Введение в эргодическую теорию
Лекция 8

А.А.Шананин

Измеримые разбиения

Определение. Пусть $\{M, \Sigma, \mu\}, \mu(M) = 1$ вероятностное пространство. Разбиением называется совокупность множеств $\xi = \{A_i \mid i \in I_\xi\}$, такая, что $\forall i \in I_\xi \quad A_i \in \Sigma, \mu(A_i) > 0,$

$$\mu(A_i \cap A_j) = 0 \text{ при } i \neq j, \;\; \mu\left(M \setminus \bigcup_{i \in I_\xi} A_i\right) = 0.$$

Здесь I_ξ конечное или счетное множество,

Измеримые разбиения

Определение. Пусть $\xi = \left\{ A_i \,\middle|\, i \in I_\xi \right\}, \eta = \left\{ B_j \,\middle|\, j \in I_\eta \right\},$ разбиения. Будем говорить, что разбиения ξ и η совпадают $\left(\xi = \eta\right),$ если

$$\forall A_i \in \xi \ \exists B_j \in \eta : \mu\left(A_i \vartriangle B_j\right) = 0.$$

P.S. Тогда $\forall B_j \in \eta \ \exists A_i \in \xi : \mu\left(A_i \vartriangle B_j\right) = 0,$

т.е. если $\xi = \eta$, то $\eta = \xi$.

Измеримые разбиения

Определение. Пусть $\xi = \left\{ A_i \middle| i \in I_\xi \right\}, \eta = \left\{ B_j \middle| j \in I_\eta \right\}$, разбиения. Будем говорить, что $\xi \geq \eta$, если

$$\forall A_i \in \xi \, \exists B_j \in \eta : \mu\left(A_i \setminus B_j \right) = 0.$$

P.S. Заметим, что

$$\xi \geq \eta, \eta \geq \xi \Rightarrow \xi = \eta;$$

$$\xi \geq \eta, \eta \geq \varsigma \Rightarrow \xi \geq \varsigma.$$

Измеримые разбиения

Определение. Пусть $\xi = \left\{ A_i \middle| i \in I_\xi \right\}, \eta = \left\{ B_j \middle| j \in I_\eta \right\}$, разбиения. Положим

$$\xi \vee \eta = \left\{ A_i \cap B_j \middle| A_i \in \xi, B_j \in \eta, \mu\left(A_i \cap B_j\right) > 0 \right\}.$$

P.S. Заметим, что $\xi \vee \eta = \eta \vee \xi; (\xi \vee \eta) \vee \varsigma = \xi \vee (\eta \vee \varsigma);$

$$\xi \vee \eta \geq \xi, \xi \vee \eta \geq \eta;$$

$$\varsigma \geq \xi, \varsigma \geq \eta \Rightarrow \varsigma \geq \xi \vee \eta;$$

$$\xi \geq \eta \Rightarrow \xi \vee \varsigma \geq \eta \vee \varsigma.$$

Измеримые разбиения

Пусть $T : M \to M$ сохраняющее меру преобразование, $\xi = \left\{ A_i \middle| i \in I_\xi \right\}$ разбиение.
Тогда $T^{-1}(\xi) = \left\{ T^{-1}A_i \middle| i \in I_\xi \right\}$ разбиение.

Действительно,

$$\mu\left(T^{-1}A_i \cap T^{-1}A_j\right) = \mu\left(T^{-1}\left(A_i \cap A_j\right)\right) = \mu\left(A_i \cap A_j\right) = 0 \ \text{при } i \neq j,$$

$$\mu\left(M \setminus \bigcup_{i \in I_\xi} T^{-1}A_i \right) = \mu\left(M \setminus T^{-1}\left(\bigcup_{i \in I_\xi} A_i \right)\right) =$$

$$= 1 - \mu\left(T^{-1}\left(\bigcup_{i \in I_\xi} A_i \right)\right) = 1 - \mu\left(\bigcup_{i \in I_\xi} A_i \right) = 0.$$

Измеримые разбиения

Пусть $\xi = \left\{ A_i \middle| i \in I_\xi \right\}$ разбиение. Множество конечных или счетных объединений элементов ξ называется алгеброй $\Re(\xi)$ порождённой разбиением ξ.

Заметим, что $\xi = \eta \Leftrightarrow \Re(\xi) = \Re(\eta),$

$$\xi \geq \eta \Leftrightarrow \Re(\xi) \supset \Re(\eta),$$

$$\Re\left(\bigvee_{k \in J} \xi_k \right) = \bigvee_{k \in J} \Re(\xi_k).$$

Информация разбиения

Пусть $\xi = \left\{ A_i \,\middle|\, i \in I_\xi \right\}$ разбиение, $x \in M$.
Обозначим $A_\xi(x)$ элемент разбиения ξ,
содержащий x.
Информацией разбиения ξ называется
функция

$$I_\xi(x) = -\log_2 \mu\left(A_\xi(x)\right).$$

Энтропия разбиения

Определение. Энтропией разбиения $\xi = \left\{ A_i \,\middle|\, i \in I_\xi \right\}$ называется $H(\xi) = -\sum\limits_{i \in I_\xi} \mu(A_i) \log_2\left(\mu(A_i)\right)$.

P.S. $H(\xi) = \int\limits_M I_\xi(x)\mu(dx)$.

Определим функцию на отрезке [0,1]

$$z(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0, \\ -t\log_2 t, & \text{если } 0 < t \le 1. \end{cases}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\log_2 t - \log_2 e, \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\frac{\log_2 e}{t} < 0, \; e^{-1} = \operatorname*{Arg\,max}_{0<t\le t}\left(-t\log_2 t\right).$$

Условная энтропия разбиения

Определение. Условной энтропией разбиения $\xi = \left\{ A_i \,\middle|\, i \in I_\xi \right\}$ относительно разбиения $\eta = \left\{ B_j \,\middle|\, j \in I_\eta \right\}$ называется

$$H\left(\xi \middle| \eta\right) = \sum_{j \in I_\eta} \mu\left(B_j\right) \sum_{i \in I_\xi} z\left(\frac{\mu\left(B_j \cap A_i\right)}{\mu\left(B_j\right)} \right).$$

P.S.

$$H\left(\xi \middle| \eta\right) = -\sum_{j \in I_\eta} \mu\left(B_j\right) \sum_{i \in I_\xi} \left(\frac{\mu\left(B_j \cap A_i\right)}{\mu\left(B_j\right)} \right) \log_2 \left(\frac{\mu\left(B_j \cap A_i\right)}{\mu\left(B_j\right)} \right) =$$

$$= \sum_{j \in I_\eta} \sum_{i \in I_\xi} \mu\left(B_j \cap A_i\right) \left(\log_2 \mu\left(B_j \cap A_i\right) - \log_2 \mu\left(B_j\right) \right) = H\left(\xi \vee \eta\right) - H\left(\eta\right).$$

Свойства энтропии разбиения

Пусть $\{M, \Sigma, \mu\}, \mu(M) = 1$ вероятностное пространство, $\xi = \{A_i \mid i \in I_\xi\}, \eta = \{B_j \mid j \in I_\eta\}, \varsigma = \{C_k \mid k \in I_\varsigma\}$ разбиения. Тогда

1. $0 \le -\log_2\left(\sup_{i \in I_\xi} \mu(A_i)\right) \le H(\xi) \le \log_2|\xi|;$ если $|\xi| < \infty,$

то $H(\xi) = \log_2|\xi|$ тогда и только тогда, когда меры всех элементов ξ равны.

Доказательство.

Заметим, что $I_\xi(x) \geq -\log_2\left(\sup\limits_{x\in M} \mu\left(A_\xi(x)\right)\right) = -\log_2\left(\sup\limits_{i\in I_\xi} \mu(A_i)\right).$

Откуда следует, что $0 \leq -\log_2\left(\sup\limits_{i\in I_\xi} \mu(A_i)\right) \leq H(\xi).$

Пусть $|\xi| = k.$ Тогда

$$\frac{1}{k}\log_2 k = z\left(\frac{1}{k}\right) = z\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu(A_i)\right) \geq \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k}z\left(\mu(A_i)\right) = \frac{1}{k}H(\xi),$$

причем неравенство обращается в равенство, если и только если $\mu(A_1) = \mu(A_2) = \ldots = \mu(A_k).$

Свойства энтропии разбиения

2. $0 \le H(\xi|\eta) \le H(\xi)$; $H(\xi|\eta) = H(\xi)$ тогда и только тогда, когда ξ и η независимы, т.е. $\forall A_i \in \xi, \forall B_j \in \eta \quad \mu(A_i \cap B_j) = \mu(A_i)\mu(B_j)$.

Доказательство.

$$0 \le H(\xi|\eta) = \sum_{j \in I_\eta} \mu(B_j) \sum_{i \in I_\xi} z\left(\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(B_j)}\right) =$$

$$= \sum_{j \in I_\eta} \sum_{i \in I_\xi} \mu(B_j) z\left(\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(B_j)}\right) = \sum_{i \in I_\xi} \sum_{j \in I_\eta} \mu(B_j) z\left(\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(B_j)}\right) \le$$

$$\le \sum_{i \in I_\xi} z\left(\sum_{j \in I_\eta} \mu(B_j) \frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(B_j)}\right) = \sum_{i \in I_\xi} z(\mu(A_i)) = H(\xi).$$

Доказательство.

Причем

$$H(\xi|\eta)=H(\xi)\Leftrightarrow\forall i\in I_\xi\ \ z(\mu(A_i))=z\left(\sum_{j\in I_\eta}\mu(B_j)\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(B_j)}\right)=$$

$$=\sum_{j\in I_\eta}\mu(B_j)z\left(\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(B_j)}\right)\Leftrightarrow\forall i\in I_\xi\forall j\in I_\eta\ \ \mu(A_i)=\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(B_j)}.$$

Свойства энтропии разбиения

3. $H(\xi|\eta) = 0 \Leftrightarrow \xi \le \eta.$

Доказательство.

$$H(\xi|\eta) = \sum_{j \in I_\eta} \mu(B_j) \sum_{i \in I_\xi} z\left(\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(B_j)}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in I_\eta\ \forall i \in I_\xi\ \ z\left(\frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(B_j)}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I_\xi \forall j \in I_\eta\ \ \mu(A_i \cap B_j) = 0 \vee \mu(A_i \cap B_j) = \mu(B_j) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall j \in I_\eta\ \exists i \in I_\xi\ \mu(B_j \setminus A_i) = 0 \Leftrightarrow \xi \le \eta.$$

Свойства энтропии

4. $\mathrm{H}\left(\xi \vee \eta \middle| \varsigma\right) = \mathrm{H}\left(\xi \middle| \varsigma\right) + \mathrm{H}\left(\eta \middle| \xi \vee \varsigma\right)$.

Доказательство.

$$\mathrm{H}\left(\xi \vee \eta \middle| \varsigma\right) = -\sum_{k \in I_\zeta} \mu(C_k) \sum_{i \in I_\xi} \sum_{j \in I_\eta} \frac{\mu\left(A_i \cap B_j \cap C_k\right)}{\mu(C_k)} \log_2 \left(\frac{\mu\left(A_i \cap B_j \cap C_k\right)}{\mu(C_k)} \right) =$$

$$= -\sum_{i \in I_\xi} \sum_{j \in I_\eta} \sum_{k \in I_\varsigma} \mu\left(A_i \cap B_j \cap C_k\right) \log_2 \frac{\mu\left(A_i \cap B_j \cap C_k\right)}{\mu\left(A_i \cap C_k\right)} -$$

$$-\sum_{i \in I_\xi} \sum_{k \in I_\varsigma} \mu\left(A_i \cap C_k\right) \log_2 \frac{\mu\left(A_i \cap C_k\right)}{\mu(C_k)} = \mathrm{H}\left(\eta \middle| \xi \vee \varsigma\right) + \mathrm{H}\left(\xi \middle| \varsigma\right).$$

Свойства энтропии разбиения

5. Если $\xi \geq \eta$, то $\mathrm{H}\left(\xi|\varsigma\right) \geq \mathrm{H}\left(\eta|\varsigma\right)$.

Доказательство.

$$\xi \vee \eta = \xi,$$

$$\mathrm{H}\left(\xi|\varsigma\right) = \mathrm{H}\left(\xi \vee \eta|\varsigma\right) = \mathrm{H}\left(\eta|\varsigma\right) + \mathrm{H}\left(\xi|\eta \vee \varsigma\right) \geq \mathrm{H}\left(\eta|\varsigma\right).$$

Свойства энтропии разбиения

6. Если $\xi \geq \eta$, то $H(\varsigma|\xi) \leq H(\varsigma|\eta)$.

Доказательство. Обозначим

$$\forall j \in I_\eta \;\; \beta(j) = \{ i | \mu(A_i \setminus B_j) = 0 \}.$$

Тогда

$$\forall j \in I_\eta \;\; \mu\left(B_j \vartriangle \left(\bigcup_{i \in \beta(j)} A_i \right) \right) = 0.$$

Доказательство

Заметим, что

$$\forall j \in I_\eta \forall k \in I_\varsigma \sum_{i\in\beta(j)} \frac{\mu(C_k \cap A_i)}{\mu(A_i)} \frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(B_j)} = \frac{\mu(C_k \cap B_j)}{\mu(B_j)}.$$

В силу вогнутости функции $z(t)$ имеем, что

$$\forall j \in I_\eta \forall k \in I_\varsigma \; z\left(\frac{\mu(C_k \cap B_j)}{\mu(B_j)}\right) = z\left(\sum_{i\in\beta(j)} \frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(B_j)} \frac{\mu(C_k \cap A_i)}{\mu(A_i)}\right) \geq$$

$$\geq \sum_{i\in\beta(j)} \frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(B_j)} z\left(\frac{\mu(C_k \cap A_i)}{\mu(A_i)}\right) = \sum_{i\in\beta(j)} \frac{\mu(A_i)}{\mu(B_j)} z\left(\frac{\mu(C_k \cap A_i)}{\mu(A_i)}\right).$$

Доказательство

Тогда

$$H(\varsigma|\eta)=\sum_{j\in I_\eta}\mu(B_j)\sum_{k\in I_\varsigma}z\left(\frac{\mu(C_k\cap B_j)}{\mu(B_j)}\right)\geq$$

$$\geq\sum_{j\in I_\eta}\mu(B_j)\sum_{k\in I_\varsigma}\sum_{i\in\beta(j)}\frac{\mu(A_i)}{\mu(B_j)}z\left(\frac{\mu(C_k\cap A_i)}{\mu(A_i)}\right)=$$

$$=\sum_{k\in I_\varsigma}\sum_{i\in I_\xi}\mu(A_i)z\left(\frac{\mu(C_k\cap A_i)}{\mu(A_i)}\right)=\sum_{i\in I_\xi}\mu(A_i)\sum_{k\in I_\varsigma}z\left(\frac{\mu(C_k\cap A_i)}{\mu(A_i)}\right)=H(\varsigma|\xi).$$

Свойства энтропии разбиения

7. $H(\xi \vee \eta | \varsigma) \le H(\xi | \varsigma) + H(\eta | \varsigma).$

Доказательство. В силу свойства 4 имеем, что

$$H(\xi \vee \eta | \varsigma) = H(\xi | \varsigma) + H(\eta | \xi \vee \varsigma).$$

Поскольку $\xi \vee \varsigma \ge \varsigma$, в силу свойства 6

получаем $H(\eta | \xi \vee \varsigma) \le H(\eta | \varsigma).$

Следовательно,

$$H(\xi \vee \eta | \varsigma) \le H(\xi | \varsigma) + H(\eta | \varsigma).$$

Свойства энтропии разбиения

8. $\mathrm{H}(\xi|\eta)+\mathrm{H}(\eta|\varsigma)\geq\mathrm{H}(\xi|\varsigma)$.

Доказательство. В силу свойства 4 имеем, что

$$\mathrm{H}(\xi|\eta)+\mathrm{H}(\eta|\varsigma)=\mathrm{H}(\xi\vee\eta)-\mathrm{H}(\eta)+\mathrm{H}(\eta\vee\varsigma)-\mathrm{H}(\varsigma)=$$

$$=\mathrm{H}(\xi\vee\eta)+\mathrm{H}(\varsigma|\eta)-\mathrm{H}(\varsigma)=$$

$$=\mathrm{H}(\xi\vee\eta\vee\varsigma)-\mathrm{H}(\varsigma|\xi\vee\eta)+\mathrm{H}(\varsigma|\eta)-\mathrm{H}(\varsigma).$$

Поскольку $\xi\vee\eta\geq\eta$, из свойства 6 получаем

$$\mathrm{H}(\varsigma|\eta)\geq\mathrm{H}(\varsigma|\xi\vee\eta).$$

Доказательство

Следовательно, $\mathrm{H}(\xi|\eta)+\mathrm{H}(\eta|\varsigma)\geq\mathrm{H}(\xi\vee\eta\vee\varsigma)-\mathrm{H}(\varsigma)$

В силу свойства 4 имеем, что

$$\mathrm{H}(\xi\vee\eta\vee\varsigma)-\mathrm{H}(\varsigma)=\mathrm{H}(\xi\vee\eta|\varsigma)$$

Поскольку $\xi\vee\eta\geq\xi$, в силу свойства 5 получаем, что

$$\mathrm{H}(\xi|\eta)+\mathrm{H}(\eta|\varsigma)\geq\mathrm{H}(\xi\vee\eta\vee\varsigma)-\mathrm{H}(\varsigma)=\mathrm{H}(\xi\vee\eta|\varsigma)\geq\mathrm{H}(\xi|\varsigma).$$

Свойства энтропии разбиения

9. Если λ другая инвариантная мера на $\{M, \Sigma\}$
и $p \in [0,1]$, то для любого разбиения

$$\xi = \{A_i \mid i \in I_\xi\}$$

относительно μ и λ выполнено неравенство

$$pH_\mu(\xi) + (1-p)H_\lambda(\xi) \le H_{p\mu+(1-p)\lambda}(\xi).$$

Доказательство

В силу вогнутости функции $z(t)$ имеем, что

$$pH_\mu(\xi)+(1-p)H_\lambda(\xi)=p\sum_{i\in I_\xi} z(\mu(A_i))+(1-p)\sum_{i\in I_\xi} z(\lambda(A_i))=$$

$$=\sum_{i\in I_\xi}\Big(p\,z(\mu(A_i))+(1-p)z(\lambda(A_i))\Big)\le\sum_{i\in I_\xi} z\big(p\mu(A_i)+(1-p)\lambda(A_i)\big)=$$

$$=H_{p\mu+(1-p)\lambda}(\xi).$$

Метрика Рохлина

Определим на множестве разбиений с конечной энтропией метрику

$$d_R(\xi,\eta)=H(\xi|\eta)+H(\eta|\xi)\geq 0.$$

Проверка корректности определения.

1. $$d_R(\xi,\eta)=0\Leftrightarrow H(\xi|\eta)=0, H(\eta|\xi)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \xi\geq\eta, \eta\geq\xi\Leftrightarrow\xi=\eta.$$

Корректность определения

2. $d_R(\xi,\eta) = H(\xi|\eta) + H(\eta|\xi) = d_R(\eta,\xi).$

3. $d_R(\xi,\eta) + d_R(\eta,\varsigma) = H(\xi|\eta) + H(\eta|\xi) + H(\eta|\varsigma) + H(\varsigma|\eta).$

В силу свойства 8 имеем, что

$$H(\xi|\eta) + H(\eta|\varsigma) \geq H(\xi|\varsigma),\ H(\varsigma|\eta) + H(\eta|\xi) \geq H(\varsigma|\xi).$$

Следовательно, складывая неравенства, получаем, что

$$d_R(\xi,\eta) + d_R(\eta,\varsigma) \geq H(\xi|\varsigma) + H(\varsigma|\xi) = d_R(\xi,\varsigma).$$

Лемма 1

Множество конечных разбиений плотно в метрическом пространстве разбиений Ψ.

Доказательство. Пусть разбиение $\xi \in \Psi$ содержит счетное число элементов:

$$\xi = \left\{ A_i \middle| i = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Зафиксируем произвольное ε>0.

Доказательство

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\mu(A_i)=1,-\sum_{i=1}^{+\infty}\mu(A_i)\log_2\mu(A_i)<+\infty,$$

существует n_ε такое, что при $n \geq n_\varepsilon$

$$\sum_{i=n}^{+\infty}\mu(A_i)<\varepsilon,-\sum_{i=n}^{+\infty}\mu(A_i)\log_2\left(\mu(A_i)\right)<\varepsilon.$$

Доказательство

Положим $E_n = M \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$. Рассмотрим конечное разбиение $\xi^{(n)} = \left\{A_1, \ldots, A_{n-1}, E_n\right\}$.

Тогда $\xi \geq \xi^{(n)} \Rightarrow H\left(\xi^{(n)} \middle| \xi\right) = 0$. Следовательно,

$$d_R\left(\xi, \xi^{(n)}\right) = H\left(\xi \middle| \xi^{(n)}\right) = H(\xi) - H\left(\xi^{(n)}\right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) \log_2\left(\mu(A_i)\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \mu(A_i) \log_2\left(\mu(A_i)\right) + \mu(E_n) \log_2 \mu(E_n) =$$

$$= -\sum_{i=n}^{+\infty} \mu(A_i) \log_2\left(\mu(A_i)\right) + \left(\sum_{i=n}^{+\infty} \mu(A_i)\right) \log_2\left(\sum_{i=n}^{+\infty} \mu(A_i)\right) < \varepsilon.$$

Метрика на конечных разбиениях

Пусть ξ и η разбиения, имеющие не более, чем m элементов. Дополнив разбиения множествами нулевой меры

$$\xi = \{A_1, \ldots, A_m\}, \eta = \{B_1, \ldots, B_m\},$$

определим

$$D(\xi, \eta) = \min_{\sigma} \sum_{i=1}^{m} \mu\left(A_i \triangle B_{\sigma(i)}\right),$$

где min берется по всем перестановкам б.

Лемма 2

Для любого ε>0 существует δ>0 такое, что если $D(\xi,\eta)<\delta,$ *то* $d_R(\xi,\eta)<\varepsilon.$

Доказательство. Пусть $\sigma_{opt}=\mathrm{id}, D(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i \triangle B_i)=\delta.$

Оценим $H(\eta|\xi)$. Пусть

$$\mu(A_i)>0, \alpha_i=\frac{\mu(A_i \setminus B_i)}{\mu(A_i)}.$$

В силу свойства 1 оценим энтропию разбиения $A_i \setminus B_i=\bigcup_{j\neq i}(A_i \cap B_j).$

Доказательство

Имеем $-\sum_{j\neq i}\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(A_i\setminus B_i)}\log_2\left(\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(A_i\setminus B_i)}\right)\leq\log_2(m-1),$

$$-\mu(B_i\cap A_i)\log_2\frac{\mu(B_i\cap A_i)}{\mu(A_i)}-\sum_{j\neq i}\mu(B_j\cap A_i)\log_2\frac{\mu(B_j\cap A_i)}{\mu(A_i)}=$$

$$=-\mu(B_i\cap A_i)\log_2\frac{\mu(B_i\cap A_i)}{\mu(A_i)}-\mu(A_i\setminus B_i)\sum_{j\neq i}\frac{\mu(B_j\cap A_i)}{\mu(A_i\setminus B_i)}\log_2\frac{\mu(B_j\cap A_i)\mu(A_i\setminus B_i)}{\mu(A_i\setminus B_i)\mu(A_i)}=$$

$$-\mu(B_i\cap A_i)\log_2\frac{\mu(B_i\cap A_i)}{\mu(A_i)}-\mu(A_i\setminus B_i)\log_2\frac{\mu(A_i\setminus B_i)}{\mu(A_i)}-$$

$$-\mu(A_i\setminus B_i)\sum_{j\neq i}\frac{\mu(B_j\cap A_i)}{\mu(A_i\setminus B_i)}\log_2\frac{\mu(B_j\cap A_i)}{\mu(A_i\setminus B_i)}\leq$$

$$\leq\mu(A_i)\left[-(1-\alpha_i)\log_2(1-\alpha_i)-\alpha_i\log_2\alpha_i+\alpha_i\log_2(m-1)\right].$$

Доказательство

Поскольку в силу вогнутости функции $\log_2 x$

$$-(1-\alpha_i)\log_2(1-\alpha_i)-\alpha_i\log_2\alpha_i+\alpha_i\log_2(m-1)=$$

$$=(1-\alpha_i)\log_2\frac{1}{(1-\alpha_i)}+\alpha_i\log_2\frac{m-1}{\alpha_i}\le\log_2 m,$$

получаем, что

$$-\mu(B_i\cap A_i)\log_2\frac{\mu(B_i\cap A_i)}{\mu(A_i)}-\sum_{j\ne i}\mu(B_j\cap A_i)\log_2\frac{\mu(B_j\cap A_i)}{\mu(A_i)}\le$$

$$\le\mu(A_i)\log_2 m.$$

Доказательство

Тогда

$$H(\eta|\xi) \le \sum_{\mu(A_i)\ge\sqrt{\delta}} \mu(A_i)\left[-(1-\alpha_i)\log_2(1-\alpha_i)-\alpha_i\log_2\alpha_i+\alpha_i\log_2(m-1)\right]+$$

$$+\sum_{\mu(A_i)<\sqrt{\delta}} \mu(A_i)\log_2 m.$$

Поскольку

$$\alpha_i\mu(A_i)=\mu(A_i\setminus B_i)=\sum_{j\ne i}\mu\left(A_i\cap B_j\right)\le\sum_{j=1}^{m}\mu\left(A_j\vartriangle B_j\right)=\delta,$$

для $\mu(A_i)\ge\sqrt{\delta}$ получаем, что $\alpha_i\le\sqrt{\delta}$.

Доказательство

Функция $\varphi(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ возрастает на интервале $(0, 1/2)$. Поэтому при $\delta < 1/4$ получаем, что

$$H(\eta|\xi) \le \varphi\left(\sqrt{\delta}\right) + \sqrt{\delta}\,\log_2(m-1) + \sqrt{\delta}\,m\,\log_2 m$$

Поскольку $\lim\limits_{x \to +0} \varphi(x) = 0,$ завершаем доказательство леммы.

Задача

Доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \mathrm{d}_{\mathrm{R}}(\xi, \eta) < \delta \Rightarrow \mathrm{D}(\xi, \eta) < \varepsilon.$$

Лемма 3

Пусть $\{M, \Sigma, \mu\}, \mu(M) = 1$ вероятностное пространство и $\left\{\xi_j \middle| j = 1, 2, \ldots\right\}$ последовательность разбиений, такая, что
$\xi_1 \leq \xi_2 \leq \ldots \leq \xi_n \leq \xi_{n+1} \leq \ldots$ и $\Re\left(\bigvee_{j=1}^{+\infty} \xi_j\right) = \Sigma.$

Тогда множество разбиений $\left\{\eta \in \Psi \middle| \exists n : \eta \leq \xi_n\right\}$ всюду плотно в метрическом пространстве Ψ в метрике Рохлина.

Доказательство

В силу лемм 1 и 2 достаточно доказать, что для любого конечного разбиения $\varsigma = \{A_1, \ldots, A_m\}$ и любого $\delta > 0$ найдется разбиение $\eta = \{B_1, \ldots, B_m\}$ такое, что $D(\varsigma, \eta) < \delta, \exists n : \eta \leq \xi_n$.

Заметим, что

$$\Sigma = \Re\left(\bigvee_{j=1}^{+\infty} \xi_j\right) = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \Re\left(\xi_j\right), \Re\left(\bigvee_{j=1}^{n} \xi_j\right) = \Re\left(\xi_n\right).$$

Доказательство

Следовательно, $\exists n : \exists A_i^{\circ} \in \Re\left(\xi_n\right), \mu\left(A_i \vartriangle A_i^{\circ}\right) < \frac{\delta}{2m^2}, i = 1, \ldots, m.$

Положим

$$B_1 = A_1^{\circ}, B_j = A_j^{\circ} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} A_i^{\circ} \right), j = 2, \ldots, m-1, B_m = M \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i^{\circ} \right).$$

Тогда

$$\eta = \left\{ B_j \middle| j = 1, \ldots, m \right\} \leq \xi_n, D\left(\varsigma, \eta\right) < \delta.$$

Энтропия преобразования относительно разбиения

Обозначим $\xi_{-n}^{T} = \xi \vee T^{-1}(\xi) \vee \ldots \vee T^{-n+1}(\xi).$

Предложение 1. Существуют и равны пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\xi_{-n}^{T}\right) = \lim_{n\to\infty} H\left(T^{-n}(\xi)\middle|\xi_{-n}^{T}\right).$$

Доказательство. Из $\xi_{-n-1}^{T} \geq \xi_{-n}^{T}$ в силу свойства 5 следует, что $s_n = H\left(\xi_{-n-1}^{T}\right) - H\left(\xi_{-n}^{T}\right) \geq 0, n = 0,1,\ldots$

Заметим, что

$$s_n = H\left(\xi_{-n-1}^{T}\right) - H\left(\xi_{-n}^{T}\right) = H\left(T^{-n}(\xi)\middle|\xi_{-n}^{T}\right).$$

Доказательство

Поскольку $\xi_{-n}^{T} \geq T^{-1}\left(\xi_{-n+1}^{T}\right)$, используя свойство 6, получаем, что

$$s_{n-1} = H\left(\xi_{-n}^{T}\right) - H\left(\xi_{-n+1}^{T}\right) = H\left(T^{-n+1}\left(\xi\right)\middle|\xi_{-n+1}^{T}\right) =$$

$$= H\left(T^{-n}\left(\xi\right)\middle|T^{-1}\left(\xi_{-n+1}^{T}\right)\right) \geq H\left(T^{-n}\left(\xi\right)\middle|\xi_{-n}^{T}\right).$$

Поскольку монотонная ограниченная последовательность имеет предел, существует

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s^* \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\xi_{-n}^{T}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k = s^*.$$

Энтропия преобразования относительно разбиения

Определение. Метрической энтропией сохраняющего меру преобразования T относительно разбиения ξ называется величина

$$h(T,\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\xi_{-n}^{T}\right).$$

Замечание

Для автоморфизма справедливо равенство

$$h(T,\xi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} H\left(\bigvee_{j=-n}^{n} T^{j}(\xi) \right) = h\left(T^{-1},\xi\right).$$

Предложение 1

Справедливо равенство

$$h(T,\xi)=\lim_{n\to+\infty} H\left(\xi \middle| T^{-1}\left(\xi_{-n}^{T}\right)\right).$$

Доказательство. В силу свойства 4 энтропии

разбиения имеем, что

$$H\left(\xi_{-n}^{T}\right)=H\left(T^{-1}\left(\xi_{-n+1}^{T}\right)\right)+H\left(\xi \middle| T^{-1}\left(\xi_{-n+1}^{T}\right)\right).$$

Поскольку T сохраняющее меру преобразование

$$H\left(T^{-1}\left(\xi_{-n+1}^{T}\right)\right)=H\left(\xi_{-n+1}^{T}\right).$$

Доказательство

Следовательно,

$$H\left(\xi_{-n}^{T}\right)=H\left(\xi_{-n+1}^{T}\right)+H\left(\xi\middle|T^{-1}\left(\xi_{-n+1}^{T}\right)\right).$$

Последовательно применяя эту формулу,

получаем, что

$$H\left(\xi_{-n}^{T}\right)=H\left(\xi\right)+\sum_{k=0}^{n-1}H\left(\xi\middle|T^{-1}\left(\xi_{-k}^{T}\right)\right).$$

Доказательство

В силу свойства 6 энтропии разбиения последовательность $\left\{H\left(\xi \middle| T^{-1}\left(\xi_{-n}^{T}\right)\right) \middle| n = 0,1,\ldots\right\}$ монотонно не возрастает. Поскольку монотонная ограниченная последовательность имеет предел, существует предел

$$\lim_{n\to+\infty} H\left(\xi \middle| T^{-1}\left(\xi_{-n}^{T}\right)\right).$$

Тогда

$$h(T,\xi) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(\xi_{-n}^{T}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}H\left(\xi \middle| T^{-1}\left(\xi_{-n}^{T}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} H\left(\xi \middle| T^{-1}\left(\xi_{-n}^{T}\right)\right).$$

Неравенство Рохлина

Справедлива оценка $\left|h(T,\xi)-h(T,\eta)\right| \le d_R(\xi,\eta)$.

Доказательство. В силу свойства 4 энтропии разбиения имеем, что

$$H\left(\xi_{-n}^{T} \middle| \eta_{-n}^{T}\right) = H\left(\xi_{-n}^{T} \vee \eta_{-n}^{T}\right) - H\left(\eta_{-n}^{T}\right),$$

$$H\left(\eta_{-n}^{T} \middle| \xi_{-n}^{T}\right) = H\left(\xi_{-n}^{T} \vee \eta_{-n}^{T}\right) - H\left(\xi_{-n}^{T}\right).$$

Откуда следует, что

$$H\left(\xi_{-n}^{T} \middle| \eta_{-n}^{T}\right) - H\left(\eta_{-n}^{T} \middle| \xi_{-n}^{T}\right) = H\left(\xi_{-n}^{T}\right) - H\left(\eta_{-n}^{T}\right).$$

Доказательство

Следовательно,

$$\left|H\left(\xi_{-n}^{T}\right)-H\left(\eta_{-n}^{T}\right)\right|\le H\left(\xi_{-n}^{T}\middle|\eta_{-n}^{T}\right)+H\left(\eta_{-n}^{T}\middle|\xi_{-n}^{T}\right).$$

В силу свойства 7 энтропии разбиения имеем, что

$$H\left(\xi_{-n}^{T}\middle|\eta_{-n}^{T}\right)=H\left(\xi\vee T^{-1}(\xi)\vee\ldots\vee T^{-n+1}(\xi)\middle|\eta_{-n}^{T}\right)\le$$

$$\le H\left(\xi\middle|\eta_{-n}^{T}\right)+H\left(T^{-1}(\xi)\middle|\eta_{-n}^{T}\right)+\ldots+H\left(T^{-n+1}(\xi)\middle|\eta_{-n}^{T}\right).$$

Доказательство

Заметим, что

$$\eta_{-n}^{T} = \eta \vee T^{-1}(\eta) \vee \ldots \vee T^{-n+1}(\eta) \Rightarrow$$

$$\eta_{-n}^{T} \geq \eta, \eta_{-n}^{T} \geq T^{-1}(\eta), \ldots, \eta_{-n}^{T} \geq T^{-n+1}(\eta).$$

В силу свойства 7 энтропии разбиения имеем, что

$$H\left(\xi_{-n}^{T} \middle| \eta_{-n}^{T}\right) \leq H(\xi|\eta) + H\left(T^{-1}(\xi)\middle|T^{-1}(\eta)\right) + \ldots + H\left(T^{-n+1}(\xi)\middle|T^{-n+1}(\eta)\right)$$

$$= n\,H(\xi|\eta).$$

Доказательство

Аналогично доказывается, что $H\left(\eta_{-n}^{T}\middle|\xi_{-n}^{T}\right)\le n\,H\left(\eta|\xi\right).$

Следовательно,

$$\left|H\left(\xi_{-n}^{T}\right)-H\left(\eta_{-n}^{T}\right)\right|\le n\left(H\left(\xi|\eta\right)+H\left(\eta|\xi\right)\right)=n\,d_{R}\left(\xi,\eta\right).$$

Откуда, разделив на n и устремив $n\to+\infty,$

получаем, что

$$\left|h\left(T,\xi\right)-h\left(T,\eta\right)\right|\le d_{R}\left(\xi,\eta\right).$$

Пример. Схема Бернулли $\mathrm{B}(p_1,...,p_m)$.

Рассмотрим динамическую систему Бернулли $\mathrm{B}(p_1,...,p_m)$. Положим

$$\mathbf{A}_i = \{\omega \in \Omega_m \,|\, \omega_0 = i\}, i = 0,..,m-1.$$

Рассмотрим разбиение $\xi = \{A_i \,|\, i = 0,...,m-1\}$.

Пример. Схема Бернулли $B(p_1,\ldots,p_m)$.

Тогда

$$H\left(\xi_{-n}^{T}\right) = -\sum_{k_1=0}^{m-1}\ldots\sum_{k_n=0}^{m-1} p_{k_1+1}\ldots p_{k_n+1}\log_2\left(p_{k_1+1}\ldots p_{k_n+1}\right) =$$

$$= -\sum_{k_1=0}^{m-1}\ldots\sum_{k_n=0}^{m-1} p_{k_1+1}\ldots p_{k_n+1}\left(\log_2\left(p_{k_1+1}\ldots p_{k_{n-1}+1}\right) + \log_2 p_{k_n+1}\right) =$$

$$= -\sum_{k_1=0}^{m-1}\ldots\sum_{k_n=0}^{m-1} p_{k_1+1}\ldots p_{k_{n-1}+1}\log_2\left(p_{k_1+1}\ldots p_{k_{n-1}+1}\right) - \sum_{k_n=0}^{m-1} p_{k_n+1}\log_2 p_{k_n+1} =$$

$$= H\left(\xi_{-n+1}^{T}\right) - \sum_{k=1}^{m} p_k\log_2 p_k = -n\sum_{k=1}^{m} p_k\log_2 p_k .$$

Пример. Схема Бернулли $B(p_1,\ldots,p_m)$.

Откуда

$$h(T,\xi)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(\xi_{-n}^{T}\right)=-\sum_{k=1}^{m}p_k\log_2 p_k.$$

Свойства энтропии преобразования относительно разбиения

1. $0 \le \overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(-\frac{1}{n}\log_2\left(\sup_{A\in\xi_{-n}^{T}}\mu(A)\right)\right) \le h(T,\xi) \le H(\xi).$

Доказательство. В силу свойства 1 энтропии разбиения имеем, что

$$0 \le -\log_2\left(\sup_{A\in\xi_{-n}^{T}}\mu(A)\right) \le H\left(\xi_{-n}^{T}\right),$$

Откуда $$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(-\frac{1}{n}\log_2\left(\sup_{A\in\xi_{-n}^{T}}\mu(A)\right)\right) \le h(T,\xi).$$

Доказательство

В силу свойства 4 энтропии разбиения имеем, что

$$H\left(\xi_{-n}^{T}\right) \le H(\xi) + H\left(T^{-1}(\xi)\right) + \ldots + H\left(T^{-n+1}(\xi)\right) = n\,H(\xi).$$

Откуда следует, что

$$h(T,\xi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(\xi_{-n}^{T}\right) \le H(\xi).$$

Свойства энтропии преобразования относительно разбиения

2. $h(T,\xi\vee\eta)\le h(T,\xi)+h(T,\eta).$

Доказательство. $(\xi\vee\eta)_{-n}^{T}=\xi_{-n}^{T}\vee\eta_{-n}^{T}.$

В силу свойства 4 энтропии разбиения имеем, что

$$H\left((\xi\vee\eta)_{-n}^{T}\right)\le H\left(\xi_{-n}^{T}\right)+H\left(\eta_{-n}^{T}\right).$$

Откуда

$$h(T,\xi\vee\eta)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left((\xi\vee\eta)_{-n}^{T}\right)\le$$

$$\le\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(\xi_{-n}^{T}\right)+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(\eta_{-n}^{T}\right)=h(T,\xi)+h(T,\eta).$$

Свойства энтропии преобразования относительно разбиения

3. $h(T,\eta)\le h(T,\xi)+H(\eta|\xi)$. Если $\xi\ge\eta$, то $h(T,\eta)\le h(T,\xi)$.

Доказательство. В силу свойств 4 и 5 энтропии разбиения из $\eta_{-n}^{T}\le\xi_{-n}^{T}\vee\eta_{-n}^{T}$ имеем, что

$$H\left(\eta_{-n}^{T}\right)\le H\left(\xi_{-n}^{T}\vee\eta_{-n}^{T}\right)=H\left(\xi_{-n}^{T}\right)+H\left(\eta_{-n}^{T}\middle|\xi_{-n}^{T}\right).$$

Поскольку $H\left(\xi_{-n}^{T}\middle|\eta_{-n}^{T}\right)\le n\,H(\xi|\eta)$ (см. доказательство неравенства Рохлина) имеем

$$H\left(\eta_{-n}^{T}\right)\le H\left(\xi_{-n}^{T}\right)+n\,H(\eta|\xi).$$

Доказательство

Если $\xi \geq \eta,$ то $\mathrm{H}\left(\eta \middle| \xi\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{H}\left(\eta_{-n}^{T}\right) \leq \mathrm{H}\left(\xi_{-n}^{T}\right).$

Разделив на n и устремив $n \to +\infty$, завершаем доказательство утверждения.

Свойства энтропии преобразования относительно разбиения

4. $h\left(T, T^{-1}(\xi)\right) = h(T, \xi)$. Если T обратимое преобразование, то $h(T, \xi) = h\left(T, T(\xi)\right)$.

Доказательство. $H\left(\left(T^{-1}(\xi)\right)_{-n}^{T}\right) = H\left(T^{-1}\left(\xi_{-n}^{T}\right)\right) = H\left(\xi_{-n}^{T}\right)$.

Аналогично для обратимого преобразования

$$H\left(\left(T(\xi)\right)_{-n}^{T}\right) = H\left(T\left(\xi_{-n}^{T}\right)\right) = H\left(\xi_{-n}^{T}\right).$$

Разделив на n и $n \to +\infty$, получаем утверждение

Свойства энтропии преобразования относительно разбиения

5. $h(T,\xi) = h\left(T, \bigvee_{i=0}^{k} T^{-i}(\xi)\right)$. Если T обратимое преобразование, то $h(T,\xi) = h\left(T, \bigvee_{i=-k}^{k} T^{i}(\xi)\right)$.

Доказательство.
$$\left(\bigvee_{i=0}^{k} T^{-i}(\xi)\right)_{-n}^{T} = \xi_{-n-k}^{T}.$$

Следовательно,

$$h\left(T, \bigvee_{i=0}^{k} T^{-i}(\xi)\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(\xi_{-n-k}^{T}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+k} H\left(\xi_{-n-k}^{T}\right) = h(T,\xi).$$

Свойства энтропии преобразования относительно разбиения

6. Если λ другая инвариантная вероятностная мера для преобразования $T: M \to M$ и $p \in [0,1]$, то для любого разбиения ξ справедливо неравенство

$$p\,h_{\mu}(T,\xi) + (1-p)\,h_{\lambda}(T,\xi) \le h_{p\mu+(1-p)\lambda}(T,\xi).$$

Энтропия динамической системы

Определение. Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ абстрактная динамическая система. Энтропией динамической системы называется

$$h(T) = \sup_{\xi \in \Psi} h(T, \xi).$$

Теорема

Если абстрактные динамические системы $\{M_1, \Sigma_1, T_1, \mu_1\}, \{M_2, \Sigma_2, T_2, \mu_2\}$ изоморфны, то $h(T_1) = h(T_2)$.

Доказательство. Пусть сохраняющее меру отображение $f : M_1 \to M_2$ порождает изоморфизм динамических $\{M_1, \Sigma_1, T_1, \mu_1\}, \{M_2, \Sigma_2, T_2, \mu_2\}$.

Доказательство

Если ξ разбиение $\{M_1, \Sigma_1, \mu_1\}$, то $f(\xi) = \{f(A_i) | A_i \in \xi\}$ разбиение $\{M_2, \Sigma_2, \mu_2\}$.

Поскольку $T_2 = f \circ T_1 \circ f^{-1}$, имеем, что

$$h\left(T_2, f(\xi)\right) = h\left(f \circ T_1 \circ f^{-1}, f(\xi)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(f(\xi) \vee f \circ T_1^{-1} \circ f^{-1} \circ f(\xi) \vee \ldots \vee f \circ T_1^{-n+1} \circ f^{-1}(\xi)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(f\left(\xi \vee T_1^{-1}(\xi) \vee \ldots \vee T_1^{-n+1}(\xi)\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(\xi \vee T_1^{-1}(\xi) \vee \ldots \vee T_1^{-n+1}(\xi)\right) = h\left(T_1, \xi\right).$$

Доказательство

Следовательно, $\mathrm{h}\left(\mathrm{T}_2\right) \geq \mathrm{h}\left(\mathrm{T}_1\right)$.

Аналогично доказывается, что $\mathrm{h}\left(\mathrm{T}_2\right) \leq \mathrm{h}\left(\mathrm{T}_1\right)$.

Достаточное семейство разбиений

Определение. Семейство $\Xi \subset \Psi$ измеримых разбиений с конечной энтропией называется достаточным относительно сохраняющего меру преобразования T, если

$$\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}\left(\xi\right), \xi \in \Xi, n = 0, 1, \ldots$$

образуют плотное подмножество в метрическом пространстве Ψ с метрикой Рохлина.

Достаточное семейство разбиений

Определение. Семейство $\Xi \subset \Psi$ измеримых разбиений с конечной энтропией называется достаточным относительно сохраняющего меру автоморфизма T, если

$$\bigvee_{i=-n}^{n} T^{i}(\xi), \xi \in \Xi, n = 0, 1, \ldots$$

образуют плотное подмножество в метрическом пространстве Ψ с метрикой Рохлина.

Теорема

Если Ξ достаточное семейство разбиений, то $h(T) = \sup\limits_{\xi \in \Xi} h(T, \xi)$.

Доказательство. Рассмотрим $\forall \eta \in \Psi$. Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$. В силу леммы 3 $\exists \varsigma \in \Psi$ такое, что $d_R(\eta, \varsigma) < \varepsilon$ и $\varsigma \le \bigvee\limits_{i=0}^{k} T^{-i}(\xi), \xi \in \Xi$, если T преобразование и $\varsigma \le \bigvee\limits_{i=-k}^{k} T^{-i}(\xi), \xi \in \Xi$, если T автоморфизм.

Доказательство

В силу свойства 3 энтропии преобразования относительно разбиения имеем, что

$$h(T,\eta) \le h(T,\varsigma) + H(\eta|\varsigma) \le h(T,\varsigma) + d_R(\eta,\varsigma).$$

Если T преобразование, то в силу свойства 5 энтропии преобразования относительно разбиения справедлива оценка

$$h(T,\eta) \le h(T,\varsigma) + d_R(\eta,\varsigma) \le h\left(T, \bigvee_{i=0}^{k} T^{-i}(\xi)\right) + \varepsilon = h(T,\xi) + \varepsilon.$$

Доказательство

Если T автоморфизм, то в силу свойства 5 энтропии преобразования относительно разбиения справедлива оценка

$$h(T,\eta) \le h(T,\varsigma) + d_R(\eta,\varsigma) \le h\left(T, \bigvee_{i=-k}^{k} T^i(\xi)\right) + \varepsilon = h(T,\xi) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что

$$h(T) = \sup_{\eta\in\Psi} h(T,\eta) = \sup_{\xi\in\Xi} h(T,\xi).$$

Образующее разбиение

Определение. Будем говорить, что разбиение $\xi \in \Psi$ является образующим для преобразования (или автоморфизма) T, если $\Xi = \{\xi\}$ достаточное семейство.

Теорема Колмогорова - Синая

Если ξ образующее разбиение для T, то

$$h(T) = h(T, \xi).$$

Пример. Энтропия схемы Бернулли $B(p_1, \ldots, p_m)$ равна

$$-\sum_{j=1}^{m} p_j \log_2 p_j.$$

Замечание.

$$\max\left\{ h\left(B(p_1, \ldots, p_m)\right) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{m} p_j = 1,\ p_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, m \right\} = \log_2 m.$$

Вопрос

Указать образующее разбиение для динамической системы «преобразование пекаря».

Символическая динамика

Обозначим

$$\Omega_N = \left\{ \omega = \left(\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots \right) \middle| \omega_i \in \left\{ 0, 1, \ldots, N-1 \right\} \text{ для } i \in Z \right\}$$

фазовое пространство. Пусть

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \left\{ 0, 1, \ldots, N-1 \right\}.$$

Цилиндром k-го порядка называется множество $C^{n_1,\ldots,n_k}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = \left\{ \omega \in \Omega_N \middle| \omega_{n_i} = \alpha_i \text{ для } i = 1, \ldots, k \right\}.$

Обозначим Π_N наименьшую б - алгебру, содержащую все цилиндры.

Моделирование динамической системы

Пусть $\{M,\Sigma,T,\mu\}, \mu(M)=1,$ абстрактная динамическая система, $T:M\to M$ автоморфизм, набор подмножеств $\xi=\{A_0,\dots,A_{N-1}\}$ является образующим разбиением M. Положим

$$\varphi: M\to\Omega_N, \varphi(x)=(\dots\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,\dots),$$

$$\forall n\in Z\ \omega_n=j \Leftrightarrow T^n x\in A_j.$$

Тогда для п.в. (мере μ) $x\in M\ \ \varphi(Tx)=\sigma_N(\varphi(x)),$

$$\mu_N\left(C^{n_1,\dots,n_k}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\right)=\mu\left(\bigcap_{j=1}^{k}T^{-n_j}A_{\alpha_j}\right).$$

Марковские системы

Определим отображение сдвига

$$\sigma_N : \Omega_N \to \Omega_N, \sigma_N(\omega) = \omega', \forall n \in Z \ \omega'_n = \omega_{n+1},$$

$$\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots), \omega' = (\dots, \omega'_{-1}, \omega'_0, \omega'_1, \dots).$$

Символическая динамическая система

$$\{\Omega_N, \Pi_N, \mu_N, \sigma_N\}, \mu_N(\Omega_N) = 1$$

называется марковской, если

$$\forall k, i, n_1, \dots, n_k, j_1, \dots, j_k$$

$$\mu_N\left(\omega_{n_k+1} = i \middle| C^{n_1,\dots,n_k}_{j_1,\dots,j_k}\right) = \mu_N\left(\omega_{n_k+1} = j \middle| C^{n_k}_{j_k}\right) = \pi_{ij_k}.$$

Энтропия марковской системы

Неотрицательная матрица переходных вероятностей $\left\|\pi_{ij}\right\|_{i,j=0,\dots,N-1}$ является стохастической, т.е. $\sum_{i=1}^{N}\pi_{ij}=1\ j=1,\dots,N,$ а вектор

$$p=\left(p_0,\dots,p_{N-1}\right), p_j=\mu_N\left(C_j^0\right), j=0,\dots,N-1,$$

её вектором Фробениуса – Перрона. В силу предложения 1 энтропия марковской системы равна

$$h(T,\xi)=\lim_{n\to+\infty}H\left(\xi\middle|T^{-1}\left(\xi_{-n}^{T}\right)\right)=H\left(\xi\middle|T^{-1}(\xi)\right)=$$

$$=-\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}p_j\pi_{ij}\log_2\pi_{ij}$$

Задача: вычислить энтропию линейного автоморфизма тора

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = \pm 1, a_{11} + a_{22} > 2.$

Отображение $A: R^2 \to R^2, A(x) = Ax$ при условии, что $a_{ij} \in Z \; i = 1, 2; \; j = 1, 2$ допускает факторизацию

$$T_A = \Psi \circ A \circ \Psi^{-1} : R^2 / Z^2 \to R^2 / Z^2 .$$

Абстрактная динамическая система $\left\{ R^2 / Z^2 , \Lambda, T_A, \lambda \right\}$ называется линейным автоморфизмом тора.

Предложение 2

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1,$ абстрактная динамическая система и ξ образующее разбиение. Если $\log_2 \left|\xi_{-n}^{T}\right| = o(n),$ то $h(T) = 0.$

Доказательство. По свойству 1 энтропии разбиения имеем, что $0 \le H\left(\xi_{-n}^{T}\right) \le \log_2 \left|\xi_{-n}^{T}\right|.$

Следовательно,

$$h(T) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H\left(\xi_{-n}^{T}\right) = 0.$$

Следствие

Энтропия динамической системы «поворот окружности на иррациональный угол» равна нулю.

Доказательство. Разбиение окружности на две полуокружности диаметрально противоположными точками является образующим разбиением. Заметим, что

$$\left|\xi_{-n}^{T}\right| = 2(n+1) \Rightarrow \log_2 \left|\xi_{-n}^{T}\right| = o(n).$$

Задача

Пусть $S = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| = 1 \right\}, \varphi_k : S \to S, \varphi_k(z) = z^k, k \in \mathbb{N}$.
Вычислить энтропию динамической системы

$$\left\{ S, \Lambda, \varphi_k, \lambda \right\}.$$