

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВАРИАНТА 2

1. **Решение:** Имеем соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-2x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\sin x} \ln \left(\frac{1-2x}{1+2x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \left(\frac{1-2x}{1+2x} \right)}{\sin x}} = e^{-4}.$$

2. **Решение:** Имеем цепочку элементарных преобразований матрицы A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 11 \\ 3 & \lambda & -1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 11 \\ 1 & 5 & 3 & 9 \\ 3 & \lambda & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & (\lambda - 18) & -13 & -26 \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda - 18 = -13$, или $\lambda = 5$, то легко видеть, что ранг матрицы A равен 2, иначе он равен 3.

3. **Решение:** При каждом фиксированном значении $x > 0$ мы имеем предел:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{-\alpha} x}{1 + n^2 x^2},$$

который существует и равен нулю при $\alpha > -2$. При таких α функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится поточечно к предельной функции $f(x) = 0$. Исследуем равномерную сходимость этой последовательности к такой предельной функции. Для этого, изучим на интервале $(0, +\infty)$ функцию $f_n(x)$ на максимум. Имеем выражения:

$$f'_n(x) = n^{-\alpha} \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} = 0,$$

из которых мы находим точку максимума $x_n = \frac{1}{n} \in (0, +\infty)$. Значит, получаем соотношения:

$$\sup_{x \in (0, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| = f_n(x_n) = \frac{1}{2n^{1+\alpha}} \rightarrow 0,$$

когда $\alpha > -1$. Поэтому, при $\alpha > -1$ функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к предельной функции $f(x) = 0$.

4. **Решение:** Выполним замену переменных $z(x) = y^2(x)$. Тогда, исходная задача Коши переписывается в виде:

$$\begin{cases} 3xz'(x) - 5z(x) = 3x^2, \\ z(1) = 16. \end{cases}$$

В этой задаче Коши соответствующее уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Применим для его решения метод вариации постоянной. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $z(x) = Cx^{\frac{5}{3}}$, где C – произвольная постоянная. Тогда, решение неоднородного уравнения ищем в виде: $z(x) = C(x)x^{\frac{5}{3}}$. Подставляя такое представление в соответствующее неоднородное дифференциальное уравнение, мы находим выражение: $C'(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, из которого получаем формулу: $C(x) = 3x^{\frac{1}{3}} + \tilde{C}$, где \tilde{C} – произвольная постоянная. Значит, общее решение неоднородного дифференциального уравнения записывается в виде: $z(x) = 3x^2 + \tilde{C}x^{\frac{5}{3}}$. Из начального условия мы имеем значение константы $\tilde{C} = 13$. Поэтому, получаем формулу: $z(x) = 3x^2 + 13x^{\frac{5}{3}}$, из которой находим окончательное решение: $y(x) = -\sqrt{3x^2 + 13x^{\frac{5}{3}}}$.

5. **Решение:** Функция $w(z)$ имеет две особые точки $z = \frac{i}{3}$, $z = -3i$, и для нее справедливо представление:

$$w(z) = 3 \left(\frac{1}{3 - iz} + \frac{z}{i - 3z} \right).$$

Поскольку мы ищем разложение по степеням z и требуемое кольцо должно содержать точку -2 , то такое кольцо имеет вид: $\frac{1}{3} < |z| < 3$. Тогда, для простых дробей найденного представления мы получаем разложения:

$$\frac{1}{3 - iz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n z^n}{3^{n+1}}, \quad |z| < 3; \quad \frac{z}{i - 3z} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{3^{n+1} z^n}, \quad |z| > \frac{1}{3}.$$

Значит, мы находим в кольце $\frac{1}{3} < |z| < 3$ требуемое разложение функции $w(z)$ в ряд Лорана:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n z^n}{3^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{3^n z^n}.$$

6. **Решение:** В задаче требуется упорядочить значения, поступающие на входы x_1, x_2, x_3 . Можно либо воспользоваться сортировкой «пузырьком», либо в явном виде выписать функции, вычисляющие минимальное, максимальное и среднее значения из x_1, x_2, x_3 .

Сортировка (u_1, u_2, z_1 – вспомогательные переменные):

$$\begin{aligned}u_1 &= x_1 \& x_2, & z_1 &= x_1 \vee x_2, & u_2 &= z_1 \& x_3, \\y_2 &= z_1 \vee x_3, & y_1 &= u_1 \& u_2, & y_3 &= u_1 \vee u_2.\end{aligned}$$

Явные функции:

$$\begin{aligned}y_1 &= (x_1 \& x_2) \& x_3, \\y_2 &= (x_1 \vee x_2) \vee x_3, \\y_3 &= (x_1 \vee x_2) \& x_3 \vee (x_1 \& x_2).\end{aligned}$$

7. **Решение:** БНФ задаёт сбалансированные последовательности «скобок», если под скобками иметь в виду следующее: «открывающая скобка» – цифра 1, «закрывающая» – цифры 0 или 3 или 4. Цифры 2 могут стоять в любых местах. Остаток от деления на 4 такой же как у суммы цифр числа по модулю 4. Программа должна проверить, содержит ли входная цепочка символы, отличные от 0, 1, 2, 3, 4, и есть ли баланс скобок в указанном смысле. Сделать это можно, проходя по записи и подсчитывая «скобки». Массив не нужен и запрещён условием. Если становится ясно, что встречен неверный символ, или что баланса нет, следует не дочитывать ввод до конца.

Код программы:

```
program var2 (input, output);
var c : char;
    n : longint;
    balance, sum, zeroNum : integer;
begin
    readln(n);
    balance := 0;
    sum := 0;
    zeroNum = ord('0');
    if (n > 0) then begin
        while (n > 0) and (balance >= 0) do begin
            read(c);
            case c of
                '1' : balance := balance + 1;
                '2' : ;
                '0', '3', '4' : balance := balance - 1;
            else balance := -1 {вместо else допускается otherwise}
            end; {case}
            n := n - 1;
            sum := (sum + ord(c) - zeroNum) mod 4;
        end; {while}
        if (balance <> 0) then writeln('не v2-число')
        else if (sum = 2) then writeln('подходящее v2-число')
            else writeln('не подходящее v2-число')
        end {then (n > 0)}
    else begin
        writeln('неверное N')
    end {if}
end.
```

Критерии оценивания: Синтаксические ошибки, присутствующие в разумных количествах, не учитываются. Программа, нарушающая ограничения из условия, но выдающая верный результат оценивается 1/3. Программа, соблюдающая ограничения, но имеющая ошибки, выдающая верный ответ на большинстве входных данных, но неверный – на некоторых цепочках, оценивается 2/3 (при неверном ответе на большинстве входных данных – 1/3). Верная программа, соблюдающая ограничения, оценивается на полный балл. В других случаях программа оценивается 0.

Пожелания по оформлению проверенных работ: Пожалуйста, выделяйте ошибки в ответах и решении, подписывайте, в чём именно состоят ошибки. Если ошибка алгоритмическая, указывайте, в чём конкретно она состоит и приводите примеры входных данных, на которых программа будет работать неверно.