + \check{b}_t^*,$$

⁴¹Here, we use the notation for the modulus of continuity introduced in formula (4.1.4).

⁴²See Lemma 10.2.2.

so $h_1 \in E^{a+\check{b}_t^*}(x)$.

Using Lemma 10.2.3 and the convention from item 3 of Remark 10.2.2, for any $a > 0$ we obtain the inequalities

$$\begin{aligned} \|D_t(x) \cap E_t^a(x)\|_2 &\leq \|D_t^1(x) \cap E_t^{a+\check{b}_t^*}(x)\|_2 + \check{d}_t^* \leq \\ \frac{a + \check{b}_t^*}{\mathfrak{p}_t(K_t(x))} + \check{d}_t^* &\leq \frac{a + \check{b}_t^*}{\check{\mathfrak{p}}_t^*} + \check{d}_t^* \leq \frac{a + \check{b}_t^*}{\gamma_t} + \check{d}_t^*. \end{aligned} \tag{10.2.43}$$

The function

$$x \mapsto \max_{h \in -D_t^1(x)} \sigma_{\check{K}_t(x)}(h)$$

achieves maximum on the compact set \check{B}_{t-1} , which (obviously) does not exceed $\check{b}_t^* + \check{\delta}_t^* \check{d}_t^*$. Therefore,

$$\begin{aligned} \|D_t(x) \cap \widetilde{E}_t^a(x)\|_2 &\leq \|D_t^1(x) \cap E_t^{a+\check{b}_t^*+\check{\delta}_t^*\check{d}_t^*}(x)\|_2 + \check{d}_t^* \leq \\ \frac{a + \check{b}_t^* + \check{\delta}_t^*\check{d}_t^*}{\mathfrak{p}_t(\check{K}_t(x))} + \check{d}_t^* &\leq \frac{a + \check{b}_t^* + \check{\delta}_t^*\check{d}_t^*}{\gamma_t} + \check{d}_t^*. \end{aligned} \tag{10.2.44}$$

For $a \geq \check{C}_t^*$, the trading constraints $D_t(x)$ in the original model can be replaced by the compact ones $D_t(x) \cap E_t^a(x)$; see formula (10.2.10). Similarly, the trading constraints $D_t(x)$ in the approximate model can be replaced by the compact ones $D_t(x) \cap \widetilde{E}_t^a(x)$. Then, it suffices to choose $R_t^* = \frac{\check{C}_t^* + \check{b}_t^* + \check{\delta}_t^*\check{d}_t^*}{\gamma_t} + \check{d}_t^*$ and let $D_t^*(\cdot) = D_t(\cdot) \cap B_{R_t^*}(0)$. In this case, along with (10.2.31), we have inclusions (10.2.32) and (10.2.33).

The proof of Theorem 10.2.1 is complete. □

Remark 10.2.3.

- 1) If we strengthen the “smoothness” requirements for the functions $g_t(\cdot)$ and set-valued mappings $K_t(\cdot)$ in the theorem (require that they satisfy the Lipschitz condition with constants L_{g_t} and L_{K_t} , respectively), then the Bellman functions v_t^* for the original model will also satisfy the Lipschitz condition with constants $L_{v_t^*}$; see Proposition 4.2.1. The constants $L_{v_t^*}$ can be determined from the recurrence relations (4.2.16).
- 2) For the original model with conic trading constraints, we can estimate R_t^* using information about the price dynamics of the original model only on B_t . For this purpose, when approximating $K_t(\cdot)$ by the compact-valued mapping $\check{K}_t(\cdot)$ at the time instant t , we set the following calculation error (see (10.2.20)) at step t under a given price history⁴³ $x \in B_t \setminus B_t : \delta_t(x) \equiv \delta_t^*$, where

$$\delta_t^* = \sup_{x \in B_{t-1}} \delta_t(x); \tag{10.2.45}$$

⁴³If the function $\delta_t(\cdot)$ is upper semicontinuous on B_t , such a continuation of this function on \check{B}_t will preserve upper semicontinuity.

then $\check{\delta}_t^* = \delta_t^*$. For an arbitrary point $x \in \check{B}_t \setminus B_t$, there exists a point $x' \in B_t$ such that $\rho(x, x') \leq \delta_t(x') \leq \delta_t^*$. Using inequality (10.1.10), we obtain

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_t(K_t(x)) &\geq \mathfrak{p}_t(K_t(x')) - h_\rho(K_t(x), K_t(x')) \geq \\ &\mathfrak{p}_t^* - L_{K_t}\rho(x, x')\mathfrak{p}_t^* - L_{K_t}\delta_t^*, \end{aligned} \quad (10.2.46)$$

where

$$\mathfrak{p}_t^* = \inf_{x \in \check{B}_{t-1}} \mathfrak{p}_t(K_t(x)). \quad (10.2.47)$$

As a result,

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) - \delta_t(x) \geq \mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t})\delta_t^*, \quad x \in \check{B}_t \setminus B_t. \quad (10.2.48)$$

Now, for a point $x \in B_t$, we have a similar inequality:

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) - \delta_t(x) \geq \mathfrak{p}_t^* - \delta_t^* \geq \mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t})\delta_t^*, \quad x \in B_t.$$

Thus, for all $x \in \check{B}_t$,

$$\mathfrak{p}_t(K_t(x)) - \delta_t(x) \geq \mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t})\delta_t^*.$$

Choosing

$$\delta_t^* < \frac{\mathfrak{p}_t^*}{1 + L_{K_t}} \quad (10.2.49)$$

yields the following lower bound in (10.2.20):

$$\gamma_t \geq \mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t})\delta_t^* > 0. \quad (10.2.50)$$

Moreover,

$$\check{C}_t \leq C_t + L_{g_t}\delta_t^*,$$

and consequently,

$$\check{C}_t^* = \bigvee_{s=t}^N \check{C}_s \leq \bigvee_{s=t}^N [C_s + L_{g_s}\delta_s^*]. \quad (10.2.51)$$

Considering condition (10.2.49), we obtain

$$R_t^* \leq \frac{\bigvee_{s=t}^N [C_s + L_{g_s}\delta_s^*]}{\mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t})\delta_t^*}. \quad (10.2.52)$$

Next, we estimate the modulus of continuity using Proposition 4.2.1. According to this theoretical result, the Bellman functions v_t^* satisfy the Lipschitz condition with constants $L_{v_t^*}$ determined from the following recurrence relations:

$$\begin{aligned} L_{v_N^*} &= L_{g_N}, \\ L_{v_{t-1}^*} &= L_{g_{t-1}} \vee [L_{v_t^*}(L_{K_t} + 1) + \check{A}_t^* L_{K_t}], \quad t = N, \dots, 1. \end{aligned} \quad (10.2.53)$$

where the values \check{A}_t^* , $t = N, \dots, 1$, are estimated by analogy to R_t^* , i.e., using (10.2.43) and (10.2.51):

$$\check{A}_t^* = \sup_{x \in \check{B}_{t-1}} \|D_t(x) \cap E_t^{\check{C}_t^*}(x)\|_2 \leq \frac{\bigvee_{s=t}^N [C_s + L_{g_s} \delta_s^*]}{\gamma} \leq \frac{\bigvee_{s=t}^N [C_s + L_{g_s} \delta_s^*]}{\mathbf{p}_t^* - (1 + L_{K_t}) \delta_t^*}. \quad (10.2.54)$$

Thereby,

$$\sup_{x \in \check{B}_t} |v_t^*(x) - \tilde{v}_t^*(x)| \leq \sum_{s=t+1}^N \delta_s^* [L_{v_s^*} + R_s^*]. \quad (10.2.55)$$

- 3) Assuming no trading constraints, we have the model with conic trading constraints. In this case, according to Remark 10.1.2, the structural stability threshold $\mathbf{p}_t(K_t(\cdot))$ coincides with the maximum radius of the ball centered at the point 0 contained in the set $\text{conv}(K_t(\cdot))$, or equivalently, with the distance between the point 0 and the boundary of the set $\text{conv}(K_t(\cdot))$. (The positivity of this distance is equivalent to condition RNDAO.)

10.3 Fragility of the Model: Possible under Structural Instability

Throughout this section, we assume no trading constraints.

The goal of this section is to establish close connections between the continuity properties of the superhedging price and the structural stability of the model. First, we show in Theorem 10.3.1 that if structural stability fails, the continuous superhedging price (the solution of the Bellman–Isaacs equations (BI)) may be fragile. By this we mean the following: arbitrarily close price dynamics of the perturbed model in a uniform sense (with respect to the price history), even with *preserving the “no arbitrage” property*⁴⁴, do not imply the uniform closeness of the solutions of (BI) for the original and perturbed models. This result is in contrast to Theorem 10.2.1, which rests on the structural stability assumption. Recall that in Section 8.5 we showed the importance of the structural stability assumption for the continuity of the superhedging price: as it turned out, rejecting this assumption (in the case under consideration, replacing condition RNDAO with condition NDAO) may cause the discontinuity of the superhedging price. Moreover, this conclusion applies to the probabilistic model comparable with the deterministic one (the condition imposed on the supports of distributions).

Let us introduce the following subclasses⁴⁵ of $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$:

⁴⁴Of course, under the structural instability of the model, the “no arbitrage” property can be violated, leading to large perturbations of the solution of (BI). Quite unobviously, the problem may arise even in the case of model perturbations preserving the “no arbitrage” condition.

⁴⁵Recall that $\mathcal{K}(E)$ denotes the class of all non-empty compact subsets of a topological space E .

$\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^*$ is the class of all non-empty convex compact subsets of \mathbb{R}^n ,

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^0 = \{K \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^* : 0 \in K\},$$

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^{0'} = \{K \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^* : 0 \in \text{ri}(K)\},$$

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^{0''} = \{K \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^* : 0 \in f(K)\}.$$

Note that $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n), h_\rho)$ is a complete metric space [114, Chapter 1, Proposition 1.6] and $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^*$ is a closed subset of $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ [114, Chapter 1, Proposition 1.8]. Therefore, $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^*, h_\rho)$ is a complete metric space; moreover, the mapping $K \rightarrow \text{conv}(K)$ is a contraction on $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, i.e., $h_\rho(\text{conv}(K_1), \text{conv}(K_2)) \leq h_\rho(K_1, K_2)$. Moreover, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^{0''}$ is a closed⁴⁶ subset of $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^*$.

For convex compact sets $K \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^0$, we use the function

$$r(K) = \min_{h \in S_1(0)} \sigma_K(h). \quad (10.3.1)$$

Note that for such arguments, the function r takes finite nonnegative values.

We define the operator $\mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l} : \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}$ for $\delta \geq 0$, $\epsilon \geq 0$, and $l \in \mathbb{R}^n$ by

$$\mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K) = \text{conv}((\epsilon l + K) \cup \{-\delta l\}).$$

Note that $\mathfrak{B}^{0, 0, l}(K) = K$.

Lemma 10.3.1.

- 1) If $\epsilon > 0$ and $\delta > 0$, then the operator $\mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K)$ maps $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^{0'}$ into $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^{0'}$.
- 2) Let $l \in S_1(0)$, $l' \in S_1(0)$, $K \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}$, and $K' \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}$. Then

$$\begin{aligned} h_\rho(\mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K), \mathfrak{B}^{\delta', \epsilon', l'}(K')) &\leq \\ &[h_\rho(K, K') + (|\epsilon - \epsilon'| + (\epsilon \wedge \epsilon')\|l - l'\|)] \vee (|\delta - \delta'| + (\delta \wedge \delta')\|l - l'\|) \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

Proof.

- 1) Let $K \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^{0'}$. Obviously, $y \in \mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K)$ can be represented as

$$y = qz + [q\epsilon - (1 - q)\delta]l, \quad z \in K, \quad q \in [0, 1];$$

consider such a point. Considering $0 \in \text{ri}(K)$, for $z \in K$ there exists⁴⁷ a number $\alpha > 0$ such that $-\alpha z \in K$; hence, $-\beta z \in K$ for all $\beta \in (0, \alpha]$. If $q\epsilon - (1 - q)\delta = 0$, we choose a number $\beta > 0$ such that $\beta \leq \alpha \wedge 1$; otherwise, we choose a number $\beta > 0$ such that $\beta \leq \alpha \wedge \frac{\delta \wedge \epsilon}{|q\epsilon - (1 - q)\delta|}$. For β , $z \in K$, and an arbitrary number $q \in [0, 1]$, the vector $-\beta\{qz + [q\epsilon - (1 - q)\delta]l\}$ can be represented as

$$q'z + [q'\epsilon - (1 - q')\delta]l \in \mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K)$$

with some $q' \in [0, 1]$. Thus, $0 \in \text{ri}(\mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K))$.

⁴⁶It is an immediate consequence of Hörmander's formula; for example, see [140, Theorem 14.1].

⁴⁷For a point to lie in the relative interior of a convex set, we employ the criterion [175, Theorem 6.4].

2) Using Hörmander’s formula and a formula for the support function of the convex hull of a union of sets (e.g., see [140, Theorem 12.4]), we have

$$\begin{aligned} h_\rho(\mathfrak{B}^{\delta,\epsilon,l}(K), \mathfrak{B}^{\delta',\epsilon',l'}(K')) &= \max_{u \in S_1(0)} |\sigma_{\mathfrak{B}^{\delta,\epsilon,l}(K)} - \sigma_{\mathfrak{B}^{\delta',\epsilon',l'}(K')}| = \\ &\max_{u \in S_1(0)} |(\sigma_K(u) + \epsilon \langle u, l \rangle) \vee (-\delta \langle u, l \rangle) - (\sigma_{K'}(u) + \epsilon' \langle u, l' \rangle) \vee (-\delta' \langle u, l' \rangle)| \leq \\ &\max_{u \in S_1(0)} |\sigma_K(u) - \sigma_{K'}(u) + \epsilon \langle u, l \rangle - \epsilon' \langle u, l' \rangle| \vee |\delta \langle u, l \rangle - \delta' \langle u, l' \rangle| \leq \\ &[h_\rho(K, K') + (|\epsilon - \epsilon'| + (\epsilon \wedge \epsilon') \|l - l'\|)] \vee (|\delta - \delta'| + (\delta \wedge \delta') \|l - l'\|) \end{aligned}$$

□

Corollary 10.3.1. $h_\rho(\mathfrak{B}^{\delta,\epsilon,l}(K), K) \leq \delta \vee \epsilon$.

Lemma 10.3.2. *Let X be a Hausdorff topological space, $K(\cdot)$ be a continuous set-valued mapping with the domain X and codomain $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^{0'}$, where $\dim(\text{lin}(K(\cdot))) < n$. Then the set-valued mapping L defined by*

$$L(x) = (\text{lin}(K(x)))^\perp \cap S_1(0), \quad x \in X, \tag{10.3.3}$$

is upper semicontinuous.⁴⁸

Proof. First, note that $L(x) \neq \emptyset$ since the dimension of $\text{lin } K(\cdot)$ is smaller than n . We show that $(\text{lin}(K))^\perp = \{h \in \mathbb{R}^n : \sigma_K(h) = 0\}$ for $K \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^0$. Indeed, $0 \in K$ implies $\sigma_K \geq 0$; because $0 \in \text{ri}(K)$, we have $\sigma_K(h) > 0$ if the orthogonal projection of h into $\text{lin}(K)$ is nonzero. Now consider a convergent net $x_\alpha \rightarrow x^*$ and a net $h_\alpha \in L(x_\alpha)$. As the unit sphere $S_1(0)$ is compact and $h_\alpha \in S_1(0)$, we choose a convergent subnet $h_{\alpha_\beta} \rightarrow h^* \in S_1(0)$. Then $\sigma_{K(x_{\alpha_\beta})}(h_{\alpha_\beta}) = 0$; due to the continuity of $K(\cdot)$,

$$\rho_{PH}(K(x_{\alpha_\beta}), K(x^*)) = \max_{h \in S_1(0)} |\sigma_{K(x_{\alpha_\beta})}(h) - \sigma_{K(x^*)}(h)| \rightarrow 0,$$

which yields $\sigma_{K(x^*)}(h_{\alpha_\beta}) \rightarrow \sigma_{K(x^*)}(h^*) = 0$. Consequently, $h^* \in L(x^*)$. Since the set-valued mapping $L(\cdot)$ is compact-valued, it is upper semicontinuous by [114, Chapter 1, Proposition 2.19]. □

Next, we formulate a result concerning the “fragility” of the solutions of the Bellman–Isaacs equations when the structural stability condition RNDAO fails. Consider the one-step model ($N = 1$).

Theorem 10.3.1. *Assume that $n \geq 2$, the initial deterministic model is defined by a continuous set-valued mapping $K_1(\cdot)$ with the codomain $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^{0'}$, condition NDAO holds, and the set*

$$B_0^* = \{x \in B_0 : n - 1 \geq \dim(\text{lin}(K_1(\cdot))) > 0\}$$

⁴⁸For any closed set $C \subseteq \mathbb{R}^n$, the set $L^-(C) = \{x \in X : L(x) \cap C \neq \emptyset\}$ is closed.

is non-empty.⁴⁹

Then there exist a continuous payoff function g_1 , a number $\beta > 0$, and a non-empty Borel subset B_0^{**} of the set B_0^* such that for every $\delta > 0$, it is possible to find a perturbed model satisfying NDAO with the dynamics defined by a Borel-measurable set-valued mapping $\tilde{K}_1(\cdot) = \tilde{K}_1^{(\delta)}(\cdot)$ with the codomain $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^0$ that is uniformly close to the original model in the Pompeiu–Hausdorff measure: $\sup_{x \in B_1} h_\rho(\tilde{K}_1(x), K_1(\cdot)) < \delta$; at the same time, the solutions v_t^* and \tilde{v}_t^* of (BI) for the original and perturbed models, respectively, differ from one another: $v_t^*(x) - \tilde{v}_t^*(x) \geq \beta$ for all $x \in B_0^{**}$.

Proof. Let $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be a convex nonnegative function (hence, a continuous one) strictly convex in the variable y at each point (x, y) , where $x \in \mathbb{R}^n$. In other words, for $q_1 > 0, q_2 > 0, q_1 + q_2 = 1, q_1 y^{(1)} + q_2 y^{(2)} = 0$, and $y^{(1)} \neq 0$, we have

$$q_1 f(x, y^{(1)}) + q_2 f(x, y^{(2)}) > f(x, 0). \tag{10.3.4}$$

We define the payoff function (also convex) by $g_1(x_0, x_1) = f(x_0, x_1 - x_0)$.

In the one-step case, $B_0 = K_0$. The set

$$B_0^{(n)} = \{x \in B_0 : r(K_1(x)) > 0\}$$

is open (possibly empty) due to the continuity of the set-valued mapping $K_1(\cdot)$ and the continuity of the function r given by (10.3.1). Consequently, the set

$$B_0^{(n-1)} = \{x \in B_0 : \dim(\text{lin}(K_1(x))) < n\}$$

is closed. The set

$$B_0^{(0)} = \{x \in B_0 : \dim(\text{lin}(K_1(x))) = 0\} = \{x \in B_0 : K_1(x) = \{0\}\}$$

is also closed (possibly empty) due to the continuity of $K_1(\cdot)$. Hence, the set $B_0^* = B_0^{(n-1)} \setminus B_0^{(0)}$ is Borel and non-empty by the assumptions of this theorem.

Note that for a set-value mapping $K_1(\cdot)$ with the codomain $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^*$, condition NDAO is equivalent to that the codomain of this mapping is $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^0$. We can therefore apply Lemma 10.3.2 with $X = B_0^{(n-1)}$ and the induced topology. As a result, the compact-valued mapping

$$L_1(x) = (\text{lin}(K_1(x)))^\perp \cap S_1(0), \quad x \in B_0^{(n-1)}$$

is upper semicontinuous, hence strongly (Borel) measurable. Since the mapping is compact-valued, this property is equivalent to the (standard) measurability of L_1 . Applying the Kuratowski–Ryll Nardzewski selection theorem [114, Chapter 2, Theorem 2.1] to the set-valued mapping L_1 and the measurable space $B_0^{(n-1)}$ equipped with the σ -algebra of its Borel subsets yields a measurable selector $l_1(x) \in L_1(x), \quad x \in B_0^{(n-1)}$.

⁴⁹Thus, condition RND AO fails.

We define a function l^* on B_0 by fixing some vector $e \in S_1(0)$ and letting $l^*(x) = e$ for $x \in B_0 \setminus B_0^*$ and $l^*(x) = l_1(x)$ for $x \in B_0^*$. The function $l^* : B_0 \rightarrow S_1(0)$ is Borel measurable.

For any $z \in \mathbb{R}^n$, the function $\psi_z : C_{\mathbb{R}^n} \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times S_1(0) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $\psi_z(K, \delta, \epsilon, l) = \rho(z, \mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l}(K))$ is a jointly continuous function of four variables due to inequality (10.3.2) and $\sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\rho(z, A) - \rho(z, A')| = h_\rho(A, A')$ [114, Chapter 1, Theorem 1.15]. For an arbitrary number $\delta > 0$, we define $\epsilon^*(x) = \delta \rho(x, B_0^*)$ (which is a continuous function) and $\tilde{K}_1(x) = \mathfrak{B}^{\delta, \epsilon^*(x), l^*(x)}(K_1(x))$ and then apply [114, Chapter 2, Proposition 1.4]: the set-valued mapping $\tilde{K}_1(x), x \in B_0$ is measurable if (and only if) for every $z \in \mathbb{R}^n$, the function $z \mapsto d(z, \tilde{K}_1(x))$ is measurable. Thus, the set-valued mapping $\tilde{K}_1(x), x \in B_0$ is Borel measurable.

According to Theorem 5.3.1, in the case of no trading constraints, under condition NDAO and the boundedness of the function g_t , there exists a game equilibrium for the mixed extension $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$; moreover, the infimum in (BI) is reached for some h , and for $x \in B_t$ and $t = N, \dots, 1$, we have the equalities

$$\inf_{h \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in K_t(x)} [w_t(x, y) - hy] = \sup_{Q \in \mathcal{P}^*(K_t(x))} \int w_t(x, y) Q(dy), \tag{10.3.5}$$

where w_t is given by (5.1.1) and $\mathcal{P}^*(K) \subseteq \mathcal{P}(K)$ denotes the class of all probability measures Q concentrated in a finite subset of K with zero barycenter, i.e., $\int y Q(dy) = 0$. In our case, $N = 1$ and $w_1(x, y) = f(x, y)$. Since the function f is continuous and convex on $K_1(x)$, by Lemma 8.4.2 the right-hand side of (10.3.5) achieves the maximum $v_0^*(x)$ for some distribution $Q_1^*(x, \cdot)$ concentrated at most at $n + 1$ extreme points of the set $K_1(x)$.

Consider an arbitrary point $x \in B_0^*$ and a point $y^{(1)} \in \text{supp}(Q_1^*(x, \cdot))$ different from 0 (which depends on x). We denote $q_1 = Q_1^*(x, \{y^{(1)}\}) > 0$ and $q_2 = 1 - q_1$. We emphasize that $y^{(1)}$ cannot be 0 because $0 \in \text{ri}(K_1(x))$ is not an extreme point of $K_1(x)$. In addition, there exists a number $\alpha > 0$ (dependent on x) such that $y^{(2)} = -\alpha y^{(1)} \in K_1(x)$. Therefore, $q_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ and $q_2 = \frac{1}{1+\alpha}$, and consequently,

$$\int f(x, y) Q_1^*(x, dy) \geq q_1 f(x, y^{(1)}) + q_2 f(x, y^{(2)}) > f(x, 0).$$

From Proposition 3.1.4 it follows that the expression in (10.3.5) (which equals $v_0^*(x) = \int f(x, y) Q_1^*(x, dy)$) is an upper semicontinuous function of x . Thus, the set $B_{0, \gamma} = \{x \in B_0 : v_0^*(x) - f(x, 0) \geq \gamma\}$ is closed, and for a sufficiently small number $\gamma > 0$, the set $B_{0, \gamma}^* = B_{0, \gamma} \cap B_0^*$ is non-empty Borel.

On the other hand, with $\tilde{K}_t(x) = \mathfrak{B}^{\delta, \epsilon, l^*(x)}(K_t(x))$, the risk-neutrality condition $\int y Q(dy) = 0$ for $Q \in \mathcal{P}^*(\tilde{K}_1(x)), x \in B_0^*$, implies $q_0 = Q(\{0\}) > 0$ and $q_0 \epsilon - (1 - q_0) \delta = 0$. As a result, $q_0 = \frac{1}{1+\epsilon/\delta}$. Since the set B_1 is compact and f is continuous, $C_1 = \max_{x \in B_1} f(x) > 0$ is finite; in addition, $C_1 > f(x, 0)$ for $x \in B_0^*$. Therefore,

$$\int f(x, y) Q(dy) \leq q_0 f(x, 0) + (1 - q_0) C_1.$$

Consequently, the solutions \tilde{v}_0^* of equations (BI) for the perturbed model satisfy the inequality $\tilde{v}_0^*(x) \leq q_0 f(x, 0) + (1 - q_0)C_1$. We choose $\beta > 0$ so that⁵⁰ $\beta < \gamma \wedge C_1$ and $\epsilon \leq \delta \left[1 \vee \frac{\beta/C_1}{1 - \beta/C_1} \right]$. Then for all $x \in B_{0,\gamma}^*$, we obtain the inequality $v_0^*(x) - \tilde{v}_0^*(x) \geq \beta$, and from 10.3.1 it follows that $h_\rho(\tilde{K}_t(x), K_t(x)) \leq \delta$ for all $x \in B_0$. \square

10.4 Choice of Numerical Methods

Solution of the pricing problem

Consider the two-stage method for solving the pricing problem for superhedging contingent liabilities on a written American option described in 7.1. In this method, it is necessary to choose suitable numerical algorithms to construct the concave hull of a function (Stage 1) and maximize a concave function on a convex set (Stage 2). For this purpose, we present some useful considerations concerning the specific features of our problem.

The most important consideration consists in the following: the problem statement requires a guaranteed result, and it is therefore reasonable to use a similar approach for the numerical solution. The book [233] was devoted to this topic, with Chapters 3 and 4 being the most relevant ones. Chapter 3 presented guaranteed results on reconstructing the values of a function from a given class satisfying the Lipschitz condition with a fixed constant when the values are given on a finite set of points. In fact, this problem is closely related to, and sometimes directly overlaps with, approximation theory in functional analysis. (For example, the corollary of Theorem 1.2 in that chapter and the results of estimating diameters from Section 4.2 of the book [238] yield the same guaranteed error in the class of Lipschitz functions on an interval.) The relevance of choosing the class of Lipschitz functions for our case follows from Theorem 4.2.1, which estimates the Lipschitz constant for the solutions of equations (BI). Chapter 4 of the cited book considered the problem of a guaranteed result for finding a global optimum of a function from a given class satisfying the Lipschitz condition with a fixed constant when the values are given on a finite set of points. As shown by both chapters, the optimal solution of the problem reduces to constructing an optimal coverage of a set where a guaranteed approximation or an optimum is sought with a guaranteed accuracy. In other words, it reduces to finding a finite set with a given number of points that minimizes the Pompeiu deviation of the covered set from this finite set.⁵¹

On the other hand, the optimal coverage problem can be very complicated depending on a specific formalization (particularly on the choice of measures and the type of sets to be covered). For example, the optimal coverage algorithm for the Euclidean metric on the plane proposed in [243] is hardly suitable for generating a

⁵⁰Note that the choice of $\beta > 0$ is independent of the choice of the parameters ϵ and δ determining $\tilde{K}_t(x)$.

⁵¹For the Euclidean measure on the plane, this is the maximum radius of circumscribed circles around triangles in the Delaunay triangulation corresponding to the Voronoi diagram.

large number of points. A similar problem called the Kepler conjecture (the densest packing of spheres in the three-dimensional space) was theoretically solved after over 400 years since its statement, and even using a computer proof [103]. However, under the additional assumption of symmetry (the points lie on a lattice⁵², the problem was solved by Gauss back in 1831: he found a simple proof for the optimality of the hexagonal packing among all lattice packings.

In principle, we can use lattices with the densest packing, but the problem is that their behavior significantly varies for different dimensions⁵³ and finding optimal lattices for larger dimensions is difficult from a mathematical point of view [61]. Not many optimal lattices have been described to date (the maximum dimension reaches 128), but solutions⁵⁴ are known for all dimensions below 128. Rainbow options typically use small dimensions (i.e., have a small number of underlying assets). At least for small dimensions, it seems reasonable to gain in algorithm simplicity under a slight loss in packing efficiency. For example, consider the plane and take Voronoi cells of the same area for the rectangular and hexagonal lattices; then the radius of circumscribed circles around triangles in the Delaunay triangulation corresponding to the Voronoi diagram (also called the radius of coverage of the lattice) for the rectangular lattice is only $\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{3}$ times (about 14%) larger than for the hexagonal lattice.⁵⁵ Thus, for the Euclidean measure, the rectangular lattice is not a bad choice; for a non-Euclidean measure corresponding to the $\|\cdot\|_\infty$ norm, it is optimal in the n -dimensional cube [233, Chapter 3, Theorem 1.2].

Based on these considerations, there is no need to find an optimal coverage for small-dimensional problems: an adequate numerical algorithm can be obtained by choosing a suboptimal coverage for the case where the points lie on a lattice. Therefore, we construct the paths of the approximated system so that the asset price vector lies on the same (additive) lattice at every time instant. Let us choose the simplest rectangular lattice, convenient for calculations:

$$L_{\theta_1, \dots, \theta_n} = \{(k_1\theta_1, \dots, k_n\theta_n) : k_1 \in \mathbb{Z}, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}, \quad (10.4.1)$$

where $\theta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. To define the approximate set $\widetilde{K}_t(\cdot)$, we choose a finite set of points of the lattice $L_{\theta_1, \dots, \theta_n}$ that belong to $\check{K}_t(\cdot)$, i.e.,

$$\widetilde{K}_t(\cdot) = L_{\theta_1, \dots, \theta_n} \cap \check{K}_t(\cdot) = \{y \in L_{\theta_1, \dots, \theta_n} : \rho(y, K_t(\cdot)) \leq \delta(\cdot)\}, \quad (10.4.2)$$

where the set $\check{K}_t(\cdot)$ is the regularizing coarsening at the level $\delta_t(\cdot)$ for the original market dynamics; see (10.2.1).

⁵²A lattice in \mathbb{R}^n is a discrete additive subgroup of \mathbb{R}^n of maximum rank that is isomorphic to \mathbb{Z}^n , i.e., can be represented as $\{\sum_{i=1}^n z_i v_i : z_i \in \mathbb{Z}\}$, where the vectors $v_i \in \mathbb{R}^n$ are linearly independent (the lattice basis).

⁵³For example, for dimensions 2, 3, 8, and 24, the densest packing is proved to be achieved on some lattices; for dimensions 10, 11, 13, 18, 20, 22, and 30, however, there are more dense packings than the densest lattice packing.

⁵⁴See the catalog of known densest lattices (the project of Gabriele Nebe and Neil J.A. Sloane) at <http://www.math.rwth-aachen.de/Gabriele.Nebe/LATTICES/density.html>.

⁵⁵As the problem dimension increases, this difference grows and may be significant.

For a model with unbounded (or unbounded) trading constraints, sufficiently small lattice steps will provide the necessary closeness of the approximate market model to the original one: using Theorem 10.2.1, we can estimate the error arising when the original system is replaced by the approximate counterpart through a small perturbation $\tilde{K}_t(\cdot)$ of the compact sets $K_t(\cdot)$ in the Pompeiu–Hausdorff measure. The steps of the lattice (10.4.1) should be chosen so small that for any time instant t and any path from the price history (a finite number of paths), the set $\tilde{K}_t(\cdot)$ will contain at least $n + 1$ affinely independent points; otherwise, the nondegeneracy of price dynamics will be lost. The choice of different θ_i (lattice steps on the i th coordinate) may be due to different volatility of the assets, if such a priori information is available. Otherwise, we can take the same steps $\theta_i = \theta$, $i = 1, \dots, n$, denoting the lattice by L_θ .

To solve problem (7.1.2) arising at Stage 1, we numerically construct the concave hull of the Bellman function. By the concave hull of a numerical function f defined on a set $X \subseteq \mathbb{R}^n$, we mean⁵⁶ the function $\hat{f}(z)$, $z \in \text{conv}(X)$, being the smallest one among the concave functions on $\text{conv}(X)$ that majorize f on the set X . On the relative interior of the set $\text{conv}(X)$, the function f^* is continuous and coincides with the pointwise infimum of the affine functions that majorize it.

For convenience, we reduce the construction of the concave hull of a nonnegative function defined on a finite set $X = \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ (which corresponds to the approximate method for solving problem (7.1.2) proposed above) to an equivalent problem: constructing the convex hull of a set $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ consisting of $2k$ points:

$$A = \{(x_1, f(x_1)), \dots, (x_k, f(x_k)), (0, f(x_1)), \dots, (0, f(x_k))\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \quad (10.4.3)$$

which is a convex polyhedron \hat{A} . Let us call the last coordinate the height. The polyhedron \hat{A} has a lower facet located in the hyperplane in \mathbb{R}^{n+1} of zero height. The projection of this facet into \mathbb{R}^n , obtained by removing the last coordinate (height), gives a convex polyhedron \hat{X} , i.e., the convex hull of the set X ; the projection of extreme points of the set A having zero height gives extreme points of the set X . Constructing the convex hull of a finite set is a well-developed branch of computational geometry [104]. Such algorithms are discussed in detail in Section 10.5.

Solution of the hedging problem

Finding a hedging strategy has been separated from the pricing problem by passing from the solutions of the Bellman–Isaacs equations to the Bellman equations (7.1.1). Note that if a certain statement of the pricing and hedging problem for a contingent liability on a written option allows separating hedging from pricing, this is a definite plus from a practical point of view. We are talking about departments

⁵⁶Alternatively, the concave hull of a function f can be defined as a function whose hypograph (ordinate set) is the convex hull of the hypograph of f (in particular, its domain is the convex hull of the domain of f).

of large investment companies selling (over-the-counter) options to their clients (derivative desks). Usually, a client requests the price of an option he would like to purchase; for this purpose, the pricing problem should be solved. If the client decides to buy the option based on the quotations, then the department takes the contingent liability on this option and hedges it; for this purpose, the hedging problem should be solved.

If the pricing problem is solved, either analytically or numerically, it simplifies the problem of finding an appropriate hedging strategy. Some considerations to solve the hedging problem, relying on the known support of the optimal mixed market strategy, have already been discussed at the end of Section 7.5. In addition, at the end of Section 7.6 we have solved the hedging problem in a particular case of no trading constraints. (In this case, the hedging problem is significantly simplified.)

Denoting

$$\varphi_t(\bar{x}_{t-1}, h) = \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy] \quad (10.4.4)$$

and considering (5.1.1), we write the function $\rho_t(\cdot)$ (5.2.1) as

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \varphi_t(\cdot, h). \quad (10.4.5)$$

Recall that by Lemma 3.2.1, which assumes condition RNDSAUP and the closedness of the sets $D_t(\cdot)$, for any $a \geq C_t^*$ with C_t^* defined by (4.2.1) we have

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in \widehat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy] = \inf_{h \in \widehat{D}_t^a(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]. \quad (10.4.6)$$

The set $\widehat{D}_t^a(\cdot)$ is given by (3.2.4), and it is compact, convex, and $0 \in \widehat{D}_t^a(\cdot)$. Therefore, by item 3^o b) of Theorem 7.3.2, the finite value of the game with the compact trading constraints $\widehat{D}_t^a(\cdot)$ at each step t is achieved at some saddle point represented by the optimal pair $h_t^*(\cdot) \in \widehat{D}_t^a(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$, where $Q_t^*(\cdot)$ is the optimal mixed market strategy.

For example, we can solve the minimization problem (and find the minimizer) by replacing the set $D_t(\cdot)$ in (10.4.5) with the compact set $\widehat{D}_t^a(\cdot)$, $a \geq C_t^*$, where the minimized function $h \mapsto \varphi_t(\cdot, h)$ is given by (10.4.4). However, this approach does not always simplify calculations: the minimization problem with the original trading constraints $D_t(\cdot)$ may be simpler to solve.

On the other hand, to determine the hedging strategy, it suffices to know the barycenter $\int y Q_t^*(dy)$ of the optimal market strategy. This barycenter can be computed using the two-stage procedure described above; see (7.1.2) and (7.1.3). Consider the saddle point $h_t^*(\cdot)$, Q_t^* , in the dynamic hedger-market game at step t for the function $F_{t,\cdot}(h, Q) = \int [w_t(\cdot, y) - hy] Q(dy)$:

$$F_{t,\cdot}(h_t^*(\cdot), Q_{t,\cdot}^*) = \min_{h \in D_t(\cdot)} F_{t,\cdot}(h, Q_{t,\cdot}^*) = \max_{Q \in \mathcal{P}(K_t(\cdot))} F_{t,\cdot}(h_t^*(\cdot), Q). \quad (10.4.7)$$

Finding minimizers with respect to the variable h in (10.4.7) is equivalent to finding the set of maximizers $S_t(\cdot)$ for the linear function $h \mapsto \int y Q_{t,\cdot}^*(dy)$ on the

closed convex set⁵⁷ $D_t(\cdot)$, and the maximum of this function is the value of the support function $\sigma_{D_t(\cdot)}$ of the set $D_t(\cdot)$ at the point $\int yQ_{t,\cdot}^*(dy)$. According to [175, Corollary 23.5.3],

$$S_t(\cdot) = \partial\sigma_{D_t(\cdot)}\left(\int yQ_{t,\cdot}^*(dy)\right),$$

where ∂ denotes the subdifferential. From [175, Theorem 13.2] and [175, Theorem 23.5] it follows that $h \in S_t(\cdot)$ if and only if $\int yQ_{t,\cdot}^*(dy)$ is a normal vector⁵⁸ for $D_t(\cdot)$ at the point h . In the case where $D_t(\cdot)$ is a closed convex cone, by [175, Corollary 23.5.4] $h \in S_t(\cdot)$ if and only if⁵⁹

$$h \in D_t(\cdot), \quad \int yQ_{t,\cdot}^*(dy) \in D_t^\circ(\cdot), \quad h \int yQ_{t,\cdot}^*(dy) = 0. \quad (10.4.8)$$

For the stable calculation of the hedging strategy and its uniqueness, we can apply smoothing transformations to the concave hull of the Bellman function. The reason lies not only in the regularization of the numerical method but also in the presence of model risk. Any model approximately describes the reality: some features well, some more or less acceptably, neglecting the other features. Our model does not include transaction costs, which can be significant in reality. This is particularly the case under portfolio restructuring due to model or numerical method artifacts.

For example, the numerical solution of the option pricing problem using the widespread Crank–Nicolson difference scheme within the Black–Scholes model (which also neglects transaction costs) may cause parasitic fluctuations, leading to the unjustified restructuring of the hedging portfolio (in practice, to losses on transaction costs). This problem can be eliminated by applying monotonic difference schemes; see [89] and [150] for an example of a passport option.

In our case, the nonsmooth Bellman function may substantially arise from the problem statement due to a particular market dynamics model, trading constraints, and option payoff functions. However, to a much greater extent, nonsmoothness will be related to the way of approximating the original market dynamics $K_t(\cdot)$ with a compact-valued mapping whose values are finite sets of points on the lattice L_θ . In the latter case, the recommendation to change the hedging strategy at the nonsmoothness points of the Bellman function will be dictated by the artifact of the numerical solution.

With these considerations, a reasonable engineering-based approach is to smoothen the approximated Bellman function by slightly increasing the reserve requirements. For this purpose, we can apply the Moreau transform⁶⁰ [154], or a more general transform proposed by Bertsekas [28]. In our case, these transformations

⁵⁷The set $D_t(\cdot)$ is non-empty since $0 \in D_t(\cdot)$.

⁵⁸In other words, $\int yQ_{t,\cdot}^*(dy)$ lies in the cone normal to $D_t(\cdot)$ at the point h .

⁵⁹Recall that we use the notation (2.2.4); for a convex cone C , C° coincides with the cone polar to C . The barrier cone for a convex cone C coincides with the polar cone, i.e., $\text{bar}(C) = C^\circ$, so conditions NDSAUP and NDSA are the same; hence, conditions RNDSAUP and RNDSA are the same as well.

⁶⁰The Moreau transform is also called the Moreau envelope or the Moreau–Yosida regularization. Sometimes, it involves a positive definite quadratic form $\langle Bx, x \rangle$ instead of $\mu\|x\|_2^2$.

operate concave rather than convex functions, and the Moreau transform $\mathfrak{M}_\mu f$ of a function f is defined as a supremal convolution⁶¹ of the functions f and g , where $g(x) = -\mu\|x\|_2^2$, $\mu > 0$, whereas the Bertsekas transform $\mathfrak{B}_{\mu,\lambda} f$ of a function f as the supremal convolution of the functions f and \tilde{g} , where $\tilde{g}(x) = -\mu\|x\|_2^2 - \langle \lambda, x \rangle$, $\mu > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Since $g(0) = \tilde{g}(0) = 0$, we have $\mathfrak{M}_\mu f \geq f$ and $\mathfrak{B}_{\mu,\lambda} f \geq f$. Obviously, these two transforms are related: on the one hand, $\mathfrak{M}_\mu f = \mathfrak{B}_{\mu,0} f$; on the other, $\mathfrak{B}_{\mu,\lambda} f(x) = -\langle \lambda, x \rangle + \mathfrak{M}_\mu[f(\cdot) + \langle \lambda, \cdot \rangle]$.

10.5 Numerical Analysis Algorithm and Computational Experiment

Algorithms for solving the pricing problem with constructing the convex hull of a polyhedron

The following convex hull problem is of interest for us: obtain a description of a polyhedron formed by the convex hull of a finite set. First of all, this description is by constructing the set of all polyhedron vertices or, equivalently, the extreme points of this set. In other words, it is required to find all nonredundant⁶² points of a given finite set $S \subseteq \mathbb{R}^k$ in the sense that they cannot be represented as a convex combination of other points.

To find vertices, we have to check whether a given point in the set S is redundant. This check reduces to solving a linear programming problem with k variables and $m - 1$ constraints, where m is the number of points in S . The naive sequential point-checking method leads to a computationally intensive algorithm. More efficient algorithms were described, e.g., in [104]; see Chapters 26 and 49. Comparing different numerical methods is beyond the scope of this dissertation, so we merely refer to the discussion paper [94]. Our goal is to find a practically applicable algorithm for solving typical superhedging problems with trading constraints.

One-dimensional problems (with one risky asset) can be solved, e.g., by the twice-applied Fenchel transform⁶³; see a survey in [142, Section 3.2.1] and the applied work [60]. However, we are interested in the case of Rainbow options (with several risky assets).

The stability of a numerical solution under small perturbations of the input data seems important to us. In this regard, an attractive algorithm for computing the

⁶¹The supremal convolution of proper functions f_1 and f_2 is defined by the formula $f_1 \square f_2(x) = \sup\{f_1(x_1) + f_2(x_2) : x_1 + x_2 = x\}$. More generally, the supremal convolution of functions f_1 and f_2 is defined in terms of hypograph addition: $f_1 \square f_2(x) = \sup\{y : (x, y) \in (\text{hypo } f_1 + \text{hypo } f_2)\}$. The supremal convolution \square is related to the infimal convolution \square of proper convex functions: $f_1 \square f_2 = -(-f_1) \square (-f_2)$.

⁶²An economic interpretation in terms of the guaranteed superhedging approach is that rejecting these points will not eliminate possible scenarios for most unfavorable mixed market strategies concentrated at most at $n + 1$ points.

⁶³In our case, the Fenchel transform is understood as a conjugation operation for concave functions, which is usually defined as $f^*(y) = \inf\{y, x\} - f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

vertices of the convex hull of a finite set of points S in a multidimensional space was proposed in the recent paper [15] and called All Vertex Triangle Algorithm (AVTA) by the authors. The AVTA algorithm can approximate S , particularly if the input data are a perturbation⁶⁴ of S . However, our software implementation of AVTA, performed independently, demonstrated the slower operation of this algorithm on test examples compared to Quickhull [17], a popular algorithm.⁶⁵

In the second turn, we need a description of all facets of dimensionality smaller by 1 than that of the polyhedron. This description is required for solving the optimization problem (7.1.3) at Stage 2 of our method. First, the projection of facets by removing the last coordinate (height) gives a partition⁶⁶ of the convex polyhedron \widehat{X} into polyhedrons on which the resulting convex hull of the Bellman function for the approximate model will be affine.⁶⁷ Second, the maximum slope of the n -dimensional facets of the convex polyhedron \widehat{A} adjacent to the $n - 1$ -dimensional facets of the convex polyhedron \widehat{X} is the Lipschitz constant for the convex hull of the Bellman function for the approximate model. This fact is useful when estimating the accuracy of the approximate solution of problem (7.1.3). We are interested in the description of all n -dimensional facets of the convex polyhedron \widehat{A} (via appropriate linear inequalities) and, moreover, in a dual description, including the incident relation between the vertices and facets (via an incident matrix). Such algorithms include, e.g., the primal-dual one proposed in [42]; it yields the description of facets from the description of vertices and vice versa. The author [14] compared the performance of parallel and sequential codes in the vertex/facet enumeration problem for a wide range of convex polyhedra, from simple to degenerate, based on the dual description method. According to the test results, the computational complexity of the problem varies considerably depending on the algorithm and input data. Note the recent algorithm [252], which is attractive by intuitive simplicity. For small dimensions, it is possible to use one of the algorithms included in the qhull software package.

Precalculations before solving the Bellman equations

Below, we consider the numerical solution of the pricing problem under conditions of Theorem 10.2.1 (in particular, the problem with bounded and conic trading constraints). In addition, assume that the set-valued mappings $K_t(\cdot)$ and the payoff functions $g_t(\cdot)$ satisfy the Lipschitz condition with constants L_{K_t} and

⁶⁴Note that the set of perturbed vertices S' (close to S in the Pompeiu–Hausdorff measure) may significantly differ from the vertex set of the convex hull of S' .

⁶⁵It was implemented by the authors as the qhull software package, available at <http://www.qhull.org> with detailed documentation. The Quickhull algorithm has proven itself well for solving low-dimensional problems, typical for superhedging.

⁶⁶The intersection of any two polyhedra in this partition is either their common facet or empty. If all polyhedrons in this partition are simplexes, then the partition forms a triangulation.

⁶⁷Note that if the projection of a facet of a convex polyhedron \widehat{A} that is not a simplex, then the most unfavorable mixed market strategy concentrated at most at $n + 1$ points with a given barycenter lying in this projection may be nonunique.

L_{g_t} , respectively⁶⁸, for $t = 1, \dots, N$, and the (deterministic) price dynamics are nondegenerate, i.e., the compact sets $K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, have a non-empty interior.

We choose the elementary rectangular lattice L_θ with the same step $\theta_i = \theta$, $i = 1, \dots, n$, on all coordinates:

$$L_\theta = \{(k_1\theta, \dots, k_n\theta) : k_1 \in \mathbb{Z}, \dots, k_n \in \mathbb{Z}\}. \quad (10.5.1)$$

Here is the sequence of actions that precede the calculation of the Bellman function on this lattice.

- 1° If analytically (explicitly) possible, we find the set of feasible paths of the original system: $B_0 = K_0$; for $t = 1, \dots, N$, we recurrently construct

$$B_t = \{x_0, \dots, x_{t-1}, x_t\} : \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}, x_t \in x_{t-1} + K_t(\bar{x}_{t-1}).$$

Otherwise, we find numerically the approximating sets with a trial approximation accuracy on the lattice with a step $\theta = \delta' > 0$, chosen small enough. (It is intended for preliminary calculations, not the computationally-intensive solution of the Bellman equations.) First, we obtain $K'_0 = B'_0 = B_0 \cap L_\theta$ and then recurrently construct

$$B'_t = \{(x_0, \dots, x_{t-1}, x_t) : \bar{x}_{t-1} \in B'_{t-1}, x_t \in [x_{t-1} + K_t(\bar{x}_{t-1})] \cap L_\theta\}.$$

- 2° For the models with conic trading constraints, we calculate the structural stability threshold $\mathfrak{p}_t(K_t(x))$ for $x \in B_{t-1}$ using formula (10.1.8) or (10.1.9) depending on the model type (in the explicit form). If this is impossible, we numerically find $\mathfrak{p}_t(K_t(x))$ for $x \in B'_{t-1}$, which can be done simultaneously with the numerical determination of the set B'_{t-1} . We obtain the minimum structural stability threshold

$$\mathfrak{p}_t^* = \inf_{x \in B_{t-1}} \mathfrak{p}_t(K_t(x)),$$

which is positive by Theorem 10.1.2, in the explicit form. If explicitly impossible, we find it numerically. For example, the minimum

$$\mathfrak{p}'_t = \min_{x \in B'_{t-1}} \mathfrak{p}_t(K_t(x))$$

can be obtained simultaneously with calculating $\mathfrak{p}_t(K_t(x))$ for $x \in B'_{t-1}$. Using formula (10.1.10), we get the lower bound $\mathfrak{p}_t^* \geq \mathfrak{p}'_t - L_{K_t}\delta'\sqrt{n}$. If the value on the right-hand side of this inequality is negative, the lattice step δ' should be decreased⁶⁹ to $0 < \delta'' < \frac{\mathfrak{p}'_t}{2\sqrt{n}L_{K_t}}$, with recalculating the model parameters in items 1° and 2° above.

⁶⁸Therefore, the estimates from Remark ?? can be used.

⁶⁹Without loss of generality, assume that $L_{K_t} > 0$.

- 3° For the models with conic trading constraints, we use the upper bound (10.2.49) for the value R_t^* appearing in inequality (10.2.21). To do this, we estimate the constants C_t , i.e., the maximum values of the payoff functions g_t on the set of feasible paths B_t , either explicitly (if possible) or numerically by finding

$$C_t' = \max_{x \in B_t'} g_t(x).$$

This value can be calculated simultaneously with finding the set B_t' . In this case, $C_t \leq C_t' + L_{g_t} \delta''$, where $\delta'' = \delta''$ if the initial choice of the lattice step and numerical calculation of \mathfrak{p}_t' yields $\mathfrak{p}_t' - L_{K_t} \delta' \sqrt{n} > 0$; otherwise, if recalculation for a smaller lattice step is required, $\delta''' = \delta''$.

For the original model with bounded trading constraints, the value R_t^* appearing in inequality (10.2.21) is found either analytically (if possible) or numerically. The following equality, valid for a compact set A , may be useful:

$$\|A\|_2 = \max_{y \in \mathbb{R}^n} |\sigma_A(y)|,$$

where σ_A denotes the support function of A . (The sets $D_t(\cdot)$ can be defined in terms of the support function.)

- 4° To estimate the modulus of continuity, according to formula (4.2.2), we estimate the values

$$\check{A}_t^* = \sup_{x \in \check{B}_{t-1}} \|D_t(x) \cap E_t^a(x)\|_2, \quad (10.5.2)$$

where $E_t^a(\cdot)$ is given by (10.2.11).

For the models with unbounded trading constraints, it is possible to use inequality (10.2.54), i.e.,

$$\check{A}_t^* \leq \frac{\bigvee_{s=t}^N [C_t + L_{g_t} \delta_t^*]}{\mathfrak{p}_t^* - (1 + L_{K_t}) \delta_t^*} \quad (10.5.3)$$

with the notations (10.2.47) and (10.2.45).

For the models with bounded trading constraints, the inclusion $D_t(x) \cap E_t^a(x) \subseteq D_t(x)$ implies $\check{A}_t^* \leq R_t^*$, where the value R_t^* is found either analytically (if possible) or numerically by analogy with item 3°.

- 5° We estimate the Lipschitz constants for the solutions of the Bellman–Isaacs equations $L_{v_t^*}$ by the recurrence relations (4.2.16), replacing A_t^* with \check{A}_t^* .
- 6° For a fixed number δ_t^* , $t = 1, \dots, N$, we employ the inequality

$$\omega_{w_t^*}^{\check{B}_t}(\delta) \leq L_{v_t^*} \delta$$

to estimate the right-hand side of (10.2.21) for $\delta_t^* = \delta_t^*$:

$$\varepsilon_t^* = \sum_{s=t+1}^N [L_{v_t^*} \delta_t^* + R_t^* \delta_t^*] \quad t = 0, \dots, N-1. \quad (10.5.4)$$

Let us estimate R_t^* in (10.5.4): for the models with unbounded trading constraints, using inequality (10.2.52) (in this case, the estimate of R_t^* depends on δ_t^*); for the models with bounded trading constraints, by analogy with item 3°. We denote by R_t the resulting estimate of R_t^* and by ε_t the estimate of ε_t^* obtained by replacing the values R_t^* in (10.5.4) with R_t . The accuracy δ_t^* , $t = 1, \dots, N$, at each step can be assigned empirically based on a computational experiment, given that the computational complexity grows exponentially with time.

For example, the value δ_t^* , $t = 1, \dots, N$, can be a priori chosen so that the estimates of the terms on the right-hand side (10.5.4) be equal, by specifying δ_N^* . For the models with bounded trading constraints, R_t is independent of δ_t^* , and we can sequentially determine δ_t^* for $t = N-1, \dots, 1$ using the formulas

$$\delta_t^* = \frac{L_{v_{t+1}^*} + R_{t+1}}{L_{v_t^*} + R_t} \delta_{t+1}^*. \quad (10.5.5)$$

For the models with unbounded trading constraints, the dependence $\delta \mapsto R_t(\delta)$ is a strictly monotonically increasing function; see the right-hand side of (10.2.52). Therefore, the equation

$$[L_{v_t^*} + R_t(\delta_t^*)] \delta_t^* = [L_{v_{t+1}^*} + R_{t+1}(\delta_{t+1}^*)] \delta_{t+1}^* \quad (10.5.6)$$

has a unique root δ_t^* , which is easy to calculate. For such a choice of δ_t^* , $t = 1, \dots, N$,

$$\varepsilon_t = (N-t)\varepsilon_{N-1}, \quad t = N-1, \dots, 0.$$

Let $\varepsilon > 0$ be the desired accuracy of calculating the premium when selling an option. Then it suffices to choose

$$\delta_N^* = \frac{\varepsilon}{N(L_{v_N^*} + R_N)}.$$

Description of test examples

Let us describe the test examples for a computational experiment. We specify:

- 1) the market dynamics model,
- 2) the trading constraints,
- 3) the option type and payoff functions.

We rest on the multiplicative representation of the price dynamics model (equivalent to the additive one); see (1.1.10) and (1.1.10'). Consider test examples in which⁷⁰ the price dynamics (the trading constraints) are Markovian⁷¹ and stationary.⁷² These properties hold when choosing in (1.1.10) $C_t(\cdot) \equiv C^*$, where C^* is a non-empty compact convex subset of \mathbb{R}^n . Then we can omit the subscript t at K_t ; according to Proposition 4.2.3, the set-valued mapping

$$\mathbb{R}^n \ni x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto K(x) = \{y = (y^1, \dots, y^n) : y^i = (m^i - 1)x^i, i = 1, \dots, n, m = (m^1, \dots, m^n) \in E\}$$

taking compact and convex values satisfies the Lipschitz condition with respect to the Pompeiu–Hausdorff measure:

$$h_\rho(K(x), K(x')) \leq \|C^* - e\|_2 \|x - x'\|_2,$$

where $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ and $\|A\|_2 = \sup_{a \in A} \|a\|_2$. To be precise, we choose two variants of the set C^* :

- 1) The rectangular parallelepiped $C^* = \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$, where $0 < \alpha_i < \beta_i$, $i = 1, \dots, n$ (the Kolokoltsov model). Denoting the vertices of this rectangle by v_i , $i = 1, \dots, 2^n$, we write the support function of the rectangle E as

$$\sigma_E(h) = \bigvee_{i=1}^{2^n} \langle v_i, h \rangle.$$

According to (4.2.25), the Lipschitz constant does not exceed

$$\|C^* - e\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (|\alpha_i - 1| \vee |\beta_i - 1|)^2}.$$

- 2) The ellipsoid

$$C^* = \{m = (m^1, \dots, m^n) : \langle \Gamma^{-1}(m - \mu), m - \mu \rangle \leq 1\},$$

where Γ is symmetric positive definite (hence, nonsingular) matrix⁷³ and $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Its support function has the form

$$\sigma_{C^*}(h) = \langle \mu, h \rangle + \sqrt{\langle \Gamma h, h \rangle}.$$

⁷⁰The corresponding terminology has been introduced in Chapter 1.

⁷¹In this case, the sets $K_t(\cdot)$ ($D_t(\cdot)$, respectively) depend on the prices at the previous time instant only.

⁷²In this case, the sets $K_t(\cdot)$ ($D_t(\cdot)$, respectively) are independent of the time variable t .

⁷³For convenience, we interpret Γ as some covariance matrix and Γ^{-1} , its inverse, as the corresponding precision matrix.

The parameters of the ellipsoid C^* are chosen so that $C^* \subseteq (0, \infty)^n$, which is equivalent to the system of inequalities

$$\langle \mu, e_i \rangle > \sqrt{\langle \Gamma e_i, e_i \rangle}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{10.5.7}$$

where e_i denotes a vector whose coordinates are all 0 except the i th coordinate equal to 1. With an appropriate change of the variables, the Lipschitz constant $\|C^* - e\|_2$ can be found through the constrained maximization

$$\|C^* - e\|_2 = \max_{x \in C^* - e} \|x\|_2 = \max_{\|z\|_2 \leq 1} \|\mu - e + \Gamma^{1/2}z\|_2.$$

Generally, maximizing the quadratic form $\|\mu - e + \Gamma^{1/2}z\|_2^2$ subject to the quadratic constraint $\|z\|_2^2 \leq 1$ is a rather difficult problem that has a numerical solution, i.e., a special case of [95, equation 10]. However, for practical purposes, we can use the rough upper bound

$$\|C^* - e\|_2 \leq \|\mu - e\|_2 + \|\Gamma^{1/2}\|_2, \tag{10.5.8}$$

where $\|\Gamma^{1/2}\|_2 = \max_{\|z\|_2=1} \|\Gamma^{1/2}z\|_2 = \lambda_{max}^{1/2}$ and $\lambda_{max} > 0$ is the maximum eigenvalue of Γ .

The set of points to calculate the Bellman function v_t^* at the time instant t cannot be determined explicitly. However, we can approximate this set from below and above. Let us denote

$$\Psi(x) = (\ln x_1, \dots, \ln x_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in (0, \infty)^n.$$

Then

$$\Psi(x_t) = \Psi(x_0) + \sum_{s=1}^t \Psi(m_s), \tag{10.5.9}$$

which yields⁷⁴

$$\Psi(x_t) - \Psi(x_0) \in \Psi(C^*) + \dots + \Psi(C^*) \text{ (} t \text{ terms)} \supseteq t\Psi(C^*). \tag{10.5.10}$$

On the other hand, using the properties of the Minkowski sum, we obtain the inclusion

$$\begin{aligned} & \Psi(C^*) + \dots + \Psi(C^*) \text{ (} t \text{ terms)} \subseteq \\ & \text{conv}(\Psi(C^*) + \dots + \Psi(C^*) \text{ (} t \text{ terms)}) \\ & = \text{conv}(\Psi(C^*)) + \dots + \text{conv}(\Psi(C^*)) \text{ (} t \text{ terms)} \\ & = t \text{ conv}(\Psi(C^*)) = \text{conv}(t\Psi(C^*)). \end{aligned} \tag{10.5.11}$$

Indeed, the Pompeiu–Hausdorff distance

$$h_\rho(\text{conv}(\Psi(C^*) + \dots + \Psi(C^*) \text{ (} t \text{ terms)}), \Psi(C^*) + \dots + \Psi(C^*) \text{ (} t \text{ terms)})$$

⁷⁴Note that for a convex set E , the set $\Psi(E)$ may be nonconvex.

does not grow for $t \geq n$, not exceeding⁷⁵ $\sqrt{1 \vee (n-1)} \tau(\Psi(C^*))$, where $\tau(A)$ is the Chebyshev radius, i.e., the radius of the smallest ball⁷⁶ containing the set A [242]. Unfortunately, the number of computation points for the Bellman function at the time instant t will grow exponentially with increasing t . This fact follows from inclusions (10.5.10) and (10.5.11). Hence, the computational complexity will become considerable.

To make the experiment results with the two different sets C^* comparable from an economic point of view⁷⁷, we interconnect the parameters determining C^* : choose the ellipsoid with the center $\mu_i = \frac{\beta_i + \alpha_i}{2}$ and the semi-axes $\sigma_i = \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}$, which correspond to some formalization of the “trend” and “volatility” of the market. Then, in contrast to the parallelepiped, the case where C^* is an ellipsoid additionally considers the a priori information about price “correlations” in the market behavior scenarios.

When constructing an approximate market model, assume for convenience that the initial prices lie on the lattice L_θ .

We choose two classes of trading constraints for testing:

1) *Static trading constraints, unbounded.*

The constraint consists in prohibiting short positions, i.e., $D_t(\cdot) \equiv [0, \infty)^n$. In this case, the support function of the convex cone $D_t(\cdot)$ has the form

$$\sigma_{D_t(\cdot)}(z) = \begin{cases} 0 & z \in (-\infty, 0]^n, \\ +\infty & z \notin (-\infty, 0]^n. \end{cases}$$

Under such trading constraints, the barrier cone $\text{bar}(D_t(\cdot)) \equiv (-\infty, 0]^n$ coincides with the polar cone $D_t^\circ(\cdot) = \{y : \sigma_{D_t(\cdot)}(y) \leq 0\}$. Therefore, the robust condition of no sure arbitrage with unbounded profit RNDSAUP coincides with the robust condition of no sure arbitrage⁷⁸ RNDSA.

For the market dynamics model with the rectangle C^* , this is equivalent to the inequalities⁷⁹ $\alpha_i < 1, i = 1, \dots, n$. An explicit expression for

⁷⁵This estimate [242] clarifies the estimate from the Shapley–Folkman theorem [228, Appendix 2] for the case of the same terms in the Minkowski sum and the space dimension $n \geq 2$. In fact, the estimate can be even improved: the “external” radius can be replaced by the “internal” one, as suggested by Starr.

⁷⁶For a bounded set, such a ball exists and is unique. In addition, the radius of the circumscribed ball for the set E can be estimated from above through the diameter of the set $\mathfrak{d}(E) = \sup\{\|x_2 - x_1\| : x_1, x_2 \in E\}$ using Young’s inequality $\tau(E) \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \mathfrak{d}(E)$; see [140].

⁷⁷For comparability in terms of computational intensiveness, we can require equal volumes, i.e., $\det(\Gamma^{-1}) = \prod_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i)$. This requirement provides approximately the same number of lattice points falling into $\tilde{K}_t(\cdot)$ under the two different sets C^* . It is possible to interconnect the economical and computational aspects of the things by reformalizing the “trend” and “volatility” of the market, i.e., letting $\mu_i = \varkappa \frac{\beta_i + \alpha_i}{2}$ and $\sigma_i = \varkappa \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}$, where the proportionality parameter $\varkappa > 0$ is chosen from the equal volume condition.

⁷⁸This fact is easily verified using the geometric criterion for condition NDSA, namely, $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap D_t^\circ(\cdot) \neq \emptyset$.

⁷⁹If the inequalities $\alpha_i < 1, i = 1, \dots, n$, are supplemented with the inequalities $\beta_i > 1, i = 1, \dots, n$, we obtain the robust condition of no arbitrage opportunities RNDAO.

the structural stability threshold is given by (10.1.28). For the market dynamics model with the ellipse C^* and the parameters satisfying (10.5.7), we have $f(\text{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1}))) = \text{int}(K^*(x_{t-1})) = \text{int}(\Lambda(x_{t-1})C^* - x_{t-1}) = \Lambda(x_{t-1})\text{int}(C^*) - x_{t-1}$ due to the nonsingularity of the matrix $\Lambda(x_{t-1})$. To check condition RNDSAUP, we employ the geometric criterion (2.4.3): $\text{int}(\text{conv}(K_t(\cdot))) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$; in this case, $\text{bar}(D_t(\cdot)) \equiv (-\infty, 0]^n$, and this condition takes the form $(m^i - 1)x_{t-1}^i \leq 0$, $i = 1, \dots, n$, for some $m \in f(C^*)$. Thus, condition RNDSAUP is equivalent to the geometric condition

$$\text{int}(C^*) \cap (-\infty, 1]^n \neq \emptyset. \quad (10.5.12)$$

Since $C^* \subseteq (0, +\infty)^n$, condition (10.5.12) is checked by solving a quadratic programming problem and verifying the inequality

$$\inf_{x \in (0, 1]^n} \langle \Gamma^{-1}(x - \mu), x - \mu \rangle = \min_{x \in [0, 1]^n} \langle \Gamma^{-1}(x - \mu), x - \mu \rangle < 1. \quad (10.5.13)$$

To find the structural stability threshold in this case, we solve (numerically) the constrained optimization problem (10.1.32).

2) *Dynamic trading constraints, bounded.*

The trading constraints have been described in Example 1.1.4. In the model, the company's risk management establishes limits on the derivative desk's portfolio by calculating the Value-at-Risk (VaR) based on the Bachelier model assumptions. In this case, the VaR of a portfolio with a given significance level and a one-step horizon is proportional to the standard deviation of the portfolio value. For convenience, we reproduce this model below.

Assume that the estimate Σ_t of the covariance matrix for the increments ΔX_t is recursively calculated using exponentially weighted moving averages. Let the initial values for the empirical mean ν_0 and the empirical covariance matrix Σ_0 be given.⁸⁰ Under known values from the price history $\bar{X}_t = \bar{x}_t$ by the current time instant t , we can write the recurrence relations⁸¹

$$\nu_t = \varkappa \Delta x_{t-1} + (1 - \varkappa) \nu_{t-1}, \quad (10.5.14)$$

$$\Sigma_t = \varkappa (\Delta x_{t-1} - \nu_t)(\Delta x_{t-1} - \nu_t)^T + (1 - \varkappa) \Sigma_{t-1}, \quad (10.5.15)$$

where $\varkappa \in (0, 1)$ is the exponential weighting parameter. Thus, the covariance matrix estimate $\Sigma_t = \Sigma_t(x_1, \dots, x_{t-1}) = \Sigma_t(\cdot)$ depends on the price history.⁸² The trading constraint has the form

$$D_t(\cdot) = \{h \in \mathbb{R}^n : \gamma \sqrt{\langle \Sigma_t(\cdot) h, h \rangle} \leq \eta\}, \quad (10.5.16)$$

⁸⁰For example, they can be determined from historical asset price data prior to the period under consideration.

⁸¹In formulas (10.5.14) and (10.5.15), we interpret ΔX_t and ν_t in matrix form as column vectors. The sign T means the matrix transpose.

⁸²The joint dynamics of $K_t(\cdot)$ and $D_t(\cdot)$ is "Markovian" with respect to the state (x_t, ν_t, Σ_t) of the extended state space.

where η is the risk management limit, and γ is the quantile of the standard Gaussian distribution corresponding to a given VaR significance level.⁸³ For the trading constraints under consideration, the sets $D_t(\cdot)$ are therefore ellipsoids that depend on the price history through the relations (10.5.14) and (10.5.15) by the definition of Σ_t . Due to the compact trading constraints $\text{bar}(D_t(\cdot)) \equiv \mathbb{R}^n$, condition RNDSAUP holds automatically.

However, at least theoretically, the corresponding ellipsoid can degenerate. In this regard, we introduce a (small) regularization parameter⁸⁴ $\alpha > 0$ and choose $\tilde{\Sigma}_t = \Sigma_t + \alpha I$, where I is an identity matrix, as the covariance matrix estimate. Then the support function of $D_t(\cdot)$ takes the form

$$\sigma_{D_t(\cdot)}(z) = \eta \gamma^{-1} \sqrt{\langle \tilde{\Sigma}_t^{-1}(\cdot) z, z \rangle}.$$

Finally, we choose two types of European options.

- 1) The ‘‘Put on Max’’ option, whose payoff function

$$\max(\chi - \max(x_N^1, \dots, x_N^n), 0), \quad \chi > 0, \quad (10.5.17)$$

is not convex.

- 2) The ‘‘Call on Max’’ option, whose payoff function

$$\max(\max(x_N^1, \dots, x_N^n) - \chi, 0), \quad \chi > 0, \quad (10.5.18)$$

is convex.

Both payoff functions, (10.5.17) and (10.5.18), satisfy the Lipschitz condition with constant 1.

We will numerically investigate the case of two risky assets ($n = 2$), convenient for visualizing the results.

To select the market dynamics with a constant set of multiplier values in the ellipsoid case, we will choose a convenient parameterization⁸⁵ for the matrix Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \sigma_1^2, \quad \Gamma_{22} = \sigma_2^2, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \rho \sigma_1 \sigma_2, \\ \sigma_1 &> 0, \quad \sigma_2 > 0, \quad \rho \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Under this parametrization, the inverse Γ^{-1} has the form

$$\Gamma_{11} = (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_1^{-2}, \quad \Gamma_{22} = (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_2^{-2}, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = -\rho (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}.$$

⁸³Potential portfolio losses.

⁸⁴This parameter can be chosen, e.g., by the Tikhonov principle (the residual must be of the order of the statistical estimation error) or by cross-validation.

⁸⁵Thereby, the matrix Γ can be interpreted as the covariance matrix of some two-dimensional random vector, where $\sigma_1 > 0$ and $\sigma_2 > 0$ mean the standard deviations of the corresponding vector components, and $\rho \in (-1, 1)$ is the correlation coefficient.

Then condition (10.5.7) can be written as

$$\mu_1 > \sigma_1, \quad \mu_2 > \sigma_2,$$

whereas the right-hand side of inequality (10.5.8) as

$$[(\mu_1 - 1)^2 + (\mu_1 - 1)^2]^{1/2} + \left\{ \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \left[\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - (1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}.$$

Under the trading constraints prohibiting short positions, the “no arbitrage” condition RNDSAUP (in this case coinciding with RNDSA to satisfy (10.5.13) can be written as explicit restrictions on the ellipsoid parameters. We denote⁸⁶

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \langle \Gamma^{-1}e_1, e_1 \rangle^{-1} \langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e_1 \rangle = (1 - \mu_1) - (1 - \mu_2)\rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \\ \eta_2 &= \langle \Gamma^{-1}e_2, e_2 \rangle^{-1} \langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e_2 \rangle = -(1 - \mu_1)\rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + (1 - \mu_2). \end{aligned} \quad (10.5.19)$$

Then RNDSAUP is equivalent to one of the following conditions:

- 1) Either⁸⁷ $\mu_1 \vee \mu_2 \leq 1$,
- 2) or $\mu_1 \vee \mu_2 > 1$ and, depending on the values η_1 and η_2 , we additionally have:

- a) If $\eta_1 \leq 0$ and $\eta_2 \leq 0$, then⁸⁸

$$\frac{\langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle = (1 - \mu_1)^2\sigma_2^2 + 2(1 - \mu_1)(1 - \mu_2)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1 - \mu_2)^2\sigma_1^2}{(1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} < 1. \quad (10.5.20)$$

- b) If $\eta_1 \leq 0$ and $0 < \eta_2 \leq 1$, then⁸⁹

$$\langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle - (1 - \rho^2)^{-1}\sigma_2^{-2}\eta_2^2 < 1, \quad (10.5.21)$$

where $\langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle$ is expressed through the ellipse parameters in formula (10.5.20) and η_2 figures in formula (10.5.19).

- c) If $\eta_1 \leq 0$ and $\eta_2 > 1$, then⁹⁰ this case can be obtained from the previous one by letting $\eta_2 = 1$ in formula (10.5.21):

$$\langle \Gamma^{-1}(e_1 - \mu), e_1 - \mu \rangle = \langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle - (1 - \rho^2)^{-1}\sigma_2^{-2} < 1.$$

⁸⁶Being restricted to the straight line $\{x = e - \eta e_1 : \eta \in \mathbb{R}\}$, the function $x \rightarrow \langle \Gamma^{-1}(x - \mu), x - \mu \rangle$ has minimum at the point $\{-\eta_1 e_1\}$; to the straight line $\{x = e - \eta e_2 : \eta \in \mathbb{R}\}$, at the point $\{e - \eta_2 e_2\}$.

⁸⁷In this case, $\mu \in (-\infty, 1]^2$.

⁸⁸In this case, the minimum in (10.5.13) is achieved at the point $x = e$, and e is an interior point of the ellipse C^* .

⁸⁹In this case, the minimum in (10.5.13) is achieved at the point $x = e - \eta_2 e_2 = e_1 + (1 - \eta_2)e_2$, and this point is an interior point of the ellipse C^* .

⁹⁰In this case, we check (10.5.13) at the point $x = e - e_2 = e_1$, i.e., this point should be an interior point of the ellipse C^* .

d) If $0 < \eta_1 \leq 1$ and $\eta_2 \leq 0$, then⁹¹

$$\langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle - (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_1^{-2} \eta_1^2 < 1. \quad (10.5.22)$$

e) If $\eta_1 > 1$ and $\eta_2 \leq 0$, then⁹² this case can be obtained from the previous one by letting $\eta_1 = 1$ in formula (10.5.22):

$$\langle \Gamma^{-1}(e_2 - \mu), e_2 - \mu \rangle = \langle \Gamma^{-1}(e - \mu), e - \mu \rangle - (1 - \rho^2)^{-1} \sigma_1^{-2} < 1.$$

f) If $\eta_1 > 0$ and $\eta_2 > 0$, from (10.5.19) it follows that $\rho < 0$, and we have the alternatives:

f1) Either $\mu_1 > 1$ and $\mu_2 < 1$, and then⁹³ (10.5.21),

f2) or $\mu_2 > 1$ and $\mu_1 < 1$, and then⁹⁴ (10.5.22).

It seems interesting to consider several cases of the parameter ρ : positive, negative, and zero. They reflect the corresponding correlation of risky assets.

Software implementation and results of the numerical experiment

The numerical experiment was implemented in Python 3.7 using the numpy 1.15.4 library for vectorizing operations. The qhull algorithm reproduced in the scipy 1.1.0 library was used to construct the convex hull of a set.

To reduce the amount of calculations of the price function when solving the Bellman–Isaacs equation, the points of the grid L_θ for the function were precalculated by formula (10.5.9). When performing operations over the sets of grid points, a significant speed-up was achieved by pre-projecting the integer coordinates of the points into the set of integers using a bijective mapping, after which the union and intersection operations were performed on the one-dimensional integer sets.

Figure 10.1 shows the price of “Put on Max” and “Call on Max” options for different horizons N depending on the initial asset prices. (For $N = 0$, the graph is a payoff function, presented for comparison.) Clearly, as the horizon increases, the objective function (the amount of reserves) for options increases. This result agrees with the economic sense: as the “market” uncertainty grows, more reserves are required for ensuring the complete coverage of contingent liabilities on an option.

Figures 10.2 and 10.3 show the height maps for the prices of the “Put on Max” and “Call on Max” options, respectively, for different price multiplier sets C^* . It is interesting to compare the option prices for the rectangular and ellipsoidal sets C^*

⁹¹In this case, the minimum in (10.5.13) is achieved at the point $x = e - \eta_1 e_1 = e_1 + (1 - \eta_1) e_1$, and this point is an interior point of the ellipse C^* .

⁹²In this case, we check (10.5.13) at the point $x = e - e_1 = e_2$, i.e., this point should be an interior point of the ellipse C^* .

⁹³In this case, the minimum in (10.5.13) is achieved at the point $x = e - \eta_2 e_2 = e_1 + (1 - \eta_2) e_2$, where $\eta_2 < (1 - \rho^2)(1 - \mu_2) < 1$, and this point is an interior point of the ellipse C^* .

⁹⁴In this case, the minimum in (10.5.13) is achieved at the point $x = e - \eta_1 e_1 = (1 - \eta_1) e_1 + e_2$, where $\eta_1 < (1 - \rho^2)(1 - \mu_1) < 1$, and this point is an interior point of the ellipse C^* .

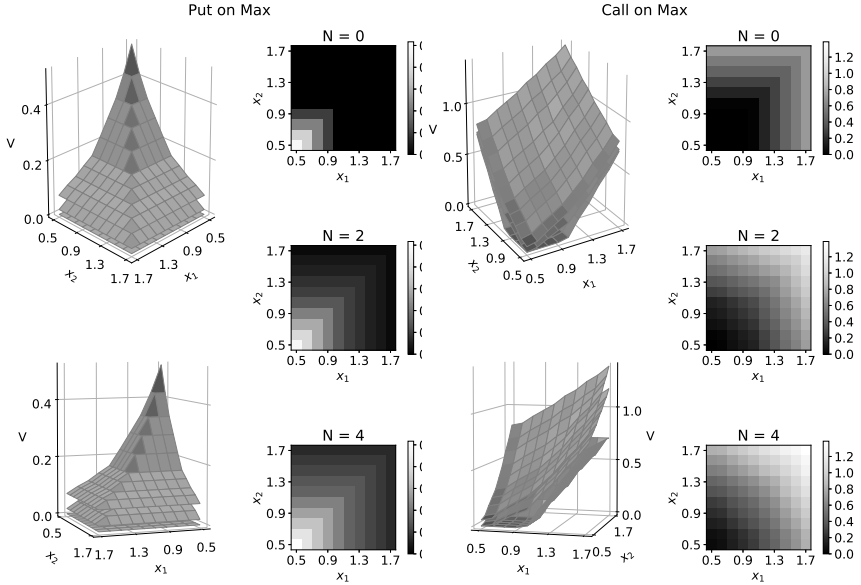


Figure 10.1: The prices of “Put on Max” (left) and “Call on Max” (right) options under the rectangular price multiplier set for horizons $N = 0, 2,$ and 4 depending on initial asset prices. For each option, graphs in two isometric projections and corresponding height maps are given.

depending on the price correlation. According to these graphs, the prices are closest under a positive correlation for the “Put on Max” option and a negative correlation for the “Call on Max” option. This fact can be explained as follows. The parallelepiped C^* contains the most unfavorable market scenarios in which the asset prices can take the minimum and maximum values independently of each other. For the “Put on Max” option seller, the most unfavorable scenario is a simultaneous drop in prices (see (10.5.17)), which is more likely under a positive correlation. For the “Call on Max” option seller, the most unfavorable scenarios are when the price of at least one of the assets increases (see (10.5.18)). This event is more likely under a negative correlation, when a drop in one of the prices contributes to an increase in the other.

Software package

Together with N. Andreev, V. Slivinsky, and V. Kuznetsov, a software package was developed, the so-called robust financial portfolio management framework (robust-fpm framework). The package is a set of libraries for the Python language, intended

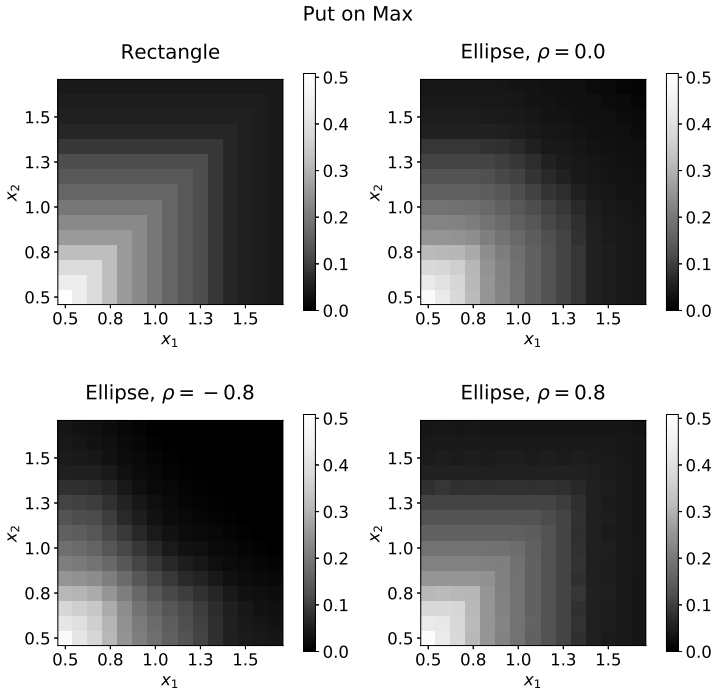


Figure 10.2: The price of “Put on Max” option for rectangular and ellipsoidal price multiplier sets C^* . For the ellipsoidal set, the cases presented are zero, positive, and negative price correlations.

for numerically solving the pricing and superhedging problem for an option portfolio within the guaranteed deterministic approach for a wide class of derivatives. In the future, the package will be extended to solve the investment problem within the guaranteed deterministic approach.

The package provides functionality for working with bounded and unbounded sets in \mathbb{R}^n defined by support functions. It supports several operations: the multiplication of sets by a number, Minkowski addition and multiplication of sets, and the discretization of a set into a given lattice (not necessarily uniform). The discretization operation allows optimizing the numerical problem by tuning the lattice step depending on available resources and required accuracy. The software package has an interface to work with set-valued mappings, price dynamics, and trading constraints (as abstract classes). The representation of price dynamics and trading constraints

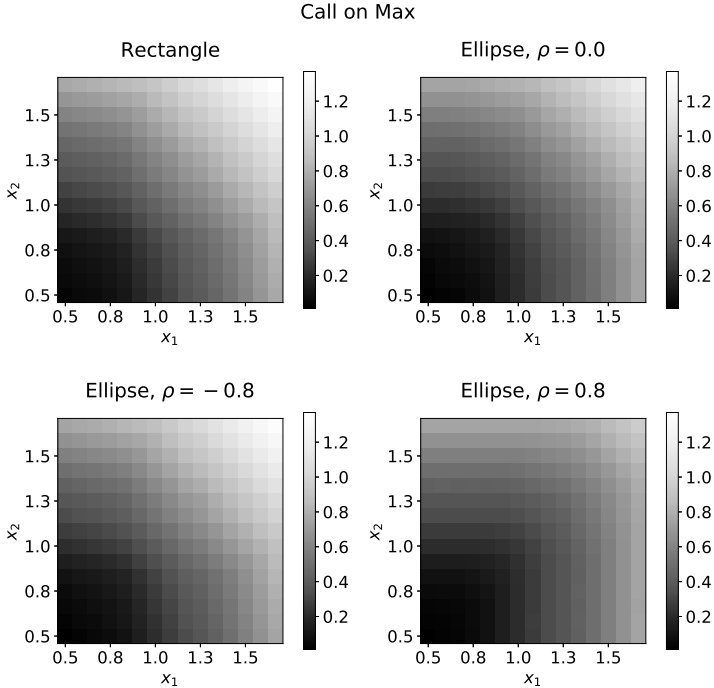


Figure 10.3: *The price of “Call on Max” option for rectangular and ellipsoidal price multiplier sets C^* . For the ellipsoidal set, the cases presented are zero, positive, and negative price correlations.*

in the form of set-valued mappings allows combining effective discrete numerical methods with analytic ones. To some extent, it reduces accuracy losses and rounding errors and simplifies the user’s work with the package.

The current version of the package implements rectangular, elliptic, and symplectic sets in \mathbb{R}^n , unbounded sets in \mathbb{R}^n and \mathbb{R}_+^n , constant additive and multiplicatively independent price dynamics, trading constraints for prohibiting short positions and symplectic constraints (which combine prohibiting short positions with restrictions on aggregate investments in risky assets), and the case of no trading constraints. The pricing problem is solved using an efficient numerical algorithm with calculating the upper estimates for the accuracy of the obtained solution (price function). The central element of the package is the Problem class encapsulating the pricing problem. Due to such a structure, the user can change certain parameters of

the problem (optimization term, trading constraints, etc.) and assess their effect on the price function and its evolution without additional efforts.

Due to object-oriented programming principles, the software package can be used for external tasks: the original code is freely accessible, and the implemented classes and methods are easily modifiable. Adaptation of the software package requires minimal knowledge of programming and the Python language, which facilitates the use and potential implementation of the package in different environments. Moreover, the source code is supplemented with detailed program documentation in English.

Computationally-intensive subproblems, mainly the ones using computational geometry algorithms, are being parallelized.

Presently, the software package serves for educational and research purposes, including students and graduates of the Department of Systems Analysis, the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics (Moscow State University). In particular, the software package is implemented for practical work in computer classes within *Elements of Mathematical Finance*, an academic course for undergraduate students.

Chapter 11. Binary Options

This chapter considers the pricing problem when superhedging a binary European option for the multiplicative one-dimensional market model without trading constraints. Several properties of the solutions of (BI) are established, particularly continuity everywhere except one point. In addition, we propose an algorithm for obtaining a “semi-explicit” solution of (BI) represented as a piecewise rational function.

The interest in this problem is due to the discontinuity of the payoff function: the results concerning the case of continuous payoff functions described in Chapters 3 and 4 become inapplicable here.

The main results of this chapter were published in [254] (the English version in [225]).

11.1 Auxiliary Results for Special Models

Below, we discuss discounted prices only. After discounting, see Chapter 1, the price of a risk-free asset is identically equal to 1.

According to the terminology proposed in Chapter 1, for risky assets the price dynamics (trading constraints) are Markovian if $K_t(\cdot)$ ($D_t(\cdot)$, respectively) depend only on the prices at the previous time instant, i.e., $K_t(\cdot)$ ($D_t(\cdot)$, respectively) can be written as

$$K_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = K_t^*(x_{t-1}) \quad (11.1.1)$$

and

$$D_t(x_0, \dots, x_{t-1}) = D_t^*(x_{t-1}), \quad (11.1.2)$$

respectively, $t = 1, \dots, N$. According to Proposition 1.2.1, if price dynamics and trading constraints are Markovian and the payoff functions depend on the current price only, i.e.,

$$g_t(x_0, \dots, x_t) = g_t^*(x_t), \quad t = 1, \dots, N, \quad (11.1.3)$$

then the solutions of the Bellman–Isaacs equations also depend on the current price only:

$$v_t^*(x_0, \dots, x_t) = v_t^*(x_t), \quad t = 1, \dots, N. \quad (11.1.4)$$

Let us formulate some simple but useful assertions.

Proposition 11.1.1. *Under assumptions (11.1.1) and (11.1.3), consider the case of no trading constraints¹, i.e., $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, and let the condition of no arbitrage opportunities NDAO be satisfied.*

Then, for European options, the solutions of the Bellman–Isaacs equations are monotonically decreasing in time:

$$v_0^*(x) \geq v_1^*(x) \geq \dots \geq v_N^*(x). \quad (11.1.5)$$

Proof. If there are no trading constraints and the condition of no arbitrage opportunities NDAO holds, we have a special case of American options with the payoff functions²

$$g_t(x) \equiv 0, \quad t = 0, \dots, N-1, \quad g_N = g. \quad (11.1.6)$$

Using Proposition 1.2.1 and Theorem 5.3.1, we obtain the representation (11.1.4), $t = 1, \dots, N$, and the equality

$$v_{t-1}^*(x) = \sup \left\{ \int v_t^*(x+y) Q(dy), Q \in \mathcal{M}_t(x) \right\}, \quad (11.1.7)$$

where $\mathcal{M}_t(x)$ is the set of probability measures on $K_t^*(x)$ with a finite support satisfying the martingale condition $\int y Q(dy) = 0$. (In fact, it suffices to consider the set of measures with at most $n+1$ points in the support.) In particular, $\delta_0 \in \mathcal{M}_t(x)$, where δ_0 is a probability measure concentrated at the point 0. Therefore,

$$v_{t-1}^*(x) \geq v_t^*(x).$$

□

Further, we consider a one-dimensional market model in which the discounted price dynamics of a risky asset are described by the relations³

$$X_t = M_t X_{t-1}, \quad t = 1, \dots, N, \quad (11.1.8)$$

with the multiplier

$$M_t \in [\alpha, \beta], \quad 0 < \alpha < \beta. \quad (11.1.9)$$

This model has no trading constraints, i.e., (1.1.8) holds. From this point onwards, let the condition of no arbitrage opportunities⁴ NDAO be satisfied; in the case under consideration, it is equivalent to the inequalities⁵

$$\alpha < 1 < \beta. \quad (11.1.10)$$

¹In this case, condition (11.1.2) obviously holds.

²Recall that a weaker condition of no deterministic sure arbitrage (NDSA) is sufficient here.

³According to the terminology of Chapter 1, in this case, the price dynamics are multiplicatively independent.

⁴Such a model was first proposed by V.M. Kolokoltsov [133].

⁵Recall that, according to Remark 2.4.1, conditions NDAO and RNDAO coincide for the one-dimensional model.

Proposition 11.1.2. *Let the price dynamics model be described by the relations (11.1.8)–(11.1.10) and (1.1.8). For a fixed time instant $t \in \{1, \dots, N\}$, we have the following assertions for the European option:*

- 1) *If the function v_t^* satisfies the Lipschitz condition on some interval $[a, b]$, then the function v_{t-1}^* also satisfies it on the (narrower) interval $[\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}]$, and the Lipschitz constant for v_{t-1}^* on this interval does not exceed its counterpart for v_t^* on the interval $[a, b]$.*
- 2) *If the upper bound $v_t^*(x) \leq cx + d$ holds for $x \in [a, b]$, then $v_{t-1}^*(x) \leq cx + d$ for $x \in [\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}]$.*
- 3) *If the payoff functions g_s^* , $s = 1, \dots, N$ are upper semicontinuous, then the strict inequality $v_t^*(x) < cx + d$ for $x \in [a, b]$ implies the strict inequality $v_{t-1}^*(x) < cx + d$ for $x \in [\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}]$.*
- 4) *If $x_1 > 0$, $x_1 < x_2$, and $\frac{x_2}{x_1} \leq \frac{\beta}{\alpha}$, then $v_{t-1}^*(x) \geq cx + d$ for $x \in [\frac{x_2}{\beta}, \frac{x_1}{\alpha}]$, where*

$$c = \frac{v_t^*(x_2) - v_t^*(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad d = v_t^*(x_1). \quad (11.1.11)$$

Proof. 1) We adopt the multiplicative analog of formula (11.1.7) for the European option:

$$v_{t-1}^*(x) = \sup \left\{ \int v_t^*(mx) Q(dm), Q \in \mathcal{N} \right\}, \quad (11.1.12)$$

where \mathcal{N} is the set of probability measures on $[\alpha, \beta]$ with a finite support satisfying the multiplicative martingale condition $\int m Q(dm) = 1$. (It suffices to consider the set of measures with at most $n + 1$ points in the support.)

We denote by L the Lipschitz constant for v_t^* on the interval $[a, b]$. Since the inclusion $[\alpha x, \beta x] \subseteq [a, b]$ holds for $x \in [\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}]$, for any points x_1 and x_2 such that $\frac{a}{\alpha} \leq x_1 \leq x_2 \leq \frac{b}{\beta}$, we have the inequalities

$$\begin{aligned} |v_{t-1}^*(x_2) - v_{t-1}^*(x_1)| &\leq \sup \left\{ \int |v_t^*(mx_2) - v_t^*(mx_1)| Q(dm), Q \in \mathcal{N} \right\} \leq \\ &L |x_2 - x_1| \int m Q(dm) = L |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

- 2) Due to the inclusion $[\alpha x, \beta x] \subseteq [a, b]$ for $x \in [\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}]$, for any $Q \in \mathcal{N}$ we obtain

$$\int v_t^*(mx) Q(dm) \leq cx \int m Q(dm) + d = cx + d,$$

which gives $v_{t-1}^*(x) \leq cx + d$ according to (11.1.12).

- 3) Under the assumptions made, the supremum in (11.1.12) is reached by Proposition 7.2.1 for some measure $Q_{t,x} \in \mathcal{N}$. Hence,

$$\int v_t^*(mx) Q_{t,x}(dm) < cx \int m Q_{t,x}(dm) + d = cx + d.$$

- 4) For $x \in \left[\frac{x_2}{\beta}, \frac{x_1}{\alpha}\right]$, choosing $m_1 = \frac{x_1}{x}$ and $m_2 = \frac{x_2}{x}$ yields $\alpha \leq m_1 < m_2 \leq \beta$. Consider a measure $Q \in \mathcal{N}$ concentrated at points⁶ m_1 and m_2 . Due to the choice of the constants c and d in (11.1.11), the functions $m \mapsto v_t^*(mx)$ and $m \mapsto cmx + d$ coincide at the points of the support of $Q \in \mathcal{N}$. As a result,

$$\int v_t^*(mx) Q(dm) = cx \int m Q(dm) + d = cx + d,$$

and the conclusion follows by (11.1.12). □

Proposition 11.1.3. *Let the conditions of Proposition 11.1.2 hold. If the payoff functions g_t^* , $t = 1, \dots, N$, are monotonically nondecreasing (monotonically nonincreasing, respectively), then the solutions v_t^* , $t = 1, \dots, N$, of Bellman–Isaacs equations are monotonically nondecreasing (monotonically nonincreasing, respectively) as well.*

Proof. This result directly follows from the Bellman equations (11.1.12). □

Remark 11.1.1. The price dynamics model described by the relations (11.1.8)–(11.1.10) and (1.1.8) is a particular case of the (multidimensional) model with the price dynamics 8.4.2 and the trading constraints 8.4.6. Therefore, under the weaker “no arbitrage” assumption NDSA (for this model, being equivalent to the condition $1 \in [\alpha, \beta]$) combined with the upper semicontinuity of the payoff functions, we apply item 3) of Proposition 8.4.1 (on monotonicity). Moreover, the assumptions of Proposition 1.2.1 are valid. Under all these conditions, if the payoff functions g_t^* , $t = 1, \dots, N$, are monotonically nondecreasing (monotonically nonincreasing, respectively), then the solutions v_t^* , $t = 1, \dots, N$, of the Bellman equations are monotonically nondecreasing (monotonically nonincreasing, respectively) as well.

11.2 A Binary European Option

The distribution of the uncertain multiplier: General case of the support

For the price dynamics model described by the relations (11.1.8), (11.1.9) and (11.1.10), we are interested in the superhedging problem within the guaranteed deterministic approach for a binary European option. Without loss of generality, assume that the strike price is 1. Consider a binary call option⁷ whose payoff function g at the expiration time is given by

$$g(x) = \mathbb{I}_{[1, +\infty)}(x), \quad (11.2.1)$$

⁶The probabilities of these points are uniquely determined from the normalization and martingale conditions; therefore, Q depends on t , x , x_1 , and x_2 .

⁷The case of a binary put option can be investigated using similar methods.

where \mathbb{I}_A denotes the indicator of a set A .

Note that Proposition 11.1.1 is applicable to this model, and the solutions of the Bellman–Isaacs equations are monotonically nonincreasing in the time variable.

Due to the condition of no arbitrage opportunities NDAO, the superhedging problem for a European option is reduced to that for an American option with the payoff functions described by (11.1.6) (i.e., with zero payoff functions except for the expiration time (11.2.1)); see the discussion above. Thus, Proposition 1.2.1 can be used, and the solution of the corresponding Bellman–Isaacs equations admits the representation (11.1.4). Below, we consider the original problem as superhedging for an American option with zero payoff functions except for the expiration time.

Since the terminal payoff function is monotonically nondecreasing, Proposition 8.1.2 is applicable. Thus, the solutions to the corresponding Bellman–Isaacs equations are also monotonically nondecreasing, or equivalently, by notation (11.2.5), the functions v_s^* , $s = 0, \dots, N$, are monotonically nondecreasing. Therefore, these functions may have discontinuities of the first kind (jumps) only.

In addition, the payoff function g is upper semicontinuous, and the set-valued mappings $K_t(\cdot)$ and $D_t(\cdot)$ are continuous. Hence, the solutions v_s^* , $s = 0, \dots, N$ of the Bellman–Isaacs equations are also upper semicontinuous; see Theorem 3.1.4. For monotonically nondecreasing functions, upper semicontinuity is equivalent to right continuity.

Since the solutions of the Bellman–Isaacs equations v_s^* , $s = 0, \dots, N$ are upper semicontinuous, there exists a game equilibrium at each step; see Proposition 5.2.3. In this case, according to Theorem 7.3.2, the most unfavorable mixed strategies at the saddle point are achieved in the class of distributions concentrated at most at two points. Separating the pricing and hedging problems, we find the solution of the Bellman equations by constructing at each step $t = 1, \dots, N$, on the interval $[\alpha x, \beta x]$ the (upper semicontinuous) concave hulls⁸ \tilde{v}_t^* of the Bellman functions v_t^* and letting $v_{t-1}^*(x) = \tilde{v}_t^*(x)$; for details, see Sections 7.5 и 7.6).

Besides, we can employ item 2) of Theorem 8.2.1: there exist Borel measurable transition kernels defining conditional distributions of price increments that correspond to the optimal mixed “market” strategies concentrated, in this case, at most at two points. This dependence of the optimal mixed “market” strategies on the price history will be used below. However, for the model under consideration, the Borel measurable transition kernels are obtained in a constructive way.

The Cox–Ross–Rubinstein assumption about the endpoints of the uncertain multiplier support

The general case of the parameters α and β is quite difficult to analyze due to the chaotic behavior (and arrangement) of the products $\alpha^i \beta^j$, where i and j are nonnegative integers, unless $\ln \alpha$ and $\ln \beta$ are rationally commensurable. We choose

⁸Also called convex envelopes.

the elementary case of their rational commensurability, proposed in the Cox–Ross–Rubinstein model [62], by letting

$$\beta = \alpha^{-1}. \quad (11.2.2)$$

In this case, the condition of no arbitrage opportunities (11.1.10) automatically holds for $\alpha < 1$. Note that assumption (11.2.2) significantly simplifies the analysis: if at step $s = 1, \dots, N$, the price x at the previous time instant belongs to interval $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 0, \dots, s + 1$, then the endpoints of the interval $[\alpha x, \alpha^{-1}x)$ (the range of the uncertain value X_s given $X_{s-1} = x$), i.e., the points αx and $\alpha^{-1}x$, lie in the adjacent intervals $[\alpha^{k+1}, \alpha^k)$ and $[\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2})$, respectively. We will say that the points α^k , $k = 0, \dots, s$, form a *skeleton* at step $s = 1, \dots, N$.

The most unfavorable mixed market strategies at step t given a price x at the previous step may be nonunique. For example, if $x \in [1, \infty)$, such a distribution is any distribution with a support contained in $[1, \infty)$ and the barycenter x ; if $x \in (0, \alpha^{t-1})$, such a distribution is any distribution with a support contained in $(0, \alpha^{t-1})$ and the barycenter x . At points x with a nonunique most unfavorable mixed market strategy, we conventionalize the choice of a distribution with the barycenter x that has the minimum number of support points to fix the unique “optimal” mixed market strategy. There will never be more than two such points, and hence, given the martingale condition, the corresponding distribution is well-defined in a nonambiguous way.

Under this convention, the conditional distribution Q_x^s of the price X_s given $X_{s-1} = x$ concentrated at most at two points, will be chosen as the most unfavorable mixed market strategy at step $s = 1, \dots, N$ (when the maximum in (11.1.12) is achieved). We call the support of the distribution Q_x^s a *scenario*. When the scenario is a singleton, $Q_x^s = \delta_x$, where δ_a denotes a probability measure concentrated at a point a . When the scenario is a set of two points, Q_x^s has the following form:

$$Q_x^s = p_s(x) \delta_{a_s(x)} + q_s(x) \delta_{b_s(x)}, \quad (11.2.3)$$

where $a_s(x) < b_s(x)$. Given a scenario, the probabilities $p_s(x)$ and $q_s(x)$ are uniquely defined from the normalization condition

$$p_s(x) + q_s(x) = 1$$

and the martingale price condition

$$a_s(x) p_s(x) + b_s(x) q_s(x) = x.$$

As a result,

$$p_s(x) = \frac{b_s(x) - x}{b_s(x) - a_s(x)}; \quad q_s(x) = \frac{x - a_s(x)}{b_s(x) - a_s(x)}. \quad (11.2.4)$$

For convenience we introduce the following notations:

$$u_s(x) = v_{N-s}^*(x), \quad s = 0, \dots, N, \quad (11.2.5)$$

in particular, $u_0 = g$, where g is given by (11.2.1). The recurrence relations for u_s , $s = 1, \dots, N$, have the form

$$u_s(x) = p_s(x) u_{s-1}(a_s(x)) + q_s(x) u_{s-1}(b_s(x)). \quad (11.2.6)$$

Using the notations (11.2.5), we investigate the properties of the solution u_s , $s = 1, \dots, N$, of the superhedging problem for a binary European call option with the payoff function at the expiration time given by (11.2.1), in the market described by the relations (11.1.8)–(11.1.10) and (11.2.2).

Solutions of the Bellman equations for steps 1 and 2

For $x < \alpha$, the function u_1 identically equals 0 because the interval $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ is contained in $(0, 1)$, where the function $u_0 = g$ vanishes. For $x \geq 1$, the function u_1 identically equals 1 because the (upper semicontinuous) concave hull \tilde{u}_0 of the function u_0 on $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ at x is 1.

Note that for step 1 and $x \in [\alpha, 1)$, the most unfavorable mixed market strategy can be a conditional distribution Q_x^1 concentrated at the two points αx and 1 with the probabilities $p_1(x)$ and $q_1(x)$, respectively. In this case, formula (11.2.28) becomes

$$p_1(x) = \frac{1-x}{1-\alpha x}; \quad q_1(x) = \frac{(1-\alpha)x}{1-\alpha x};$$

according to formula (11.2.29), the values of the function u_1 on the interval $[\alpha, 1)$ are given by

$$u_1(x) = p_1(x)g(\alpha x) + q_1(x)g(1) = q_1(x).$$

Thus, on the interval $[\alpha, 1)$, the scenario $\{\alpha x, 1\}$ is realized, and the function u_1 has the hyperbolic form

$$u_1(x) = \frac{(1-\alpha)x}{1-\alpha x}, \quad (11.2.7)$$

being strictly monotonically increasing and (strictly) convex. At the point α , the function u_1 has a single discontinuity (jump), is right continuous, and

$$u_1(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha}. \quad (11.2.8)$$

On the right limit of the interval $[\alpha, 1)$, by (11.2.7) we obtain

$$u_1(1-0) = 1, \quad (11.2.9)$$

so the function u_1 is continuous at the point 1.

The straight line passing through the points $(\alpha, u_1(\alpha))$ and $(\alpha^{-1}x, u_1(\alpha^{-1}x))$ of the hyperbola (11.2.7) (the points on the plane corresponding to the arguments α

and 1, respectively) is defined by

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= u_1(\alpha) + \frac{u_1(\alpha^{-1}x) - u_1(\alpha)}{\alpha^{-1}x - \alpha} (z - \alpha) = \\ &= \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{z - \alpha}{(1 + \alpha)(1 - x)} = \\ &= \frac{z - \alpha x}{(1 + \alpha)(1 + x)}. \end{aligned} \tag{11.2.10}$$

Note that this line has the root αx , i.e.,

$$\omega_1(\alpha x) = 0. \tag{11.2.11}$$

Particularly for $x = \alpha$, the straight line passing through such points of the hyperbola (11.2.7) has the root α^2 . To complete the geometric picture, note also that the function

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= u_1(\alpha) + (z - \alpha)u_1'(\alpha + 0) = \\ &= \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{z - \alpha}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)^2}, \end{aligned}$$

defining the tangent at the point α to the restriction of the function u_1 to the interval $[\alpha, 1)$, has the root α^3 .

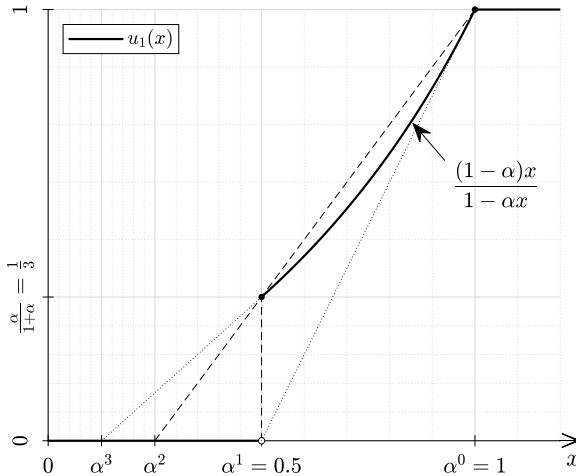


Figure 11.1: The graph of $u_1(x)$ for $\alpha = 0.5$.

According to (11.2.10) and (11.2.11), for $x \in [\alpha^2, \alpha)$, the segment of (11.2.10) connecting the points $(\alpha x, 0)$ and $(\alpha^{-1}x, u_1(\alpha^{-1}x))$ is the (upper semicontinuous)

concave hull \tilde{u}_1 of the function u_1 on the interval $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$, and hence

$$u_2(x) = \tilde{u}_1(x) = \frac{x - \alpha x}{(1 + \alpha)(1 - x)}, x \in [\alpha^2, \alpha]. \quad (11.2.12)$$

On the right limit of the hyperbola (11.2.12), we have

$$u_2(\alpha - 0) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}. \quad (11.2.13)$$

Note that for step 2 and $x \in [\alpha, 1]$, the most unfavorable mixed market strategy can be a conditional distribution Q_x^2 concentrated at the two points⁹ α and 1 with the probabilities $p_{2,1}(x)$ and $q_{2,1}(x)$, respectively; in this case, formula (11.2.20) becomes

$$p_2(x) = \frac{1 - x}{1 - \alpha}; \quad q_2(x) = \frac{x - \alpha}{1 - \alpha};$$

according to formulas (11.2.21) and (11.2.8), the values of the function u_2 on the interval $[\alpha, 1)$ are given by the affine function

$$u_2(x) = p_2(x) u_1(\alpha) + q_2(x) u_1(1) = \frac{x - \alpha^2}{1 - \alpha^2}. \quad (11.2.14)$$

In particular,

$$u_2(\alpha) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

and, considering (11.2.13), the function u_2 is continuous at the point α . The function u_2 is continuous on $[\alpha^2, +\infty)$ and, moreover, has smooth junction at the point α , i.e., a derivative equal to $(1 - \alpha^2)^{-1}$. Therefore, the function u_2 is differentiable on $(\alpha^2, 1)$.

As is easily seen, the function u_2 identically equals 0 and 1 for $x < \alpha^2$ and $x \geq 1$, respectively. Because (11.2.14) implies $u_2(1 - 0) = 1$, the function u_2 is continuous at the point 1, being hence continuous on $[\alpha^2, +\infty)$.

Solutions of the Bellman equations: Recurrence properties

Now we fix $s \in \{1, \dots, N\}$.

Proposition 11.2.1. *Outside the interval $[\alpha^s, 1)$, the function u_s takes the following values:*

$$\begin{aligned} u_s(x) &= 0 \text{ for } x < \alpha^s, \\ u_s(x) &= 1 \text{ for } x \geq 1. \end{aligned} \quad (11.2.15)$$

Proof. The relations (11.2.15) are derived by induction using the property noted in the previous section and the following fact: for $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 0, \dots, s + 1$,

⁹For $x = \alpha$, the most unfavorable mixed market strategy is nonunique: such a distribution is any distribution with the barycenter $x = \alpha$ concentrated at most at the three points α^2 , α and 1, i.e., a mixture $p\delta_\alpha + (1 - p)(\frac{1}{1 + \alpha}\delta_{\alpha^2} + \frac{\alpha}{1 + \alpha}\delta_1)$, $p \in [0, 1]$.

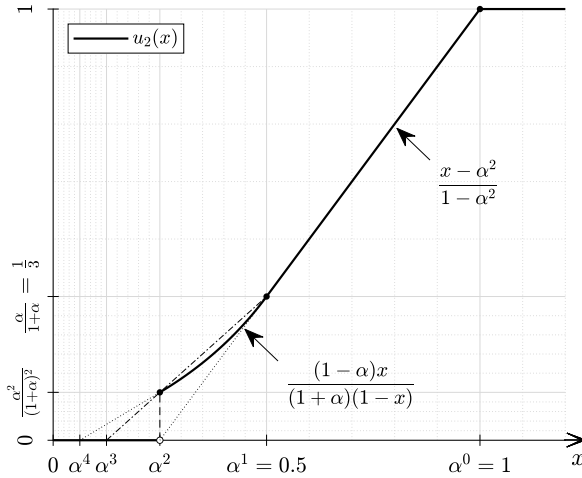


Figure 11.2: The graph of $u_2(x)$ for $\alpha = 0.5$.

the limits of the interval $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ lie in adjacent intervals, i.e., $\alpha x \in [\alpha^{k+1}, \alpha^k]$ and $\alpha^{-1}x \in [\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}]$. For $s = 1$, this property has been established in the previous section. Assume that (11.2.15) holds for $s = t$ and show its validity for $s = t + 1$. The function u_t identically equals 0 for $x < \alpha^{t+1}$ since the interval $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ is contained in $(0, \alpha^t)$, where the function u_t vanishes. For $x \geq 1$, the function u_{t+1} identically equals 1 because the (upper semicontinuous) concave hull \tilde{u}_t of the function u_t on $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ at the point x is 1. \square

Proposition 11.2.2. *The function u_s , $s = 1, \dots, N$, has a discontinuity (jump) at the point α^s , where u_s is right continuous, and satisfies the self-similarity property¹⁰ on the interval $[\alpha^s, \alpha^{s-1}]$:*

$$u_s(x) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{s-1} \cdot u_1(\alpha^{-(s-1)}x). \tag{11.2.16}$$

Proof. For $s = 1$, formula (11.2.16) is an identity. Assume that (11.2.16) holds for $s = t \geq 1$. Based on this inductive hypothesis, we have to show the validity of (11.2.16) for $s = t + 1$. Substituting $s = t$ into (11.2.16) and the expression (11.2.7) for u_1 yields

$$u_t(x) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{t-1} \cdot u_1(\alpha^{t-1}x) = \frac{\alpha^{t-1}(\alpha^{t-1} - \alpha^t)x}{(1+\alpha)^{t-1}(1 - \alpha^t x)} \tag{11.2.17}$$

¹⁰Due to the properties of the function u_1 , the function u_s is strictly monotonically increasing and strictly convex on the interval $[\alpha^s, \alpha^{s-1}]$.

for $x \in [\alpha^t, \alpha^{t-1})$.

Geometric similarity considerations clarify that for $x \in [\alpha^{t+1}, \alpha^t)$, the concave hull \tilde{u}_t of the function u_t on the interval $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ is the straight line segment connecting the points $(\alpha x, 0)$ and $(\alpha^{-1}x, u_t(\alpha^{-1}x))$. This line is given by

$$\omega_t(z) = \frac{u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha x)}{\alpha^{-1}x - \alpha x} (z - \alpha x), \tag{11.2.18}$$

where $u_t(\alpha x) = 0$. Hence, for $x \in [\alpha^{t+1}, \alpha^t)$, we have

$$u_{t+1}(x) = \tilde{u}_t(x) = \omega_t(x) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot u_t(\alpha^{-1}x), \tag{11.2.19}$$

which implies formula (11.2.16) for $s = t + 1$. According to Proposition 11.2.1, $u_s(\alpha^s - 0) = 0$; letting $x = \alpha^s$ in (11.2.19) yields

$$u_s(\alpha^s) = \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha}\right)^s > 0.$$

Thus, the function u_{s+1} has a jump at the point α^{s+1} , where u_{s+1} is right continuous. □

Theorem 11.2.1.

- 1) For $s = 1, \dots, N$, the function u_s is convex on each interval $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$.
- 2) For $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$, it suffices to consider only four scenarios of arranging the points $a_s(x)$ and $b_s(x)$ introduced in **Section 2.2**:
 - I) The scenario in which $a_s(x) = \alpha^k$ and $b_s(x) = \alpha^{k-1}$.
 - II) The scenario in which $a_s(x) = \alpha^k$ and $b_s(x) = \alpha^{-1}x$.
 - III) The scenario in which $a_s(x) = \alpha x$ and $b_s(x) = \alpha^{k-1}$.
 - IV) The scenario in which $a_s(x) = \alpha x$ and $b_s(x) = \alpha^{-1}x$.

Moreover, these scenarios switch on the intervals $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$, at most twice.

- 3) For $s = 1, \dots, N$, the function u_s is piecewise rational on the interval $(0, +\infty)$, or more precisely, rational on at most $m_s \leq 3s + 1$ adjacent intervals, further called rationality intervals¹¹, with the limits $d_{s,i}$, $i = 0, \dots, m_s + 1$; all the points α^t , $t = 0, \dots, s$, are the limits of rationality intervals for the function u_s . The partitioning into rationality intervals for the function u_{s+1} refines the corresponding partitioning for the function u_s . For the rational functions described by an irreducible fraction of polynomials on rationality intervals, the

¹¹Particularly for $s = 1, \dots, N$, the function u_s is infinitely differentiable inside rationality intervals.

degree of polynomials does not exceed s ; this degree equals 0 on the intervals $(0, \alpha^s)$ and $[1, +\infty)$ and 1 on the intervals of scenario I) and does not exceed $s - 1$ on the intervals of scenario IV).

4) For $s = 1, \dots, N$, the derivative of the function u_s is positive.¹² In particular, the function u_s is strictly monotonic on the interval $[\alpha^s, 1)$.

Proof. For convenience, we specify formulas (11.2.3), (11.2.4), and (11.2.6) for scenarios I), II), III), and IV). For those points x where one of these scenarios holds, the points $a_s(x)$ and $b_s(x)$ of the support of the distribution (11.2.3), and hence the probabilities $p_s(x)$ and $q_s(x)$, are independent of s . Therefore, we omit the subscript s of the support points and probabilities for these scenarios.

For scenario I, in which $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$, $a(x) = \alpha^k$, and $b(x) = \alpha^{k-1}$, the probabilities $p(x)$ and $q(x)$ become the affine functions

$$p(x) = \frac{\alpha^{k-1} - x}{\alpha^{k-1} - \alpha^k}, \quad q(x) = \frac{x - \alpha^k}{\alpha^{k-1} - \alpha^k}; \tag{11.2.20}$$

the function u_s is expressed through the function u_{s-1} by the formula

$$u_s(x) = p(x) u_{s-1}(\alpha^k) + q(x) u_{s-1}(\alpha^{k-1}). \tag{11.2.21}$$

Thus, for scenario I) on the interval $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, the function u_s is affine. In this scenario with $x \in (\alpha^k, \alpha^k + \epsilon)$ and some $\epsilon > 0$, we have the “matching” relations

$$u_s(\alpha^k) = u_{s-1}(\alpha^k); \tag{11.2.22}$$

in this scenario with $x \in (\alpha^{k-1} - \epsilon, \alpha^{k-1})$ and some $\epsilon > 0$, we have the matching relations

$$u_s(\alpha^{k-1} - 0) = u_{s-1}(\alpha^{k-1} - 0). \tag{11.2.23}$$

Next, for scenario II), in which $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$, $a(x) = \alpha^k$, and $b(x) = \alpha^{-1}x$, the probabilities $p(x)$ and $q(x)$ take the form

$$p(x) = \frac{\alpha^{-1}x - x}{\alpha^{-1}x - \alpha^k}, \quad q(x) = \frac{x - \alpha^k}{\alpha^{-1}x - \alpha^k}; \tag{11.2.24}$$

the function u_s is expressed through the function u_{s-1} by the formula

$$u_s(x) = p(x) u_{s-1}(\alpha^k) + q(x) u_{s-1}(\alpha^{-1}x). \tag{11.2.25}$$

In this scenario with $x \in (\alpha^k, \alpha^k + \epsilon)$ and some $\epsilon > 0$, we have the matching relations

$$u_s(\alpha^k) = u_{s-1}(\alpha^k); \tag{11.2.26}$$

¹²The derivative of the function u_s may have a jump at limits of rationality intervals, but not necessarily so; see an example of the function u_2 .

in this scenario with $x \in (\alpha^{k-1} - \varepsilon, \alpha^{k-1})$ and some $\varepsilon > 0$, we have the matching relations

$$u_s(\alpha^{k-1} - 0) = \frac{1}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^k - 0) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^{k-2} - 0). \quad (11.2.27)$$

For scenario ch11:th:2.1:III, in which $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$, $a(x) = \alpha x$, and $b(x) = \alpha^{k-1}$, the probabilities $p(x)$ and $q(x)$ take the form

$$p(x) = \frac{\alpha^{k-1} - x}{\alpha^{k-1} - \alpha x}, \quad q(x) = \frac{x - \alpha x}{\alpha^{k-1} - \alpha x}; \quad (11.2.28)$$

the function u_s is expressed through the function u_{s-1} by the formula

$$u_s(x) = p(x) u_{s-1}(\alpha x) + q(x) u_{s-1}(\alpha^{k-1}). \quad (11.2.29)$$

In this scenario with $x \in (\alpha^k, \alpha^k + \varepsilon)$ and some $\varepsilon > 0$, we have the matching relations

$$u_s(\alpha^k) = \frac{1}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^{k+1}) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^{k-1}); \quad (11.2.30)$$

in this scenario with $x \in (\alpha^{k-1} - \varepsilon, \alpha^{k-1})$ and some $\varepsilon > 0$, we have the matching relations

$$u_s(\alpha^{k-1} - 0) = u_{s-1}(\alpha^{k-1} - 0). \quad (11.2.31)$$

Finally, for scenario IV), in which $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$, $a_k(x) = \alpha x$, and $b_k(x) = \alpha^{-1}x$, the probabilities $p(x)$ and $q(x)$ take the form

$$p(x) = \frac{1}{1 + \alpha}, \quad q(x) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}; \quad (11.2.32)$$

the function u_s is expressed through the function u_{s-1} by the formula

$$u_s(x) = p(x) u_{s-1}(\alpha x) + q(x) u_{s-1}(\alpha^{-1}x). \quad (11.2.33)$$

In this scenario with $x \in (\alpha^k, \alpha^k + \varepsilon)$ and some $\varepsilon > 0$, we have the matching relations

$$u_s(\alpha^k) = \frac{1}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^{k+1}) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^{k-1}); \quad (11.2.34)$$

in this scenario with $x \in (\alpha^{k-1} - \varepsilon, \alpha^{k-1})$ and some $\varepsilon > 0$, we have the matching relations

$$u_s(\alpha^{k-1} - 0) = \frac{1}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^k - 0) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_{s-1}(\alpha^{k-2} - 0). \quad (11.2.35)$$

We prove by induction that the function u_s , $s \geq 2$, satisfies the four properties of the theorem. For $s = 2$, these properties obviously hold.¹³ Assuming these

¹³Note that for the function u_2 , scenarios II) and I) are realized on the intervals $[\alpha^2, \alpha)$ and $[\alpha, 1)$, respectively.

properties for $s = t \geq 2$, we have to check its validity for $s = t + 1$. For x from the interval $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$, $k = s + 1$, this fact follows from formula (11.2.16). If $k \leq s$ and the point x belongs to the interval $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$, the limits of the interval $[\alpha x, \alpha^{-1}x]$ (the points αx and $\alpha^{-1}x$) lie in the adjacent intervals $[\alpha^{k+1}, \alpha^k]$ and $[\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}]$, respectively; see the discussion above. In principle, a positive jump¹⁴ is possible at the points α^k , $k = 1, \dots, s$, and right continuity holds. Under a jump at the point α^{k-1} , the function preserves convexity on the closed interval $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ if it is convex on the interval $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$. Due to the convexity of the function u_t on the interval $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$, for $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}]$, we discard the points of the open interval (α^k, α^{k-1}) as “candidates” for the support of the most unfavorable mixed market strategy: it suffices to consider only the extreme points α^k and α^{k-1} from the interval $[\alpha^k, \alpha^{k-1}]$.

Next, we fix numbers $a \leq \alpha^k$ and $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}]$ and consider a distribution Q concentrated at the points a and $y \in [\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}]$ with probabilities p and q , respectively, so that $pa + qy = x$; due to the normalization condition,

$$p = \frac{y - x}{y - a}, \quad q = \frac{x - a}{y - a}. \quad (11.2.36)$$

Let us show that the integral $\int u_t dQ$ treated as a function of y , i.e., the function $y \mapsto pu_t(a) + qu_t(y) = V(y)$, is monotonically nondecreasing on $[\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}]$, where p and q are given by (11.2.36) and represent functions of the variable $y \in [\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}]$.

We need the following result from mathematical analysis: if functions f and g are absolutely continuous on an interval $[a, b]$, while f' and g' are their derivatives (defined almost everywhere with respect to the Lebesgue measure), then the functions $f'g$ and fg' are summable¹⁵ and

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = \int_a^x f'(z)g(z) dz + \int_a^x f(z)g'(z) dz \quad (11.2.37)$$

for $x \in [a, b]$; for example, see [159, Theorem 5, Section 5, Chapter IX]. In addition, a convex function is absolutely continuous, and there exists an equivalent¹⁶ function for its derivative that is monotonically nondecreasing; for example, see Theorem 24.2, Corollary 24.2.1, and Theorem 24.1 in [175].

$$\begin{aligned} V(y) - V(\alpha^{k-1}) &= \int_{\alpha^{k-1}}^y V'(z) dz = \\ &= \int_{\alpha^{k-1}}^y [p'u_t(a) + q'u_t(z) + qu'_t(z)] dz = \\ &= \int_{\alpha^{k-1}}^y \{q'[u_t(z) - u_t(a)] + qu'_t(z)\} dz. \end{aligned}$$

Using the equality

$$q' = -\frac{x - a}{(y - a)^2} = -\frac{1}{y - a}q,$$

¹⁴Below, we prove continuity at these points.

¹⁵The product fg is absolutely continuous on the interval $[a, b]$. This fact is obtained directly by definition considering the boundedness of the functions f and g .

¹⁶This is a function coinciding with the original one almost everywhere (with respect to the Lebesgue measure).

for $y \in [\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2})$ we obtain

$$V(y) - V(\alpha^{k-1}) = \int_{\alpha^{k-1}}^y q \left[u'_t(z) - \frac{u_t(z) - u(a)}{z - a} \right] dz. \quad (11.2.38)$$

By the inductive hypothesis, the function u_t is convex. Hence, the bracketed expression under the integral in (11.2.38) is nonnegative almost everywhere, and the function V is monotonically nondecreasing. Thus, among all “candidate points” for the support of the distribution $Q_x^{s,k}$ from the interval $[\alpha^{k-1}, \alpha^{-1}x]$, we take the point $\alpha^{-1}x$ only.

The “candidate points” for the support of the distribution $Q_x^{s,k}$ on the left, i.e., from the interval $[\alpha x, \alpha^k]$, are considered by analogy. Now we fix numbers $b \geq \alpha^{k-1}$ and $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$ and consider a distribution Q concentrated at the points $z \in [\alpha^{k+1}, \alpha^k)$ and b with probabilities p and q , respectively, so that $pz + qb = x$; due to the normalization condition,

$$p = \frac{b - x}{b - z}, \quad q = \frac{x - z}{b - z}. \quad (11.2.39)$$

Let us show that the integral $\int u_t dQ$ treated as a function of z , i.e., $z \mapsto pu_t(z) + qu_t(b) = W(z)$, is monotonically nonincreasing on $[\alpha^{k+1}, \alpha^k)$, where p and q are given by (11.2.39) and represent functions of the variable z . Using the equality

$$p' = \frac{b - x}{(b - z)^2} = \frac{p}{b - z},$$

for $z \in [\alpha^{k+1}, \alpha^k)$ we obtain

$$W(z) - W(\alpha^{k+1}) = \int_{\alpha^{k+1}}^z p \left[u'_t(y) - \frac{u_t(b) - u_t(y)}{b - y} \right] dy. \quad (11.2.40)$$

Due to the convexity of the function u_t , the bracketed expression under the integral in (11.2.40) is nonpositive almost everywhere. Hence, the function W is monotonically nonincreasing. Therefore, among all “candidate points” for the support of the distribution $Q_x^{s,k}$ from the interval $[\alpha x, \alpha^k]$, we take the point αx only.

Thus, it suffices to study only scenarios I), II), III), and IV) to cover all arrangements of the points for the support of the distribution $Q_x^{s,k}$.

Now consider different variants leading to a certain scenario depending on the arrangement of the four points on the plane, which we will call *key*, namely, $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$, $(\alpha^{k-2}u_t(\alpha^{k-2} - 0))$ and the straight line connecting the points $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$ and $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$, i.e., the sets $\{(\xi, \varphi_{t,k}(\xi)) : \xi \in \mathbb{R}\}$, where

$$\varphi_{t,k}(\xi) = u_t(\alpha^k) + \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k} (\xi - \alpha^k). \quad (11.2.41)$$

1) If the points $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$ and $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$ do not lie above the straight line connecting the points $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$ and $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$, i.e.,

$$\begin{aligned} \varphi_{t,k}(\alpha^{k+1}) &\geq u_t(\alpha^{k+1}), \\ \varphi_{t,k}(\alpha^{k-2} - 0) &\geq u_t(\alpha^{k-2} - 0), \end{aligned}$$

in the notations (11.2.41), then scenario I) is realized for any $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}]$.

2) If the point $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$ does not lie above the straight line connecting the points $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$ and $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$ whereas the point $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$ does so, i.e.,

$$\begin{aligned}\varphi_{t,k}(\alpha^{k+1}) &\geq u_t(\alpha^{k+1}), \\ \varphi_{t,k}(\alpha^{k-2} - 0) &< u_t(\alpha^{k-2} - 0),\end{aligned}$$

we denote

$$y_k = \inf \{x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}] : \varphi_{t,k}(\alpha x) < u_t(\alpha x)\}. \quad (11.2.42)$$

In this case, scenario I) is realized for $x \in [\alpha^k, y_k]$, whereas scenario II) is realized for $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$.

3) If the point $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$ lies above the straight line connecting the points $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$ and $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$, whereas the point $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$ does not so, i.e.,

$$\begin{aligned}\varphi_{t,k}(\alpha^{k+1}) &< u_t(\alpha^{k+1}), \\ \varphi_{t,k}(\alpha^{k-2} - 0) &\geq u_t(\alpha^{k-2} - 0),\end{aligned}$$

we denote

$$z_k = \sup \{x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1}] : \varphi_{t,k}(\alpha^{-1}x) < u_t(\alpha^{-1}x)\}. \quad (11.2.43)$$

In this case, scenario III) is realized for $x \in [\alpha^k, z_k]$, whereas scenario I) is realized for $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$.

4) If the points $(\alpha^{k+1}, u_t(\alpha^{k+1}))$ and $(\alpha^{k-2}, u_t(\alpha^{k-2} - 0))$ lie above the straight line connecting the points $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$ and $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$, i.e.,

$$\begin{aligned}\varphi_{t,k}(\alpha^{k+1}) &< u_t(\alpha^{k+1}), \\ \varphi_{t,k}(\alpha^{k-2} - 0) &< u_t(\alpha^{k-2} - 0),\end{aligned}$$

then three cases are possible as follows.

4a) If $y_k < z_k$, where y_k and z_k are given by (11.2.42) and (11.2.43), respectively, then scenario IV) is realized for $x \in (y_k, z_k)$, scenario III) is realized for $x \in [\alpha^k, y_k)$, and scenario II) is realized for $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$.

4b) If $y_k = z_k$, then scenario III) is realized for $x \in [\alpha^k, y_k)$ and scenario II) is realized for $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$.

4c) Finally, if $y_k > z_k$, then scenario III) is realized for $x \in [\alpha^k, z_k)$, scenario II) is realized for $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$, and scenario I) is realized for $x \in [z_k, y_k]$.

We will call the points y_k and z_k given by (11.2.42) and (11.2.43), respectively, the switching points of scenarios (at step t). Note that the switching points of the scenarios, as well as some points α^k , $k \in \{0, \dots, t\}$, can be assigned to two scenarios simultaneously. According to the arrangement of the four key points (see the analysis above), the interval $[0, +\infty)$ can be partitioned into nonintersecting adjacent intervals where one of the four scenarios is realized. They will be called scenario intervals at step t ; such an interval can be subpartitioned into several rationality intervals.

The limits of rationality intervals at step t are the points α^k , $k \in \{0, \dots, t\}$ and, possibly, scenario switching points at all steps up to t inclusive, if any. Adding the point α^{t+1} and, possibly, scenario switching points at step t (if any, no more than $2t$) to the set $\{d_{t,i}, i = 0, \dots, m_t + 1\}$, we obtain the set $\{d_{t+1,i}, i = 0, \dots, m_{t+1} + 1\}$ of the limits of rationality intervals for the function u_{t+1} . The function u_{t+1} is piecewise rational on each scenario interval (rational on the rationality intervals form the subpartition of the given scenario interval. This fact can be easily checked by induction: it is true for u_0 ; for $u_t, t = 1, 2, \dots$, we adopt the recurrence relations (11.2.21), (11.2.25), (11.2.29), and (11.2.33) for the four scenarios and the corresponding probabilities (11.2.20), (11.2.24), (11.2.28), and (11.2.32). In particular, the function u_{t+1} is infinitely differentiable inside rationality intervals.

The probabilities are rational functions represented as an irreducible fraction of polynomials of degree 1. Therefore, on rationality intervals, the corresponding rational functions represented as an irreducible fraction of polynomials have degrees not greater than s .¹⁷

In scenario I, formulas (11.2.20) and (11.2.21) imply on $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ the affineness of the function u_{t+1} , and thus convexity; by the inductive hypothesis of the strict monotonicity of u_t , it also implies the strict monotonicity¹⁸ of u_{t+1} .

Consider the rationality interval contained in $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ where scenario IV) is realized; inside this interval, formulas (11.2.32) and (11.2.33) directly imply the strict monotonicity and convexity of u_{t+1} , due to the strict monotonicity and convexity of u_t (by the inductive hypothesis).

The function u_t is infinitely differentiable inside the rationality interval contained in $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ where scenario II) is realized; using (11.2.25), we have

$$\begin{aligned} u'_{t+1}(x) &= p'(x) u_t(\alpha^k) + q'(x) u_t(\alpha^{-1}x) + q(x) \alpha^{-1} u'_t(\alpha^{-1}x) = \\ & q'(x) [u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha^k)] + q(x) \alpha^{-1} u'_t(\alpha^{-1}x) > 0, \end{aligned} \quad (11.2.44)$$

based on the positive derivative of the function u_t (by the inductive hypothesis) and

$$q'_k(x) = \frac{\alpha^{k-1} - \alpha^k}{(\alpha^{-1}x - \alpha^k)^2} > 0.$$

Further,

$$\begin{aligned} q''_k(x) &= -\frac{2\alpha^{-1}(\alpha^{k-1} - \alpha^k)}{(\alpha^{-1}x - \alpha^k)^3} = -\frac{2\alpha^{-1}q'_k(x)}{\alpha^{-1}x - \alpha^k}, \\ u''_{t+1}(x) &= q''_k(x) [u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha^k)] + 2\alpha^{-1}q'_k(x) u'_t(\alpha^{-1}x) + q_k(x) \alpha^2 u''_t(\alpha^{-1}x) = \\ & 2\alpha^{-1}q'_k(x) \left[u'_t(\alpha^{-1}x) - \frac{u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{-1}x - \alpha^k} \right] + q_k(x) \alpha^2 u''_t(\alpha^{-1}x) \geq 0 \end{aligned}$$

¹⁷This degree equals 0 on the intervals $(0, \alpha^s)$ and $[1, +\infty)$ and 1 on the intervals of scenario I) and does not exceed $s - 1$ on the intervals of scenario IV).

¹⁸Recall that according to Proposition 8.1.2, the solutions of the Bellman equations are nondecreasing for a nondecreasing payoff function.

since the second derivative of the (convex) function u_t and the bracketed expression are nonnegative.

Consider the rationality interval contained in $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$ where scenario III) is realized; inside this interval, the function u_t is infinitely differentiable. Using (11.2.29), we have

$$\begin{aligned} u'_{t+1}(x) &= p'_k(x) u_t(\alpha x) + p_k(x) \alpha u'_t(\alpha x) + q'_k(x) u_t(\alpha^{k-1}) \\ &= -p'(x) [u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha x)] + p(x) \alpha u'_t(\alpha x) > 0 \end{aligned}$$

based on the positive derivative of the function u_t (by the inductive hypothesis) and

$$p'(x) = -\frac{\alpha^{k-1} - \alpha^k}{(\alpha^{k-1} - \alpha x)^2} < 0.$$

Further,

$$\begin{aligned} p''(x) &= -\frac{2\alpha(\alpha^{k-1} - \alpha^k)}{(\alpha^{k-1} - \alpha x)^3} = \frac{2\alpha p'_k(x)}{\alpha^{k-1} - \alpha x}, \\ u''_{t+1}(x) &= -p''(x) [u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha x)] + 2\alpha p'(x) u'_t(\alpha x) + p(x) \alpha^2 u''_t(\alpha x) = \\ &= 2\alpha p'(x) \left[u'_t(\alpha x) - \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha x)}{\alpha^{k-1}x - \alpha x} \right] + q(x) \alpha^2 u''_t(\alpha^{-1}x) \geq 0 \end{aligned}$$

since the second derivative of the (convex) function u_t is nonnegative and the bracketed expression is nonpositive.

Also, it is necessary to investigate the behavior of the function u_{t+1} at the scenario switching points y_k and z_k for variants 2)–4), leading to a certain scenario (with possible switching).

For variant 2) of arranging the key points, if the right-hand derivative¹⁹ of the function u_t at the point α^{k-1} is not smaller than the slope of the straight line connecting the points $(\alpha^k, u_t(\alpha^k))$ and $(\alpha^{k-1}, u_t(\alpha^{k-1}))$, i.e.,

$$u'_t(\alpha^{k-1} + 0) \geq \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k}, \quad (11.2.45)$$

then scenario II) is realized for any $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$.

On the other hand, if

$$u'_t(\alpha^{k-1} + 0) < \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k},$$

then at the point $y_k \in (\alpha^k, \alpha^{k-1})$ given by (11.2.42), there is a transversal intersection between the graphs of the convex function u_t and the function $\varphi_{t,k}$ (the straight line) such that $u_t(\alpha^{-1}y_k) = \varphi_{t,k}(\alpha^{-1}y_k)$ and

$$u'_t(\alpha^{-1}y_k + 0) > \varphi'_{t,k}(\alpha^{-1}y_k) = \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k}.$$

¹⁹At the left limit of the interval, where the function u_t is right continuous, the right-hand derivative coincides with the limit on the right-hand side of the derivative, due to the continuity of the derivatives (by the inductive hypothesis).

Therefore,

$$\begin{aligned} u'_{t+1}(y_k + 0) &= q'_t(y_k) [u_t(\alpha^{-1}y_k) - u_t(\alpha^k)] + q_t(y_k) \alpha^{-1} u'_k(\alpha^{-1}y_k + 0) > \\ &= \frac{\alpha^{k-1} - \alpha^k}{(\alpha^{-1}y_k - \alpha^k)^2} [\varphi_{t,k}(\alpha^{-1}y_k) - \varphi_{t,k}(\alpha^k)] + \frac{y_k - \alpha^k}{\alpha^{-1}y_k - \alpha^k} \alpha^{-1} \varphi'_{t,k}(\alpha^{-1}y_k) = \\ &= \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k} = u'_{t+1}(y_k - 0). \end{aligned}$$

Therefore, the convexity of the function u_{t+1} is not violated at the point $y_k \in (\alpha^k, \alpha^{k-1})$, but the function u_{t+1} is not differentiable at this point, i.e., its derivative has a “jump” there.

Similarly, variant 3) of arranging the key points can be studied by analogy. In this case, if

$$u'_t(\alpha^k - 0) \leq \frac{u_t(\alpha^{k-1}) - u_t(\alpha^k)}{\alpha^{k-1} - \alpha^k}, \quad (11.2.46)$$

then scenario III) is realized for any $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$. If condition (11.2.46) fails, then at the point $z_k \in (\alpha^k, \alpha^{k-1})$ given by (11.2.43), there is a transversal intersection between the graphs of the convex function u_t and the function $\varphi_{t,k}$ (the straight line); in addition, the convexity of the function u_{t+1} is not violated at the point $y_k \in (\alpha^k, \alpha^{k-1})$, but the function u_{t+1} is not differentiable at this point (its derivative has a jump).

For variant 4) of arranging the four key points, conditions (11.2.45) and (11.2.46) have to be checked. When both hold, scenario IV) is realized for any $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$; otherwise, one or two scenario switching points arise, where the function u_{t+1} behaves similarly to the cases considered above. Their arrangement (cases 4a)–4c)) must be considered. \square

Theorem 11.2.2. *The function u_s is continuous²⁰ on the interval $[\alpha^s, +\infty)$ for $s = 0, \dots, N$.*

Proof. We establish this property by induction. For $s \in \{0, 1, 2\}$, it obviously holds. Assuming its validity for $s = t \geq 2$, we have to show this property for $s = t + 1$. On open intervals (α^k, α^{k-1}) , $k = 0, \dots, t + 1$, the function u_{t+1} is continuous by convexity. Therefore, it suffices to check continuity at the points α^k , $k = 0, \dots, t$. We fix $k \in \{0, \dots, t - 1\}$ and consider the interval $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, further called left (with respect to the point α^{k-1}) and the corresponding four key points for this interval (with the abscissas $\alpha^{k+1}, \alpha^k, \alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}$ and the ordinates as the values of the function u_t at these points). Also, we consider the adjacent interval $[\alpha^{k-1}, \alpha^{k-2})$, further called right, and the corresponding four key points (with the abscissas $\alpha^k, \alpha^{k-1}, \alpha^{k-2}, \alpha^{k-3}$ and the ordinates as the values of the function u_t at these points).

If the left interval has variant 1) of arranging the key points, then for the right interval the possible variants are 1) or 2). At the right limit of the left interval, the

²⁰According to Propositions 11.2.1 and 11.2.2, the function u_s is continuous on the interval $(0, +\infty)$, except for a single point α^s , where it has a jump and is right continuous.

matching relations are given by (11.2.23) for scenario I, i.e.,

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1} - 0) = u_t(\alpha^{k-1} - 0);$$

at the left limit of the right interval, by (11.2.22) and (11.2.26) for scenarios I) and II), i.e.,

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1}) = u_t(\alpha^{k-1}).$$

Using the inductive hypothesis about the continuity of u_t , we establish the continuity of u_{t+1} at the point α^{k-1} .

If the left interval has variant 2) of arranging the key points, then for the right interval the possible variants are 3) or 4). At the right limit of the left interval, the matching relations are given by (11.2.27) for scenario II), i.e.,

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1} - 0) = \frac{1}{1 + \alpha} u_t(\alpha^k - 0) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k-2} - 0);$$

at the left limit of the right interval, by (11.2.30) for scenario III), i.e.,

$$u_{t+1}(\alpha^k) = \frac{1}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k+1}) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k-1}).$$

Consequently, the function u_{t+1} is continuous at the point α^{k-1} .

If the left interval has variant 3) of arranging the key points, then for the right interval the possible variants are 1) or 2). At the right limit of the left interval, the matching relations are given by (11.2.23) for scenario I, i.e.,

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1} - 0) = u_t(\alpha^{k-1} - 0);$$

at the left limit of the right interval, by (11.2.22) and (11.2.26) for scenarios I) and II), i.e.,

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1}) = u_t(\alpha^{k-1}).$$

Consequently, the function u_{t+1} is continuous at the point α^{k-1} .

If the left interval has variant 4) of arranging the key points, then for the right interval the possible variants are 3) or 4). At the right limit of the left interval, the matching relations are given by (11.2.27) for scenario II), i.e.,

$$u_{t+1}(\alpha^{k-1} - 0) = \frac{1}{1 + \alpha} u_t(\alpha^k - 0) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k-2} - 0);$$

at the left limit of the right interval, by (11.2.30) for scenario III), i.e.,

$$u_{t+1}(\alpha^k) = \frac{1}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k+1}) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} u_t(\alpha^{k-1}).$$

Consequently, the function u_{t+1} is continuous at the point α^{k-1} .

Thus, the continuity of u_{t+1} at the points²¹ $\alpha^{t-1}, \alpha^{t-2}, \dots, 1$ has been established.

²¹Note that for the interval $[\alpha, 1)$, the possible variants of arranging the key points are 1) or 2) only.

Consider now the interval $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$. Due to the properties of the function u_1 and the self-similarity property (Proposition 11.2.1), the points

$$(\alpha^{t+1}, u_t(\alpha^{t+1})), (\alpha^t, u_t(\alpha^t)) \text{ and } (\alpha^{t-1}, u_t(\alpha^{t-1}))$$

lie on the same straight line. Therefore, depending on the position of the point $(\alpha^{t-2}, u_t(\alpha^{t-2}))$, the possible variants for the interval $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$ are 1) or 2); at the left limit of the interval $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$, the matching relations are given by (11.2.22) and (11.2.26) for scenarios I) and II), i.e.,

$$u_{t+1}(\alpha^t) = u_t(\alpha^t).$$

From (11.2.16) and (11.2.8) we have

$$u_t(\alpha^t) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^t;$$

from (11.2.16) and (11.2.9),

$$u_{t+1}(\alpha^t - 0) = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^t.$$

Consequently, the function u_{t+1} is continuous at the point α^t . □

The assertion of Theorem 11.2.2 can be strengthened: the function $u_s, s = 0, \dots, N$, is even Lipschitz on the interval $[\alpha^s, +\infty)$; see Theorem 11.2.3 below. In our opinion, the proof of Theorem 11.2.2 is of independent interest because it clarifies well the essence of the problem.

For a function f on $[a, b]$, we denote

$$L(f, [a, b]) = \sup \left\{ \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{x_2 - x_1} : x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \right\}. \quad (11.2.47)$$

If $L(f, [a, b])$ in (11.2.47) is finite, it will be the Lipschitz constant of the function f on $[a, b]$.

Theorem 11.2.3. *The function $u_s, s = 1, \dots, N$, satisfies the Lipschitz condition on the interval $[\alpha^s, +\infty)$ with the Lipschitz constants $L(u_s, [\alpha^s, +\infty))$ being nonincreasing in s , and $L(u_1, [\alpha, +\infty)) = (1 - \alpha)^{-1}$.*

Proof. First, if $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{r-1} < c_r = b$, where $r \geq 2$, then the following equality holds with notations (11.2.47):

$$L(f, [a, b]) = \bigvee_{j=1}^r L(f, [c_{j-1}, c_j]). \quad (11.2.48)$$

We prove item 2 of this theorem by induction. For $s = 1$, this assertion holds; in this case, the Lipschitz constant is

$$L(u_1, [\alpha, +\infty)) = u_1'(1 - 0) = (1 - \alpha)^{-1}.$$

Assume that for $s = t$, the Lipschitz constant is $L(u_t, [\alpha^t, +\infty)) < \infty$. Applying Proposition 11.1.2 with the parameters $a = \alpha^t$, $b = \alpha^{-1}$, and $\beta = \alpha^{-1}$ and (11.2.48), we obtain

$$L(u_{t+1}, [\alpha^{t-1}, +\infty)) = L(u_{t+1}, [\alpha^{t-1}, 1]) \leq L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{-1}]) = L(u_t, [\alpha^t, +\infty)) < \infty.$$

Due to the self-similarity of (11.2.16) (Proposition 11.2.2) and its continuity (proved above), for $x \in [\alpha^{t+1}, \alpha^t]$ we have the relation

$$u_{t+1}(x) = \frac{\alpha}{1+\alpha} u_t(\alpha^{-1}x).$$

Hence, it follows that

$$L(u_{t+1}, [\alpha^{t+1}, \alpha^t]) \leq \frac{1}{1+\alpha} L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]). \quad (11.2.49)$$

As noted when proving continuity, the points

$$(\alpha^{t+1}, u_t(\alpha^{t+1})), (\alpha^t, u_t(\alpha^t)) \text{ and } (\alpha^{t-1}, u_t(\alpha^{t-1}))$$

lie on the same straight line. Depending on the location of the point $(\alpha^{t-2}, u_t(\alpha^{t-2}))$, the possible variants of arranging the key points on the interval $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$ are 1) or 2).

For variant 1), scenario I) is realized on the interval $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$. Due to continuity, the function u_{t+1} is affine on $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$ and

$$L(u_{t+1}, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) = \frac{u_t(\alpha^{t-1}) - u_t(\alpha^t)}{\alpha^{t-1} - \alpha^t};$$

due to the convexity of the function u_t on the interval $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$ and its continuity, we have

$$\frac{u_t(\alpha^{t-1}) - u_t(\alpha^t)}{\alpha^{t-1} - \alpha^t} \leq u'_t(\alpha^{t-1} - 0) = L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]). \quad (11.2.50)$$

As a result,

$$L(u_{t+1}, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) \leq L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]). \quad (11.2.51)$$

For variant 2), scenario I) is realized on the interval $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$, and the derivative of the function u_{t+1} is given by (11.2.44) for $k = t$. Note that

$$q'_t(x) = \frac{\alpha^{t-1} - \alpha^t}{(x - \alpha^t)(\alpha^{-1}x - \alpha^t)} q_t(x),$$

and consequently,

$$u'_{t+1}(x) = q_t(x) \left[\frac{\alpha^{t-1} - \alpha^t}{x - \alpha^t} \cdot \frac{u_t(\alpha^{-1}x) - u_t(\alpha^t)}{\alpha^{-1}x - \alpha^t} + \alpha^{-1} u'_t(\alpha^{-1}x) \right].$$

Considering (11.2.50) and the convexity of the function u_{t+1} on the interval $[\alpha^t, \alpha^{t-1}]$ and its continuity, we have

$$\begin{aligned} L(u_{t+1}, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) &= u'_{t+1}(\alpha^{t-1} - 0) \leq \\ &= \frac{\alpha}{1+\alpha} \left[L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) + \alpha^{-1} u'_t(\alpha^{t-2} - 0) \right] = \\ &= \frac{\alpha}{1+\alpha} L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) + \frac{1}{1+\alpha} L(u_t, [\alpha^{t-1}, \alpha^{t-2}]) \leq \\ &= L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-1}]) \vee L(u_t, [\alpha^{t-1}, \alpha^{t-2}]) = \\ &= L(u_t, [\alpha^t, \alpha^{t-2}]). \end{aligned} \tag{11.2.52}$$

Thus, the desired result follows from (11.2.49), (11.2.51), and (11.2.52). \square

11.3 Numerical Solution Algorithm

Summarizing the results above, let us propose the following recurrence algorithm to obtain a “semi-implicit” solution of the Bellman equation.

Suppose that at step $s \geq 1$, there is a partition of the segment $[\alpha^s, 1]$ into rationality intervals $[d_{s,i}, d_{s,i+1})$, $i = 0, \dots, m_s$, and the set of their limits, $d_{s+1,i}$, $i = 0, \dots, m_{s+1} + 1$, contains the points α^k , $k = 0, \dots, s$. In addition, suppose that on the intervals $[d_{s,i}, d_{s,i+1})$, $i = 0, \dots, m_s$, explicit (analytic) expressions are found for the functions u_s and their derivatives²² in the form of rational functions.

The algorithm for calculating the function u_{s+1} includes the following steps.

- 1) We calculate the values of the function u_s at the points α^k , $k = 0, \dots, s$; we determine the variants of arranging the key points for the intervals $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$, and possible scenarios for this variant.
- 2) We detect the presence of scenario switching points for the intervals $[\alpha^k, \alpha^{k-1})$, $k = 1, \dots, s$; if any, we find them numerically.²³

For variant 1) of arranging the key points, scenario I) is realized for any $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$.

For variant 2) of arranging the key points, we calculate the derivative $u'_s(\alpha^{k-1} + 0)$.

- If inequality (11.2.45) holds, then scenario I) is realized for any $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$.

²²In particular, this can be done using symbolic computing.

²³In fact, this problem is equivalent to finding the root of a polynomial of degree not exceeding $s + 1$.

- If inequality (11.2.45) is false, then we calculate the point y_k as the only root of the equation

$$\varphi_{s,k}(\alpha x) = u_s(\alpha x) \quad (11.3.1)$$

on the interval (α^k, α^{k-1}) ; here the function $\varphi_{t,k}$ is given by (11.2.41). Scenario II) is realized for $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$ and scenario I) for $x \in (\alpha^k, y_k]$.

For variant 3) of arranging the key points, we calculate the derivative $u'_s(\alpha^k - 0)$.

- If inequality (11.2.46) holds, then scenario III) is realized for any $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$.
- If inequality (11.2.46) is false, then we calculate the scenario switching point z_k as the only root of the equation

$$\varphi_{s,k}(\alpha^{-1}x) = u_s(\alpha^{-1}x) \quad (11.3.2)$$

on the interval (α^k, α^{k-1}) . Scenario III) is realized for $x \in [\alpha^k, z_k)$ and scenario I) for $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$.

For variant 4) of arranging the key points, we calculate the derivatives $u'_s(\alpha^{k-1} + 0)$ and $u'_s(\alpha^k - 0)$ and check inequalities (11.2.45) and (11.2.46).

- If inequalities (11.2.45) and (11.2.46) hold simultaneously, then scenario IV) is realized for any $x \in [\alpha^k, \alpha^{k-1})$.
- If inequality (11.2.45) holds but inequality (11.2.46) does not, then we calculate the scenario switching point z_k as the only root of equation (11.3.2) on the interval (α^k, α^{k-1}) . Scenario III) is realized for $x \in [\alpha^k, z_k)$ and scenario IV) for $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$.
- If inequality (11.2.46) holds but inequality (11.2.45) does not, then we calculate the scenario switching point y_k as the only root of equation (11.3.1) on the interval (α^k, α^{k-1}) . Scenario II) is realized for $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$ and scenario I) for $x \in (\alpha^k, y_k]$.
- If inequalities (11.2.45) and (11.2.46) fail, then we calculate two points: the scenario switching point z_k as the only root of equation (11.3.2) on the interval (α^k, α^{k-1}) and the scenario switching point y_k as the only root of equation (11.3.1) on the interval (α^k, α^{k-1}) . Depending on the arrangement of the points y_k и z_k , we have three possible cases as follows.
 - 4a) If $y_k < z_k$, where y_k and z_k are given by (11.2.42) and (11.2.43), respectively, then scenario IV) is realized for $x \in (y_k, z_k)$, scenario III) is realized for $x \in [\alpha^k, y_k)$, and scenario II) is realized for $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$.
 - 4b) If $y_k = z_k$, then scenario III) is realized for $x \in [\alpha^k, y_k)$ and scenario II) is realized for $x \in [z_k, \alpha^{k-1})$.

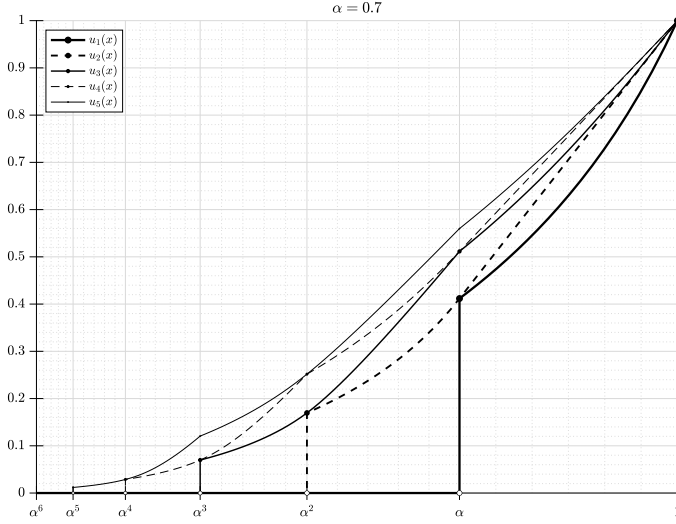
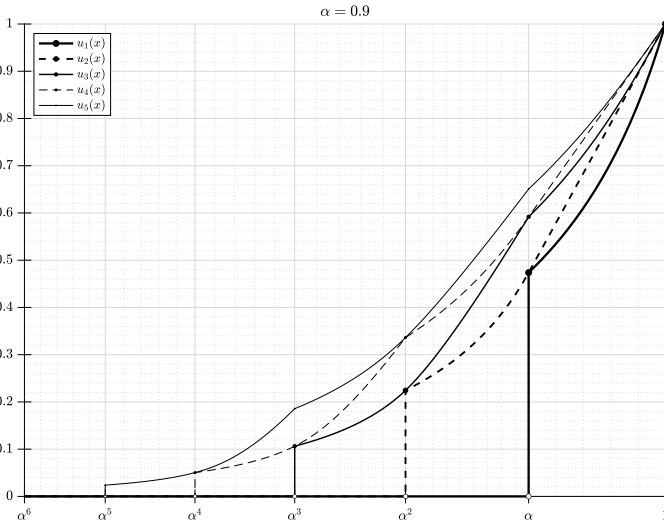
- 4c) Finally, if $y_k > z_k$, then scenario III) is realized for $x \in [\alpha^k, z_k)$, scenario II) is realized for $x \in (y_k, \alpha^{k-1})$, and scenario I) is realized for $x \in [z_k, y_k]$.

Thus, at step t we obtain a partition of $[0, +\infty)$ into adjacent intervals where one of the four scenarios is realized. The limits of these intervals are the points α^k , $k \in \{0, \dots, s\}$ and, possibly, scenario switching points at step t (if any).

- 3) We construct the partitioning into rationality intervals: to obtain the limits $\{d_{s+1,i}, i = 0, \dots, m_{s+1} + 1\}$ of these intervals for the function u_{s+1} , we add the point α^{s+1} to the set $\{d_{s,i}, i = 0, \dots, m_s + 1\}$ and, possibly, the scenario switching points at step s (if any, no more than $2t$). Let the finite sequence $d_{s,i}, i = 0, \dots, m_s + 1$ be increasing in i . On each interval $[d_{s+1,i}, d_{s+1,i+1}), i = 0, \dots, m_{s+1}$, of the resulting partition, one scenario is realized at step s , and explicit expressions for the function u_s are given. Also, there are explicit recurrence formulas for four possible scenarios, namely, (11.2.21), (11.2.25), (11.2.29), and (11.2.33), which express the function u_{s+1} via the function u_s and preserve rationality. Using the explicit expression for the function u_{s+1} as a rational function, we calculate the derivative u'_{s+1} on each partition interval $[d_{s+1,i}, d_{s+1,i+1}), i = 0, \dots, m_{s+1}$.

Based on the described algorithm, we have performed calculations for different values of the parameter α . The results are shown in Figs. 11.3 and 11.4.

Clearly, there are no scenario switching and a smooth conjugation of the piecewise convex rational functions on the pairs of intervals $[\alpha^{k+1}, \alpha^k]$.

Figure 11.3: Iterations 1–5 for $\alpha = 0.7$.Figure 11.4: Iterations 1–5 for $\alpha = 0.9$.

Chapter 12. A Guaranteed Deterministic Approach to Margining in an Exchange-Traded Derivatives Market

This chapter discusses a modern approach to the risk management of the central counterparty, primarily the adequacy of its financial resources, including the collateral level of clearing members, the central counterparty's dedicated capital, and the joint and several liability fund. Particular attention is paid to the margining system, which is responsible for an adequate collateral level of clearing members and plays a crucial role in risk management.

We describe a margining system for a portfolio of options and futures in an exchange-traded market with default management based on an original methodology of the invention [224]. For this system, we construct a mathematical model of margining (determining the required deposit margin, i.e., the guaranteed collateral level) within the guaranteed deterministic approach to superhedging and a game-theoretic interpretation. The economic sense of the problem directly yields the corresponding Bellman–Isaacs equations for the required margin. We study their properties, particularly portfolio margin subadditivity, which is an important requirement for the margining system from an economic point of view. The equations are reduced to a convenient form for calculations. A numerical experiment on model examples is carried out to confirm the effectiveness of the margining system.

The main results of this chapter were published in [223] and [221].

12.1 Risk Management of the Central Counterparty

After the 2007 global financial crisis, a novel international trend was to increase the role of clearing through a central counterparty (CCP), i.e., a unified financial institution substituting the parties¹ to a transaction to reduce the risk of default

¹Thereby, a central counterparty takes on the counterparty credit risk between parties to a transaction.

by traders.² A central counterparty can render clearing³ (and settlement) services for transactions in foreign currencies, securities, exchange-traded commodities, and financial derivatives, both in exchange-traded markets and over-the-counter (OTC) markets admitting a standardization.⁴ Because of their systemic importance to the financial markets, central counterparties are subject to especially strict regulation with stringent requirements for the quality of risk management. Under Russian law and regulation, clearing functions must be performed by a separate legal entity. The leading central counterparty in Russia (and one of the largest in Europe) is CCP National Clearing Centre (NCC), a non-banking credit organization within the Moscow Exchange group.

A clearing organization must calculate the requirements for the *deposit margin*⁵ of exchange members, i.e., the level of funds to be maintained on the clearing account to cover some or all of liabilities on the exchange member's portfolio. Collateral may be both in cash and in the form of eligible securities and other highly liquid assets associated with the corresponding instruments. The clearing organization controls compliance with the requirements for the initial margin. Note that the requirements on the initial margin during the term of a contract can be changed by the clearing organization, but an exchange member (or trader) is obliged to maintain the amount of funds on its clearing account at the required level. If a trader fails to meet the requirements for the margin after receiving a margin call,⁶ the clearing organization settles a margin deficit. In world practice, the generally accepted way of settlement is to liquidate (fully or partially) of the portfolio of a trader not meeting the requirements for the deposit margin (defaulter) at current market prices. In special cases with insufficient market liquidity (in particular, with large defaulter positions), an auction may be conducted, but in our opinion, auctions must be carefully designed and described in detail in the clearing rules. For example, an alternative to the classical Vickrey auction can be used; see the paper [11] and the invention [12].

In this case, the losses incurred by the defaulter's portfolio should be primarily covered by the collateral (deposit margin) pledged by this clearing member: it is the first echelon of protection of the central counterparty. If these funds are insufficient, the defaulter's contribution to the joint and several liability fund of clearing members is used. If it is still not enough, the fund formed from the dedicated capital of the central counterparty is engaged (the second echelon of protection). And if this is not enough as well, losses are paid using the joint and several liability fund of the

²Historically, an alternative was for an exchange to combine the functions of a trade organizer with the clearing functions in one legal entity, as was implemented at the Chicago Mercantile Exchange (CME) before 2007, when CME Group appeared by merging the CME and the Chicago Board of Trade (CBOT).

³Clearing functions were described in detail in the book [143].

⁴OTC derivatives include interest rate swaps (IRS) and credit default swaps (CDS) in the simplest (standardized) version.

⁵This terminology was adopted at the Moscow Interbank Currency Exchange (MICEX). The Moscow Exchange, formed in 2011 by merging the MICEX and RTS exchanges, operates "the guaranteed collateral," the term used in the RTS exchange-traded derivatives market.

⁶A demand that this trader deposit additional money or (eligible) securities into the account.

clearing members⁷ (in this case, the clearing members are offered to replenish the fund subsequently). Thus, several echelons of protection of the counterparty are created, and this kind of CCP's protection is called default waterfall. The central counterparty's dedicated capital used to cover losses, the so-called skin-in-the-game (SITG), and the joint and several liability fund of clearing members play a complementary role to the deposit margin pledged by the clearing members.⁸ According to international guidelines, the central counterparty's dedicated capital should be sufficient at least to cover losses in the event of a possible default of the participant with the largest exposure; accordingly, stress testing should be performed on at least two participants for which the central counterparty has the largest exposure [57]. Capital adequacy is determined through stress testing based on extreme but realistic scenarios.

Market participants referred to as the "buy side"⁹ advocate for increasing the share of the central counterparty's dedicated capital in default waterfall: as they believe, this approach will promote the financial stability of the central counterparty and avoid using the joint and several liability fund of clearing members in the event of defaults with large losses. However, several experts adhere to the opinion that increasing the share of the central counterparty's dedicated capital will not eliminate the credit risk of these participants but lead to more expensive servicing, both due to tariff policy and the central counterparty's response (higher requirements to the joint and several liability fund of clearing members). In currently active debates about the central counterparty's financial sufficiency, the key issue concerns the incentives created by the default waterfall; for example, see [47; 59].

The paper [98] was one of the first publications describing the static structure of rational default waterfall of the central counterparty (at the engineering level of rigor). Dynamic models have also appeared recently; see [31]. However, in our opinion, the model proposed in [31] is too primitive from an economic point of view: it neglects the interaction between the central counterparty and clearing members, which is especially pronounced in stressful periods. We agree with the authors [88] that this interaction can potentially lead to destabilizing feedback: the risks of clearing members and the central counterparty should be considered together, not separately.

12.2 The Role of the Margining System in Risk Management of the Central Counterparty

Margining not only acts as a vanguard in default waterfall: being the most risk-sensitive echelon of protection, it plays a crucial role in the risk management of the

⁷In case of default, this fund is formed from the contributions of the non-defaulting members.

⁸In reality, default waterfall may be more complex. Its structure is determined by the requirements of the regulator (to limit systemic risk) and the risk appetite of the central counterparty (the level of risk taken to achieve its strategic goals). For example, see [160].

⁹This term means financial institutions that buy investment services (e.g., mutual funds, life insurance companies, hedge funds, pension funds, and nonpublic investment funds).

central counterparty. The margining problem is given special attention by regulators. Historically, the first document [235] on international regulatory principles was developed by IOSCO back in 1996. Regulation of central counterparties, with an emphasis on risk management practices, has been dramatically improved since the global financial crisis. This is reflected in Principles for Financial Market Infrastructures [56], a global guideline for national regulators. In the European Union, EMIR¹⁰ plays the role of such regulation. In particular, according to EMIR rules, “CCPs are required to cover through margins posted by the defaulter, at least, a relevant proportion of the possible loss that during the *closeout*¹¹ process the CCP might have.”¹² As we believe, it is more correct to use an extended interpretation of the quality criterion for a portfolio margining system, from Principle 6 in the Principles for Financial Market Infrastructures; slightly paraphrased¹³, it can be formulated as follows: the required level of deposit margin should correctly and adequately reflect the risk of the clearing member’s portfolio, namely, provide a given degree¹⁴ covering losses that may arise from *closing* all positions in the portfolio. We underline that positions can be closed according to a default management procedure defined by the central counterparty, different from simple liquidation. Modern requirements for a central counterparty’s risk management system were described in detail in [58]. This document focuses on key aspects such as corporate governance, stress testing for credit risk and liquidity, liability coverage, margining, and allocation of the central counterparty’s own funds. A recent case in September 2018 showed that even relatively small positions by a single trader can trigger significant losses in default waterfall. In our opinion, the reason was a drawback in the clearing construction: a mismatch between the required margin level and *the real risk of the portfolio considering possible losses in the chosen closeout procedure* (in that case, the auction). We speak about the following case in the commodities market cleared by Nasdaq Clearing AB, a central counterparty in Sweden: a clearing member traded a spread between electricity prices in Scandinavia and Germany (via futures positions on Nasdaq Oslo ASA); normally, there is a pronounced correlation between these prices, but changes in German carbon policy and the weather forecast led to a price divergence, which dramatically and significantly lowered the value of positions. As a result, the trader could not deposit additional collateral in an appropriate amount. Market liquidity turned out insufficient for the standard closeout of positions, the first auction failed, and the winning bid in the second auction caused a loss of 114 million euros above the trader’s collateral. The central counterparty’s dedicated capital of 7

¹⁰The European Market Infrastructure Regulation. In force since 2012.

¹¹Our italicization.

¹²The EMIR RTS No. 153/2013.

¹³The original statement is: “. . . initial margin models and parameters that are risk-based and generate margin requirements sufficient to cover its potential future exposure to participants in the interval between the last margin collection and the closeout of positions following a participant default.”

¹⁴Unfortunately, the “given degree” is usually understood literally, as a (statistical) confidence level.

million euros allocated to cover losses in the commodities market¹⁵ was exhausted, and 107 million euros were used from the joint and several liability fund of clearing members.¹⁶ When market professionals discuss this case, the main questions are as follows. First, should the defaulter's portfolio be hedged before the auction? Second, who should be invited to bid on the auction? Nasdaq Clearing AB was accused of failing to make decisions on both issues. The central counterparty decided not to hedge before the first (unsuccessful) auction for fear of shifting the market while executing hedging transactions in a low-liquid market segment but executed some risk reduction transactions before the second auction, which was "successful." Among other reasons, the September 2018 loss to Nasdaq Clearing AB due to inadequate margining motivated the appearance of the document [116] on best practices for central counterparties.

In this chapter, we consider portfolio margining systems in exchange-traded derivatives markets (futures and options). SPAN¹⁷ is the most widespread portfolio margining system in global practice. This system was developed back in 1988 at the Chicago Mercantile Exchange (CME). It is currently used by more than 50 exchange and clearing organizations worldwide.¹⁸ The methodology, now called CME SPAN, is based on determining portfolio losses for the most unfavorable scenario from a fixed list of price increment scenarios and changes in market volatility. A detailed description of the SPAN system can be found in [75]. Note that SPAN and SPAN-like systems (with similar principles) involve standard option pricing models based on the classical works of Black and Scholes [36], Black [35], and Cox, Ross, and Rubinstein [62].

As the authors [55] rightly pointed out, there are not so many publications on the topic of margining despite the determinative role of margining systems as the first echelon of central counterparty's protection. Let us mention an interesting study [83] carried out on empirical data. The Tel Aviv Exchange initially adopted a SPAN margining system determining the required portfolio margin levels according to the most pessimistic of 16 possible outcomes. In 2001, the exchange switched to a more detailed margining system based on the most unfavorable scenario among 44 possible ones.¹⁹ This unique change provides an opportunity to test empirically the effect of increasing the risk sensitivity of the margining system on the efficiency of options trading. As it turned out, more accurate risk estimation increases market efficiency by several indicators, including the implied volatility of options traded.

However, the standard procedure for settling margin deficits (liquidating a participant's portfolio) can encounter significant difficulties under low market

¹⁵Nasdaq Clearing AB serves three markets, each with a specific capital allocation.

¹⁶Of the available 166 million euros, i.e., over 64% of the fund.

¹⁷Standard Portfolio Analysis of risk.

¹⁸CME Group has developed the next generation of the margining system, CME SPAN 2, and started implementation in 2020. Full deployment is expected to last up to four years; during this period, SPAN and SPAN 2 will be available to end users in parallel. The methodology of the system is not revealed.

¹⁹For comparison, our margining system operates a continuum of possible scenarios and is based on a built-in *active* default management system, as opposed to SPAN.

liquidity, which is especially true in emerging markets.²⁰

From our point of view, the most advanced margining system by far is the CORE system developed at the Brazilian exchange BM&FBovespa. The CORE system generalizes the classical SPAN stress scenario method by explicitly incorporating the market liquidity of financial instruments through modeling the liquidity profile of instruments and the liquidation mechanism at auctions. The main component of the CORE methodology is the determination of a closing strategy for a defaulter's portfolio, liquidation or settlement of the portfolio, from perhaps the simplest closing strategy (the quickest closing of all portfolio positions, which can be called a naive strategy) to a more complex format based on certain rules. The most important feature of CORE is the interpretation of default management processes as dynamic: the portfolio risk will vary as the positions change over time. Recognizing that default control processes are dynamic allows defining a closing strategy based on a model with trading constraints, settlement rules, and market liquidity. The corresponding formalization consists in maximizing an objective function that includes potential transaction costs (particularly realized in the market) to reduce the central counterparty's funding liquidity requirements during the liquidation period. In mathematical terms, this approach comes to solving a linear programming problem with convex constraints. The ideology of the system was described in [13] and its technical aspects in [247]; see also the invention [246] on the risk estimation process for closing portfolio positions.

When developing a new organizational approach to derivatives trading (futures and options) based on clearing rules with an original settlement procedure for margin deficits and a portfolio margining system, we adopted the idea of deterministic guaranteed option pricing. The corresponding model of uncertain price dynamics was published much later, in [212]. Similar ideas began to be actively developed 10–15 years later in the works of several authors, in the form of interval pricing [27] and robust superhedging, e.g., see [45] and [51]. The latter approach, popular nowadays, has become recognized as an alternative to the traditional probabilistic²¹ approach.

Our methodology²² was approved in 2002 by the Risk Management Department of the Chicago Mercantile Exchange (CME); in 2004, we received a patent for invention in the Russian Federation [224]. Our approach is compatible with the CORE methodology; the ideological similarity of the inventions [246] and [224] becomes obvious when reading the abstract on the first page of [246]. Therefore, the invention [224] was 10 years ahead of its time: the financial industry began to pay

²⁰Building a margining system on the above-mentioned standard principles, considering the possible loss of market liquidity, leads to excessively high deposit margins that are unacceptable to market participants. The common practice of requiring additional funds to be deposited into a clearing account prior to a clearing session in the event of a deposit margin deficit may be too stringent, particularly in emerging markets. In addition, standard option pricing models may give unsatisfactory results under low market liquidity.

²¹We refer to the book [93] for its modern presentation.

²²Initially, the methodology was created in the early 2000s for adopting at the Russian Trading System (RTS) stock exchange. Due to the resignation of the exchange president, I.A. Tyryshkin, in February 2003, the project was not implemented.

attention to the quality of mathematical models only after (and as a consequence of) the global financial crisis. At the same time, the invention [224] is more specific and detailed compared to [246] since it refers to a narrower subject area (an exchange-traded derivatives market).

12.3 Description of the Margining System Based on the Deterministic Guaranteed Approach

The methodology [224] for organizing derivatives trading with an original portfolio margining system and settlement procedure has been designed to provide sustainable operation in normal and low-liquidity markets. A simplest implementation of the system is based on settling a margin deficit by managing the *assignor's*²³ portfolio through futures transactions, leaving option positions unchanged. Thus, the stability of the system is achieved under the low liquidity of the market since options have significantly smaller liquidity than futures.

The system is designed for electronic exchange trading. Each new order of a trader is checked in the real-time mode for admissibility²⁴: for all active orders and the current portfolio of this trader, the execution of any part of these orders must not lead to a *margin deficit*. This ensures that no margin deficit (and, hence, margin call) occurs between clearing sessions. Portfolio restructuring due to executing the orders causes recalculating the deposit margin requirements and, possibly, changing the amount of funds in the clearing account. At the end of the trading session, a clearing session is held to determine the settlement price (closing price) of the underlying asset. This price is used to establish new requirements for the deposit margin. During the clearing session, system parameters can be changed (e.g., *daily futures price limits*), also affecting the deposit margin requirements of market participants.

The margin deficit is determined for the trading participants based on the clearing session results and is subject to settlement starting from the next trading day. Let a trader not independently settle a margin deficit by portfolio restructuring or depositing the necessary funds into the clearing account within the period specified by the exchange rules (usually several hours after the opening of trading). In this case, the proposed procedure for settling the trader's margin deficit transfers the right to manage the portfolio of futures and options to the clearing organization. Portfolio management consists in executing risk-reducing corrective transactions with portfolio futures for and on behalf of the trader according to the algorithm

²³This term applies to a trader in an exchange-traded derivatives market with a margin deficit failing to avoid the margin deficit within the time allotted by the clearing rules; according to these rules, this trader loses the right to manage his portfolio. The portfolio goes under the management of a clearing organization, which executes corrective futures transactions in accordance with the exchange rules for and on behalf of that trader using an algorithm determined in advance in the clearing rules. In Russian, this term is a neologism (from English "assignor") introduced by us, as this notion is associated with the original design of the proposed system. It means a person who assigns a right or property (in our case, the right).

²⁴The trading system of the Moscow Exchange derivatives market currently operates in this mode.

described in advance and in full in the clearing rules of the central counterparty. The assignor's margin deficit can be settled in the following ways:

- 1) Executing contracts (possibly using the central counterparty's dedicated capital and the joint and several liability fund of clearing members);
- 2) Closing all positions of the assignor (possibly using the central counterparty's dedicated capital and the joint and several liability fund of clearing members);
- 3) Closing some positions of the assignor to eliminate the margin deficit;
- 4) Managing the assignor's portfolio by the central counterparty or changing the trading system parameters, e.g., daily price limits;
- 5) Depositing the necessary funds to the clearing account by the participant.

In cases 3)–5), the clearing member with the assignor status is returned the right to execute transactions with its portfolio, starting from the next trading day.

The deposit margin level is determined based on the optimal management of the assignor's portfolio by *futures correction* (the central counterparty entering into futures contracts for and on behalf of the assignor) without changing its option positions. The assignor's portfolio is optimized using dynamic programming to obtain guaranteed margin estimates, which yields a recurrence relation. It is, in fact, the Bellman–Isaacs equations considering possible (deterministic) market behavior scenarios over the entire management horizon of the assignor's portfolio according to the central counterparty rules.²⁵ This is an essential difference from SPAN-type systems, whose behavior can be called short-sighted: they take into account only day-ahead market scenarios. In contrast to the generally accepted management method (full or partial liquidation of the portfolio), our margin deficit settlement procedure gives a more gentle way from the point of view of market participants: it preserves option positions and maintains balanced portfolios in terms of their risk. Corrective management of the assignor's portfolio requires calculating the number of long or short futures positions to be opened during the trading day. Note that these contracts should be concluded gradually in small portions to minimize the impact on market prices.

For the systemic stability of the market, a method for determining the deposit margin must meet *the decentralization principle*: the required collateral level for portfolios of options and futures must be subadditive, which is ensured by the design of the proposed system. Moreover, obliged by a special rule, brokers require from their clients a deposit margin not lower than the level established by the margining system of the clearing organization. (Usually, such a rule is introduced by the market regulator.²⁶) The clearing members with clients (brokerage functions) are obliged to open an *assignor's trading account* and an *assignor's clearing account* in the case of

²⁵For the case of European options, this problem is formalized in the next section.

²⁶For example, see [235].

a margin deficit when the client does not settle this deficit within the time allotted by the clearing rules. Then the client's positions and funds are transferred to the former and latter accounts, respectively. Separate accounts are opened for each such client, i.e., the principle of segregation is satisfied for accounts to protect client funds. Then, the central counterparty executes transactions with these client accounts in the same way as with the clearing member assignor's accounts.

If there are limits on the underlying asset, a guaranteed (risk-free) version of the system is possible, which ensures complete coverage for the contingent liabilities of market participants under all market behavior scenarios, including the total loss of liquidity. Of course, this implies a high deposit margin level, possibly unacceptable for clearing members. This means zero market and credit risks for the central counterparty and market participants.²⁷ In such a design, the central counterparty's dedicated capital and the joint and several liability fund of clearing members cover only the operational risk.

Another variant of the proposed system corresponds to the case when the central counterparty assumes part of the risks. Under a default, the liabilities of the corresponding clearing member may be covered with partial use of the central counterparty's dedicated capital and the joint and several liability fund of clearing members. An advantage of the system proposed in [224] is that incomplete coverage scenarios can be structurally described: the central counterparty has the ability to take risks deliberately and also adjust them by varying system parameters.²⁸

Different system implementations are possible depending on the choice of option specifications (American or European type, settlement or delivery, *traditional (upfront) option margining* or *futures-style option margining*) and the presence or absence of daily futures price limits.

The hedging (corrective) strategy of the margining system [224] can be embedded into the standard clearing procedure in various ways. For example, one implementation allocates the corrective management stage for the participant's portfolio during a predetermined period if the participant could not settle a margin deficit in due time. If corrective management settles the margin deficit within this period and the expiration time has not yet arrived, the portfolio will be returned to the participant. Otherwise, the participant will change status from assignor to defaulter, and the portfolio will pass to the clearing organization irrevocably. The clearing organization performs a finalization²⁹ procedure, which differs from corrective management: hedging applies to all the funds available in the market (including transactions with options that reduce the portfolio risk) to minimize the payoff function of the portfolio throughout the time remaining to exercise or close the portfolio positions completely. Corrective management operates the most liquid

²⁷Note that historically the system operating since November 2000 at the Moscow Interbank Currency Exchange (MICEX) was a guaranteed system, but it provided futures trading only. The guaranteed portfolio system of futures and options trading, which can be considered a possible implementation of the invention [247], has no precedents and analogs.

²⁸The case of Nasdaq Clearing AB (see above) significantly undermined confidence in auctions to close defaulter's positions.

²⁹This term is ours.

instruments (futures), and the goal here is to eliminate the margin deficit. The procedure can be simplified to finalization only: if a participant fails to eliminate the deficit independently within the allotted period, it immediately becomes a defaulter.

12.4 The Mathematical Model of Margining with Futures Correction

The mathematical model for determining the required deposit margin level is constructed by analogy with the guaranteed deterministic approach to superhedging; see the details in Chapter 1. That is, the Bellman–Isaacs equations are derived directly from the economic sense of the problem. The idea of the invention [224] that describes a method for determining the deposit margin level and a method for settling a margin deficit based on the futures correction can be illustrated with a particular implementation presented below.

Suppose that the clearing session is conducted once a day and the futures correction transactions in the margining system are executed once³⁰ every trading day, up to the expiration, the same for all financial instruments in the portfolio, and the corrective management period is the number of days to options expiration. Essentially, futures correction performed by the clearing organization to reduce potential losses and charge funds necessary to cover potential losses can be interpreted as a kind of hedging³¹ of option positions through futures transactions.

We describe the margin calculation method on an example of the European futures market. (For a European option, the amount of payoffs is based on the closing price of the day when this series of options is executed.) The model imposes constraints on the dynamics of futures prices: any intraday price fluctuations should not take the price outside a given band, i.e., an interval³² $I(x) = [x - \Delta^d, x + \Delta^u]$, where x denotes the closing price of the previous trading day and $\Delta^d > 0$ and $\Delta^u > 0$ are the lower and upper price limits of the futures price, respectively.³³ The values of these limits are system's parameters; for a particular instrument, they can depend on the price history. As a rule, the futures price limits are established as some percentage of the previous trading day's closing price. In our model, let $\Delta^d = \alpha x$ and $\Delta^u = \beta x$, where $0 < \alpha < 1$ and $0 < \beta < 1$. (In practice, α and β are of the order of several percent; since fears of price decline are usually stronger than growth expectations, a reasonable choice dictates that $\alpha > \beta$.) The loss of liquidity in the

³⁰Such transactions can be executed in several portions by assuming that prices remain in a given band during the trading day. (Then the weighted average price will also be in the same band.) The model described below assumes a price band. However, there are certain differences from the traditional statement of the hedging problem, discussed in detail below. Therefore, we prefer to call such transactions corrective.

³¹However, there are certain differences from the traditional statement of the hedging problem, discussed in detail below. Therefore, we prefer to call such transactions corrective.

³²Under the assumption of risk-neutral market participants, the classical paper [43] showed that price limits can facilitate reducing default risk, weaken the margin requirement, and decrease the total contract value.

³³Hence, there are no arbitrage opportunities in the model; see Chapter 2.

futures market should be attributed to very unlikely and extreme cases: if they occur, it is reasonable to cover the losses using the default waterfall funds, starting with the clearing organization's dedicated capital. A guaranteed margin system is constructed under the liquidity assumption of the futures market. In this system, the margin charged to the clearing member surely covers possible losses of the exchange if the participant fails to fulfill the liabilities. For this purpose, the exchange performs a prescribed procedure for settling the margin deficit, and the required deposit margin level is directly related to this procedure.

Suppose that the corrective futures transaction executed once a day occurs at a price within the interval $I(x)$, but the exact value of this price is unknown in advance. Hence, the model has indirect transaction costs describing the most unfavorable scenario for this transaction. We denote by $V_{t,T}(x, k)$ the nonnegative amount of financial resources in the account at a time instant $t \leq T$ necessary to cover the potential losses of the participant's portfolio for which corrective transactions will be executed once a day up to the expiration. This amount depends on the price x and the number k of futures³⁴ in the corrective portfolio at the close of the previous trading day. We will further call $V_{t,T}(x, k)$ the objective function and omit the subscript T in the calculations below, writing $V_t(x, k)$ for brevity.

The market risk of a European options portfolio is defined by the portfolio payoff function $f(x)$, i.e., the amount of financial resources its owner receives (a positive value of this function) or pays (a negative value of this function) at the expiration time after the period T , depending on the closing price x of the underlying asset (futures price) at this time. Let the payoff function have the Lipschitz property, which is a quite natural assumption: in the case of a combination of call and put options with the same expiration time and different exercise prices, the payoff function will be piecewise linear with a finite number of linearity intervals.

At the terminal time instant, the condition $V_T(x, k) \geq -f(x)$ should be satisfied; therefore, let

$$V_T(x, k) = (-f(x))^+ = (f(x))^- \quad (12.4.1)$$

To derive a recurrence relation for the objective function, we assume that at a step $t < T$, after the clearing session, there are a (nonnegative) amount v in the account and an open position of k futures. (This number is negative for short positions and positive for long ones.) If the corrective buy/sell transaction for m futures occurs at a price y within the interval $I(x)$ and the closing price of the next day $t + 1$, also belonging to the interval $I(x)$, is z , the variation margin will be $k(z - x) + m(z - y)$, and the losses at the terminal time instant will be covered under the condition

$$v + k(z - x) + m(z - y) \geq V_{t+1}(z, k + m)$$

for any $y \in I(x)$ and $z \in I(x)$. In addition, the value m (the size of this transaction

³⁴Since the number of corrective futures in the portfolio determines the indirect transaction costs.

with appropriate sign) can be optimally chosen so that³⁵

$$V_t(x, k) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} \max_{y \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) + kx - (k+m)z + my]^+. \quad (12.4.2)$$

Formula (12.4.2) can be simplified by calculating the minimum of my with respect to possible values of y :

$$\max_{y \in I(x)} my = mx + (m^- \Delta^d + m^+ \Delta^u) = mx + (\alpha m^- + \beta m^+)x. \quad (12.4.3)$$

From an economic point of view, the nonnegative value $c(x, m)$ given by

$$c(x, m) = m^- \Delta^d + m^+ \Delta^u = u(m)x, \quad (12.4.4)$$

where

$$u(m)x = (\alpha m^- + \beta m^+)x, \quad (12.4.5)$$

expresses the maximum possible indirect transaction costs³⁶ per trading day under the assumptions concerning the futures price evolution. Using (12.4.3) and (12.4.4), we write the recurrence relations for the objective function as the Bellman–Isaacs equations:

$$V_t(x, k) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)]^+, \quad t = T-1, \dots, 0. \quad (12.4.6)$$

Moreover, there is no need to take the positive part of the bracketed expression in (12.4.6), i.e., the objective function satisfies the equations

$$V_t(x, k) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)], \quad t = T-1, \dots, 0. \quad (12.4.7)$$

Indeed, $V_T(x, k) = (f(x))^- \geq 0$; for $t < T$, assuming that $V_{t+1}(x, k) \geq 0$ in (12.4.7) and considering the inequality

$$\begin{aligned} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)] &\geq \\ \max_{z \in I(x)} [- (k+m)(z-x) + c(x, m)] &= \\ c(x, -(k+m)) + c(x, m), & \end{aligned} \quad (12.4.8)$$

we obtain

$$V_t(x, k) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)] \geq 0. \quad (12.4.9)$$

³⁵We use the notations $a^+ = \max(0, a)$ and $a^- = \max(0, -a)$ for $a \in \mathbb{R}$, and \mathbb{Z} stands for the set of all integers.

³⁶A more realistic model would determine the indirect transaction costs based on the bid book.

for $V_t(x, k)$ from (12.4.7). Since

$$\left\{ \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)] \right\}^+ = \\ \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)]^+$$

and the objective function is nonnegative (see (12.4.9)), the recurrence relations (12.4.6) are equivalent to equations (12.4.7).

Equations (12.4.7) allow interpreting the futures correction problem as a special superhedging problem for a European option with the payoff function $(f(x))^-$, the transaction costs (12.4.4), and a discrete (integer) futures hedging strategy with zero futures at the initial time instant, treating the amount of funds in the account as a risk-free asset with a trading constraint (no overdraft).

The maximum instead of the supremum in (12.4.7) is justified due to the assumed Lipschitz property of the function f : in this case, the objective function $x \mapsto V_t(x, k)$ also has the same property. In the next section, devoted to numerical solution, we estimate the Lipschitz constant for the functions $x \mapsto V_t(x, k)$.

The solutions of equations (12.4.7) with the terminal condition (12.4.1) being available, we can choose the value

$$M(f, T, x_0) = V_0(x_0, 0) \quad (12.4.10)$$

as the required deposit margin level at the current time instant $t = 0$ under the futures price x_0 for a portfolio with the payoff function $f(x)$ after the period T . Obviously,

$$M(f, T-s, x) = V_s(x, 0). \quad (12.4.11)$$

Let us denote

$$A_{T-s}(x_s) = \max_{x \in I_{T-s}(x_s)} (f(x))^- , \quad (12.4.12)$$

where

$$I_{T-s}(x_0) = [(1-\alpha)^T x_s, (1+\beta)^T x_s]. \quad (12.4.13)$$

Given the futures price $X_s = x$ at the time instant $s \in \{0, \dots, T-1\}$, all possible values of the futures price at the expiration time form the set $I_{T-s}(x)$, and we have the inequality

$$M(f, T-s, x) \leq A_{T-s}(x_s); \quad (12.4.14)$$

indeed, if the portfolio owner receives the assignor status³⁷ at a time instant $s \in \{0, \dots, T-1\}$, the collateral $A_{T-s}(x_s)$ will cover any possible losses on the portfolio without any correction (i.e., no futures transactions).

³⁷In the invention [224] (see the Appendix), an assignor is a trading participant in the futures market with a deposit margin deficit that lost the right to manage the portfolio (did not independently settle the margin deficit in the time allotted by the clearing rules). The portfolio goes under the management of the exchange, which executes corrective futures transactions for and on behalf of this participant in accordance with the exchange rules by the algorithm determined in advance in the clearing rules.

We estimate from above the value $V_t(x, k)$ given by the relations (12.4.7). The minimum with respect to m in (12.4.7) does not exceed the value of

$$\max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)]$$

for $m = -k$. Hence,

$$\begin{aligned} V_t(x, k) &\leq \max_{z \in I(x)} V_{t+1}(z, 0) + c(x, -k) = \\ &\max_{z \in I(x)} M(f, T - (t+1), z) + c(x, -k) \leq \\ &\max_{z \in I(x)} A_{T-(t+1)}(z) + c(x, -k) = A_{T-t}(x) + c(x, -k), \end{aligned} \quad (12.4.15)$$

considering (12.4.10), (12.4.12), (12.4.13), and (12.4.14). Due to inequality (12.4.8), the values m such that $c(x, -(k+m)) + c(x, m) > A_{T-t}(x) + c(x, -k)$, will not minimize (12.4.7). Thus, if the futures price x and the number k of corrective futures in the portfolio are given at the time instant t , the minimum with respect to m can be found on the bounded set

$$D_t(x, k) = \{m : c(x, -(k+m)) + c(x, m) \leq A_{T-t}(x) + c(x, -k)\}. \quad (12.4.16)$$

As a result, equations (12.4.7) can be written as

$$\begin{aligned} V_T(x, k) &= (f(x))^- , \\ V_t(x, k) &= \min_{m \in D_t(x, k)} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k+m) - (k+m)(z-x) + c(x, m)] , \\ &t = T - 1, \dots, 0, \end{aligned} \quad (12.4.17)$$

where $D_t(x, k)$ is given by (12.4.16). For convenience, we will also use the Bellman–Isaacs equations (12.4.17) with the change of variables $k' = k + m$. (This is the number of futures positions at the next time instant given k corrective futures at the current time instant.) In this case, equations (12.4.17) take the form

$$\begin{aligned} V_T(x, k) &= (f(x))^- , \\ V_t(x, k) &= \min_{k' \in E_t(x, k)} \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k') - k'(z-x) + c(x, k' - k)] , \\ &t = T - 1, \dots, 0, \end{aligned} \quad (12.4.18)$$

where the bounded set $E_t(x, k)$ is given by

$$E_t(x, k) = \{k' : c(x, -k') + c(x, k' - k) \leq A_{T-t}(x) + c(x, -k)\}. \quad (12.4.19)$$

According to the problem statement, the parameters m and k are integers. However, let them vary continuously for a while (take real values) to show that

the function $k \mapsto V_t(x, k)$ is convex.³⁸ For the terminal time instant, this condition is true by formula (12.4.1). Assume that it holds for the time instant $t + 1$, where $t < T$. Then the minimized expression in (12.4.4) is jointly convex (convex in both variables m and k) as a maximum of convex functions. Therefore, its minimum with respect to the variable m is a convex function; the minimizers of this function may be nonunique, forming an interval under fixed values t and x .

In the Bellman–Isaacs equations (12.4.17) we can pass to mixed “market” strategies under given futures price x and the number k of corrective futures in the portfolio at the time instant t . For this purpose, we consider a class of distributions (probability measures) $\mathcal{P}(x)$ on the interval $I(x)$ that is a mixed extension with the following properties:

- 1) The (topological) support of distributions from $\mathcal{P}(x)$ is contained in $I(x)$;
- 2) The class $\mathcal{P}(x)$ includes all distributions concentrated at a single point from $I(x)$.

Obviously,

$$\max_{u \in I(x)} \varphi(u) = \max_{Q \in \mathcal{P}(x)} \int \varphi(u) Q(du)$$

for any function φ with well-defined Lebesgue integrals $\int \varphi(u) Q(du)$ for all distributions $Q \in \mathcal{P}(x)$.

We can employ classical results on equilibrium from the theory of zero-sum games under the additional assumption:

- 3) The class $\mathcal{P}(x)$ is closed with respect to forming mixtures of distributions, i.e., the class $\mathcal{P}(x)$ satisfies the convexity assumption.

Specifically, we choose as $\mathcal{P}(x)$ the class of all distributions³⁹ on $I(x)$. In this case, properties 1)–3) obviously hold. The function

$$\psi_{t,k,x}(m, z) = V_{t+1}(z, k+m) - (k^* + m)(z - x) + c(m),$$

appearing in formula (12.4.7), is convex in the argument m . (Recall that by assumption, m varies continuously.) According to Theorem 7.2.1, there exists a game equilibrium for the mixed strategies $Q_{t,k,x}^*$ on the second variable of the function $\psi_{t,k,x}$ concentrated at most at two points from $I(x)$. This is the most unfavorable (stochastic) price behavior scenario in the market at the time instant $t + 1$ given the futures price x and the number k of corrective futures in the portfolio at the time instant t .

Generally speaking, the real evolution of prices does not follow extreme (most unfavorable) scenarios. The amount $V_t(x, k)$ deposited in the account at the time

³⁸The notion of convexity also makes sense for functions of integer arguments. One possible definition is that such a function can be extended to a convex function of a real argument. A necessary and sufficient condition is that the value of the function at each point not exceed the value of an affine function whose values at neighboring points coincide with the values of the former function.

³⁹Those defined on the σ -algebra of all Borel subsets of $I(x)$.

instant t under the futures price x and k corrective futures in the portfolio is the reserve necessary in an optimal corrective strategy to cover potential losses of the participant's portfolio in all possible scenarios (including the most unfavorable stochastic scenario of market price behavior). Therefore, the amount $V_t(x, k)$ may be excessive at some step s of the corrective futures strategy.

In this case, the portfolio is possibly returned to the assignor. In principle, the portfolio return condition can be formalized in different ways. The most natural condition is that as the result of futures price movements and corrective transactions, the assignor's clearing account at a time instant $s \in (t, T)$ has an amount v_s sufficient to cover the transaction costs of liquidating corrective futures positions since the time instant $s + 1$, while guaranteeing compliance with the collateral requirements. Thus, the portfolio can be returned after the clearing session⁴⁰ at the end of period s if⁴¹

$$v_s \geq \max_{z \in I(x)} M(f, T - (s + 1), z) + c(x, -k) \quad (12.4.20)$$

This effect is illustrated on a model example in the next section.

The paper [8] first introduced the axioms of portfolio risk indicators⁴², including the subadditivity axiom. We consider it the main axiom and an essential requirement for the margining system from a practical point of view: it ensures correctness when margining several client portfolios and the portability of nonsegregated portfolio positions in case of a clearing member's default. Let $\varrho(V)$ denote a nonnegative risk indicator for the current portfolio value V . Then subadditivity means the inequality

$$\varrho(V_1 + V_2) \leq \varrho(V_1) + \varrho(V_2).$$

Proposition 12.4.1. *The required deposit margin level satisfies the subadditivity condition, i.e.,*

$$M(f_1 + f_2, T, x_0) \leq M(f_1, T, x_0) + M(f_2, T, x_0). \quad (12.4.21)$$

Proof. We establish a more general inequality implying (12.4.21) by definition (12.4.10). Let $V_t^i(x, k)$ be the objective functions corresponding to portfolios with payoff functions f_i , $i = 1, 2, 3$, where $f_3 = f_1 + f_2$. In this case,

$$V_t^3(x, k_1 + k_2) \leq V_t^1(x, k_1) + V_t^2(x, k_2). \quad (12.4.22)$$

Inequality (12.4.22) can be proved by induction. For $t = T$, it follows from (12.4.1) and $(a + b)^- \leq (a)^- + (b)^-$. Assume that (12.4.22) holds for $t = T, \dots, s + 1$, where $s \in \{0, \dots, T - 1\}$. Due to (12.4.4) and (12.4.5),

$$c(x, m_1 + m_2) \leq c(x, m_1) + c(x, m_2);$$

⁴⁰Thereby, the clearing member receives the right to resume transactions in the market with the returned portfolio on the next trading day. If desired, the clearing member can liquidate positions in corrective futures (which reduce the portfolio risk and, consequently, the required margin level), thus obtaining a portfolio with the initial payoff function. After liquidating positions in corrective futures, the member must have enough financial resources to maintain the deposit margin requirements.

⁴¹Note that the right-hand side of inequality (12.4.20) is not smaller than $V_{s,T}(x, k)$; see inequality (12.4.15).

⁴²Also called risk measures.

using this inequality and the inductive hypothesis, we have

$$\begin{aligned}
 V_s^3(x, k_1 + k_2) &= \min_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} [V_{s+1}^3(x, k_1 + k_2 + m_1 + m_2) - \\
 &\quad (k_1 + k_2 + m_1 + m_2)(z - x) + c(x, m_1 + m_2)] \leq \\
 \min_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \{ &\max_{z \in I(x)} [V_{s+1}^1(x, k_1 + m_1) - (k_1 + m_1)(z - x) + c(x, m_1)] + \\
 &\max_{z \in I(x)} [V_{s+1}^2(x, k_2 + m_2) - (k_2 + m_2)(z - x) + c(x, m_2)] \} = \\
 \min_{m_1 \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} &[V_{s+1}^1(x, k_1 + m_1) - (k_1 + m_1)(z - x) + c(x, m_1)] + \\
 \min_{m_2 \in \mathbb{Z}} \max_{z \in I(x)} &[V_{s+1}^2(x, k_2 + m_2) - (k_2 + m_2)(z - x) + c(x, m_2)] = \\
 &V_s^1(x, k_1) + V_s^2(x, k_2).
 \end{aligned}$$

□

Note that the property (12.4.22) has an interesting economic interpretation: in the case of several assignors with the same time to exercise options in their portfolios, the central counterparty in its default-management procedure can use an optimal strategy to correct the aggregate portfolio of all such assignors. This feature of the margining system is demonstrated on a model example below; see the next section.

The monotonicity axiom, when the inequality $V_1 \leq V_2$ implies $\varrho(V_1) \geq \varrho(V_2)$, also seems a reasonable requirement for the margining system and holds in our case. Let $V_t^i(x, k)$ be the objective functions corresponding to portfolios with payoff functions $f_i, i = 1, 2$, where $f_1 \leq f_2$. Since the function $u \mapsto (u)^-$ is monotonically nonincreasing, $V_T^1(x, k) \geq V_T^2(x, k)$. By induction, we obtain the inequalities $V_t^1(x, k) \geq V_t^2(x, k), t = T - 1, \dots, 0$, directly from the relations (12.4.7). Hence, $M(f_1, T, x_0) \geq M(f_2, T, x_0)$.

In our opinion, the positive homogeneity property $\varrho(\lambda V) = \lambda \varrho(V), \lambda \geq 0$, is not natural from an economic point of view and may fail for small portfolios.⁴³ In our case, this is associated with integer positions on futures. If the risk indicator ϱ has the additivity property, the sequence $\frac{\varrho(nV)}{n}, n = 1, 2, \dots$, will converge by Fekete's lemma [90] to the limit $\rho^* = \inf\{\frac{\varrho(nV)}{n}, n = 1, 2, \dots\}$. Moreover, if the function $\lambda \mapsto \varrho(\lambda V), \lambda \geq 0$ is monotonically nondecreasing, then $\frac{\varrho(\lambda V)}{\lambda} \rightarrow \rho^*$ as $\lambda \rightarrow \infty$. Thus, for large portfolios, $\varrho(\lambda V)$ asymptotically behaves as $\lambda \rho^*$, i.e., asymptotic positive homogeneity holds. In addition, $\varrho(\lambda V) \geq \lambda \rho^*$ for all $\lambda \geq 0$, so the asymptotic effect may be interpreted as reducing the granularity role for a large portfolio.

In the case under consideration, due to the nonnegativity and positive homogeneity of the function $u \mapsto (u)^-$, the function $\lambda \mapsto M(\lambda f, T, x_0), \lambda \geq 0$, is monotonically nondecreasing. This fact can be verified by induction similar to

⁴³Small or medium portfolios prevail in exchange-traded derivatives (stock) markets. For this reason, large portfolios in such markets are risky due to bounded market liquidity. A classical example is a precedent with Société Générale: in January 2008, the bank lost several billion euros by closing positions (mostly on Eurex) in three trading days after a significant fall in stock indices of the market.

monotonicity; see the considerations above. If the parameters m and k were real rather than integer values, positive homogeneity would clearly hold.

12.5 The Solutions of the Bellman–Isaacs Equations: Some Useful Properties for Numerical Solution

For solving the Bellman–Isaacs equations (12.4.18) numerically, we need an explicit form of the set $E_t(x, k)$ given by (12.4.19). Considering (12.4.4) and (12.4.5), it is easy to check that

$$E_t(x, k) = [-a_t(x), k + a_t(x)] \text{ for } k \geq 0, \quad (12.5.1)$$

$$E_t(x, k) = [k - a_t(x), a_t(x)] \text{ for } k < 0, \quad (12.5.2)$$

where

$$a_t(x) = \frac{A_{T-t}(x)}{(\alpha + \beta)x}. \quad (12.5.3)$$

In addition, the relations (12.5.1) and (12.5.2) can be written as

$$E_t(x, k) = [-k^- - a_t(x), k^+ + a_t(x)]. \quad (12.5.4)$$

In view of (12.5.4), for

$$k' \in E_t(x, k), \quad (12.5.5)$$

we have the inequality

$$|k'| \leq |k| + a_t(x). \quad (12.5.6)$$

Let us denote by k_t the possible number of corrective futures in the portfolio under the constraint (12.5.5) at step t , and by x_t the possible price at this step. Using inequality (12.5.6), for

$$k_0 = 0,$$

we obtain

$$|k_{t+1}| \leq |k_t| + a_t(x_t), x_t \in I_t(x_0); t = 0, \dots, T-1. \quad (12.5.7)$$

Due to (12.5.3),

$$a_t(x_t) \leq \frac{\max_{x_t \in I_t(x_0)} A_{T-t}(x_t)}{(\alpha + \beta) \min_{x_t \in I_t(x_0)} x_t} = \frac{A_T(x_0)}{(\alpha + \beta)(1 - \alpha)^t x_0}. \quad (12.5.8)$$

From (12.5.7) and (12.5.8) it follows that

$$|k_t| \leq \frac{A_T(x_0)}{(\alpha + \beta)x_0} \sum_{s=0}^{t-1} \frac{1}{(1 - \alpha)^s} = \frac{A_T(x_0)(1 - \alpha)}{(\alpha + \beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^t - 1 \right), t = 0, \dots, T. \quad (12.5.9)$$

Thus, by solving (12.4.18) sequentially for $t = T - 1, \dots, 0$, it suffices to find the values of the objective function $V_t(x, k)$ for

$$x \in I_t(x_0), k \in \left[-\frac{A_T(x_0)(1-\alpha)}{(\alpha+\beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^t - 1 \right), \frac{A_T(x_0)(1-\alpha)}{(\alpha+\beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^t - 1 \right) \right], \quad (12.5.10)$$

where $I_t(x_0)$ is given by (12.4.13).

By analogy to the considerations in Chapter 4, we estimate the Lipschitz constants for the objective functions

$$x \mapsto V_t(x, k) = v_{t,k}(x), \quad t = T, \dots, 1, \quad (12.5.11)$$

with the arguments satisfying the constraints (12.5.10). This is useful when estimating the accuracy of the approximate solution (particularly when determining the grid step for the price variable of the objective function to provide a given error).

We denote by L_g the Lipschitz constant of a function $g : X \rightarrow Y$, where X and Y are metric spaces, including the case of a compact-valued function, with the Pompeiu–Hausdorff measure on the set of compact sets. For the function $v_{T,k}(\cdot)$ given by (12.5.11), the Lipschitz constant is $L_{f^-} \leq L_f$. Suppose that for $s = t + 1, t < T$, the function $v_{t+1,k}(x)$ has the Lipschitz property with the Lipschitz constant $L_{v_{t+1,k}}$ on the set $I_t(x_0)$. Equations (12.4.18) can be written as

$$V_t(x, k) = \min_{k' \in E_t(x, k)} [c(x, k' - k) + M_{t,k'}(x)], \quad (12.5.12)$$

where

$$M_{t,k}(x) = \max_{z \in I(x)} [V_{t+1}(z, k') - k'(z - x)] = \max_{y \in K(x)} [V_{t+1}(x + y, k') - k'y], \quad (12.5.13)$$

$$K(x) = [-\alpha x, \beta x]. \quad (12.5.14)$$

For $x, x' \in I_t(x_0)$ we have

$$|v_{t+1,k}(x) - v_{t+1,k}(x')| \leq$$

$$\max_{k' \in E_t(x, k)} [|c(x, k' - k) - c(x', k' - k)| + |M_{t,k'}(x) - M_{t,k'}(x')|]. \quad (12.5.15)$$

Due to (12.4.4), (12.4.5), and (12.5.4), we obtain

$$\begin{aligned} & \max_{k' \in E_t(x, k)} |c(x, k' - k) - c(x', k' - k)| = \\ & = [\alpha(k^+ + a_t(x))] \vee [\beta(k^- + a_t(x))] |x - x'| \leq (\alpha \vee \beta) (|k| + a_t(x)) |x - x'| \leq \\ & \leq \left[(\alpha \vee \beta) \frac{A_T(x_0)(1-\alpha)}{(\alpha+\beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^{t+1} - 1 \right) \right] |x - x'|. \quad (12.5.16) \end{aligned}$$

for the arguments satisfying the constraints (12.5.10).

The expression $|M_{t,k'}(x) - M_{t,k'}(x')|$ is estimated similar to the proof of Theorem 4.2.1 in Chapter 4, formula (4.2.12):

$$|M_{t,k'}(x) - M_{t,k'}(x')| \leq L_{v_{t+1,k}} L_K |x - x'| + |k'| L_K |x - x'| + L_{v_{t+1,k}} |x - x'| = [(L_{v_{t+1,k}}(L_K + 1) + |k'| L_K) |x - x'|,$$

where

$$L_K = \alpha \vee \beta,$$

because the Pompeiu–Hausdorff distance between the intervals $K(x)$ and $K(x')$ (12.5.14) equals $(\alpha \vee \beta) |x - x'|$. Using (12.5.9), we obtain

$$\max_{k' \in E_t(x,k)} |M_{t,k'}(x) - M_{t,k'}(x')| \leq \left[(L_{v_{t+1,k}}(L_K + 1) + \frac{A_T(x_0)(1 - \alpha)}{(\alpha + \beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^{t+1} - 1 \right) L_K \right] |x - x'|. \quad (12.5.17)$$

Thus, from (12.5.13), (12.5.16), and (12.5.17) it follows that

$$L_{v_{t,k}} \leq \left[(L_{v_{t+1,k}}((\alpha \vee \beta) + 1) + 2 \frac{A_T(x_0)(1 - \alpha)}{(\alpha + \beta)\alpha x_0} \left(\left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^{t+1} - 1 \right) (\alpha \vee \beta) \right]. \quad (12.5.18)$$

Moreover, this inductive reasoning shows that the obtained estimates are independent of k . Hence, we can recurrently estimate the Lipschitz constants for the arguments satisfying (12.5.10). Note that the size of the intervals (12.5.10) exponentially decreases when sequentially solving the Bellman–Isaacs equations for $t = T - 1, \dots, 0$. However, this is compensated by the exponentially growing requirements on the number of grid points, due to increasing the estimates of the Lipschitz constants in (12.5.18).

Recall also that the functions $v_{t,k}$ depend on T . (This dependence has been deliberately neglected for ease of notation by omitting T in the objective function $V_{t,T}(x, k)$). Letting now $v_{t,k} = W_{t,T,k}$, we denote

$$\Lambda_{t,T} = L_{W_{t,T,k}}. \quad (12.5.19)$$

When calculating the optimal corrective strategy corresponding to the portfolio owner's transition to the assignor status at the time instant 0, with the collateral given by (12.4.10), we can first minimize (12.5.12) for the continuous values of the argument k' (which may be reasonable since the objective function is convex) and then choose one of the nearest integer values.

12.6 Calculations on Model Examples to Demonstrate the Effectiveness of the Margining System with Futures Correction

To find the required deposit margin level (see the relation (12.4.10) for the initial time instant and the relation (12.4.11) for the subsequent time instants), we calculate

the values of the objective function $V_{t,T}(x, k)$ on an integer grid in k and a uniform grid in x with step δ_t provided that (12.5.10). In this case, the values of the objective function at intermediate points $I_t(x_0)$ are calculated by linear interpolation when necessary. Note that due to the terminal condition (12.4.1), the total calculation error ε_t does not exceed the sum of linear interpolation errors at step t and all subsequent steps. Estimating the interpolation error at each step and considering the Lipschitz property of the objective function in the argument x , we arrive at the following conclusion: to ensure a given accuracy⁴⁴ $\varepsilon = \varepsilon_0$, it suffices to choose the grid step $\delta_t = \frac{2\varepsilon_0}{T \cdot \Lambda_{t,T}}$ at step $t = 1, 2, \dots, T - 1$, where $\Lambda_{t,T}$ are the estimates of the Lipschitz constants (12.5.19) calculated recurrently from (12.5.18). Being computationally intensive, this problem can be optimized both by the *continuous* minimization with respect to the argument k' and parallel calculations for different integer values of k' .

The calculation results in Figs. 12.1, 12.5, and 12.2 illustrate the main features of the proposed approach. First, we study the deposit margin dynamics depending on the expiration time (Fig. 12.1). Note that the deposit margin level grows with increasing the number T of days to expiration. In addition, there are steps in the graph due to the possibility of applying the futures correction (and the discrete character of such portfolio management).

The slight slope of these steps reflects the potential worst financial outcome of the futures correction and is associated with the price limits. In this example (Fig. 12.1), the tangent of the slope is $-\alpha$. Figure 12.5 presents the margin graph for a butterfly option with a longer time to exercise, demonstrating its evolution.

Quite expectedly, increasing the daily price limits (and hence the potential price deviation in the worst case; see Fig. 12.2) leads to a higher absolute value of the required deposit margin level and shifts the steps. Moreover, it affects the length and slope of the steps. In this case, the tangent of the slope is $-\beta$: the worst result on the steps is achieved on the right limit. The length of the steps varies depending on the constraints on the price dynamics, being close to the length of the maximum jump in the unfavorable direction in terms of the correction.

Next, we consider two portfolios to illustrate the *subadditivity* property. Figure 12.6 shows the payoff function for each portfolio, the total payoff function for the combined portfolio, and the deposit margin levels on a horizon of 2 trading days (for the combined portfolio and the sum of the levels for each portfolio separately). Note that subadditivity holds; on the price variation interval $[29, 31]$ of the underlying asset, combining portfolios allows considering their specific features (the growth of potential losses in one portfolio is accompanied by a reduction of potential losses in the other). As a result, the margin is calculated with higher efficiency: it becomes smaller than in the case of considering each portfolio independently.

Now we discuss the possibility of returning the portfolio to the assignor under condition (12.4.20). Let at a time instant $t, 0 < t < T - 1$, the amount v_t in the clearing account of the clearing member be smaller than the required collateral

⁴⁴The calculation error of the objective function $V_{t,T}(x, k)$ is understood in the uniform sense, i.e., in the variables x and k .

level⁴⁵, i.e., $v_t = \varkappa M(f, T - t, x_t)$ and⁴⁶ $\varkappa \in [0, 1)$, where x_t is the underlying asset price at the time instant t , and let the clearing member pass to the assignor status at this time instant according to the clearing session results. Then starting from the time instant $t + 1$, the central counterparty will execute corrective transactions for and on behalf of this member in accordance with the procedure [223]. Assume also that the margin deficit is (possibly) eliminated only by implementing corrective transactions and the market price evolution. (In other words, no additional funds are deposited, and the portfolio is not liquidated, fully or partially.) This assumption allows analyzing the role of corrections in settling the margin deficit.

Using the Monte Carlo simulation, we generate possible price dynamics and calculate the share of portfolios returned to the assignor depending on the initial margin deficit (the value $1 - \varkappa$). The conditional distribution of price increments at the next time instant given a current price x plays an essential role here. The graphs in Fig. 12.3 correspond to the censored (truncated) Gaussian, uniform, and U-shaped distributions⁴⁷, symmetric, with the same support $[-\alpha x, \beta x]$, where $\alpha = \beta$. For each distribution, the number of trials is $N = 10^4$.

According to the experiment results (Fig. 12.3), the return is very likely under a small portfolio deficit, particularly due to possible favorable price dynamics. The sharp drops in the frequency of return for the U-shaped distribution are explained by the kind of the price increment distribution. With this distribution, several “lucky” jumps are sufficient for a sharp margin decrease. The characteristic drops are associated with an increase in the number of jumps necessary for the portfolio return. Among other things, the fall in the frequency of return for other distributions is due to the guaranteed approach to portfolio return. In a large share of cases, the worst possible price (in the guaranteed sense) for liquidating positions on futures corrections turns out so unfavorable that the portfolio is not returned. However, the real prices, especially when the market is stable, rarely reach their extreme values. Therefore, a hypothetically reasonable approach to portfolio return should involve a probabilistic-statistical framework (e.g., quantiles of possible financial results) rather than the guaranteed financial result.

The expediency of using corrections is confirmed by the results in Fig. 12.4. This figure shows the values of the objective function $V_{t,T}(x, k)$ for a portfolio of three call options with an exercise price of 30 depending on the asset price under different numbers $k \in \mathbb{Z}$ of corrections. (The color of columns corresponds to different asset prices.) Clearly, as the price x increases, the function $k \mapsto V_{t,T}(x, k)$ achieves minimum not at $k = 0$ (the case of no corrections) but at $k = 1, 2$, and

⁴⁵Recall that f is the payoff function of the trader’s portfolio and T is the number of days to options expiration.

⁴⁶In other words, there is a margin deficit of $(1 - \varkappa) \cdot 100\%$ at this time instant.

⁴⁷Under the censored Gaussian distribution, the price increments obey the Gaussian law and the random variable falls within the interval $[-\alpha x, \beta x]$ with probability 0.99. This distribution describes stable price dynamics with low volatility. The density $p_{\alpha x, \beta x}$ for the U-shaped distribution is chosen so that the point 0 be the median, $p_{\alpha x, \beta x}(z) = \gamma_{\alpha x}^- z^2$ for $[-\alpha x, 0]$, and $p_{\alpha x, \beta x}(z) = \gamma_{\beta x}^+ z^2$ for $[0, \beta x]$. Thus, the density graph resembles the letter U. This distribution characterizes high uncertainty in the market, when the price can both rise and fall sharply.

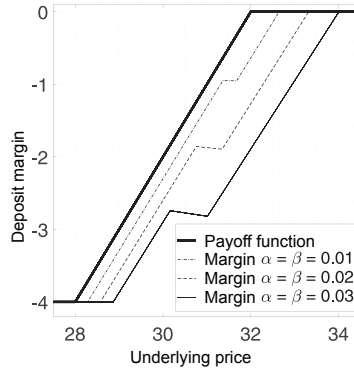
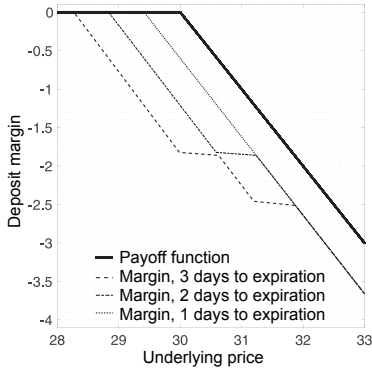


Figure 12.1: Deposit margin levels (with the minus sign) for a call option with an exercise price of 30; the price limits are $\alpha = \beta = 2\%$, and the accuracy is $\varepsilon = 10^{-3}$. Figure 12.2: Deposit margin (with the minus sign) for a bear spread option with an exercise price of 30; the price limits are different price limits on a horizon of 2 days to expiration; the accuracy is $\varepsilon = 10^{-3}$.

3, respectively. Thus, corrections allow reducing the potential losses of the portfolio and, consequently, decreasing the required deposit margin level. In addition, due to the guaranteed estimation, the smaller amount of financial resources is still sufficient to cover potential losses.

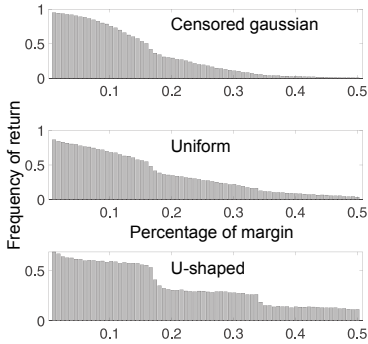


Figure 12.3: The frequency of return for a call option with an exercise price of 30 for different price increment distributions. The parameters are $x_0 = 32$, $\alpha = \beta = 0.02$, and $T = 6$; the number of trials is $N = 10^4$.

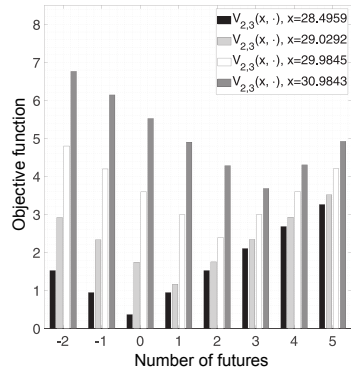


Figure 12.4: The values of the objective function for three call options with different current prices. The parameters are $\alpha = \beta = 0.02$ and $\varepsilon = 10^{-2}$.

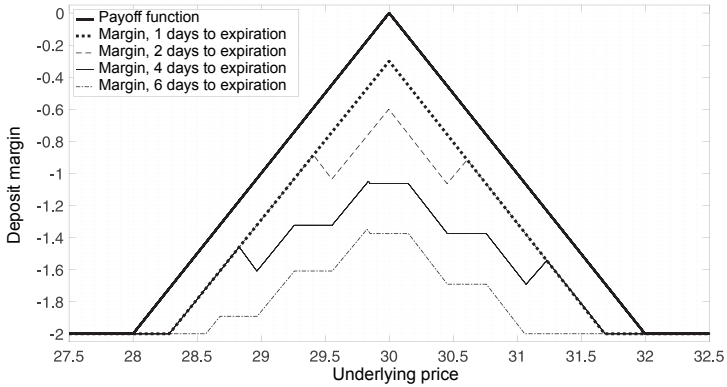


Figure 12.5: Deposit margin levels (with the minus sign) for a butterfly option with different times to exercise; the price limits are $\alpha = \beta = 0.01$, and the accuracy is $\varepsilon = 10^{-2}$.

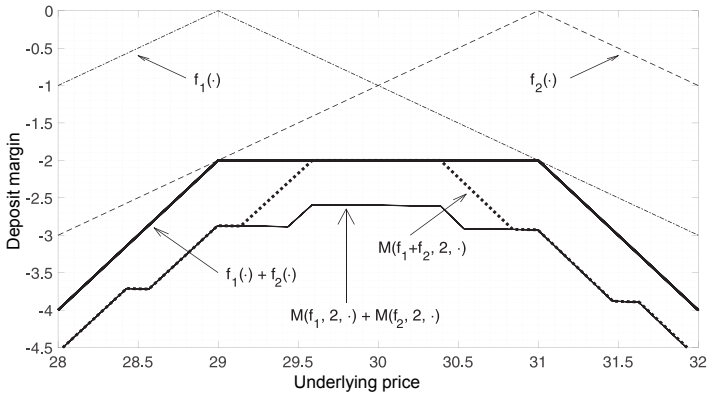


Figure 12.6: Deposit margin levels (with the minus sign) for two portfolios $M(f_1, 2, \cdot)$ and $M(f_2, 2, \cdot)$ with the payoff functions f_1 and f_2 , respectively, and for the united portfolio $M(f_1 + f_2, 2, \cdot)$ with the payoff function $f_1 + f_2$; the price limits are $\alpha = \beta = 0.01$, the horizon is 2 days to expiration, and the accuracy is $\varepsilon = 10^{-3}$.

Conclusion

Research Results

Many of the author's ideas and results were born in the second half of the 1990s. They were presented at international conferences, workshops, and seminars, as well as were used in lectures and the invention registered in 2004, on the subject of financial engineering, the first such invention in Russia. The proposed approach was about 15 years ahead of time but was not published then. Only a few years ago the author managed to return to intensive mathematical research and published both old and new results. Now, our approach formally adjoins a novel, one might say fashionable, line of mathematical finance, the robust models with discrete time, which has been actively developing in recent years. However, our approach does not coincide with this line by interpretation.

Within the guaranteed deterministic approach, the central role in solving the superhedging problem⁴⁸ is played -by a recurrence relation, represented by the Bellman–Isaacs equations (BI) introduced in Chapter 1; their properties and numerical solution methods are studied. An advantage of the approach consists in a game-theoretic interpretation transparent from an economic point of view.⁴⁹ The

⁴⁸This problem, also called the super-replication problem, is to hedge a contingent liability of a written option, i.e., execute admissible transactions in a corresponding financial market under existing trading constraints for *the complete coverage of the liability* (unlike other types of hedging) with a minimum initial capital (the premium charged to the option buyer). The payoffs on options are determined based on the price evolution of certain traded assets, futures, or market indices, and the payoff instants and their values are determined by the contract type.

⁴⁹Using the notations introduced in Chapter 1, in informal economic language, the meaning of equations (BI) can be explained as follows. Assume for simplicity that the supremum and infimum in (BI) are reached. Consider $t \leq N$, and let the history of (discounted) prices x_1, \dots, x_{t-1} be known by the current time instant (step) $t - 1$. First, the value V_{t-1} of a portfolio hedging a contingent liability on a written American option must be not smaller than the current liabilities equal to the potential payoffs $g_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ to guarantee their fulfillment. Second, the portfolio value at the next step, $V_t = V_{t-1} + H_t \Delta X_t$, must be not smaller than $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y)$ under any price evolution scenario $\Delta X_t = y \in K_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ at the step t ; here, the strategy H_t is formed at the step $t - 1$ and can only depend on the price history x_1, \dots, x_{t-1} . Thus, to cover future liabilities, the portfolio value V_{t-1} with a chosen strategy $H_t = h \in D_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ must be not smaller than $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$ in the most unfavorable price evolution scenario $y \in K_t(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1})$ at the step t , i.e., for $y \in K_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ maximizing the expression $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy$. The resulting value is minimized by choosing a strategy $h \in D_t(x_1, \dots, x_{t-1})$ to estimate the required reserves to cover future potential payoffs. It remains to let $v_t^*(x_1, \dots, x_{t-1})$ be equal to the maximum of two values: the amount of current liabilities and the amount of reserves to cover future potential payoffs.

motivation for developing an alternative formalization of financial market behavior—deterministic uncertain dynamics considering trading constraints—and a guaranteed deterministic approach to superhedging was the desire to elaborate a theory in which *the numerical solution of the problem arises naturally, matching the economic interpretation.*

In modern mathematical finance, the problem of formalizing and analyzing the “no arbitrage” conditions of the market model has a significant place. Interestingly, the formalization of the market model and the superhedging problem proposed in Chapter 1 does not initially rest on any “no arbitrage” assumption, although economic considerations make this kind of assumption necessary to obtain meaningful results. In Chapter 2, we have introduced a new concept to take trading constraints into account, No Deterministic Sure Arbitrage with Unbounded Profit (NDSAUP). As it turns out, in the case of sure arbitrage with bounded profit, superhedging is unreasonable for the typical one-dimensional model (i.e., the model with one risky asset) but economically feasible rainbow options (i.e., for a model with $n \geq 2$ risky assets). Condition NDSAUP is a natural “no arbitrage” formalization of a market model with trading constraints for the two-stage solution described in Chapter 7 and the analysis of the superhedging problem for rainbow options.

The concept of *the structural stability of the model* (Chapter 2) is crucial, being essentially used in many other chapters. Moreover, the author believes that this new concept is most important for this dissertation. In contrast to trading constraints, which can be supposed to have an exact definition, it would be fundamentally mistaken to consider compact-valued mappings describing market dynamics exactly defined in practical applications. Structural stability⁵⁰ is a fundamental property meaning that the qualitative behavior of a model is not affected by small (in some sense) perturbations of its dynamics. From an economic point of view, the qualitative behavior of a financial market model is determined by the “no arbitrage” condition (or its absence) in a certain sense to be formalized. This dissertation has proposed a structural stability formalization within the guaranteed deterministic approach. The adequacy of this formalization has been confirmed by several substantial results in Chapters 2–4, 6, and 8–10.

Generally speaking, the guaranteed deterministic approach may yield solutions of the superhedging problem different from the classical probabilistic models. However, in the “sufficiently regular” case, the deterministic and probabilistic solutions coincide; for details, see Chapter 9. This is exactly the case when the Bellman–Isaacs equations have continuous solutions; see Chapters 3 and 4. According to the results of these three chapters, under the conditions made, the solution of the superhedging problem admits a continuous version defined almost surely. Note that *the structural stability of the model is essential for continuity*: an appropriate example⁵¹ has been provided in Chapter 10.

⁵⁰The term has been borrowed from dynamic systems theory.

⁵¹This is a counterexample to [51, Proposition 3.7, Section 3.2], a typical paper devoted to the robust approach. Under assumptions similar to ours, Carassus et al. claimed the continuity of the superhedging price as a function of the price history.

By adopting a mixed market strategy and using results on game equilibrium, see Chapter 5, we have separated the pricing problem from the hedging problem, passing from the Bellman–Isaacs equations to the Bellman equations. For the first time, a corresponding result under the assumption of no trading constraints was presented in 2001 at the workshop of the Franco-Russian Lyapunov Centre at Moscow State University, including an important economic interpretation explaining the nature of risk neutrality as a property of the most unfavorable market strategies.⁵²

The two-stage method for solving the Bellman equations, proposed in Chapter 7 under the assumption of a game equilibrium in mixed market strategies, has been used in subsequent chapters to solve the pricing problem numerically. Stage 1 is related to the general moment problem and consists in constructing a concave hull of a function.⁵³ Stage 2 reduces to the classical problem of maximizing a concave function on a convex set. In this case, the most unfavorable mixed market strategies should be searched in the class of distributions concentrated in a finite set of $n + 1$ points. (It equals the total number of assets (risky and risk-free) in the portfolio. Under rather general assumptions on the “smoothness” of the corresponding functions, the description of price dynamics, and trading constraints⁵⁴, the unfavorable mixed market strategies are obtained on such distributions.⁵⁵

The behavior of the most unfavorable mixed market strategies with supports consisting of at most $n + 1$ points has been investigated in Chapter 8. It is of applied interest because for a fixed initial price, superhedging reduces to hedging on at most $(n + 1)^N$ price paths. If the model preserves the convexity of the solutions of the Bellman–Isaacs equations⁵⁶, then optimal mixed market strategies—the conditional distributions of price increments given a known price history⁵⁷ are concentrated on a set of at most $n + 1$ extreme points of the convex hull of the mixed strategy support.

Chapter 10 has introduced a new notion, i.e., the structural stability threshold of a model: for a given price history, it represents the maximum perturbation of the compact sets describing the price dynamics that preserves the structural stability of the model (the robust condition of no sure arbitrage with unbounded profit). Based on the results concerning the structural stability threshold, we have estimated the sensitivity of the solutions of the Bellman–Isaacs equations (BI) with respect to uniformly small perturbations of the compact sets describing the price dynamics of the original model, for a fairly general class of trading constraints when the correspond-

⁵²Later, this interpretation was independently discovered by V.N. Kolokoltsov; see [27].

⁵³The separation into two stages is especially justified when performing calculations for different trading constraints with given market dynamics.

⁵⁴The matter concerns semicontinuity properties for numerical functions and set-valued mappings.

⁵⁵Hence, we can conclude the following: for the traditional probabilistic statement of the superhedging problem without trading constraints and with non-atomic conditional distributions of price increments, there is no equivalent martingale measure for which the most unfavorable probabilistic scenario would be achieved.

⁵⁶We have proved the inheritance of convexity (as well as monotonicity) for special models, representing the generalized Kolokoltsov models.

⁵⁷The existence of Borel measurable transition kernels corresponding to the optimal mixed “market” strategies has been established in Chapter 8.

ing sets are Moztkin decomposable.⁵⁸ It has been shown that without the structural stability condition of the model, the uniformly small approximation of the compact sets describing the price dynamics of the original model will not guarantee the uniform closeness of the solutions of the Bellman–Isaacs equations, even in the case of no trading constraints and even when preserving the condition of no arbitrage opportunities during the approximation procedure. The problem of choosing adequate numerical methods has been discussed in detail both for the pricing problem and the hedging problem. For this class of models with the above-mentioned trading constraints, preliminary calculations prior to solving the Bellman equation have been described. They are intended to determine limitations on the error of calculations that guarantee a given accuracy of option premium calculation. Test model examples have been selected, and a computational experiment has been conducted for them.

Chapter 11 has considered the pricing problem for a simple European option with a discontinuous payoff function (a binary call option) in the case of no trading constraints. Within the guaranteed deterministic approach to superhedging, several properties of the solutions to the Bellman equations have been obtained for the multiplicative price dynamics model with one risky asset. In particular, it has been discovered that the solutions are numerical functions that are monotonically nondecreasing, right continuous, piecewise convex, and continuous except for one point (a jump). In addition, the solutions are piecewise rational; using this property, we have proposed an algorithm for constructing a semi-explicit solution, i.e., a recurrence procedure yielding formula-based solutions on some intervals. In particular, this procedure can be implemented through symbolic computing. Several hypotheses about the behavior of solutions have been formulated using the computational results.

Chapter 12 has presented a portfolio margining system for options and futures in an exchange-traded derivatives market with default management based on the methodology of the invention [224]. We have constructed a mathematical model of margining, i.e., a method for calculating the required deposit margin (collateral level) within the guaranteed deterministic approach to superhedging and a game-theoretic interpretation. The economic sense of the problem directly yields the Bellman–Isaacs equations for the required margin level. The properties of these equations have been studied, particularly an important requirement for margining systems from an economic point of view: the property of portfolio margin subadditivity. A computational experiment has been conducted to confirm the effectiveness of the margining system.

Outcomes and Recommendations

Summarizing the research results, we can conclude that the deterministic approach to describing market dynamics, in combination with assuming bounded price

⁵⁸Trading constraints of this kind cover two classes of models arising in practice: models with unbounded trading constraints (when all the corresponding sets are unbounded) and models with bounded trading constraints (when all the corresponding sets are bounded).

increments for risky assets, has proven to be an effective tool for analyzing and constructing discrete-time models in the superhedging problem. Under the corresponding regularity assumptions, the guaranteed deterministic approach allows solving the superhedging problem also for the classical probabilistic statement in discrete time. Note that the superhedging problem has always been relevant at least because it gives an upper bound for rational option pricing in various pricing models. The developed numerical solution method, reducible to well-studied computational geometry problems, has demonstrated effectiveness on specially selected test models.

As a theoretical recommendation, we propose using continuous selectors instead of Suslin analytic or Borel selectors within the robust line.⁵⁹ A necessary and sufficient condition for the existence of a continuous selector in a finite-dimensional Euclidean space is the lower semicontinuity of a set-valued mapping; see Chapter 6. It would be interesting, at least for a canonical space (i.e., for a model involving price information only), to develop a theory assuming Feller transition kernels instead of Suslin analytic ones: the Feller property is natural for a market model from an economic point of view. There are economic grounds for the discontinuous dependence on price history.

Another recommendation is practical and can be productive when working with real data. Even if the structural stability condition holds for the original model, it is still possible to use the regularizing coarsening of the original system described in Chapter 10 at the data error level.⁶⁰ If the structural stability condition fails, this most likely indicates an ill-posed problem. For example, the model can be “fragile,” as described in Chapter 10. In this case, the regularizing coarsening of the original system becomes necessary. A possible reason can also be the inconsistency of observed market data within the model. We encountered such a situation when solving a particular problem for a financial model using real data in⁶¹ the paper [222]. A similar idea of data accuracy coarsening was used therein to obtain a well-posed statement. In addition, structural stability can be lost due to an (incorrect) numerical approximation of the original market dynamics.

We have prepared didactic recommendations based on many-years approbation in *Elements of Mathematical Finance*, an academic course for senior students of the Department of Systems Analysis, the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics (Moscow State University), and lectures on *Risk Management and Ac-*

⁵⁹Usually, research works of this direction are based on the Yankov–von Neumann theorem; see [29, Theorem 7.49].

⁶⁰In fact, this idea was proposed by A.N. Tikhonov for solving ill-posed problems.

⁶¹In the cited paper, we constructed a model within the generally accepted concept of credit risk pricing to consider the term structure of both risk-free interest rates and default rates. On the real market data, the consistency problem arises for eurobond quotations in Eurozone and credit default swap (CDS) contracts. We have proposed a consistency checking approach and an inconsistent data processing procedure. This approach is model-independent: being compatible with any estimation method of the term structure, it gives an estimated accuracy of constructing the term structure of risk-free return on a given data set. As has been found, the quotations of government bonds and related CDS contracts in the Eurozone, are often inconsistent at the cross-country level, even in the case of data filtering at the issuer level. This can be interpreted as violating the “no arbitrage” condition within this model on the observed data.

tuarial Methods, a master's program of the Economics Faculty (the Higher School of Economics). We propose to theorize the pricing of contingent liabilities within the guaranteed (game-theoretic) approach, resting on the game equilibrium in mixed market strategies to interpret the most unfavorable scenarios of market behavior. A particularly simple and transparent interpretation is obtained under the assumption of no trading constraints: the probability measures corresponding to the most unfavorable mixed strategies are required to be risk-neutral. This material can be used in mathematical finance courses for mathematicians as well as risk management and financial engineering courses for economists.

Finally, the developed software package for the numerical solution of the superhedging problem can serve for research purposes and practical work in computer classrooms in undergraduate financial mathematics courses. In particular, these tools have already been adopted in such practical work supplementing *Elements of Mathematical Finance*, the academic course mentioned above.

Prospects for Further Research

It would be useful to develop a general numerical solution method for the Bellman–Isaacs equations in the case of discontinuous payoff functions. According to the simplest example of a binary option analyzed in Chapter 11, the solutions of (BI) may have quite complex behavior.

It seems interesting to study the asymptotic behavior of probability measures corresponding to the most unfavorable mixed market strategies, i.e., their convergence under appropriate normalization to a continuous-time random process. For a particular case, similar results were obtained in [253] and [157].

The next step toward complicating the model (bringing it closer to reality) would be elaborating a theory that takes into account transaction costs within the guaranteed deterministic approach. The simplest model of this kind has been actually investigated in Chapter 12.

It is also planned to extend the functionality of the developed software package, including the numerical solution of the portfolio investment problem.

Notations

Main notations

\emptyset	the empty set;
$[[t, s]]$	the set of integer numbers $\{t, t + 1, \dots, s\}$, where $t \leq s$;
\mathbb{R}	the set of real numbers;
\mathbb{C}	the set of complex numbers;
\mathbb{Z}	the set of integer numbers;
$a \wedge b$	the minimum of two numbers $a, b \in \mathbb{R}$;
$a \vee b$	the maximum of two numbers $a, b \in \mathbb{R}$;
$\bigwedge_{i=1}^n a_i$	the minimum of numbers $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$;
$\bigvee_{i=1}^n a_i$	the maximum of numbers $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$;
Conventions adopted: $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$, $\prod_{i \in \emptyset} b_i = 1$, $\bigvee_{i \in \emptyset} c_i = -\infty$, $\bigwedge_{i \in \emptyset} d_i = +\infty$;	
$\text{re}(a)$	the real part of a complex number $a \in \mathbb{C}$;
$A_1 \times \dots \times A_n$	the Cartesian product of sets A_1, \dots, A_n , i. e., $A_1 \times \dots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}$
A^n	the Cartesian power of a set A , i. e., $A^n = A \times \dots \times A$ (n times);
S_k	a simplex of dimension k , i. e., $S_k = \{q = (q_1, \dots, q_{k+1}) \in [0, 1]^{k+1} : \sum_{i=1}^{k+1} q_i = 1\}$;
I_A	the indicator function of a set A , i. e., $I_A(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in A; \\ 0 & \forall x \notin A; \end{cases}$
2^E	the class of all subsets of a set E ;
$\mathcal{N}(E)$	the class of all non-empty subsets of E : $\mathcal{N}(E) = 2^E \setminus \{\emptyset\}$;

$\mathcal{P}^*(E)$	the class of all normalized (probability) measures on E with a finite support;
$\mathcal{P}(E)$	the class of all normalized (probability) measures on a measurable space (E, \mathcal{A}) σ -algebra \mathcal{A} of subsets of E ;
$\mathcal{P}^n(E)$	the class of all normalized (probability) measures, concentrated at most at $n + 1$ points of E ;
\mathcal{B}^n	the Borel σ -algebra of subsets of \mathbb{R}^n , $n \geq 1$;
$\text{supp}(\mu)$	the topological support of a measure μ ;
δ_a	the Dirac measure concentrated at a point a , i.e., $\delta_a(A) = I_A(a)$;
$\sum_i q_i Q_i$	the mixture of probability measures Q_i , $i = 1, 2, \dots$, where $q_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots$ and $\sum_i q_i = 1$;
\mathbb{P}	the probability defined on a σ -algebra \mathcal{F} of subsets of the sample space Ω ;
\mathbb{E}	the mathematical expectation operator with respect to the probability measure under consideration, \mathbb{P} ;
$\mathbb{E}^{\mathcal{A}}$	the conditional expectation operator with respect to σ -algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$;
$\mu \ll \nu$	a measure μ is absolutely continuous wth respect to ν (both measures are defined on the same measurable space);
x^+	$0 \vee x$;
h^\oplus	for a vector $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, it is the vector $h^\oplus = (h_1^+, \dots, h_n^+)$;
$x \otimes y$	for two vectors $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ and $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, it is the matrix of dimension $m \times n$ with the elements $(x \otimes y)_{ij} = x_i y_j$, $m \geq 1, n \geq 1$;
∇	the gradient;
∇^2	the Hessian.

In topological space E

$\mathcal{K}(E)$	the class of all non-empty compact subsets of E ;
$\text{cl}(A)$	the closure of A ;
$\text{int}(A)$	the interior of A ;

$\text{bd}(A)$ the boundary of A .

In metric space X with metric ρ

$\rho(x, A)$ the distance between a point x and a set $A \subseteq X$,
i. e., $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$;

$[A]^\varepsilon$ the closed ε -neighborhood of A , i. e., $[A]^\varepsilon = \{x \in X : \rho(x, A) \leq \varepsilon\}$;

$B_\delta(x)$ the open ball of radius δ centered at x , i. e.,
 $B_\delta(x) = \{y : \rho(y, x) < \delta\}$;

$\bar{B}_\delta(x)$ the closed ball of radius δ centered at x ,
i. e., $\bar{B}_\delta(x) = \text{cl}(B_\delta(x)) = \{y : \rho(y, x) \leq \delta\}$;

$e_\rho(A, B)$ the Pompeiu deviation of a set A from a set B in a metric space
with a given metric ρ , i. e., $e_\rho(A, B) = \sup\{\rho(x, B), x \in A\}$;

$h_\rho(A, B)$ the Pompeiu–Hausdorff distance in a metric space with a given met-
ric ρ , i. e., $h_\rho(A, B) = e_\rho(A, B) \vee e_\rho(B, A)$;

$\text{dist}(A, B)$ nearness of two sets A and B (the term “nearness” is not generally
accepted and is used here to to emphasize the difference from the
Pompeiu–Hausdorff distance); defined by $\inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}$;

ω_f the modulus of continuity of a mapping $f : X \rightarrow Y$, where Y is a
metric space;

L_f the Lipschitz constant of a mapping $f : X \rightarrow Y$ that satisfies the
Lipschitz condition, where Y is a metric space.

In linear space X

$x + A$ the shift of a set $A \subseteq X$ to a vector x ,
i. e., $x + A = \{y \in X : y = x + z, z \in A\}$;

$A_1 + A_2$ the Minkowski sum of sets $A_1 \subseteq X$ and $A_2 \subseteq X$, i. e. $A_1 + A_2 =$
 $\{y \in X : y = x_1 + x_2, x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\}$;

$\langle x, y \rangle = xy$ the inner product in the Euclidean space \mathbb{R}^n , i. e. $xy = \sum_{i=1}^n x^i y^i$ for
 $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ and $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$;

$\Lambda(z)$ for a vector $z = (z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^n)$, the diagonal matrix with entries
 $\Lambda(z)_{ij} = z_i$, if $j = i$ and $\Lambda(z)_{ij} = 0$, if $j \neq i$;

$L_1 \oplus L_2$ the direct sum of linear subspaces L_1 and L_2 ;

$\text{conv}(A)$	the convex hull of a set A ;
$\text{aff}(A)$	the affine hull of a set A ;
$\text{lin}(A)$	the linear hull of a set A ;
$\text{li}(A)$	the linear subspace parallel to $\text{aff}(A)$, i. e. if $y \in \text{aff}(A)$, then $-y + \text{aff}(A) = \text{li}(A)$;
$\text{ri}(A)$	the relative interior of a convex set A ;
$\text{rbd}(A)$	the relative boundary of a convex set A ;
σ_A	the support function of a set A , i. e. $\sigma_A(x) = \sup\{\langle x, y \rangle, y \in A\}$;
$\text{bar}(A)$	the barrier cone of a set A ;
$\text{rec}(A)$	the recession cone of a convex set A ;
$\text{ext}(A)$	the set of extreme points of a convex set A ;
$\text{dim}(A)$	the affine dimension of a set A , i. e. $\text{dim}(A) = \text{dim}(\text{li}(A))$;
$\text{dom}(f)$	the effective domain of a convex function f , i. e. $\text{dom}(f) = \{x : f(x) < \infty\}$;
D°	the convex cone $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle h, y \rangle \leq 0 \forall h \in D\}$; if D is a convex cone, then D° is the polar cone of D ;
$\mathcal{K}_c(X)$	the class of all non-empty convex and compact subsets of a topological linear space X .

References

1. Aksamit A., Deng S., Oblój J., Tan X. Robust pricing–hedging duality for American options in discrete time financial markets // *Mathematical Finance*. — 2019. — Vol. 29, no. 3. — P. 861–897. — (Cit. on pp. 8, 16).
2. Alexandroff A. D. Additive set-functions in abstract spaces // *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.* — 1943. — Vol. 13(55), no. 2–3. — P. 169–238. — (Cit. on pp. 108, 125, 126, 142, 172, 230).
3. Andreev N. A., Smirnov S. N. A guaranteed approach to the problems of investing and hedging // *Tikhonov Readings: Scientific conference: abstracts of papers: Dedicated to the memory of Academician A. N. Tikhonov: October 29–November 2, 2018*. — Moscow : MAKS Press, 2018. — P. 11. — (Cit. on pp. 16, 18).
4. Andreev N. A., Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: Numerical experiment // *Computational Mathematics and Modeling*. — 2021. — Vol. 32, no. 1. — P. 22–44. — (Cit. on pp. 18, 235).
5. Andreev N. A., Smirnov S. N. Numerical solution of the Bellman–Isaacs equation in the problems of managing a portfolio of financial assets // *Lomonosov Readings: Scientific Conference, Moscow, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University, 2020: abstracts of papers*. — Moscow : Faculty of Computational Mathematics, Cybernetics, Moscow State University, 2020. — (Cit. on pp. 16, 18).
6. Andronov A. A., Pontryagin L. S. Systèmes grossiers // *Doklady Akademii Nauk SSSR*. — 1937. — Vol. 14, no. 5. — P. 247–250. — (Cit. on p. 58).
7. Arkhipov V. M., Zakharov I. Y., Naumenko V. V., Smirnov S. N. Prerequisites for introducing quantitative measures for the EMH. — Preprint WP16/2007/05. — Higher School of Economics, 2007. — (Cit. on p. 21).
8. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk // *Mathematical Finance*. — 1999. — Vol. 9, no. 3. — P. 203–228. — (Cit. on p. 326).
9. Ash R. B. *Real Analysis and Probability*. — New York : Academic Press, 1972. — P. 494. — (Cit. on p. 126).

10. Aumann R. J., Hart S. Handbook of Game Theory with Economic Applications, Volume 2, 1st Edition / Aumann R.J., Hart S. Eds. — New York : Elsevier Since B.V., 1994. — P. 735–1520. — (Cit. on p. 138).
11. Ausubel L. An efficient dynamic auction for heterogeneous commodities // American Economic Review. — 2006. — Vol. 96, no. 3. — P. 602–629. — (Cit. on p. 312).
12. Ausubel L. M. System and method for an efficient dynamic multi-unit auction. — Google Patents, 2007. — US Patent 7,165,046. — (Cit. on p. 312).
13. Avellaneda M., Cont R. Close-out risk evaluation (CORE): A new risk management approach for central counterparties // SSRN Electronic Journal. — 2013. — (Cit. on p. 316).
14. Avis D., Jordan C. Comparative computational results for some vertex and facet enumeration codes. — 2016. — <http://arxiv.org/abs/1510.02545v3>. — (Cit. on p. 270).
15. Awasthi P., Kalantari B., Zhang Y. Robust vertex enumeration for convex hulls in high dimensions // Annals of Operations Research. — 2020. — (Cit. on p. 270).
16. Bachelier L. Théorie de la spéculation // Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série. — 1900. — Vol. 17. — P. 21–86. — (Cit. on pp. 6, 22).
17. Barber C. B., Dobkin D. P. H., Huhdanpaa H. The quickhull algorithm for convex hulls // ACM Transactions on Mathematical Software. — 1996. — Vol. 22. — P. 469–483. — (Cit. on p. 270).
18. Bayraktar E., Zhang Y. Fundamental theorem of asset pricing under transaction costs and model uncertainty // Mathematics of Operations Research. — 2016. — Vol. 41, no. 3. — P. 1039–1054. — (Cit. on p. 8).
19. Bayraktar E., Zhang Y., Zhou Z. A note on the fundamental theorem of asset pricing under model uncertainty // Risks. — 2014. — Vol. 2. — P. 425–433. — (Cit. on p. 58).
20. Bayraktar E., Zhou Z. On arbitrage and duality under model uncertainty and portfolio constraints // Mathematical Finance. — 2017. — Vol. 27, no. 4. — P. 988–1012. — (Cit. on p. 8).
21. Beiglböck M., Nutz M. Martingale inequalities and deterministic counterparts // Electronic Journal of Probability. — 2014. — Vol. 19, no. 95. — P. 1–15. — (Cit. on p. 151).
22. Bellman R. Dynamic Programming. — Princeton : Princeton University Press, 1957. — (Cit. on p. 32).
23. Bentkus R. On the dependence of the Berry–Esseen bound on dimension // Journal of Statistical Planning and Inference. — 2003. — Vol. 113. — P. 385–402. — (Cit. on p. 229).

24. Berge C. *Espaces Topologiques: Fonctions Multivoques*. Collection Unive. — Paris : Dunod, 1959. — (Cit. on pp. 13, 69).
25. Berge C. *Topological Spaces: Including a Treatment of Multi-Valued Functions, Vector Spaces, and Convexity*. — London : Oliver & Boyd, 1963. — P. 270. — (Cit. on p. 69).
26. Berinde V., Păcurar M. The role of the Pompeiu–Hausdorff metric in fixed point theory // *Creative Mathematics and Informatics*. — 2013. — Vol. 22, no. 2. — P. 143–150. — (Cit. on p. 130).
27. Bernhard P., Engwerda J. C., Roorda B., Schumacher J., Kolokoltsov V., Saint-Pierre P., Aubin J.-P. *The Interval Market Model in Mathematical Finance: Game-Theoretic Methods*. — New York : Springer, 2013. — (Cit. on pp. 7, 11, 17, 28, 98, 185, 200, 316, 338).
28. Bertsekas D. P. Approximation procedures based on the method of multipliers // *Journal Optimization Theory and Applications*. — 1977. — Vol. 23. — P. 487–510. — (Cit. on p. 268).
29. Bertsekas D. P., Shreve S. E. *Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case*. — New York : Academic Press, 1978. — (Cit. on pp. 16, 38, 163, 177, 178, 340).
30. Biagini F., Gonon L., Reitsam T. Neural network approximation for superhedging prices // *Mathematical Finance*. — 2022. — P. 1–39. — (Cit. on p. 8).
31. Bielecki T. R., Cialenco I., Feng S. A dynamic model of central counterparty risk // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. — 2018. — (Cit. on p. 313).
32. Billingsley P. *Convergence of Probability Measures*. — First edition. — New York : Wiley, 1968. — (Cit. on pp. 21, 108, 109, 116, 125, 126).
33. Billingsley P. *Convergence of Probability Measures*. — Second edition. — New York : Wiley, 1999. — (Cit. on pp. 108, 233).
34. Birkhoff G. *Lattice Theory*. — Providence : American Mathematical Society, Col Pub., 1967. — (Cit. on p. 199).
35. Black F. The pricing of commodity contracts // *Journal of Financial Economics*. — 1976. — Vol. 3. — P. 167–179. — (Cit. on p. 315).
36. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // *Journal of Political Economy*. — 1973. — Vol. 81, no. 3. — P. 637–654. — (Cit. on pp. 6, 315).
37. Blagodatskikh V. I., Filippov A. F. Differential inclusions and optimal control // *Proc. Steklov. Inst. Math.* — 1986. — Vol. 169. — P. 199–259. — (Cit. on p. 44).
38. Bogachev V. *Measure Theory*. Vol. 2. — Berlin : Springer, 2007. — (Cit. on pp. 126, 127).

39. Bohnenblust H. F., Karlin S., Shapley L. S. Games with continuous, convex pay-off // *Contributions to the Theory of Games*. — 1950. — Vol. 20, no. 1. — P. 181–192. — (Cit. on p. 138).
40. Borisovich Y. G., Gel'man B. D., Myshkis A. D., Obukhovskii V. V. Multivalued mappings // *J. Math. Sci.* — 1984. — Vol. 24. — P. 719–791. — (Cit. on p. 44).
41. Bouchard B., Nutz M. Arbitrage and duality in nondominated discrete-time models // *Annals of Applied Probability*. — 2015. — Vol. 25, no. 2. — P. 823–859. — (Cit. on pp. 8, 45, 47, 206).
42. Bremner D., Fukuda K., Marzetta A. Primal-dual methods for vertex and facet enumeration // *Discrete & Computational Geometry*. — 1998. — Vol. 20. — P. 333–357. — (Cit. on p. 270).
43. Brennan M. J. A theory of price limits in futures markets // *Journal of Financial Economics*. — 1986. — Vol. 16, no. 2. — P. 214–233. — (Cit. on p. 320).
44. Burzoni M., Frittelli M., Hou Z., Maggis M. Universal arbitrage aggregator in discrete-time markets under uncertainty // *Finance and Stochastics*. — 2016. — Vol. 20, no. 1. — P. 1–50. — (Cit. on p. 8).
45. Burzoni M., Frittelli M., Hou Z., Maggis M., Oblój J. Pointwise arbitrage pricing theory in discrete time // *Mathematics of Operations Research*. — 2019. — Vol. 44, no. 3. — P. 1034–1057. — (Cit. on pp. 8, 47, 316).
46. Burzoni M., Frittelli M., Maggis M. Model-free superhedging duality // *The Annals of Applied Probability*. — 2017. — Vol. 27, no. 3. — P. 1452–1477. — (Cit. on p. 8).
47. Capponi A., Cheng W. A., Sethuraman J. Clearinghouse default waterfalls: risk-sharing, incentives, and systemic risk. — 2017. — URL: <https://ssrn.com/abstract=2930099> ; 08.06.2020. — (Cit. on p. 313).
48. Carassus L., Gobet E., Temam E. A class of financial products and models where super-replication prices are explicit // *Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance* — Proceedings of the 6th Ritsumeikan International Conference. — World Scientific, 2006. — P. 67–84. — (Cit. on pp. 7, 27).
49. Carassus L., Lépinette E. Pricing without no-arbitrage condition in discrete time // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2022. — Vol. 505, no. 125441. — (Cit. on pp. 36, 49, 53, 54).
50. Carassus L., Oblój J., Wiesel J. Erratum to "The robust superreplication problem: a dynamic approach" // *SIAM Journal on Financial Mathematics*. — 2022. — Vol. 13, no. 2. — P. 653–655. — (Cit. on p. 208).
51. Carassus L., Oblój J., Wiesel J. The robust superreplication problem: A dynamic approach // *SIAM Journal on Financial Mathematics*. — 2019. — Vol. 10, no. 4. — P. 907–941. — (Cit. on pp. 130, 207, 208, 316, 337).

52. Carassus L., Vargiolu T. Super-replication price for asset prices having bounded increments in discrete time. — 2010. — (Cit. on pp. 7, 27).
53. Ćencov N. N. Statistical Decision Rules and Optimal Inference. — American Mathematical Society, 2000. — (Cit. on p. 214).
54. Cherny A. General arbitrage pricing model: I " — Probability Approach // Séminaire de Probabilités XL. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1899. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2007. — P. 415–445. — (Cit. on p. 43).
55. Coffman Jr. E. G., Matsypura D., Timkovsky V. G. Strategy vs risk in margining portfolios of options // Quarterly Journal of Operations Research. — 2010. — Vol. 8. — P. 375–386. — (Cit. on p. 315).
56. Committee on Payment and Settlement Systems, Technical Committee of the Organization of Securities Commissions. Principles for financial market infrastructures : tech. rep. / Bank for International Settlements ; International Organization of Securities Commissions. — 2012. — (Cit. on p. 314).
57. Committee on Payment and Settlement Systems, Technical Committee of the Organization of Securities Commissions. Recommendations for central counterparties : tech. rep. / Bank for International Settlements ; International Organization of Securities Commissions. — 2004. — (Cit. on p. 313).
58. Committee on Payments and Market Infrastructures, Board of the International Organization of Securities Commissions. Resilience of central counterparties (CCPs): Further guidance on the PFMI : tech. rep. / Bank for International Settlements ; International Organization of Securities Commissions. — 2016. — (Cit. on p. 314).
59. Cont R. The end of the waterfall: default resources of central counterparties // Journal of Risk Management in Financial Institutions. — London, 2015. — Vol. 8, no. 4. — P. 365–389. — (Cit. on p. 313).
60. Contento L. The discrete Legendre–Fenchel transform and its application to phase separation in electrolytes. — 2012. — (Cit. on p. 269).
61. Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings, Lattices, and Groups. — New York : Springer–Verlag, 1993. — (Cit. on p. 265).
62. Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach // Journal of Financial Economics. — 1979. — Vol. 7, no. 3. — P. 229–263. — (Cit. on pp. 7, 21, 202, 290, 315).
63. Cramér H. Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités // Actualités Scientifiques et Industrielles. — 1938. — Vol. 736. — P. 5–23. — (Cit. on p. 215).
64. Dana R.-A., Jeanblanc-Picqué M. Marchés Financiers en Temps Continu. — Paris : Economica, 1994. — (Cit. on pp. 7, 201).

65. Dana R.-A., Le Van C., Magnien F. On the different notions of arbitrage and existence of equilibrium // *Journal of Economic Theory*. — 1999. — Vol. 87, no. 1. — P. 169–193. — (Cit. on p. 43).
66. Davydov E. G. *Metody i modeli teorii antagonisticheskikh igr (Methods and Models of Noncooperative Game Theory)*. — Moscow : Moscow State University, 1978. — (Cit. on p. 138).
67. Delbaen F. Representing martingale measures when asset prices are continuous and bounded // *Mathematical Finance*. — 1992. — Vol. 2, no. 2. — P. 107–130. — (Cit. on p. 43).
68. Delbaen F., Schachermayer W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing // *Mathematische annalen*. — 1994. — Vol. 300, no. 1. — P. 463–520. — (Cit. on p. 43).
69. Delbaen F., Schachermayer W. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes // *Mathematische annalen*. — 1998. — Vol. 312, no. 2. — P. 215–250. — (Cit. on p. 43).
70. Dem'yanov V. F., Malozemov V. N. *Introduction to Minimax*. — Courier Corporation, 1990. — (Cit. on p. 168).
71. Denis L., Martini C. A theoretical framework for the pricing of contingent claims in the presence of model uncertainty // *Annals of Applied Probability*. — 2006. — Vol. 16, no. 2. — P. 827–852. — (Cit. on p. 12).
72. Denkowski Z., Migórski S., Papageorgiou N. S. *An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory*. — New York : Springer, 2003. — (Cit. on pp. 132, 160).
73. DeVore R. A., Lorentz G. G. *Constructive Approximation*. — New York : Springer, 1993. — P. 452. — (Cit. on p. 86).
74. Dieudonné J. *Foundations of Modern Analysis*. — New York : Academic Press, 1960. — P. 361. — (Cit. on p. 92).
75. Dolmatov A. S. *Matematicheskie metody risk-menedzhmenta (Mathematical Methods of Risk Management)*. — Moscow : Ekzamen, 2007. — (Cit. on p. 315).
76. Dovgoshey O., Martio O., Ryazanov V., Vuorinen M. The Cantor function // *Expositiones Mathematicae*. — 2006. — Vol. 24, no. 1. — P. 1–37. — (Cit. on p. 86).
77. Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. T. *Modern Geometry—Methods and Applications. Part II. The Geometry and Topology of Manifolds*. — New York : Springer Science+Business Media, 1985. — (Cit. on p. 64).
78. Dudley R. M. Convergence of Baire measures // *Studia Mathematica*. — 1966. — Vol. 27. — P. 251–268. — (Cit. on p. 130).
79. Dudley R. M. Distances of Probability Measures and Random Variables // *The Annals of Mathematical Statistics*. — 1968. — Vol. 39, no. 5. — P. 1503–1572. — (Cit. on p. 130).

80. Dudley R. M. *Real Analysis and Probability*. — New York : Cambridge University Press, 2004. — P. 566. — (Cit. on pp. 128, 173, 174).
81. Duffy D. J. *Finite Difference Methods in Financial Engineering: A Partial Differential Equation Approach*. — West Sussex : Wiley, 2006. — (Cit. on p. 8).
82. Edmonds A. L. Simplicial decompositions of convex polytopes // *Pi Mu Epsilon Journal*. — 1970. — Vol. 5, no. 3. — P. 124–128. — (Cit. on p. 196).
83. Eldor R., Hauser S., Yaari U. Safer margins for option trading: How accuracy promotes efficiency // *Multinational Finance Journal*. — 2011. — Vol. 15, no. 3–4. — P. 217–234. — (Cit. on p. 315).
84. Engelking R. *General Topology*. — Heldermann Verlag, 1989. — (Cit. on pp. 129, 131, 212).
85. Esscher F. On the probability function in the collective theory of risk // *Skandinaviske Aktuarietidskrift*. — 1932. — Vol. 15, no. 3. — P. 175–195. — (Cit. on p. 214).
86. Evstigneev I. V., Schürger K., Taksar M. I. On the fundamental theorem of asset pricing: random constraints and bang-bang no-arbitrage criteria // *Mathematical Finance*. — 2004. — Vol. 14, no. 2. — P. 201–221. — (Cit. on p. 107).
87. Fan K. Minimax theorems // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 1953. — Vol. 39. — P. 42–47. — (Cit. on pp. 104, 138).
88. Faruqui U., Huang W., Takáts E. Clearing risks in OTC derivatives markets: the CCP-bank nexus // *BIS Quarterly Review* December. — 2018. — P. 73–90. — (Cit. on p. 313).
89. Favorsky A., Mikhailova P., Smirnov S. Monotone numerical methods for the option pricing and hedging models // *Abstracts of the 3rd International Conference on Operations Research (ORM2001)*. — 2001. — P. 30–31. — (Cit. on p. 268).
90. Fekete M. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // *Mathematische Zeitschrift*. — 1923. — Vol. 17, no. 1. — P. 228–249. — (Cit. on p. 327).
91. Fenchel W. *Convex Cones, Sets, and Functions*. — Princeton : Princeton University, Department of Mathematics, 1953. — (Cit. on p. 143).
92. Föllmer H., Kabanov Y. Optional decomposition and Lagrange multipliers // *Finance and Stochastics*. — 1997. — Vol. 2, no. 1. — P. 69–81. — (Cit. on pp. 6, 218).
93. Föllmer H., Schied A. *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, 4nd edition. — New York : Walter de Gruyter, 2016. — (Cit. on pp. 6, 37, 117, 194, 207, 218, 222, 316).

94. Gamby A. N., Katajainen J. Convex-hull algorithms: Implementation, testing and experimentation // *Algorithms*. — 2018. — Vol. 11, no. 195. — (Cit. on p. 269).
95. Gander W., Golub G. H., Van Mott U. A constrained eigenvalue problem // *Linear Algebra and Its Applications*. — 1989. — Vol. 114–115. — P. 815–839. — (Cit. on p. 275).
96. Gerhold S., Krühner P. Dynamic trading under integer constraints // *Finance Stoch.* — 2018. — Vol. 22. — P. 919–957. — (Cit. on p. 36).
97. Germeier Y. B. *Vvedenie v teoriyu issledovaniya operatsii (Introduction to Operations Research)*. — Moscow : Nauka, 1971. — (Cit. on p. 152).
98. Ghamami S. Static models of central counterparty risk // *International Journal of Financial Engineering*. — 2015. — Vol. 2. — P. 1–36. — (Cit. on p. 313).
99. Glasserman P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. — New York : Springer, 2004. — (Cit. on p. 8).
100. Goberna M. A., González E., Martínez–Legaz J. E., Todorov M. I. Motzkin decomposition of closed convex sets // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2010. — Vol. 364, no. 1. — P. 209–221. — (Cit. on p. 250).
101. Goberna M. A., Iusem A., Martínez–Legaz J. E., Todorov M. I. Motzkin decomposition of closed convex sets via truncation // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2013. — Vol. 400, no. 1. — P. 35–47. — (Cit. on p. 250).
102. Goberna M. A., Martínez–Legaz J. E., Todorov M. I. On Motzkin decomposable sets and functions // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2010. — Vol. 372, no. 2. — P. 525–537. — (Cit. on pp. 250, 251).
103. Hales T. [et al.]. A formal proof of the Kepler conjecture // *Forum of Mathematics, Pi*. — 2017. — Vol. 5. — e3. — (Cit. on p. 265).
104. *Handbook of Discrete and Computational Geometry, Third Edition* / ed. by C. D. Toth, J. O'Rourke, J. E. Goodman. — CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 2017. — (Cit. on pp. 14, 266, 269).
105. Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. *Inequalities*. — Cambridge : Cambridge University Press, 1934. — (Cit. on p. 216).
106. Harrison J. M., Kreps D. M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // *Journal of Economic Theory*. — 1979. — Vol. 20, no. 3. — P. 381–408. — (Cit. on p. 43).
107. Harrison J. M., Pliska S. R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading // *Stochastic Processes and Their Applications*. — 1981. — Vol. 11, no. 3. — P. 215–260. — (Cit. on p. 43).
108. Hausdorff F. *Grundzüge der Mengenlehre*. — Leipzig : Verlag von Viet & Comp., 1914. — (Cit. on p. 130).

109. Helly E. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — 1923. — Vol. 32, no. 9. — P. 175–176. — (Cit. on p. 139).
110. Hille S. C., Worm D. T. H. Embedding of semigroups of Lipschitz maps into positive linear semigroups on ordered Banach spaces generated by measures // Integral Equations and Operator Theory. — 2009. — Vol. 63, no. 3. — P. 351–371. — (Cit. on p. 127).
111. Himmelberg C. J. Measurable relations // Fundamenta Mathematicae. — 1975. — Vol. 87, no. 1. — P. 53–72. — (Cit. on p. 219).
112. Hobson D. Robust hedging of the lookback option // Finance and Stochastics. — 1998. — Vol. 2, no. 4. — P. 329–347. — (Cit. on p. 8).
113. Hou Z., Obłój J. Robust pricing–hedging dualities in continuous time // Finance Stoch. — 2018. — Vol. 22. — P. 511–567. — (Cit. on pp. 59, 127).
114. Hu S., Papageorgiou N. Handbook of Multivalued Analysis: Theory, vol. I. Mathematics and Its Applications. Vol. 419. — Berlin : Springer, 1997. — P. 968. — (Cit. on pp. 68–73, 75, 78–82, 85, 91, 92, 124, 125, 128, 130, 171–173, 176–178, 182, 183, 193, 205, 208, 209, 211, 242, 249, 250, 260–263).
115. Hucki Z., Kolokoltsov V. N. Pricing of rainbow options: game theoretic approach // International Game Theory Review. — 2007. — Vol. 9, no. 2. — P. 215–242. — (Cit. on p. 200).
116. International Swaps and Derivatives Association (ISDA). CCP best practices : tech. rep. / ISDA. — 2019. — (Cit. on p. 315).
117. Ioffe A. D., Tikhomirov V. M. Theory of Extremal Problems. — North-Holland, 1979. — (Cit. on p. 44).
118. Ionescu Tulcea C. T. Mesures dans les espaces produits // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Rendiconti Lincei Matematica E Applicazioni. — 1949. — Vol. 7. — P. 208–211. — (Cit. on p. 206).
119. Isii K. The extrema of probability determined by generalized moments (I) Bounded random variables // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. — 1960. — Vol. 12, no. 2. — P. 119–134. — (Cit. on p. 158).
120. Iusem A. N., Martínez-Legaz J. E., Todorov M. I. Motzkin predecomposable sets // Journal of Global Optimization. — 2014. — Vol. 60, no. 4. — P. 635–647. — (Cit. on p. 250).
121. Jacod J., Shiryaev A. N. Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case // Finance and Stochastics. — 1998. — Vol. 2, no. 3. — P. 259–273. — (Cit. on pp. 6, 45, 52, 53, 146, 169, 206, 218, 219).
122. Jain P. K., Ahmad K., Ahuja O. P. Functional Analysis. — New Delhi : Academic Press, 1995. — P. 326. — (Cit. on p. 130).

123. Jones F. B. Connected and disconnected plane sets and the functional equation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ // *Bulletin of the American Mathematical Society*. — 1942. — Vol. 48, no. 2. — P. 115–120. — (Cit. on p. 87).
124. Kantorovich L. V. Mathematical methods of organizing and planning production // *Management Science*. — 1960. — Vol. 6, no. 4. — P. 366–422. — (Cit. on p. 152).
125. Karlin S. Extreme points of vector functions // *Proceedings of the American Mathematical Society*. — 1953. — Vol. 4, no. 4. — P. 603–610. — (Cit. on p. 153).
126. Karlin S., Studden V. *Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics*. — Wiley, 1966. — (Cit. on p. 158).
127. Karoui N. E., Quenez M. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market // *SIAM Journal on Control and Optimization*. — 1995. — Vol. 33, no. 1. — P. 29–66. — (Cit. on p. 6).
128. Karr A. Extreme points of certain sets of probability measures, with applications // *Mathematics of Operations Research*. — 1983. — Vol. 8, no. 1. — P. 581–587. — (Cit. on p. 153).
129. Khametov V. M., Chalov D. M. A European option is an infinite zero-sum two-player game // *Surveys on Applied and Industrial Mathematics*. — 2004. — Vol. 11, no. 2. — P. 264–265. — (Cit. on p. 7).
130. Kneser H. Sur un théoreme fondamental de la théorie des jeux // *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Paris*. — 1952. — Vol. 234. — P. 2418–2420. — (Cit. on pp. 13, 51, 77, 104, 106, 138).
131. Knight F. H. *Risk, Uncertainty and Profit*. — New York : Houghton Mifflin Co., 1921. — (Cit. on p. 6).
132. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. — Dover Publications, 1999. — (Cit. on pp. 128, 131).
133. Kolokoltsov V. N. Nonexpansive maps and option pricing theory // *Kybernetika*. — 1998. — Vol. 34, no. 6. — P. 713–724. — (Cit. on pp. 7, 11, 200, 286).
134. Kramkov D. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets // *Probability Theory and Related Fields*. — 1996. — Vol. 105, no. 4. — P. 459–479. — (Cit. on p. 6).
135. Krein M., Milman D. On extreme points of regular convex sets // *Studia Mathematica*. — 1940. — Vol. 9, no. 9. — P. 133–138. — (Cit. on p. 152).
136. Kreps D. M. Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities // *Journal of Mathematical Economics*. — 1981. — Vol. 8, no. 1. — P. 15–35. — (Cit. on p. 43).

137. Kupka I. Continuous selections from topological to metric spaces // *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. — 1990. — Vol. 39, no. 3. — P. 427–435. — (Cit. on pp. 183, 193).
138. Kurzhanski A. B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti (Control and Observation under Uncertainty Conditions)*. — Moscow : Nauka, 1977. — (Cit. on p. 13).
139. Lange K. L. Borel sets of probability measures // *Pacific Journal of Mathematics*. — 1973. — Vol. 48, no. 1. — P. 141–162. — (Cit. on p. 125).
140. Leichtweiß K. *Konvexe Mengen*. — Berlin–Heidelberg : Springer, 1980. — (Cit. on pp. 61, 82, 89, 133, 161, 192, 231, 239, 241, 252, 260, 261, 276).
141. Lévy P. *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires*. Vol. 1 / ed. by Gauthier–Villars. — Paris : Gauthier–Villars, 1937. — (Monographies des probabilités). — (Cit. on p. 130).
142. Lucet Y. What shape is your conjugate? A survey of computational convex analysis and its applications // *SIAM Review*. — 2010. — Vol. 52, no. 3. — P. 505–542. — (Cit. on p. 269).
143. Maiorov S. I. *Kliring na finansovykh ryinkakh (Clearing on Financial Markets)*. — Moscow : Statistika Rossii, 2015. — (Cit. on p. 312).
144. Markov A. A. *On Some Approximations of Algebraic Continuous Fractions : Doctoral Dissertation (Phys.-Math.) / Markov A. A.* — St. Petersburg, 1884. — (Cit. on p. 146).
145. *Matematicheskaya entsiklopediya (Mathematical Encyclopedia)* : in 5 vols. Vol. 5 / ed. by I. M. Vinogradova. — Moscow : Sovetskaya Entsiklopediya, 1985. — (Cit. on p. 160).
146. Matsuda T., Takemura A. Game-theoretic derivation of upper hedging prices of multivariate contingent claims and submodularity // *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*. — 2020. — Vol. 37, no. 1. — P. 213–248. — (Cit. on p. 200).
147. Melnikov A. V., Feoktistov K. M. The issues of “no arbitrage” and completeness of discrete markets and calculations of payment obligations // *Surveys on Applied and Industrial Mathematics*. — 2001. — Vol. 8, no. 1. — P. 28–40. — (Cit. on p. 8).
148. Merton R. C. Theory of rational option pricing // *The Bell Journal of Economics*. — 1973. — Vol. 4, no. 1. — P. 141–183. — (Cit. on pp. 6, 43, 47).
149. Michael E. A. Continuous selections. I // *Annals of Mathematics*. — 1956. — Vol. 63, no. 2. — P. 361–382. — (Cit. on p. 131).
150. Mikhailova P. A., Smirnov S. N. Monotonic difference schemes for solving the problems of option pricing and hedging // *Surveys on Applied and Industrial Mathematics*. — 2002. — Vol. 9, no. 3. — P. 642–643. — (Cit. on p. 268).

151. Molchanov S. A. Strong Feller property of diffusion processes on smooth manifolds // *Theory of Probability & Its Applications*. — 1968. — Vol. 13, no. 3. — P. 471–475. — (Cit. on p. 124).
152. Moore G. H. Zermelo's Axiom of Choice. — New York : Springer-Verlag, 1982. — (Cit. on p. 229).
153. Mordukhovich B. S., Nam N. M. Extremality of convex sets with some applications // *Optimization Letters*. — 2017. — Vol. 11, no. 7. — P. 1201–1215. — (Cit. on p. 236).
154. Moreau J.-J. Proximité et dualité dans un espace hilbertien // *Bulletin de la société mathématique de France*. — 1965. — Vol. 93. — P. 273–299. — (Cit. on p. 268).
155. Moschovakis Y. *Descriptive Set Theory*. — Second edition. — New York : American Mathematical Society, 2009. — (Cit. on p. 163).
156. Mulholland H. P., Rogers C. A. Representation theorems for distribution functions // *Proceedings of the London Mathematical Society*. — 1958. — Vol. 3, no. 2. — P. 177–223. — (Cit. on p. 150).
157. Mussa D. A. *Modeling of Financial Markets by Stochastic Differential Equation Methods : Candidate's Dissertation (Phys.-Math.)* / Mussa D. A. — Moscow, 2001. — (Cit. on pp. 11, 341).
158. Mycielski J., Świerczkowski S. On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness // *Fundamenta Mathematicae*. — 1964. — Vol. 54, no. 1. — P. 67–71. — (Cit. on pp. 38, 99).
159. Natanson I. P. *Theory of Functions of a Real Variable*. — Dover Publications, 2016. — (Cit. on p. 298).
160. National Clearing Centre (NCC). *A NCC methodology for determining the allocated capital of CCP : tech. rep. / NCC*. — 2017. — (Cit. on p. 313).
161. Neufeld A., Nutz M. Superreplication under volatility uncertainty for measurable claims // *Electronic Journal of Probability*. — 2013. — Vol. 18, no. 48. — P. 1–14. — (Cit. on p. 12).
162. O'Neill B. Induced homology homomorphisms for set-valued maps // *Pacific Journal of Mathematics*. — 1957. — Vol. 7, no. 2. — P. 1179–1184. — (Cit. on p. 183).
163. Obłój J., Wiesel J. A unified framework for robust modelling of financial markets in discrete time. — 2019. — arXiv:1808.06430. — (Cit. on pp. 8, 44, 47).
164. Ostrovski V. Stability of no-arbitrage property under model uncertainty // *Statistics and Probability Letters*. — 2013. — Vol. 83. — P. 89–92. — (Cit. on pp. 58, 233).

165. Peters H. J. M., Wakker P. P. Convex functions on non-convex domains // *Economics Letters*. — 1986. — Vol. 22, no. 2. — P. 251–255. — ISSN 0165–1765. — (Cit. on p. 166).
166. Phelps R. R. Lectures on Choquet's Theorem. — Van Nostrand, 1966. — (Cit. on p. 153).
167. Pliska S. R. Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models. — New York : Wiley, 1997. — (Cit. on pp. 47, 52).
168. Polovinkin E. S. Mnogoznachnyi analiz i differentsial'nye vklucheniya (Multivalued Analysis and Differential Inclusions). — Moscow : Nauka, 2015. — (Cit. on pp. 44, 59–62, 78, 79, 81, 89, 92, 93, 98, 175, 184, 193, 205, 235, 237, 241).
169. Polyakova L. N. Developing a Mathematical Theory and Numerical Methods for Solving Some Classes of Nonsmooth Optimization Problems : Doctoral Dissertation (Phys.-Math.) / Polyakova L. N. — St. Petersburg, 1998. — (Cit. on p. 247).
170. Prokhorov Y. V. Convergence of random processes and limit theorems in probability theory // *Theory of Probability and Its Applications*. — 1956. — Vol. 1, no. 2. — P. 157–214. — (Cit. on pp. 116, 130, 172).
171. Rachev S. T., Klebanov L. B., Stoyanov S. V., Fabozzi F. J. The Methods of Distances in the Theory of Probability and Statistics. — New York : Springer, 2013. — (Cit. on p. 229).
172. Repovš D., Semenov P. V. Michael's theory of continuous selections. Development and applications // *Russian Mathematical Surveys*. — 1994. — Vol. 49, no. 6. — P. 157–196. — (Cit. on p. 44).
173. Revuz D. Markov Chains. — North Holland, 1975. — (Cit. on pp. 133, 134).
174. Richter H. Parameterfreie abschätzung und realisierung von erwartungswerten // *Blätter der DGVMF*. — 1957. — Vol. 3, no. 2. — P. 147–162. — (Cit. on pp. 150, 158).
175. Rockafellar R. T. Convex Analysis. — Princeton : Princeton University Press, 1970. — (Cit. on pp. 39, 53, 56, 57, 62, 65, 66, 72, 74, 77, 89, 102, 106, 117, 147, 148, 157, 162, 164, 165, 168, 186, 188, 192, 215, 216, 237, 238, 240, 241, 250, 251, 253, 260, 268, 298).
176. Rogers L. C. G. Equivalent martingale measures and no-arbitrage // *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*. — 1994. — Vol. 51, no. 1–2. — P. 41–49. — (Cit. on p. 213).
177. Rogosinski W. W. Moments of non-negative mass // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1958. — Vol. 245, no. 1240. — P. 1–27. — (Cit. on p. 150).

178. Rokhlin D. B. A criterion of no asymptotic free lunch in a finite-dimensional market with convex portfolio constraints and convex transaction costs // *Sib. Zh. Industr. Mat.* — 2002. — Vol. 1, no. 9. — P. 133–144. — (Cit. on p. 52).
179. Rokhlin D. B. An Extended version of the Dalang–Morton–Willinger theorem under portfolio constraints // *Theory of Probability and Its Applications.* — 2005. — Vol. 49, no. 3. — P. 429–443. — (Cit. on pp. 45, 47, 52, 107).
180. Rokhlin D. B. Martingale selection problem and asset pricing in finite discrete time // *Elect. Comm. in Probab.* — 2007. — Vol. 12. — P. 1–8. — (Cit. on p. 101).
181. Rokhlin D. B. Research on Arbitrage Theory for Stochastic Models of Financial Markets : Doctoral Dissertation (Phys.-Math.) / Rokhlin D. B. — Rostov-on-Don, 2010. — (Cit. on p. 107).
182. Ross S. A. A simple approach to the valuation of risky streams // *Journal of Business.* — 1978. — Vol. 51, no. 3. — P. 453–475. — (Cit. on p. 43).
183. Ryll–Nardzewski C. On quasi-compact measures // *Fundamenta Mathematicae.* — 1953. — Vol. 40, no. 1. — P. 125–130. — (Cit. on p. 160).
184. Samuelson P. A. Rational theory of warrant pricing // *Industrial Management Review.* — 1965. — Vol. 6. — P. 13–31. — (Cit. on pp. 6, 22).
185. Schachermayer W. The fundamental theorem of asset pricing // *Mathematical Finance.* — 2004. — Vol. 14, no. 1. — P. 19–48. — (Cit. on p. 58).
186. Schirmer H. Fix-finite approximation of n -valued multifunctions // *Fundamenta Mathematicae.* — 1984. — Vol. 1, no. 121. — P. 73–80. — (Cit. on p. 183).
187. Seidel W. Supports of Borel measures // *Fundamenta Mathematicae.* — 1989. — Vol. 133, no. 1. — P. 67–80. — (Cit. on p. 116).
188. Shikin E. V. Lineinye prostranstva i otobrazheniya (Linear Spaces and Mappings). — Moscow : Moscow State University, 1987. — (Cit. on p. 65).
189. Shiryaev A. N. Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory. — World Scientific, 1999. — (Cit. on pp. 7, 52, 169, 213, 217–219, 223).
190. Shiryaev A. N. Probability-1. — New York : Springer, 2016. — (Cit. on pp. 23, 126, 169, 216).
191. Shiryaev A. N. Stokhasticheskie zadachi o razladke (Stochastic Discord Problems). — Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2016. — (Cit. on p. 169).
192. Shnirelman L. G. On uniform approximations // *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* — 1938. — Vol. 2, no. 1. — P. 53–60. — (Cit. on p. 138).

193. Simchi-Levi D., Chen X., Bramel J. The Logic of Logistics: Theory, Algorithms, and Applications for Logistics Management. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. — New York : Springer, 2013. — (Cit. on p. 199).
194. Sion M. On general minimax theorems // Pacific Journal of Mathematics. — 1958. — Vol. 8, no. 1. — P. 171–176. — (Cit. on pp. 138, 141).
195. Smirnov S. N. A Feller Transition Kernel with Measure Supports Given by a Set-Valued Mapping // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (in Russian). — 2019. — Vol. 25, no. 1. — P. 219–217. — (Cit. on p. 123).
196. Smirnov S. N. A Feller transition kernel with measure supports given by a set-valued mapping // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2020. — Vol. 308, no. Suppl. 1. — S188–S195. — (Cit. on pp. 12, 13, 123).
197. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: A game equilibrium in the case of no trading constraints // Journal of Mathematical Science. — 2020. — Vol. 248, no. 1. — P. 105–115. — (Cit. on pp. 17, 99).
198. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: case of the convex payoff functions on option // Mathematics. — 2019. — Vol. 7, no. 1246. — P. 1–19. — (Cit. on p. 171).
199. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: Financial market model, trading constraints and the Bellman–Isaacs equations // Automation and Remote Control. — 2021. — Vol. 82, no. 4. — P. 722–743. — (Cit. on p. 20).
200. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: No arbitrage properties of the market // Automation and Remote Control. — 2021. — Vol. 82, no. 1. — P. 172–187. — (Cit. on p. 41).
201. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: optimal mixed strategies of the market and their supports // Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis: OTHA 2020, Part II – Probability-Analytical Models, Methods and Applications. — Rostov-on-Don : Springer, 2021. — P. 355–372. — (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics). — (Cit. on p. 171).
202. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: Sensitivity of solutions of Bellman–Isaacs equations and numerical methods // Computational Mathematics and Modeling. — 2020. — Vol. 31, no. 3. — P. 384–401. — (Cit. on pp. 83, 235).
203. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: structural stability and approximation // Computational Mathematics and Modeling. — 2021. — Vol. 32, no. 2. — P. 129–146. — (Cit. on p. 235).

204. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: the most unfavorable scenarios of market behavior and the moment problem // *Mathematical Game Theory and Its Applications* (in Russian). — 2020. — Vol. 12, no. 3. — P. 50–88. — (Cit. on p. 135).
205. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: the properties of semicontinuity and continuity of the Bellman–Isaacs equations // *Mathematical Game Theory and Its Applications* (in Russian). — 2019. — Vol. 11, no. 4. — P. 87–115. — (Cit. on p. 67).
206. Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: The relationship between “deterministic” and “probabilistic” statements without trading constraints // *Theory of Probability and Its Applications*. — 2022. — Vol. 67, no. 4. — P. 688–716. — (Cit. on p. 213).
207. Smirnov S. N. General theorem on a finite support of mixed strategy in the theory of zero-sum games // *Doklady Mathematics*. — 2018. — Vol. 97, no. 3. — P. 215–218. — (Cit. on pp. 11, 13, 135, 138).
208. Smirnov S. N. General theorem on a finite support of mixed strategy in the theory of zero-sum games // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences*. — 2018. — Vol. 480, no. 1. — P. 25–28. — (Cit. on p. 135).
209. Smirnov S. N. Geometric criterion for a robust condition of no sure arbitrage with unlimited profit // *Moscow University Bulletin. Series 15. Computational Mathematics and Cybernetics* (in Russian). — 2020. — No. 3. — P. 43–48. — (Cit. on p. 41).
210. Smirnov S. N. Geometric criterion for a robust condition of no sure arbitrage with unlimited profit // *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*. — 2020. — Vol. 44, no. 3. — P. 146–150. — (Cit. on p. 41).
211. Smirnov S. N. Guaranteed deterministic approach to superhedging: “no arbitrage” properties of the market // *Mathematical Game Theory and Its Applications* (in Russian). — 2019. — Vol. 11, no. 2. — P. 68–95. — (Cit. on p. 41).
212. Smirnov S. N. Guaranteed deterministic approach to superhedging: market model, trading constraints and Bellman–Isaacs equations // *Mathematical Game Theory and Its Applications* (in Russian). — 2018. — Vol. 10, no. 4. — P. 59–99. — (Cit. on pp. 20, 36, 316).
213. Smirnov S. N. Guaranteed deterministic approach to superhedging: mixed strategies and game equilibrium // *Mathematical Game Theory and Its Applications* (in Russian). — 2020. — Vol. 12, no. 1. — P. 60–90. — (Cit. on p. 99).
214. Smirnov S. N. Guaranteed deterministic approach to superhedging: The semicontinuity and continuity properties of solutions of the Bellman–Isaacs equations // *Automation and Remote Control*. — 2021. — Vol. 82, no. 11. — P. 2024–2040. — (Cit. on p. 67).

215. Smirnov S. N. Realistic models of financial market and structural stability // *Journal of Mathematics*. — 2021. — Vol. 2021. — P. 6651324. — (Cit. on pp. 123, 213).
216. Smirnov S. N. Structural Stability Threshold for the Condition of Robust No Deterministic Sure Arbitrage with Unbounded Profit // *Moscow University Bulletin. Series 15. Computational Mathematics and Cybernetics (in Russian)*. — 2021. — No. 1. — P. 38–49. — (Cit. on p. 235).
217. Smirnov S. N. Structural Stability Threshold for the Condition of Robust No Deterministic Sure Arbitrage with Unbounded Profit // *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*. — 2021. — Vol. 45, no. 1. — P. 34–44. — (Cit. on p. 235).
218. Smirnov S. N. The guaranteed deterministic approach to superhedging: Lipschitz properties of solutions of the Bellman–Isaacs equations // *Frontiers of Dynamics Games: Game Theory and Management*. — St. Petersburg : Birkhäuser, 2019. — P. 267–288. — (Cit. on p. 83).
219. Smirnov S. N. Thoughts on financial risk modeling: The role of interpretation // *Intelligent Risk*. — 2012. — Vol. 2, no. 2. — P. 12–15. — (Cit. on pp. 16, 124, 155).
220. Smirnov S. N., Andreev N. A. Software tools for numerically solving the problem of robust portfolio management within the mathematical financial market model with deterministic price dynamics // *Lomonosov Readings: Scientific Conference, Moscow, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University, 2020: abstracts of papers*. — Faculty of Computational Mathematics, Cybernetics, Moscow State University, 2021. — (Cit. on pp. 18, 235).
221. Smirnov S. N., Kuznetsov V. A., Slivinski V. A. A guaranteed deterministic approach to margining on exchange-traded derivatives market: Numerical experiment // *Economics and Mathematical Methods*. — 2021. — Vol. 57, no. 4. — P. 76–87. — (Cit. on pp. 19, 311).
222. Smirnov S. N., Lapshin V. A., Kurbangaleev M. Z. Deriving implied risk-free interest rates from bond and CDS quotes: A model-independent approach // *Optimization and Engineering*. — 2017. — Vol. 18, no. 2. — P. 499–536. — (Cit. on pp. 248, 340).
223. Smirnov S. N., Polimatidi I. V. A guaranteed deterministic approach to margining on exchange-traded derivatives market // *Economics and Mathematical Methods*. — 2020. — (Cit. on pp. 19, 311, 332).
224. Smirnov S. N., Zakharov A. V., Polimatidi I. V., Balabushkin A. N. An electronic trading method for financial instrument derivatives, methods for determining the deposit margin, methods for settling the deficit of margin. — 2004. — Patent of Russian Federation 2226714. — (Cit. on pp. 11, 19, 36, 311, 316, 317, 319, 320, 323, 339).

225. Smirnov S. N., Zanochkina A. Y. Guaranteed deterministic approach to superhedging: Case of binary European option // *Abstract and Applied Analysis*. — 2021. — Vol. 2021. — P. 5568636. — (Cit. on pp. 19, 285).
226. Solovay R. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // *Annals of Mathematics*. — 1970. — Vol. 92, no. 1. — P. 1–56. — (Cit. on p. 38).
227. Soner H. M., Touzi N., Zhang J. Dual formulation of second order target problems // *Annals of Applied Probability*. — 2013. — Vol. 23, no. 1. — P. 308–347. — (Cit. on p. 12).
228. Starr R. M. Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences // *Econometrica*. — 1969. — Vol. 37, no. 1. — P. 25–38. — (Cit. on p. 276).
229. Steinitz E. Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. — 1914. — Vol. 144. — P. 1–40. — (Cit. on p. 200).
230. Steinitz E. Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. VI, VII // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. — 1916. — Vol. 146. — P. 1–52. — (Cit. on p. 152).
231. Strassen V. The existence of probability measures with given marginals // *The Annals of Mathematical Statistics*. — 1965. — Vol. 36. — P. 423–439. — (Cit. on p. 130).
232. Stroock D. W. *Probability Theory an Analytic View*. — New York : Cambridge University Press, 2011. — (Cit. on p. 142).
233. Sukharev A. G. *Minimax Models in the Theory of Numerical Methods*. — Dordrecht : Springer Science+Business Media, 1992. — (Cit. on pp. 264, 265).
234. Sung C. H., Tam B. S. On the cone of a finite dimensional compact convex set at a point // *Linear Algebra and Its Applications*. — 1987. — Vol. 90. — P. 47–55. — (Cit. on p. 136).
235. Technical Committee of IOSCO. Report on margin : tech. rep. / International Organization of Securities Commissions. — 1996. — (Cit. on pp. 314, 318).
236. Thaler R. H. *Misbehaving: The Making of Behavioral Economics*. — W. W. Norton & Company, 2015. — (Cit. on p. 42).
237. Tijs S. H., Borwein J. M. Some generalizations of Carathéodory's theorem via barycentres, with application to mathematical programming // *Canadian Mathematical Bulletin*. — 1980. — Vol. 23, no. 3. — P. 339–346. — (Cit. on p. 116).
238. Tikhomirov V. M. *Nekotorye voprosy teorii priblizhenii (Some Issues in Approximation Theory)*. — Moscow : Moscow State University, 1976. — (Cit. on p. 264).

239. Timan A. F. *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*. — Dover Publications, 1994. — (Cit. on p. 86).
240. Topsoe F. *Topology and Measure. Lecture Notes in Mathematics*. — New York : Springer-Verlag, 1970. — P. 84. — (Cit. on p. 108).
241. Uhlmann A. Entropy and optimal decompositions of states relative to a maximal commutative subalgebra // *Open Systems and Information Dynamics*. — 1998. — Vol. 5. — P. 209–228. — (Cit. on p. 166).
242. Ushakov V. N., Ershov A. A. An estimate for the Hausdorff distance between a set and its convex hull in Euclidean spaces of small dimension // *Proc. Steklov Inst. Math.* — 2019. — Vol. 305. — S178–S190. — (Cit. on p. 276).
243. Ushakov V. N., Lebedev P. D. Algorithms of optimal set covering on the planar \mathbb{R}^2 // *Vest. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*. — 2016. — Vol. 26, no. 2. — P. 258–270. — (Cit. on p. 264).
244. Vakhania N. N. The topological support of Gaussian measure in Banach space // *Nagoya Mathematical Journal*. — 1975. — Vol. 57. — P. 59–63. — (Cit. on p. 116).
245. Vakhania N. N., Tarieladze V. I., Chobanyan S. A. *Probability Distributions on Banach Spaces*. — Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1987. — P. 482. — (Cit. on p. 125).
246. Vicente L. A. B. G., Cerezetti F. V., De Faria S. R., Iwashita T., Pereira O. R. Managing risk in multi-asset class, multimarket central counterparties: The CORE approach // *Journal of Banking & Finance*. — 2015. — Vol. 51. — P. 119–130. — (Cit. on pp. 316, 317).
247. Vicente L. A. B. G. Risk assessment processes for closeout of a portfolio. — Google Patents, 2012. — US Patent App. 13/462,091. — (Cit. on pp. 316, 319).
248. Vinogradov I. M. *Elements of Number Theory*. — Courier Dover Publications, 2016. — (Cit. on p. 203).
249. Vorob'ev N. N. *Foundations of Game Theory: Noncooperative Games*. — Birkhäuser, 1994. — (Cit. on p. 138).
250. Weaver N. *Lipschitz Algebras*. — New York : World Scientific Publishing Co., 1999. — P. 223. — (Cit. on p. 127).
251. Winkler G. Extreme points of moment sets // *Mathematics of Operations Research*. — 1988. — Vol. 13, no. 4. — P. 581–587. — (Cit. on p. 154).
252. Yang Y. A facet enumeration algorithm for convex polytopes. — 2019. — <http://arxiv.org/abs/1909.11843v1>. — (Cit. on p. 270).
253. Zakharov A. V., Mussa D. A. Guaranteed approach to the pricing and hedging problem in the case of a contingent liability with several risky assets // *VINITI deposition №1092–B01*. — 2001. — P. 19. — (Cit. on pp. 11, 341).

254. Zanochkina A. Y., Smirnov S. N. A guaranteed deterministic approach to superhedging: The properties of a binary European option // Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics. — 2020. — No. 1. — P. 29–59. — (Cit. on p. 285).
255. Zhukovskiy S. E. On continuous selections of finite-valued set-valued mappings // Eurasian Mathematical Journal. — 2018. — Vol. 9, no. 1. — P. 83–87. — (Cit. on pp. 13, 183).
256. Zverev O. V., Khametov V. M. Minimax hedging of European options in a compact $(1, S)$ -market // Surveys on Applied and Industrial Mathematics. — 2011. — Vol. 18, no. 11. — P. 121–122. — (Cit. on p. 7).
257. Zverev O. V., Khametov V. M. Minimax hedging of European options in incomplete markets (discrete time) // Surveys on Applied and Industrial Mathematics. — 2011. — Vol. 18, no. 1. — P. 26–54. — (Cit. on p. 7).
258. Zverev O. V., Khametov V. M. Minimax hedging of European options in incomplete markets (discrete time). II // Surveys on Applied and Industrial Mathematics. — 2011. — Vol. 18, no. 2. — P. 193–204. — (Cit. on p. 7).