Элементы финансовой математики

20.10.2021

Модель Кокса-Росса-Рубинштейна

Обозначим через $S_0(j)$ цену облигации, а через $S_1(j)$ - цену акции в состоянии фондового рынка j. Припишем состоянию, в которое попадает фондового рынок из состояния j после умножения цены акции на величину d, 2j номер , а после умножения цены акции на величину - номер 2j+1.

$$\frac{S_0(2j)}{S_0(j)} = \frac{S_0(2j+1)}{S_0(j)} = 1+\rho, \frac{S_1(2j)}{S_1(j)} = d, \frac{S_1(2j+1)}{S_1(j)} = u.$$

Первичные финансовые инструменты

По номеру состояния j можно определить номер предшествующего состояния $\left[\frac{j}{2}\right]$, период времени $\tau(j)=[\log_2 j]$ и всю предшествующую динамику цен на акции. Обозначим через $k(j)$ число периодов времени, которые предшествовали периоду $\tau(j)$ и в которые цена акции умножалась на величину d.

Производные финансовые инструменты

В модели Кокса-Росса-Рубинштейна исследуется вопрос о цене в период времени 0 производного финансового инструмента европейского типа с платёжной функцией $f(S_1)$. Цена этого инструмента должна позволять разработать инвестиционную стратегию на фондовом рынке, которая гарантирует платёж $f(S_1)$.

Примеры опционов

Опцион покупки (call option) имеет платежную функцию $f(S_1) = (S_1 - K)_+$ и даёт возможность купить акцию по цене K в случае, когда её цена на рынке превышает уровень K. Заметим, что платёжная функция $f(S_1) = (S_1 - K)_+$ является выпуклой. Опцион позволяет покупателю акции избавиться от рисков, связанных с неопределённостью цены.

Примеры опционов

Опцион продажи (put option) имеет платежную функцию $f\left(S_1\right)=\left(K-S_1\right)_+$ и даёт возможность продать акцию по цене К в случае, когда её цена на рынке меньше этого уровня. Опцион позволяет продавцу акции избавиться от рисков, связанных с неопределённостью цены. Заметим, что платёжная функция $f\left(S_1\right)=\left(K-S_1\right)_+$ является выпуклой.

Примеры опционов

Финансовый инструмент **стеллаж (straddle)** с платёжной функцией $f(S_1) = |S_1 - K|$ можно представить как пакет из опциона продажи и опциона покупки, т.к.

$$|S_1 - K| = (S_1 - K)_+ + (K - S_1)_+ .$$

Инвестиционная стратегия

Обозначим через $\xi_0(j)$ и $\xi_1(j)$ количество облигаций и акций в состоянии соответственно. Инвестиционная стратегия задаётся с помощью портфелей во всех нетерминальных состояниях $\left\{\left(\xi_0(j),\xi_1(j)\right)\middle| j=1,\dots,2^T-1\right\}$, удовлетворяющих условию самофинансирования портфеля

$$S_0(j)\xi_0(j)+S_1(j)\xi_1(j)=S_0(j)\xi_0\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right)+S_1(j)\xi_1\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right),\ j=2,\dots,2^T-1.$$

Постановка задачи

Задача линейного программирования

$$S_0(1)\xi_0(1)+S_1(1)\xi_1(1)\to\min$$

$$S_0(j)\xi_0(j)+S_1(j)\xi_1(j)=S_0(j)\xi_0\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right)+S_1(j)\xi_1\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right),\ j=2,\dots,2^T-1$$

$$S_0(j)\xi_0\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right)+S_1(j)\xi_1\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right)\ge f\left(S_1(j)\right),\ j=2^T,\dots,2^{T+1}-1.$$

Множители Лагранжа

Обозначим множители Лагранжа к ограничениям через $(1+\rho)^{-\tau(j)}\, p(j)$ соответственно, где $p(j) \geq 0 \; \left(j = 2^T, \ldots, 2^{T+1} - 1 \right)$.

Функция Лагранжа

Составим функцию Лагранжа

$$L\left(\left\{\left(\xi_0(j),\xi_1(j)\right)\middle|\, j=1,\dots,2^T-1\right\},\left\{p(j)\middle|\, j=2,\dots,2^{T+1}-1\right\}\right)=S_0(1)\xi_0(1)+S_1(1)\xi_1(1)+$$

$$+\sum_{j=2}^{2^T-1}(1+\rho)^{-\tau(j)}\,p(j)\left\{S_0(j)\xi_0(j)+S_1(j)\xi_1(j)-S_0(j)\xi_0\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right)-S_1(j)\xi_1\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right)\right\}+$$

$$+\sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1}(1+\rho)^{-T}\,p(j)\left\{f\left(S_1(j)\right)-S_0(j)\xi_0\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right)-S_1(j)\xi_1\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right)\right\}=$$

Перегруппировка слагаемых

Функция Лагранжа

$$= \sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} (1+\rho)^{-T} \, p(j) f\left(S_1(j)\right) + \xi_0(1)\left\{S_0(1) - (1+\rho)^{-1} p(2) S_0(2) - (1+\rho)^{-1} p(3) S_0(3)\right\} +$$

$$+\xi_1(1)\left\{S_1(1) - (1+\rho)^{-1} p(2) S_1(2) - (1+\rho)^{-1} p(3) S_1(3)\right\} +$$

$$\sum_{j=2}^{2^T-1}\left\{\xi_0(j)\left((1+\rho)^{-\tau(j)} p(j) S_0(j) - (1+\rho)^{-\tau(j)-1} p(2j) S_0(2j) - (1+\rho)^{-\tau(j)-1} p(2j+1) S_0(2j+1)\right)\right.$$

$$\left. + \xi_1(j)\left((1+\rho)^{-\tau(j)} p(j) S_1(j) - (1+\rho)^{-\tau(j)-1} p(2j) S_1(2j) - (1+\rho)^{-\tau(j)-1} p(2j+1) S_1(2j+1)\right)\right\}.$$

Двойственная задача линейного программирования

Имеет вид: $\sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} (1+\rho)^{-T}\ p(j) f\left(S_1(j)\right) \to \max$

$$(1+\rho)^{-1}\ p(2) S_0(2) + (1+\rho)^{-1}\ p(3) S_0(3) = S_0(1),$$

$$(1+\rho)^{-1}\ p(2) S_1(2) + (1+\rho)^{-1}\ p(3) S_1(3) = S_1(1),$$

$$(1+\rho)^{-1}\ p(2j) S_0(2j) + (1+\rho)^{-1}\ p(2j+1) S_0(2j+1) = p(j) S_0(j), \quad \left(j = 2,\ldots,2^T - 1\right)$$

$$(1+\rho)^{-1}\ p(2j) S_1(2j) + (1+\rho)^{-1}\ p(2j+1) S_1(2j+1) = p(j) S_1(j), \quad \left(j = 2,\ldots,2^T - 1\right)$$

$$p(j) \geq 0, \left(j = 2^T, \ldots, 2^{T+1} - 1\right).$$

Условие дополняющей нежёсткости

Имеет вид:

$$p(j)\left\{f\left(S_1(j)\right)-S_0(j)\xi_0\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right)-S_1(j)\xi_1\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right)\right\}=0,\ j=2^T,\dots,2^{T+1}-1.$$

Двойственная задача

Решение имеет вид

$$p(2)=\frac{u-1-\rho}{u-d},\ p(3)=\frac{1+\rho-d}{u-d}.$$

$$p(2j)=\frac{u-1-\rho}{u-d}p(j),\ p(2j+1)=\frac{1+\rho-d}{u-d}p(j).$$

Откуда

$$p(j)=\left(p^*\right)^{k(j)}\left(1-p^*\right)^{\tau(j)-k(j)},\ j=2,\ldots,2^{T+1}-1,\ \text{где}\ p^*=\frac{u-1-\rho}{u-d}\ .$$

Справедливая цена

Из условий дополняющей нежесткости следует, что

$$p(j) > 0,\ j = 2,\dots,2^{T+1}-1 \Rightarrow$$

$$S_0(j)\xi_0\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right) + S_1(j)\xi_1\left(\left[\frac{j}{2}\right]\right) = f\left(S_1(j)\right),\ j = 2^T,\dots,2^{T+1}-1.$$

Формула Кокса-Росса-Рубинштейна.

Справедливая цена производного финансового инструмента с платёжной функцией $f\left(S_1\right)$ *равна*

$$\left(1+\rho\right)^{-T}\sum_{m=0}^{T}C_T^m\left(p^*\right)^m\left(1-p^*\right)^{T-m}\,f\left(d^m u^{T-m}S_1(1)\right),$$

где

$$p^*=\frac{u-1-\rho}{u-d}.$$

Замечание

Будем интерпретировать p^* как вероятность перехода из состояния j в состояние $2j$.

Тогда вероятность перехода из состояния j в состояние $2j+1$ равна $1-p^*$. Выражение

$$\sum_{m=0}^{T} C_T^m \left(p^*\right)^m \left(1-p^*\right)^{T-m} f\left(d^m u^{T-m} S_1(1)\right)$$

интерпретируется как математическое ожидание платежа по производному финансовому инструменту в период времени T.

Замечание

Приведённая к периоду времени 0 стоимость портфеля $y(j)=(1+\rho)^{-\tau(j)}\left(S_0(j)\xi_0(j)+S_1(j)\xi_1(j)\right)$ удовлетворяет соотношению

$$p^* y(2j)+\left(1-p^*\right)y(2j+1)=y(j)$$

и может интерпретироваться как мартингал. Величину

$$p^*=\frac{u-1-\rho}{u-d}$$

называют мартингальной вероятностью

Формула Кокса-Росса-Рубинштейна

Предположим, что в следующий период времени цена акции изменяется в λ раз, где $\lambda \in [d, u]$.

Предложение. *Пусть функция* $f(S_1)$ *выпукла. Тогда минимальная сумма денег, позволяющая реализовать инвестиционную стратегию, гарантирующую исполнение платежа* $f(S_1)$ *вычисляется по формуле Кокса-Росса-Рубинштейна.*

Доказательство

Цена акции в период времени t находится в диапазоне $\left[d^t S_1(1), u^t S_1(1)\right]$. Обозначим через $W\left(S_1, t\right)$ минимальную стоимость портфеля в период времени t при цене акции $S_1 \in \left[d^t S_1(1), u^t S_1(1)\right]$, достаточную для выполнения обязательств по производному финансовом инструменту. Тогда $W\left(S_1, T\right) = f\left(S_1\right)$.

Доказательство

Минимальная сумма денег, вложение которой позволяет гарантировать исполнение платежа по обязательствам, равна $W\left(S_1(1),0\right)$. Воспользуемся методом динамического программирования и будем строить функцию $W\left(S_1,t\right)$ индуктивно. Предположим, что $W\left(S_1,\tau\right)$ определена и выпукла по переменной S_1 на множестве $S_1 \in \left[d^{\tau} S_1(1), u^{\tau} S_1(1)\right]$

Доказательство

Рассмотрим портфель, в котором вложения в облигации составляют ζ_0, а в акции ζ_1, такой, что

$$\left(1+\rho\right)\zeta_0 + d\zeta_1 = W\left(dS_1, \tau\right),$$

$$\left(1+\rho\right)\zeta_0 + u\zeta_1 = W\left(uS_1, \tau\right).$$

Из получившейся системы линейных уравнений находим, что

$$\zeta_0 = \frac{uW\left(dS_1, \tau\right) - dW\left(uS_1, \tau\right)}{\left(1+\rho\right)\left(u-d\right)}, \zeta_1 = \frac{W\left(uS_1, \tau\right) - W\left(dS_1, \tau\right)}{u-d}.$$

Доказательство

В силу выпуклости $W(S,\tau)$ по переменной S получаем, что для любого $\lambda \in [d,u]$ справедливо неравенство

$$(1+\rho)\zeta_0 + \lambda\zeta_1 = \frac{u-\lambda}{u-d}W(dS_1,\tau) + \frac{\lambda-d}{u-d}W(uS_1,\tau) \geq$$

$$\geq W\left(\left(\frac{u-\lambda}{u-d}d + \frac{\lambda-d}{u-d}u\right)S_1,\tau\right) = W(\lambda S_1,\tau).$$

Доказательство

Любой портфель, в котором вложения в облигации $\widehat{\zeta}_0$ и в акции $\widehat{\zeta}_1$ гарантируют, что в период времени τ при ценах акции dS_1 и uS_1 его стоимость будет не меньше, чем $W\left(dS_1,\tau\right)$ и $W\left(uS_1,\tau\right)$ соответственно, удовлетворяет $\widehat{\zeta}_0+\widehat{\zeta}_1\geq\zeta_1+\zeta_0$, т.к. $\varsigma_0+\varsigma_1$ оптимальное значение функционала в задаче линейного программирования

$$\xi_0+\xi_1\to\min$$
$$(1+\rho)\xi_0+d\xi_1\geq W\left(dS_1,\tau\right)$$
$$(1+\rho)\xi_0+u\xi_1\geq W\left(uS_1,\tau\right)$$

Доказательство

Тогда

$$W\left(S_1,\tau-1\right)=\zeta_0+\zeta_1=\left(1+\rho\right)^{-1}\left(p^*W\left(dS_1,\tau\right)+\left(1-p^*\right)W\left(uS_1,\tau\right)\right),\quad (1)$$

$$где\ p^*=\frac{u-1-\rho}{u-d}.$$

Из (1) следует, что функция $W\left(S_1,\tau-1\right)$ выпукла по переменной S_1 на множестве $S_1\in\left[d^{\tau-1}S_1\left(1\right),u^{\tau-1}S_1\left(1\right)\right]$.

Кроме того,

$$W\left(d^k u^{t-k}S_1\left(1\right),t\right)=\left(1+\rho\right)^{t-T}\sum_{m=0}^{T-t}C_{T-t}^{m}\left(p^*\right)^m\left(1-p^*\right)^{T-t-m}f\left(d^{m+k}u^{T-m-k}S_1(1)\right),$$

$$где\ 0\le k\le t\le T.$$

Доказательство

Откуда следует, что выражение для $W\left(S_1(1), 0\right)$ совпадает с формулой Кокса-Росса-Рубинштейна.

Модель Блэка-Шоулса

Разобьём временной интервал $\left[0,T\right]$ на N равноотстоящих шагов $\frac{T}{N},\frac{2T}{N},\dots,\frac{NT}{N}.$ Шаг $\frac{kT}{N}$ соответствует k-му периоду времени в модели Кокса-Росса-Рубинштейна. Предположим, что параметры модели Кокса-Росса-Рубинштейна заданы по формулам

$$\rho\left(N\right)=\frac{rT}{N},d\left(N\right)=e^{-\sigma\sqrt{T/N}},u\left(N\right)=e^{\sigma\sqrt{T/N}},p^{*}\left(N\right)=\frac{e^{\sigma\sqrt{T/N}}-1-\frac{rT}{N}}{e^{\sigma\sqrt{T/N}}-e^{-\sigma\sqrt{T/N}}}$$

Модель Блэка-Шоулса

Обозначим через S_1 цену акции в начальный период времени, а через G_N справедливую цену финансового инструмента с платёжной функцией $f(S)$ в соответствующей модели Кокса-Росса-Рубинштейна.

Предложение

Пусть платёжная функция $f(S)$ *непрерывная функция медленного роста на бесконечном полуинтервале* $\left[0,+\infty\right)$. *Тогда*

$$\lim_{N\to+\infty} G_N = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(S_1 e^{\left(\sigma\sqrt{T}y + rT - \sigma^2 T/2\right)}\right) e^{-\left(y^2/2\right)} dy. \quad (2)$$

Центральная предельная теорема

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *последовательность независимых случайных величин с конечными дисперсиями. Если выполнено условие Линдеберга, то случайная величина* $\dfrac{\zeta_n - M_n}{D_n}$ *слабо сходится при* $n \to \infty$ *к нормальному распределению* $N(0,1)$. *Здесь*

$$M_n = E\zeta_n = \sum_{j=1}^{n} E\xi_j,\ D_n = Var(\zeta_n) = \sum_{j=1}^{n} Var(\xi_j).$$

Условие Линдеберга

См. Л.Б.Коралов, Я.Г.Синай Теория вероятностей и случайные процессы // М.: МЦНМО, 2013, 408 с.

Стр. 156: для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{D_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\left\{x\left|x-E\xi_j\right|\geq\varepsilon D_n\right\}}\left(x-E\xi_j\right)^2 dF_j\left(x\right)=0.$$

Здесь $F_j\left(x\right)$ функция распределения случайной величины ξ_j.

Доказательство

По формуле Кокса-Росса-Рубинштейна получаем, что

$$G_N = \left(1+\frac{rT}{N}\right)^{-N} \sum_{m=0}^{N} C_N^m \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{T/N}} - 1 - \frac{rT}{N}}{e^{\sigma\sqrt{T/N}} - e^{-\sigma\sqrt{T/N}}} \right)^m \left(\frac{1+\frac{rT}{N} - e^{-\sigma\sqrt{T/N}}}{e^{\sigma\sqrt{T/N}} - e^{-\sigma\sqrt{T/N}}} \right)^{N-m} f\left(e^{(N-2m)\sigma\sqrt{T/N}} S_1\right).$$

Заметим, что

$$p^*(N) = \frac{e^{\sigma\sqrt{T/N}} - 1 - \frac{rT}{N}}{e^{\sigma\sqrt{T/N}} - e^{-\sigma\sqrt{T/N}}} = \frac{1 - \frac{r}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{T}{N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)}{2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)}$$

Доказательство

Рассмотрим независимые одинаково распределённые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$, которые с вероятностью $p^*(N)$ принимают значение -1 и с вероятностью $1 - p^*(N)$ - значение 1. Положим

$$\varsigma_N = \sum_{k=1}^{N} \xi_k$$

Случайная величина ς_N принимает значение $N - 2m$ с вероятностью

$$C_N^m \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{T/N}} - 1 - \frac{rT}{N}}{e^{\sigma\sqrt{T/N}} - e^{-\sigma\sqrt{T/N}}} \right)^m \left(\frac{1 + \frac{rT}{N} - e^{-\sigma\sqrt{T/N}}}{e^{\sigma\sqrt{T/N}} - e^{-\sigma\sqrt{T/N}}} \right)^{N-m}$$

Доказательство

Математическое ожидание случайной величины ς_N равно

$$M_N = N\left(1-2p^*(N)\right) = \left(\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{TN}+O(1),$$

а её дисперсия равна

$$\left(D_N\right)^2 = N\left(1-\left(1-2p^*(N)\right)^2\right) = N-T\left(\frac{r}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)^2+O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Доказательство

Дисперсии случайных величин ς_N удовлетворяют условию Линдеберга и по центральной предельной теореме распределения случайных величин $\dfrac{\varsigma_N - M_N}{D_N}$ слабо сходятся к нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Положим $\mathrm{N} - 2\mathrm{m} = \mathrm{D_N}\mathrm{y} - \mathrm{M_N}$. Тогда

$$\left(\mathrm{N} - 2\mathrm{m}\right)\sigma\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{N}}} = \sigma\sqrt{\mathrm{T}}\mathrm{y} - \mathrm{rT} + \frac{\sigma^2}{2}\sqrt{\mathrm{T}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right).$$

Доказательство

Поэтому

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{m=0}^{N} C_N^m \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{T/N}}-1-\frac{rT}{N}}{e^{\sigma\sqrt{T/N}}-e^{-\sigma\sqrt{T/N}}}\right)^m \left(\frac{1+\frac{rT}{N}-e^{-\sigma\sqrt{T/N}}}{e^{\sigma\sqrt{T/N}}-e^{-\sigma\sqrt{T/N}}}\right)^{N-m} f\left(e^{(N-2m)\sigma\sqrt{T/N}}S_1\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(S_1 e^{\left(\sigma\sqrt{T}y+rT-\sigma^2 T/2\right)}\right) e^{-\left(y^2/2\right)}dy.$$

Откуда, учитывая, что

$$\lim_{N\to+\infty}\left(1+\frac{rT}{N}\right)^{-N}=e^{-rT},$$

получаем формулу (2).

Определение

Будем называть в модели Блэка-Шоулса справедливой ценой производного финансового инструмента европейского типа с платёжной функцией $f(S)$ и датой погашения T величину

$$u(S_1,T)=\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(S_1 e^{\left(\sigma\sqrt{T}y+rT-\sigma^2 T/2\right)}\right) e^{-\left(y^2/2\right)}dy.$$