МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Комаров Юрий Андреевич

Применение гамильтонова формализма к задаче оптимизации управления при векторном критерии

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре системного анализа факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель **Куржанский Александр Борисович**
академик РАН, д.ф.-м.н., профессор

Официальные оппоненты **Овсянников Дмитрий Александрович**,
д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой теории систем управления электрофизической аппаратурой факультета прикладной математики – процессов управления СПбГУ

Фурсов Андрей Серафимович,
д.ф.-м.н., профессор кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова

Усова Анастасия Александровна,
к.ф.-м.н., старший научный сотрудник отдела динамических систем Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН

Защита состоится «9» декабря 2020 г. в 15:30 на заседании диссертационного совета МГУ.01.09 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, ауд. 685.

Email: ilgova@cs.msu.ru

С диссертацией, а также со сведениями о регистрации участия в удаленном интерактивном режиме в защите можно ознакомиться на сайте ИАС «Истина»: https://istina.msu.ru/dissertations/316956530/

Автореферат разослан « » 20 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета, д.ф.-м.н., профессор Захар Захаров Е.В.

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы. Данная работа посвящена исследованию задач динамической оптимизации векторного критерия в упорядоченных пространствах. Подобные постановки возникают во многих актуальных задачах современной теории управления.

Одной из наиболее распространённых проблем теории управления является задача оптимизации управления заданной динамической системой в силу заданного функционала качества. Её свойства и методы решения хорошо изучены и широко применяются на практике. К последним относится метод динамического программирования Р. Беллмана, позволяющий находить решения в форме обратной связи, исследовать задачи с помехой в уравнении динамики, а также строить синтез управлений по наблюдениям состояний системы, в том числе не полным.

Теория многокритериальной оптимизации занимается исследованием задач минимизации и максимизации значений векторного критерия в частично упорядоченных пространствах. Такие постановки предполагают наличие нескольких независимых равнозначных функционалов качества и требуют отыскания или, по крайней мере, аппроксимации всего множества минимизаторов или максимизаторов рассматриваемого векторного критерия. Для сравнения двух векторов чаще всего используется паретовский порядок, определяемый выпуклым конусом $D = \mathbb{R}^p_+$:

$$\forall x \neq y \in \mathbb{R}^p \colon x \leqslant y \Leftrightarrow y \in x + D.$$

Множество неулучшаемых значений векторного функционала принято называть его границей Парето.

Основные результаты, полученные в этой области, формулировались в терминах статической оптимизации. В то же время, задачи динамической оптимизации управления при многомерном критерии были недостаточно хорошо изучены.

Одним из подходов к решению подобного рода задач является скаляризация векторного функционала за счёт рассмотрения свёртки компонент многомерного критерия. Однако этот подход в большинстве случаев не позволяет отыскать всю рассматриваемую границу Парето. Кроме того, с точки зрения интерпретации решения, могут нарушаться предположения о равнозначности компонент векторного критерия для лица, принимающего решение.

Альтернативным способом получения решения могла бы стать дискретизация рассматриваемой системы по времени и сведение задачи динамической оптимизации к серии статических задач. При подобном подходе существенным становится вопрос точности производимых вычислений. При исследовании движения системы на достаточно длинном временном промежутке полученное решение может оказаться весьма далёким от оптимума.

Предполагается, что предложенный в настоящей работе подход позволит уменьшить указанную погрешность при расчётах на практике и при этом сохранить предположение о независимости и равнозначности рассматриваемых критериев. В его основе лежит классический гамильтонов формализм, обобщённый с использованием результатов теории многокритериальной оптимизации для случая векторного функционала, принимающего значения в частично упорядоченном пространстве.

Целью данной работы является проведение исследования задач динамической векторной оптимизации и последующее описание методов их решения. Указанные методы должны позволять описать всю границу Парето значений функционала качества и её эволюцию во времени.

Методология и методы исследования. Основные результаты получены с использованием методов теорий дифференциальных уравнений, управления, а также многокритериальной оптимизации.

Научная новизна работы заключается в том, что впервые получен аналог классического уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для векторного функционала качества. Для его обоснования использован аппарат, разработанный автором. Все доказанные в работе утверждения получены впервые.

Основные положения, предлагаемые на защиту:

1. Векторный гамильтонов формализм, позволяющий разрешить задачу оптимизации управления динамической системой для векторного критерия качества.
2. Метод построения гарантированных точечных оценок для задачи векторной динамической оптимизации в дискретном времени, позволяющий отыскать конечное число точек истинной границы Парето.
3. Возможность нарушения классического неравенства между минимаксом и максимином в случае векторного критерия. Необходимое условие нарушения основного минимаксного неравенства.
4. Выполнение обратного минимаксного неравенства для класса отображений с разделяемыми переменными.

Личный вклад. Постановка задачи, а также построение векторного аналога классического гамильтонова формализма для её решения были предложены научным руководителем. Формулировки основных утверждений, а также их доказательства, были получены автором.

Апробация работы. Результаты работы были представлены в виде докладов на следующих конференциях:

– конгресс IFAC-2020, Берлин, Германия, 2020 (дистанционный формат);
– научная конференция «Тихоновские чтения 2019», Москва, Россия, 2019 [8];
– международная конференция «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019), Екатеринбург, Россия, 2019 [9; 11];
– международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовничего, Москва, Россия, 2019 [7];
– Ломоносовские чтения-2018, секция «Вычислительная математика и кибернетика», Москва, Россия, 2018 [10].

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных

ВАК, 3 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и одного приложения.

Полный объём диссертации составляет 93 страницы, включая 14 рисунков. Список литературы содержит 46 наименований.

В первом разделе **первой главы** вводятся основные определения, используемые в данной работе.

Второй раздел первой главы посвящён суперпозиции векторных минимумов. Обсуждаются условия, при которых внесение одного оператора взятия векторного минимума $\mathbf{Min}B$ внутрь другого $\mathbf{Min}(A+B)$ сохраняет образ, а именно:

$$\mathbf{Min}(A+\mathbf{Min}B)=\mathbf{Min}(A+B),$$

а также условия, при которых указанная операция возможна. Условия, при которых полученные результаты будут справедливы в пространствах с порядком, отличным от паретовского, рассматриваются *в третьем разделе.*

Вторая глава посвящена исследованию задач динамической векторной минимизации для систем с дискретным временем и жёсткими (мгновенными) ограничениями на управление. *В первой части* формулируется постановка задачи оптимизации *векторного критерия* в форме Майера-Больца для указанных систем, вводятся определения множества достижимых значений критерия и векторной функции цены $\boldsymbol{\mathcal{V}}(0,x^0)$, ставящей в соответствие начальной позиции системы границу Парето значений функционала качества в конечный момент времени T.

Во второй и третьей частях второй главы проводится исследование свойств указанной векторной функции цены, демонстрируется, что для неё выполняется векторный аналог классического принципа оптимальности (полугрупповое свойство) в следующем виде:

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(0,x^0) = \mathbf{Min}\left\{ \sum_{s=0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{L}}(s,\bar{x}_s,\bar{u}_s) + \boldsymbol{\mathcal{V}}(t+1,x_{t+1}[\bar{\boldsymbol{u}}]) \middle| \bar{\boldsymbol{u}} = \{\bar{u}_s\}_{s=0}^{t}, \bar{u}_s \in \mathcal{P}_s \right\}.$$

На основании этого свойства для введённой векторной функции цены получен *векторный аналог* уравнения Беллмана в форме

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{V}}(t,x) = \mathbf{Min}\left\{ \boldsymbol{\mathcal{L}}(t,x,u) + \boldsymbol{\mathcal{V}}(t+1,f(t,x,u)) | u \in \mathcal{P}_t \right\}, t = T-1,\ldots,0, \\ \boldsymbol{\mathcal{V}}(T,\cdot) = \boldsymbol{\varphi}(\cdot). \end{cases}$$

Четвёртая часть второй главы посвящена условиям применимости метода. Удалось показать, что для справедливости полученных результатов достаточно существования решения исходной задачи. Доказано, что метод применим в том числе и для векторных функционалов качества в форме Майера-Больца, у которых терминальная часть представлена векторной индикаторной функцией:

$$\mathcal{I}_T(x) = \begin{cases} \{0\}^p, & x \in T, \\ \{+\infty\}^p, & x \notin T, \end{cases}$$

где T — заданное конечное множество.

В пятой части на примере одномерной линейной системы с двумерным критерием демонстрируется, что полученное векторное уравнение Беллмана носит необходимый, но не достаточный характер. В связи с этим предлагается метод гарантированного оценивания, позволяющий отыскать точные точечные оценки исходной границы Парето при одновременном понижении вычислительной сложности совокупной задачи.

В заключительной части второй главы обсуждается вопрос применимости полученных результатов в пространствах с произвольным заданным отношением порядка. Демонстрируется, что векторные аналоги принципа оптимальности и уравнения Беллмана справедливы, когда соответствующая структура доминирования $D = \text{const}$ постоянна.

Третья глава посвящена исследованию задач динамической векторной минимизации для систем с непрерывным временем и жёсткими (мгновенными) ограничениями на управление, заданными непрерывной по Хаусдорфу компактозначной функцией $\mathcal{P}(\cdot)$. В качестве критерия качества так же, как и во второй главе, рассматривается векторный функционал в форме Майера-Больца.

В первой и второй её частях по аналогии с дискретными системами приводится постановка задачи оптимизации и вводится векторная функция цены $\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,x)$. Приводятся основные её свойства, а также демонстрируется, что для неё выполняется векторный аналог принципа оптимальности в следующем виде:

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(t_0,x^0) = \mathbf{Min}\left\{ \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{\mathcal{L}}(\tau,\bar{x}[\tau],\bar{u}(\tau))d\tau + \boldsymbol{\mathcal{V}}(t,\bar{x}[t]) \middle| \bar{u}(\tau)\in\mathcal{P}(\tau) \right\}.$$

Третья часть **третьей главы** содержит вывод векторного аналога уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для введённой функции цены в форме эволюционного уравнения:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\sigma\to+0} \dfrac{1}{\sigma}\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{\mathcal{V}}(t,x), \mathbf{Min}\left\{ \int\limits_{t}^{t+\sigma} \boldsymbol{\mathcal{L}}(\tau,\bar{x}[\tau],\bar{u}(\tau))d\tau + \boldsymbol{\mathcal{V}}(t+\sigma,\bar{x}[t+\sigma]) \right\}\right) = 0, \\ \boldsymbol{\mathcal{V}}(\vartheta,\cdot) = \boldsymbol{\varphi}(\cdot). \end{cases}$$

В четвёртой части этой главы исследуются условия применимости метода. Доказано, как и для дискретного случая, что полученные результаты справедливы всегда, если определено решение исходной задачи, то есть искомая граница граница Парето не пуста.

В пятой части этой главы рассматривается вопрос применимости предложенного векторного гамильтонова формализма к задачам достижимости и разрешимости (для систем как с непрерывным временем, так и с дискретным). Демонстрируется, что прямые и попятные множества достижимости могут быть построены с использованием векторной функции цены специального вида. Доказано, что такое решение будет совпадать с классическим решением, получаемым в рамках скалярного гамильтонова формализма.

В заключительной части **третьей главы** рассматривается вопрос обобщения полученных результатов на случай пространств с отношением порядка, отличным от паретовского, приводятся соответствующие формы принципа максимума и уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана.

В четвёртой главе рассматриваются соотношения между минимаксом и максимином для векторзначных отображений, зависящих от двух независимых параметров.

В первой части главы вводятся операторы векторного минимакса и максимина для отображений указанного вида. Формулируются основное и обратное векторные минимаксные неравенства.

Во второй части доказывается необходимое условие нарушения основного минимаксного неравенства. Приводятся две его формулировки: более общая и специфичная для паретовского порядка.

В третьей части **четвёртой главы** векторные минимаксные неравенства исследуются на примере двух классов отображений, возникающих при решении линейно-квадратичной задачи оптимизации векторного критерия.

Для класса отображений с разделяемыми переменными вида

$$\boldsymbol{S}(u,v) = \boldsymbol{\Phi}(u) + \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v})$$

устанавливается выполнение обратного минимаксного неравенства (вне зависимости от области определения и рассматриваемых отображений $\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$ и $\boldsymbol{\Psi}(\cdot)$):

$$\mathbf{Min}_u\mathbf{Max}_v\boldsymbol{S}(u,v) \leqslant \mathbf{Max}_v\mathbf{Min}_u\boldsymbol{S}(u,v).$$

Для класса билинейных отображений вида

$$\boldsymbol{B}(u,v) = [\langle u, B_1 v\rangle, \ldots, \langle u, B_p v\rangle]'$$

в общем виде получено достаточное условие справедливости основного минимаксного неравенства.

Четвёртая и пятая части **четвёртой главы** содержат примеры, иллюстрирующие полученные соотношения.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику Александру Борисовичу Куржанскому за постановку задачи, ценные замечания, огромное терпение и предоставленную возможность участвовать в разработке интересной и актуальной темы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (научные проекты 19-01-00613 а, 16-29-04191 офи_м) и Московского центра фундаментальной и прикладной математики в МГУ имени М.В. Ломоносова (грант № 075-15-2019-1621).

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях из списка ВАК РФ

1. *Комаров Ю. А.* Гамильтонов формализм для задачи оптимизации управляемого движения по векторному критерию // Дифференциальные уравнения. — Москва, 2019. — Т. 55, № 11. — С. 1499—1509. — Импакт-фактор журнала (WoS): 0.659.
2. *Комаров Ю. А.*, *Куржанский А. Б.* Минимаксные соотношения в задачах оптимизации векторного критерия // Доклады Академии наук. — Москва, 2020. — Т. 492, № 1. — С. 104—107. — Импакт-фактор журнала (WoS): 0.625.
3. *Куржанский А. Б.*, *Комаров Ю. А.* Гамильтонов формализм для задачи управления движением с векторным критерием // Доклады Академии наук. — Москва, 2018. — Т. 480, № 4. — С. 408—412. — Импакт-фактор журнала (WoS): 0.625.

В изданиях, входящих в базу цитирования Web of Science

4. *Komarov Y. A.* Hamiltonian Formalism for a Multicriteria Optimal Motion Control Problem // Differential Equations. — Moscow, 2019. — Vol. 55, no. 11. — P. 1454—1465. — Impact-factor (WoS): 0.659.

5. *Komarov Y. A.*, *Kurzhanski A. B.* Minimax-Maximin Relations for the Problem of Vector-Valued Criteria Optimization // Doklady Mathematics. — Moscow, 2020. — Vol. 101, no. 3. — P. 259—261. — Impact-factor (WoS): 0.625.

6. *Kurzhanski A. B.*, *Komarov Y. A.* Hamiltonian Formalism for the Problem of Optimal Motion Control under Multiple Criteria // Doklady Mathematics. — Moscow, 2018. — Vol. 97, no. 3. — P. 291—294. — Impact-factor (WoS): 0.625.

В прочих изданиях

7. *Комаров Ю. А.*, *Куржанский А. Б.* Векторный вариант гамильтонова формализма // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовничего. Т. 1. — Москва, 2019. — С. 317—319.

8. *Комаров Ю. А.*, *Куржанский А. Б.* Минимаксные-максиминные неравенства для задач с векторным критерием // «Тихоновские чтения»: научная конференция: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2019. — С. 16—16.

9. *Комаров Ю. А.*, *Куржанский А. Б.* О задачах минимаксного типа с векторным критерием // Материалы Международной конференции «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019), посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского. — Екатеринбург, 2019. — С. 180—184.

10. *Куржанский А. Б.*, *Комаров Ю. А.* Гамильтонов формализм в задачах оптимизации управления движением с векторным критерием // Ломоносовские чтения 2018 ф-т ВМК МГУ. — Москва : МАКС Пресс, 2018. — С. 70—72.

11. *Komarov Y.*, *Kurzhanski A. B.* On the Problems of Minmax–Maxmin Type Under Vector-Valued Criteria // Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. — Cham, Switzerland : Springer International Publishing AG, 2020. — P. 145—155.