Элементы финансовой математики

27.10.2021

Модель Блэка-Шоулса

Разобьём временной интервал $\left[0,T\right]$ на N равноотстоящих шагов $\frac{T}{N},\frac{2T}{N},...,\frac{NT}{N}.$ Шаг $\frac{kT}{N}$ соответствует k-му периоду времени в модели Кокса-Росса-Рубинштейна. Предположим, что параметры модели Кокса-Росса-Рубинштейна заданы по формулам

$$\rho\left(N\right)=\frac{rT}{N},d\left(N\right)=e^{-\sigma\sqrt{T/N}},u\left(N\right)=e^{\sigma\sqrt{T/N}},p^{*}\left(N\right)=\frac{e^{\sigma\sqrt{T/N}}-1-\frac{rT}{N}}{e^{\sigma\sqrt{T/N}}-e^{-\sigma\sqrt{T/N}}}$$

Модель Блэка-Шоулса

Обозначим через S_1 цену акции в начальный период времени, а через G_N справедливую цену финансового инструмента с платёжной функцией $f(S)$ в соответствующей модели Кокса-Росса-Рубинштейна.

Предложение

Пусть платёжная функция $f(S)$ *непрерывная функция медленного роста на бесконечном полуинтервале* $[0,+\infty)$. *Тогда*

$$\lim_{N\to+\infty} G_N = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(S_1 e^{\left(\sigma\sqrt{T}y+rT-\sigma^2T/2\right)}\right) e^{-\left(y^2/2\right)} dy. \quad (2)$$

Определение

Будем называть в модели Блэка-Шоулса справедливой ценой производного финансового инструмента европейского типа с платёжной функцией $f(S)$ и датой погашения T величину

$$u(S_1,T)=\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(S_1 e^{\left(\sigma\sqrt{T}y+rT-\sigma^2 T/2\right)}\right)e^{-\left(y^2/2\right)}dy.$$

Формула Блэка-Шоулса

Рассмотрим опцион на покупку с платёжной функцией $f(S)=(S-K)_+$. По формуле (2) имеем, что

$$v(S_1,T)=\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(S_1e^{\sigma\sqrt{T}y+rT-\sigma^2T/2}-K\right)_+e^{-y^2/2}dy.$$

Формула Блэка-Шоулса

Обозначим $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy,$

$$\theta_-(x,T) = \frac{\ln\frac{x}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$\theta_+(x,T) = \frac{\ln\frac{x}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Формула Блэка-Шоулса

Тогда

$$v\left(S_1,T\right)=S_1\Phi\left(\theta_+\left(S_1,T\right)\right)-e^{-rT}K\Phi\left(\theta_-\left(S_1,T\right)\right)$$

Проанализируем, как цена опциона покупки $v\left(S_1,T\right)$ зависит от параметров.

Греческие параметры

Производная по процентной ставке называется
ро опциона покупки:

$$\rho = \frac{\partial v}{\partial r} = KTe^{-rT}\Phi\left(\theta_{-}\left(S_1, T\right)\right).$$

Поскольку $\rho > 0,$ справедливая цена производного финансового инструмента возрастает при увеличении процентной ставки r.

Греческие параметры

Вегой опциона покупки называется

$$\Upsilon = \frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{S_1 T}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\theta_+\left(S_1, T\right)\right)^2 / 2}.$$

Поскольку $\Upsilon > 0$, справедливая цена производного финансового инструмента возрастает при увеличении параметра волатильности акции σ.

Греческие параметры

Первая производная по S_1 называется **дельтой** опциона покупки

$$\Delta\left(S_1,T\right)=\frac{\partial v\left(S_1,T\right)}{\partial S_1}=\Phi\left(\theta_+\left(S_1,T\right)\right).$$

Поскольку $0\le\Delta\left(S_1,T\right)<1,$ полное изменение цены опциона всегда меньше, чем соответствующее изменение цены акции:

$$\left|v\left(S,T\right)-v\left(\tilde{S},T\right)\right|\le\left|S-\tilde{S}\right|.$$

Греческие параметры

Гаммой опциона покупки называется

$$\Gamma\left(S_1,T\right)=\frac{\partial\Delta\left(S_1,T\right)}{\partial S_1}=\frac{\partial^2 v\left(S_1,T\right)}{\partial S_1{}^2}=\frac{1}{S_1\sigma\sqrt{2\pi T}}e^{-\left(\theta_+\left(S_1,T\right)\right)^2/2}$$

Поскольку $\Gamma\left(S_1,T\right)>0,$ цена опциона покупки $v\left(S_1,T\right)$ строго выпукла по аргументу S_1.

Эффект рычага

Для $T > 0, \tilde{S} > S$ справедливо неравенство

$$\frac{v\left(\tilde{S},T\right)-v\left(S,T\right)}{\tilde{S}-S} > \frac{v\left(S,T\right)-v\left(0,T\right)}{S-0} = \frac{v\left(S,T\right)}{S}.$$

Откуда получаем, что относительное изменение цены опциона покупки по абсолютной величине больше, чем относительное изменение цены акции

$$\frac{v\left(\tilde{S},T\right)-v\left(S,T\right)}{v\left(S,T\right)} > \frac{\tilde{S}-S}{S} \text{ для } \tilde{S} > S.$$

Греческие параметры

Тетой опциона покупки называется

$$\Theta\left(S_1,T\right)=\frac{\partial v\left(S_1,T\right)}{\partial T}=\frac{\sigma S_1}{2\sqrt{2\pi T}}e^{-\left(\theta_+\left(S_1,T\right)\right)^2/2}+Kre^{-rT}\Phi\left(\theta_-\left(S_1,T\right)\right).$$

Поскольку $\Theta\left(S_1,T\right)>0,$ цена европейского опциона покупки является возрастающей функцией даты погашения T.

Греческие параметры

Заметим, что параметры $\Delta\left(S_1,T\right),\Gamma\left(S_1,T\right),\Theta\left(S_1,T\right)$ и цена опциона покупки $v\left(S_1,T\right)$ связаны соотношением

$$\Theta\left(S_1,T\right)=rS_1\Delta\left(S_1,T\right)+\frac{1}{2}\sigma^2 S_1^2\Gamma\left(S_0,T\right)-rv\left(S_1,T\right)$$

Предложение

Пусть функция $f(S)$ *является непрерывной функцией медленного роста на* $[0,+\infty)$. *Справедливая цена* $u(S,t)$ *производного финансового инструмента с платёжной функцией* $f(S)$ *и датой погашения t в модели Блэка-Шоулса является решением задачи*

$$\frac{\partial u(S,t)}{\partial t} = rS\frac{\partial u(S,t)}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u(S,t)}{\partial S^2} - ru(S,t),$$

$$u(S,0) = f(S).$$

Доказательство

Справедливая цена производного финансового инструмента с платёжной функцией $f(S)$ и датой погашения t равна

$$u(S,t)=\frac{e^{-rt}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(Se^{\left(\sigma\sqrt{t}y+rt-\sigma^2 t/2\right)}\right)e^{-\left(y^2/2\right)}dy$$

Очевидно, что $u(S,0)=f(S)$.

Доказательство

Делая замену переменных

$$z = Se^{\sigma\sqrt{t}y + rt - \sigma^2 t/2},$$

получаем, что

$$u(S,t) = \frac{e^{-rt}}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} e^{-\frac{\left(\ln z - rt + \sigma^2 t/2 - \ln S\right)^2}{2\sigma^2 t}} f(z)\,dz.$$

Доказательство

Производная $u(S,t)$ по t равна

$$\frac{\partial u(S,t)}{\partial t} =$$

$$= -\left(r + \frac{1}{2t}\right)u(S,t) + \frac{e^{-rt}}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{z}\frac{\left(\ln z - rt + \sigma^2 t/2 - \ln S\right)}{\sigma^2 t}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{-\frac{\left(\ln z - rt + \sigma^2 t/2 - \ln S\right)^2}{2\sigma^2 t}} f(z)dz$$

$$+ \frac{e^{-rt}}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{z}\frac{\left(\ln z - rt + \sigma^2 t/2 - \ln S\right)^2}{2\sigma^2 t^2}e^{-\frac{\left(\ln z - rt + \sigma^2 t/2 - \ln S\right)^2}{2\sigma^2 t}} f(z)dz.$$

Доказательство

Первая производная $u(S,t)$ по S равна

$$\frac{\partial u(S,t)}{\partial S} = \frac{e^{-rt}}{\sigma S\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} \frac{\left(\ln z - rt + \sigma^2 t/2 - \ln S\right)}{\sigma^2 t} e^{-\frac{\left(\ln z - rt + \sigma^2 t/2 - \ln S\right)^2}{2\sigma^2 t}} f(z)dz.$$

Доказательство

Вторая производная $u(S,t)$ по S равна

$$\frac{\partial^2 u(S,t)}{\partial S^2} = -\frac{e^{-rt}}{\sigma S^2\sqrt{2\pi t}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{z}\frac{\left(\ln z - rt + \sigma^2 t/2 - \ln S\right)}{\sigma^2 t} e^{-\frac{\left(\ln z - rt+\sigma^2 t/2 - \ln S\right)^2}{2\sigma^2 t}} f(z)\,dz -$$

$$-\frac{e^{-rt}}{\sigma S^2\sqrt{2\pi t}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{z}\frac{1}{\sigma^2 t} e^{-\frac{\left(\ln z - rt+\sigma^2 t/2 - \ln S\right)^2}{2\sigma^2 t}} f(z)\,dz +$$

$$+\frac{e^{-rt}}{\sigma S^2\sqrt{2\pi t}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{z}\frac{\left(\ln z - rt + \sigma^2 t/2 - \ln S\right)^2}{\sigma^4 t^2} e^{-\frac{\left(\ln z - rt+\sigma^2 t/2 - \ln S\right)^2}{2\sigma^2 t}} f(z)\,dz.$$

Доказательство

Откуда следует, что

$$rS\frac{\partial u(S,t)}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 u(S,t)}{\partial S^2}-ru(S,t)=\frac{\partial u(S,t)}{\partial t}$$

Модель Мертона

В модели Мертона рассматривается случай, когда цена акции испытывает редкие, но большие скачки.

Разобьём временной интервал $[0, T]$ на N равноотстоящих шагов $\frac{T}{N}, \frac{2T}{N}, \ldots, \frac{NT}{N}$.

Шаг $\frac{kT}{N}$ соответствует k-му периоду времени в модели Кокса-Росса-Рубинштейна.

Модель Мертона

Предположим, что параметры модели Кокса-Росса-Рубинштейна заданы по формулам

$$\rho(N)=\frac{rT}{N},d(N)=e^{-\sigma T/N},u(N)=1+b,1-p^{*}(N)=\frac{r+\sigma}{b}\frac{T}{N}+o\left(\frac{T}{N}\right).$$

Обозначим через цену акции S_1 в начальный период времени и через $C_N(S_1,T)$ справедливую цену финансового инструмента с платёжной функцией $f(S)$.

Модель Мертона

По формуле Кокса-Росса-Рубинштейна имеем, что

$$C_N\left(S_1, T\right)=\left(1+\frac{rT}{N}\right)^{-N}\sum_{k=0}^{+\infty}C_N^k\left(1-\frac{r+\sigma}{b}\frac{T}{N}+o\left(\frac{T}{N}\right)\right)^{N-k}\left(\frac{r+\sigma}{b}\frac{T}{N}+o\left(\frac{T}{N}\right)\right)^k f\left(S_1\left(1+b\right)^k e^{-(N-k)\sigma\frac{T}{N}}\right)$$

Предельная теорема Пуассона

Пусть $\xi_j^N \in \{0,1\}$ независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$P\left(\xi_j^N = 1\right) = p_N.$$

Если $\lim\limits_{N\to\infty} Np_N = \lambda > 0$, то

$$\lim_{N\to+\infty} P\left(\sum_{j=1}^{N}\xi_j^N = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0,1,\ldots$$

Модель Мертона

Тогда по предельной теореме Пуассона имеем, что

$$\lim_{N\to+\infty} C_N\left(S_1, T\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\left(r+\sigma\right)T}{b}\right)^k e^{-\left(\frac{\left(1+b\right)r+\sigma}{b}\right)T} f\left(\left(1+b\right)^k e^{-\sigma T} S_1\right).$$

Теория арбитража

На фондовом рынке совершает операции большое число профессиональных и высококвалифицированных участников рынка. Характерное время изменения цен на финансовые инструменты много меньше характерного времени изменений в реальном секторе экономики. Поэтому цены на финансовые инструменты устанавливаются так, чтобы получение прибыли от операций на фондовом рынке без рисков затрат (арбитраж) было невозможно. Уточним понятие арбитража.

Теория арбитража

Рассмотрим обобщение модели Кокса-Росса-Рубинштейна, в котором неопределённость состояния фондового рынка описывается с помощью произвольного дерева. Будем считать, что время изменяется дискретно: $t = 0, ..., T.$

Обозначим через Ω_t множество состояний фондового рынка в период времени t. Будем предполагать, что множество Ω_t состоит из конечного числа элементов .

Теория арбитража

Множество Ω_0 состоит из одного элемента ω_0.

Опишем дерево состояний фондового рынка с помощью отображений $\Phi_t : \Omega_t \to \Omega_{t-1}, t = 1, \ldots, T,$ которые сопоставляют состоянию $\omega \in \Omega_t$ предшествующее состояние $\Phi_t(\omega) \in \Omega_{t-1},$ из которого фондовый рынок перешел в состояние ω.

Обозначим через $\Psi_{t-1}(\nu) = \left\{ \omega \middle| \Phi_t(\omega) = \nu \right\}$ многозначное отображение, обратное к отображению $\Phi_t(\bullet)$.

Теория арбитража

Рассмотрим модель фондового рынка, на котором обращаются облигация и акции различных видов из множества $I,$ состоящего из конечного числа элементов. Облигация является безрисковым инструментом, и в следующий период времени её цена увеличивается в $(1+\rho)$ раз. Обозначим через $S_i(\omega)$ цену акции вида $i \in I$ в состоянии фондового рынка $\omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t$.

Теория арбитража

Таким образом, в модели фондовый рынок описывается заданием параметров $\left\{ \rho, S_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t \right\}$.

Будем описывать инвестиционную стратегию набором параметров $\left\{ \xi_0(\omega), \xi_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t \right\}$, где $\left(\xi_0(\omega), \xi_i(\omega) \middle| i \in I \right)$ - портфель в состоянии фондового рынка ω, $\xi_0(\omega)$ - вложения денежных средств в облигации, а $\xi_i(\omega)$ - количество акций i-го вида в портфеле, сформированном в состоянии ω.

Допускаются короткие позиции.

Определение арбитражной стратегии

Инвестиционная стратегия $\left\{ \xi_0(\omega), \xi_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t \right\}$ *называется арбитражной, если*

$$\xi_0(\omega_0) + \sum_{i \in I} \xi_i(\omega_0) S_i(\omega_0) \le 0,$$

$$(1+\rho)\xi_0(\Phi_t(\omega)) + \sum_{i \in I} \xi_i(\Phi_t(\omega)) S_i(\omega) = \xi_0(\omega) + \sum_{i \in I} \xi_i(\omega) S_i(\omega), \;\; \omega \in \Omega_t, t = 1, \ldots, T-1,$$

$$(1+\rho)\xi_0(\Phi_T(\omega)) + \sum_{i \in I} \xi_i(\Phi_T(\omega)) S_i(\omega) \ge 0, \quad \omega \in \Omega_T,$$

и существует $\widehat{\omega} \in \Omega_T$ *такое, что*

$$(1+\rho)\xi_0(\Phi_T(\widehat{\omega})) + \sum_{i \in I} \xi_i(\Phi_T(\widehat{\omega})) S_i(\widehat{\omega}) > 0.$$

Первая фундаментальная теорема формирования цен финансовых активов

Для того, чтобы фондовый рынок $\left\{\rho, S_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t \right\}$ *был безарбитражен, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие* $\left\{ p(\omega) > 0 \middle| \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t \right\}$, *что*

$$p(\omega_0) = 1, \sum_{\omega \in \Psi_t(\nu)} p(\omega) = p(\nu), \nu \in \Omega_{t-1}, t = 1, \dots, T,$$

$$S_i(\nu) = \sum_{\omega \in \Psi_t(\nu)} \frac{S_i(\omega)\, p(\omega)}{(1+\rho)\, p(\nu)}, i \in I, \nu \in \Omega_{t-1}, t = 1, \dots, T.$$

Доказательство

В силу однородности неравенств, входящих в определение арбитражной инвестиционной стратегии, для того, чтобы рынок был безарбитражным, необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача линейного программирования

$$\sum_{\omega\in\Omega_T}\left\{(1+\rho)\xi_0\left(\Phi_T(\omega)\right)+\sum_{i\in I}\xi_i\left(\Phi_T(\omega)\right)S_i(\omega)\right\}\to\max, \qquad (1)$$

$$\xi_0(\omega_0)+\sum_{i\in I}\xi_i(\omega_0)S_i(\omega_0)\le 0, \qquad (2)$$

$$(1+\rho)\xi_0\left(\Phi_t(\omega)\right)+\sum_{i\in I}\xi_i\left(\Phi_t(\omega)\right)S_i(\omega)=\xi_0(\omega)+\sum_{i\in I}\xi_i(\omega)S_i(\omega),\ \ \omega\in\Omega_t, t=1,\dots,T-1, \qquad (3)$$

$$(1+\rho)\xi_0\left(\Phi_T(\omega)\right)+\sum_{i\in I}\xi_i\left(\Phi_T(\omega)\right)S_i(\omega)\ge 0, \quad \omega\in\Omega_T. \qquad (4)$$

Доказательство

Обозначим через $\lambda(\omega)$, где $\omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t$, множители Лагранжа к ограничениям (2)-(4) и составим функцию Лагранжа

$$L\left(\left\{\xi_0(\omega), \xi_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t\right\}, \left\{\lambda(\omega) \middle| \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t\right\}\right) =$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega_T} \left(1+\lambda(\omega)\right)\left\{(1+\rho)\xi_0\left(\Phi_t(\omega)\right) + \sum_{i \in I} \xi_i\left(\Phi_t(\omega)\right) S_i(\omega)\right\} - \lambda(\omega_0)\left\{\xi_0(\omega_0) + \sum_{i \in I} \xi_i(\omega_0) S_i(\omega_0)\right\} +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T-1} \lambda(\omega)\left\{\left\{\sum_{\omega \in \Omega_t}\left((1+\rho)\xi_0\left(\Phi_t(\omega)\right) + \sum_{i \in I} \xi_i\left(\Phi_t(\omega)\right) S_i(\omega)\right)\right\} - \xi_0(\omega) - \sum_{i \in I} \xi_i(\omega) S_i(\omega)\right\}.$$

Доказательство

Перегруппируем слагаемые в функции Лагранжа

$$L\left(\left\{\xi_0(\omega),\xi_i(\omega)\,\middle|\, i\in I,\omega\in\bigcup_{t=0}^{T-1}\Omega_t\right\},\left\{\lambda(\omega)\,\middle|\,\omega\in\bigcup_{t=0}^{T}\Omega_t\right\}\right)=\xi_0(\omega_0)\left\{(1+\rho)\sum_{\omega\in\Psi_1(\omega_0)}\lambda(\omega)-\lambda(\omega_0)\right\}+$$

$$+\sum_{i\in I}\xi_i(\omega_0)\left\{\sum_{\omega\in\Psi_1(\omega_0)}\lambda(\omega)S_i(\omega)-\lambda(\omega_0)S_i(\omega_0)\right\}+$$

$$+\sum_{t=1}^{T-2}\sum_{\nu\in\Omega_t}\left\{\xi_0(\nu)\left\{(1+\rho)\sum_{\omega\in\Psi_{t+1}(\nu)}\lambda(\omega)-\lambda(\nu)\right\}+\sum_{i\in I}\xi_i(\nu)\left\{\sum_{\omega\in\Psi_{t+1}(\nu)}\lambda(\omega)S_i(\omega)-\lambda(\nu)S_i(\nu)\right\}\right\}+$$

$$+\sum_{\nu\in\Omega_{T-1}}\left\{\xi_0(\nu)\left\{(1+\rho)\sum_{\omega\in\Psi_T(\nu)}\big(1+\lambda(\omega)\big)-\lambda(\nu)\right\}+\sum_{i\in I}\xi_i(\nu)\left\{\sum_{\omega\in\Psi_T(\nu)}\big(1+\lambda(\omega)\big)S_i(\omega)-\lambda(\nu)S_i(\nu)\right\}\right\}.$$

Доказательство

По теореме двойственности задача линейного программирования (1)-(4) имеет решение тогда и только тогда, когда совместна система

$$\lambda(\omega_0) = (1+\rho)\sum_{\omega\in\Psi_1(\omega_0)} \lambda(\omega), \qquad (5)$$

$$\lambda(\nu) = (1+\rho)\sum_{\omega\in\Psi_{t+1}(\nu)} \lambda(\omega), \nu\in\Omega_t, t=1,\ldots,T-2, \qquad (6)$$

$$\lambda(\nu) = (1+\rho)\sum_{\omega\in\Psi_T(\nu)} \left(1+\lambda(\omega)\right), \nu\in\Omega_{T-1}, \qquad (7)$$

$$\lambda(\nu)S_i(\nu) = \sum_{\omega\in\Psi_{t+1}(\nu)} \lambda(\omega)S_i(\omega), i\in I, \nu\in\Omega_t, t=0,\ldots,T-2, \qquad (8)$$

$$\lambda(\nu)S_i(\nu) = \sum_{\omega\in\Psi_T(\nu)} \left(1+\lambda(\omega)\right)S_i(\omega), i\in I, \nu\in\Omega_{T-1}, \qquad (9)$$

$$\lambda(\omega_0) \ge 0, \qquad (10)$$

$$\lambda(\omega) \ge 0, \omega\in\Omega_T. \qquad (11)$$

Доказательство

Из (5),(6),(7) следует, что

$$\lambda\left(\omega_0\right)=\left(1+\rho\right)^t\sum_{\omega\in\Omega_t}\lambda\left(\omega\right)=\left(1+\rho\right)^T\sum_{\omega\in\Omega_T}\left(1+\lambda\left(\omega\right)\right),t=1,\ldots,T-1.$$

Введём новые обозначения для множителей Лагранжа:

$$p\left(\omega\right)=\left(1+\rho\right)^t\lambda\left(\omega\right),\omega\in\Omega_t,t=0,\ldots,T-1,$$

$$p\left(\omega\right)=\left(1+\rho\right)^T\left(1+\lambda\left(\omega\right)\right),\omega\in\Omega_T.$$

Доказательство

В новых обозначениях имеем, что

$$p(\omega_0) = \sum_{\omega \in \Psi_1(\omega_0)} p(\omega), \qquad (5')$$

$$p(\nu) = \sum_{\omega \in \Psi_{t+1}(\nu)} p(\omega), \nu \in \Omega_t, t = 1, \ldots, T-2, \qquad (6')$$

$$p(\nu) = \sum_{\omega \in \Psi_T(\nu)} p(\omega), \nu \in \Omega_{T-1}. \qquad (7')$$

$$p(\nu) S_i(\nu) = \sum_{\omega \in \Psi_{t+1}(\nu)} \frac{S_i(\omega)}{1+\rho} p(\omega), i \in I, \nu \in \Omega_t, t = 0, \ldots, T-1. \qquad (8')$$

Из $p(\omega) > 0, \omega \in \Omega_T$ и соотношений (5’)-(7’) следует, что

$$p(\omega) > 0, \omega \in \Omega_t, t = 0, \ldots, T.$$

Доказательство

Таким образом, по теореме двойственности фондовый рынок $\left\{\rho, S_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t \right\}$ безарбитражен тогда и только тогда, когда существуют $p(\omega) > 0, \omega \in \Omega_t, t = 0, \ldots, T,$ удовлетворяющие соотношениям (5')-(8'). В силу однородности линейных соотношений (5')-(8') можно дополнительно потребовать, чтобы выполнялась нормировка $p(\omega_0) = 1.$ Теорема доказана.

Из условия нормировки следует, что

$$\sum_{\omega \in \Omega_t} p(\omega) = 1, t = 0, \ldots, T.$$

Мартингальное распределение вероятностей

Будем интерпретировать множитель Лагранжа $p(\omega)$ как вероятность того, что фондовый рынок окажется в состоянии ω. Тогда соотношения (5')-(7') интерпретируются как балансы вероятностей, а соотношение (8') означает, что относительно распределения вероятностей $\left\{ p(\omega) > 0 \middle| \omega \in \Omega_t, t = 0, \ldots, T \right\}$ приведённые к 0 периоду времени цены каждой акции $i \in I$ $\left\{ (1+\rho)^{-t} S_i(\omega) \middle| \omega \in \Omega_t, t = 0, \ldots, T \right\}$ были мартингалом.

Следствие (закон единой цены)

Предположим, что фондовый рынок $\left\{\rho, S_i(\omega) \,\middle|\, i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t \right\}$ *безарбитражен. Если инвестиционные стратегии* $\left\{\xi_0(\omega), \xi_i(\omega) \,\middle|\, i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t \right\}$ *и* $\left\{\eta_0(\omega), \eta_i(\omega) \,\middle|\, i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t \right\}$ *дают одинаковую стоимость портфелей во всех терминальных состояниях, т.е.*

$$(1+\rho)\xi_0\left(\Phi_T(\omega)\right) + \sum_{i \in I} \xi_i\left(\Phi_T(\omega)\right) S_i(\omega) = (1+\rho)\eta_0\left(\Phi_T(\omega)\right) + \sum_{i \in I} \eta_i\left(\Phi_T(\omega)\right) S_i(\omega),\ \omega \in \Omega_T, \quad (12)$$

то

$$\forall \nu \in \Omega_t \quad \xi_0(\nu) + \sum_{i \in I} \xi_i(\nu) S_i(\nu) = \eta_0(\nu) + \sum_{i \in I} \eta_i(\nu) S_i(\nu) \quad t = 0, \ldots, T.$$

Доказательство

Поскольку фондовый рынок предполагается безарбитражным, по фундаментальной теореме о формировании цен финансовых активов существуют такие $\left\{ p(\omega) > 0 \middle| \omega \in \Omega_t, t = 0,\dots,T \right\}$, что выполнены (5')-(8') и $\sum_{\omega \in \Omega_t} p(\omega) = 1, t = 0,\dots,T.$ Будем рассуждать по индукции. По условию утверждение справедливо для $\forall \omega \in \Omega_T$. Будем предполагать, что по индуктивному для $\forall \omega \in \Omega_{t+1}$ справедливо равенство

$$\xi_0(\omega) + \sum_{i \in I} \xi_i(\omega) S_i(\omega) = \eta_0(\omega) + \sum_{i \in I} \eta_i(\omega) S_i(\omega). \qquad (13)$$

Доказательство

Зафиксируем произвольное состояние $\nu \in \Omega_t$.
Умножая соотношения (13) на $\frac{p(\omega)}{1+\rho}$ и суммируя по $\omega \in \Omega_t$, получаем, что

$$\sum_{\{\omega | \Phi_{t+1}(\omega)=\nu\}} \frac{p(\omega)}{1+\rho}\left\{\xi_0(\omega)+\sum_{i\in I}\xi_i(\omega)S_i(\omega)\right\} = \sum_{\{\omega | \Phi_{t+1}(\omega)=\nu\}} \frac{p(\omega)}{1+\rho}\left\{\eta_0(\omega)+\sum_{i\in I}\eta_i(\omega)S_i(\omega)\right\}.$$

Поскольку инвестиционные стратегии удовлетворяют условию самофинансирования портфеля, справедливы равенства для $\nu = \Phi_t(\omega)$

$$(1+\rho)\xi_0(\nu)+\sum_{i\in I}\xi_i(\nu)S_i(\omega) = \xi_0(\omega)+\sum_{i\in I}\xi_i(\omega)S_i(\omega),$$

$$(1+\rho)\eta_0(\nu)+\sum_{i\in I}\eta_i(\nu)S_i(\omega) = \eta_0(\omega)+\sum_{i\in I}\eta_i(\omega)S_i(\omega),$$

Доказательство

Откуда следует, что

$$\sum_{\{\omega|\Phi_{t+1}(\omega)=\nu\}} \frac{p(\omega)}{1+\rho}\left\{(1+\rho)\xi_0(\nu)+\sum_{i\in I}\xi_i(\nu)S_i(\omega)\right\} = \sum_{\{\omega|\Phi_{t+1}(\omega)=\nu\}} \frac{p(\omega)}{1+\rho}\left\{(1+\rho)\eta_0(\nu)+\sum_{i\in I}\eta_i(\nu)S_i(\omega)\right\}.$$

Переставляя порядок суммирования, имеем

$$\xi_0(\nu)\sum_{\{\omega|\Phi_{t+1}(\omega)=\nu\}} p(\omega)+\sum_{i\in I}\xi_i(\omega)\left(\sum_{\{\omega|\Phi_{t+1}(\omega)=\nu\}}\frac{p(\omega)S_i(\omega)}{1+\rho}\right)=$$

$$=\eta_0(\nu)\sum_{\{\omega|\Phi_{t+1}(\omega)=\nu\}} p(\omega)+\sum_{i\in I}\eta_i(\nu)\left(\sum_{\{\omega|\Phi_{t+1}(\omega)=\nu\}}\frac{p(\omega)S_i(\omega)}{1+\rho}\right). \qquad (14)$$

Доказательство

Учитывая (5’)-(8’), получаем, что

$$\xi_0(\nu)+\sum_{i\in I}\xi_i(\nu)S_i(\nu)=\eta_0(\nu)+\sum_{i\in I}\eta_i(\nu)S_i(\nu)$$

Определение

Пусть фондовый рынок $\left\{\rho, S_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t \right\}$ *безаритражен*

Будем говорить, что платёжное обязательство

$\left\{C(\omega) \middle| \omega \in \Omega_T \right\}$ *является достижимым (допускающим репликацию), если существует инвестиционная стратегия* $\left\{\xi_0(\omega), \xi_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t \right\}$ *такая, что выполняется условие самофинансирования портфеля и*

$$\forall \omega \in \Omega_T \quad C(\omega) = (1+\rho)\xi_0\left(\Phi_T(\omega)\right) + \sum_{i \in I} \xi_i\left(\Phi_T(\omega)\right) S_i(\omega).$$

Хеджирование

Инвестиционная стратегия $\left\{ \xi_0(\omega), \xi_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t \right\}$ *называется суперхеджирующей стратегией для платёжного обязательства* $\left\{ C(\omega) \middle| \omega \in \Omega_T \right\}$, *если выполняется условие самофинансирования и*

$$(1+\rho)\xi_0(\Phi_T(\omega)) + \sum_{i \in I} \xi_i(\Phi_T(\omega)) S_i(\omega) \geq C(\omega), \omega \in \Omega_T,$$

и называется субхеджирующей стратегией для платёжного обязательства $\left\{ C(\omega) \middle| \omega \in \Omega_T \right\}$, *если выполняется условие самофинансирования и*

$$(1+\rho)\xi_0(\Phi_T(\omega)) + \sum_{i \in I} \xi_i(\Phi_T(\omega)) S_i(\omega) \leq C(\omega), \omega \in \Omega_T.$$

Предложение 1

Пусть фондовый рынок $\left\{\rho, S_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t \right\}$ *безарбитражен, инвестиционная стратегия* $\left\{\xi_0(\omega), \xi_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t \right\}$ *является суперхеджирующей стратегией для платёжного обязательства* $\left\{C(\omega) \middle| \omega \in \Omega_T \right\}$, *а цена платежного обязательства в период времени 0 равна* $C(\omega_0)$. *Для того, чтобы не возникал арбитражный доход за счёт продажи платёжного обязательства, необходимо, чтобы*

$$\xi_0(\omega_0) + \sum_{i \in I} S_i(\omega_0)\, \xi_i(\omega_0) \geq C(\omega_0).$$

Доказательство

Если цена платёжного обязательства $C(\omega_0)$ больше, чем $\xi_0(\omega_0)+\sum_{i\in I}\xi_i(\omega_0)S_i(\omega_0)$, то можно продать платёжное обязательство и часть вырученных денег, равную $\xi_0(\omega_0)+\sum_{i\in I}\xi_i(\omega_0)S_i(\omega_0)$ использовать, чтобы реализовать суперхеджирующую стратегию, а остаток $C(\omega_0)-\xi_0(\omega_0)-\sum_{i\in I}\xi_i(\omega_0)S_i(\omega_0)$ будет арбитражным доходом.

Предложение 1’

Пусть фондовый рынок $\left\{\rho, S_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t\right\}$ *безарбитражен, инвестиционная стратегия* $\left\{\xi_0(\omega), \xi_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t\right\}$ *является субхеджирующей стратегией для платёжного обязательства* $\left\{C(\omega) \middle| \omega \in \Omega_T\right\}$, *а цена платежного обязательства в период времени 0 равна* $C(\omega_0)$. *Для того, чтобы не возникал арбитражный доход за счёт продажи платёжного обязательства, необходимо, чтобы*

$$\xi_0(\omega_0) + \sum_{i \in I} S_i(\omega_0)\,\xi_i(\omega_0) \le C(\omega_0).$$

Доказательство

Если цена платёжного обязательства $C(\omega_0)$ меньше, чем $\xi_0(\omega_0)+\sum_{i\in I}\xi_i(\omega_0)S_i(\omega_0)$, то можно купить платёжное обязательство и применить инвестиционную стратегию $\left\{-\xi_0(\omega),-\xi_i(\omega)\,\middle|\, i\in I,\omega\in\bigcup_{t=0}^{T-1}\Omega_t\right\}$. Платёжное обязательство позволит закрыть в терминальный период времени короткие позиции в инвестиционном портфеле, а разница $\xi_0(\omega_0)+\sum_{i\in I}\xi_i(\omega_0)S_i(\omega_0)-C(\omega_0)$ будет арбитражным доходом.

Оценка сверху цены платёжного обязательства

Верхняя оценка равна оптимальному значению функционала в задаче

$$\xi_0\left(\omega_0\right)+\sum_{i\in I}\xi_i\left(\omega_0\right)S_i\left(\omega_0\right)\to\min \qquad (15)$$

$$\left(1+\rho\right)\xi_0\left(\Phi_t\left(\omega\right)\right)+\sum_{i\in I}\xi_i\left(\Phi_t\left(\omega\right)\right)S_i\left(\omega\right)=\xi_0\left(\omega\right)+\sum_{i\in I}\xi_i\left(\omega\right)S_i\left(\omega\right),\quad \omega\in\bigcup_{t=1}^{T-1}\Omega_t, \qquad (16)$$

$$\left(1+\rho\right)\xi_0\left(\Phi_T\left(\omega\right)\right)+\sum_{i\in I}\xi_i\left(\Phi_T\left(\omega\right)\right)S_i\left(\omega\right)\ge C\left(\omega\right),\quad \omega\in\Omega_T. \qquad (17)$$

Функция Лагранжа

Обозначим множители Лагранжа к ограничениям (16) через $\left(1+\rho\right)^{-t} p\left(\omega\right), \omega \in \Omega_t, t=1,\dots,T-1$ и к ограничениям (17) через $\left(1+\rho\right)^{-T} p\left(\omega\right) \geq 0, \omega \in \Omega_T$.

Функция Лагранжа задачи (15)-(17) имеет вид

$$L\left(\left\{\xi_0\left(\omega\right),\xi_i\left(\omega\right)\middle| i\in I,\omega\in\bigcup_{t=0}^{T-1}\Omega_t\right\},\left\{p\left(\omega\right)\middle|\omega\in\bigcup_{t=1}^{T}\Omega_t\right\}\right)=\xi_0\left(\omega_0\right)+\sum_{i\in I}\xi_i\left(\omega_0\right)S_i\left(\omega_0\right)+$$

$$+\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{\omega\in\Omega_t}\left(1+\rho\right)^{-t} p\left(\omega\right)\left\{\xi_0\left(\omega\right)+\sum_{i\in I}\xi_i\left(\omega\right)S_i\left(\omega\right)-\left(1+\rho\right)\xi_0\left(\Phi_t\left(\omega\right)\right)-\sum_{i\in I}\xi_i\left(\Phi_t\left(\omega\right)\right)S_i\left(\omega\right)\right\}+$$

$$+\left(1+\rho\right)^{-T}\sum_{\omega\in\Omega_T} p\left(\omega\right)\left\{C\left(\omega\right)-\left(1+\rho\right)\xi_0\left(\Phi_T\left(\omega\right)\right)-\sum_{i\in I}\xi_i\left(\Phi_T\left(\omega\right)\right)S_i\left(\omega\right)\right\}$$

Функция Лагранжа

Перегруппировывая слагаемые, получаем

$$L\left(\left\{\xi_0(\omega),\xi_i(\omega)\middle| i\in I,\omega\in\bigcup_{t=0}^{T-1}\Omega_t\right\},\left\{p(\omega)\middle|\omega\in\bigcup_{t=1}^{T}\Omega_t\right\}\right)=$$

$$=(1+\rho)^{-T}\sum_{\omega\in\Omega_T}p(\omega)C(\omega)+\xi_0(\omega_0)\left(1-\sum_{\omega\in\Omega_1}p(\omega)\right)+\sum_{i\in I}\xi_i(\omega_0)\left(S_i(\omega_0)-(1+\rho)^{-1}\sum_{\omega\in\Omega_1}p(\omega)S_i(\omega)\right)+$$

$$\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{\nu\in\Omega_t}(1+\rho)^{-t}\left\{\xi_0(\nu)\left(p(\nu)-\sum_{\omega\in\Psi_{t+1}(\nu)}p(\omega)\right)+\sum_{i\in I}\xi_i(\nu)\left(p(\nu)S_i(\nu)-\sum_{\omega\in\Psi_{t+1}(\nu)}(1+\rho)^{-1}p(\omega)S_i(\omega)\right)\right\}$$

Оценку сверху в терминах двойственной задачи

Двойственная задача к (15)-(16) имеет вид:

$$(1+\rho)^{-T}\sum_{\omega\in\Omega_T} p(\omega)C(\omega)\to\max \qquad (18)$$

$$\sum_{\omega\in\Omega_1} p(\omega)=1, \qquad (19)$$

$$\sum_{\omega\in\Psi_{t+1}(\nu)} p(\omega)=p(\nu),\nu\in\Omega_t,t=1,\ldots,T-1, \qquad (20)$$

$$(1+\rho)^{-1}\sum_{\omega\in\Omega_1} p(\omega)S_i(\omega)=S_i(\omega_0), \qquad (21)$$

$$p(\nu)S_i(\nu)=\sum_{\omega\in\Psi_{t+1}(\nu)}(1+\rho)^{-1}p(\omega)S_i(\omega),i\in I,\nu\in\Omega_t,t=1,\ldots,T-1, \qquad (22)$$

$$p(\omega)\geq 0,\ \omega\in\Omega_t,t=1,\ldots,T-1. \qquad (23)$$

Оценка снизу цены платёжного обязательства

Верхняя оценка равна оптимальному значению функционала в задаче

$$\xi_0\left(\omega_0\right)+\sum_{i\in I}\xi_i\left(\omega_0\right)S_i\left(\omega_0\right)\to\max \qquad (24)$$

$$\left(1+\rho\right)\xi_0\left(\Phi_t\left(\omega\right)\right)+\sum_{i\in I}\xi_i\left(\Phi_t\left(\omega\right)\right)S_i\left(\omega\right)=\xi_0\left(\omega\right)+\sum_{i\in I}\xi_i\left(\omega\right)S_i\left(\omega\right),\quad \omega\in\bigcup_{t=1}^{T-1}\Omega_t, \quad (25)$$

$$\left(1+\rho\right)\xi_0\left(\Phi_T\left(\omega\right)\right)+\sum_{i\in I}\xi_i\left(\Phi_T\left(\omega\right)\right)S_i\left(\omega\right)\le C\left(\omega\right),\quad \omega\in\Omega_T. \qquad (26)$$

Оценку снизу в терминах двойственной задачи

Двойственная задача (24)-(26) имеет вид:

$$(1+\rho)^{-T}\sum_{\omega\in\Omega_T} p(\omega)C(\omega)\to\min \qquad (27)$$

$$\sum_{\omega\in\Omega_1} p(\omega)=1, \qquad (28)$$

$$\sum_{\omega\in\Psi_{t+1}(\nu)} p(\omega)=p(\nu),\nu\in\Omega_t,t=1,\dots,T-1, \qquad (29)$$

$$(1+\rho)^{-1}\sum_{\omega\in\Omega_1} p(\omega)S_i(\omega)=S_i(\omega_0), \qquad (30)$$

$$p(\nu)S_i(\nu)=\sum_{\omega\in\Psi_{t+1}(\nu)}(1+\rho)^{-1}p(\omega)S_i(\omega),i\in I,\nu\in\Omega_t,t=1,\dots,T-1, \qquad (31)$$

$$p(\omega)\geq 0,\ \omega\in\Omega_t,t=1,\dots,T-1. \qquad (32)$$

Предложение 2

Пусть фондовый рынок $\left\{\rho, S_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t \right\}$ *безарбитражен, а цена платёжного обязательства* $\left\{C(\omega) \middle| \omega \in \Omega_T \right\}$ *в период времени 0 равна* $C(\omega_0)$*. Тогда*

1. *если платёжное обязательство не реплицируемо, то* $C(\omega_0) \in \left(C_{\inf}(\omega_0), C_{\sup}(\omega_0)\right)$*, где* $C_{\sup}(\omega_0)$ *и* $C_{\inf}(\omega_0)$ *оптимальные значения функционалов в з.л.п. (18)-(23) и (2)-(32) соответственно;*
2. *если платёжное обязательство является достижимым, то* $C_{\inf}(\omega_0) = C_{\sup}(\omega_0)$*.*

Доказательство

В силу предложений 1 и 1' по теореме двойственности для задач линейного программирования получаем, что

$$C_{\sup}(\omega_0) \geq C(\omega_0) \geq C_{\inf}(\omega_0).$$

Покажем, что если платёжное обязательство не реплицируемо, то $C_{\sup}(\omega_0) > C(\omega_0)$.

Доказательство

В силу первой фундаментальной теоремы формирования цен финансовых активов система линейных ограничений (19)-(23) совместна и, следовательно, по теореме существования задача линейного программирования (18)-(23) имеет решение. По теореме двойственности получаем, что задача линейного программирования (15)-(17) также имеет решение $\left\{ \xi_0(\omega), \xi_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t \right\}$, причём $\xi_0(\omega_0) + \sum_{i \in I} \xi_i(\omega_0) S_i(\omega_0) = C_{\sup}(\omega_0)$.

Доказательство

Допустим противное, что $C_{\sup}\left(\omega_0\right)=C\left(\omega_0\right)$. Тогда, продавая платёжное обязательство $\left\{C\left(\omega\right)\middle|\omega\in\Omega_T\right\}$ и используя инвестиционную стратегию $\left\{\xi_0\left(\omega\right),\xi_i\left(\omega\right)\middle|i\in I,\omega\in\bigcup_{t=0}^{T-1}\Omega_t\right\}$ получаем арбитраж, поскольку платёжное обязательства не реплицируемо и хотя бы одно из неравенств (17) является строгим. Аналогично доказывается, что если платёжное обязательство не реплицируемо, то $C\left(\omega_0\right)>C_{\inf}\left(\omega_0\right)$.

Доказательство

Если платёжное обязательство реплицируемо, то

$$C(\omega_0) \ge C_{\sup}(\omega_0), C_{\inf}(\omega_0) \ge C(\omega_0),$$

и , значит, $C_{\inf}(\omega_0) = C_{\sup}(\omega_0)$.

Полные рынки

Определение. *Безарбитражный фондовый рынок называется полным, если каждое платёжное обязательство является достижимым.*

Вторая фундаментальная теорема формирования цен финансовых активов

Безарбитражный фондовый рынок $\left\{ \rho, S_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t \right\}$ *является полным тогда и только тогда, когда существует единственное мартингальное распределение вероятностей, т.е. существует единственный набор* $\left\{ p(\omega) > 0 \middle| \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t \right\}$, *удовлетворяющий соотношениям (5')-(8') и условию нормировки* $p(\omega_0) = 1.$

Доказательство

Пусть $\left\{\xi_0(\omega), \xi_i(\omega) \middle| i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t \right\}$- инвестиционная стратегия, реплицирующая платёжное обязательство $\left\{C(\omega) \middle| \omega \in \Omega_T \right\}$. Для любого мартингального распределения $\left\{p(\omega) > 0 \middle| \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t \right\}$ из (3), (5')-(8') следует, что

$$\xi_0(\omega_0) + \sum_{i \in I} \xi_i(\omega_0) S_i(\omega_0) = (1+\rho)^{-T} \sum_{\omega \in \Omega_T} p(\omega) \left\{ (1+\rho) \xi_0(\Phi_T(\omega)) + \sum_{i \in I} \xi_i(\Phi_T(\omega)) S_i(\omega) \right\}$$

Тогда по определению реплицирующей стратегии получаем, что цена платёжного обязательства равна

$$(1+\rho)^{-T} \sum_{\omega \in \Omega_T} p(\omega) C(\omega). \qquad (18)$$

Доказательство

Величина (18) для достижимого платёжного обязательства не должна зависеть от выбора мартингального распределения вероятностей $\left\{ p(\omega) > 0 \middle| \omega \in \bigcup_{t=0}^{T} \Omega_t \right\}$.

Чтобы это свойство выполнялось для любого платёжного обязательств $\left\{ C(\omega) \middle| \omega \in \Omega_T \right\}$ необходимо, чтобы существовало единственное мартингальное распределение вероятностей.

Доказательство

Если мартингальное распределение вероятностей единственно, то в силу предложения 2 любое платёжное обязательство является достижимым.

Замечание. В модели Кокса-Росса-Рубинштейна фондовый рынок является полным.