Введение в эргодическую теорию
Лекция 2

А.А.Шананин

Определение

Абстрактной динамической системой называется $\{M, \Sigma, T, \mu\}$, где M фазовое пространство, $\sum$ б- алгебра на М, $T: M \to M$ измеримое отображение, т.е. для любого множества $A \in \Sigma, T^{-1}(A) \in \Sigma$,

μ инвариантная мера для Т, т.е. для любого множества $A \in \Sigma, \mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A)$.

Теорема Пуанкаре о возвращении

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}$ *абстрактная динамическая система,* $\mu(M) < \infty$ *и* $A \in \Sigma, \mu(A) > 0.$ *Тогда для почти всех по мере μ* $x \in A$ *существует бесконечно возрастающая последовательность номеров* $\{n_k \,|\, k = 1, 2, \ldots\}$*, при которых* $T^{n_k} x \in A.$

P.S. Приведите пример, в котором отсутствие условия $\mu(M) < \infty$ нарушает теорему.

О частоте возвращения

Пусть

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A, \\ 0, \text{если } x \notin A, \end{cases}$$

характеристическая функция множества A.

Заметим, что

$$\chi_{T^{-k}A}(x) = \chi_A(T^k x), \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{T^{-k}A}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_A(T^k x).$$

Частота возвращения $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_A(T^k x).$

Основной вопрос эргодических теорем

Существует ли, в каком смысле и какими свойствами обладает предел

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k x\right) = f^*(x).$$

Оператор Купмана

Определим $U_T : L_1(M,\mu) \to L_1(M,\mu); U_T\left(f(x)\right) = f(Tx).$

Лемма 1. Преобразование $T : M \to M$ имеет инвариантную меру μ тогда и только тогда, когда оператор U_T является изометрическим, т.е. $\forall f \in L_1(M,\mu)\ \left\|U_T(f)\right\|_{L_1(M,\mu)} = \left\|f\right\|_{L_1(M,\mu)}$.

P.S. $\forall f(x) \in L_p(M,\mu), 1 < p < +\infty\ \left\|U_T\left(f(x)\right)\right\|_{L_p(M,\mu)} = \left\|f(x)\right\|_{L_p(M,\mu)} \Leftrightarrow$

$\forall f(x) \in L_1(M,\mu),\ \left\|U_T\left(f(x)\right)\right\|_{L_1(M,\mu)} = \left\|f(x)\right\|_{L_1(M,\mu)}$

Лемма 2.

Пусть $\mathrm{U}:\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2$ изометрический оператор.

Тогда соотношение $\mathrm{Uf} = \mathrm{f}, \mathrm{f} \in \mathrm{L}_2$

эквивалентно соотношению $\mathrm{U}^*\mathrm{f} = \mathrm{f}$.

Задача

Пусть оператор $U : L_2 \to L_2$ изометрический

Приведите пример оператора U, для которого из $U^* U = I$ не следует, что $UU^* = I$.

Решение

Пусть $\left\{e_j \,\middle|\, j=1,2,\ldots\right\}$ ортонормированный базис в L_2,
$f=\sum_{j=1}^{+\infty} a_j e_j, Uf=\sum_{j=1}^{+\infty} a_j e_{j+1}$. Если $g=\sum_{j=1}^{+\infty} b_j e_j$, то

$$\left(Uf, Ug\right)=\sum_{j=1}^{+\infty} a_j \overline{b}_j=\left(f, g\right).$$

Заметим, что $\left(Uf, g\right)=\sum_{j=1}^{+\infty} a_j \overline{b}_{j+1}=\left(f, U^* g\right) \Rightarrow U^* g=\sum_{j=1}^{+\infty} b_{j+1} e_j$.
Тогда, если $a_1 \neq 0$, то

$$UU^* f=U\left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{j+1} e_j\right)=\sum_{j=1}^{+\infty} a_{j+1} e_{j+1}=\sum_{j=2}^{+\infty} a_j e_j \neq f.$$

Статистическая эргодическая теорема Дж. фон Неймана

Пусть $U : L_2 \to L_2$ изометрический оператор в комплексном гильбертовом пространстве L_2 и $P : L_2 \to L_2$ оператор проектирования на Подпространство $F = \left\{ f \in L_2 \middle| Uf = f \right\}$ векторов, инвариантных относительно оператора U.

Тогда

$$\forall f \in L_2 \ \lim_{n\to\infty} \left\| \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j(f) \right) - P(f) \right\|_{L_2} = 0.$$

Доказательство теоремы Дж. фон Неймана

Если $Uf = f$, то $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j f = f.$

Если $f = g - Ug, g \in L_2$, то

$$\sum_{j=0}^{n-1} U^j f = g - U^n g,\ g \in L_2 \Rightarrow \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j f \right\|_{L_2} \le \frac{2}{n}\|g\|_{L_2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j f = 0.$$

Доказательство теоремы Дж. фон Неймана

Положим $E = \overline{\{g - Ug \mid g \in L_2\}}$. Пусть $f \in E$.

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j f = 0.$$

Доказательство теоремы Дж. фон Неймана

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ выберем g_ε такое, что $\left\| f - g_\varepsilon + U g_\varepsilon \right\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}$, и $N_{g_\varepsilon} > 0$ такое, что при $n \geq N_{g_\varepsilon}$

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j \left(g_\varepsilon - U g_\varepsilon \right) \right\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Доказательство теоремы Дж. фон Неймана

Тогда при $n \geq N_{g_\varepsilon}$ имеем, что

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j f \right\|_{L_2} \leq \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j \left(f - g_\varepsilon + U g_\varepsilon \right) \right\|_{L_2} + \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j \left(g_\varepsilon - U g_\varepsilon \right) \right\|_{L_2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left\| U^j \left(f - g_\varepsilon + U g_\varepsilon \right) \right\|_{L_2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j f = 0.$$

Доказательство теоремы Дж. фон Неймана

Покажем, что если $h \in E^{\perp}$, то $h = U^{*}h$.

Действительно,

$$\forall g \in L_2 \;\; 0 = \left(h, g - Ug\right) = \left(h, g\right) - \left(U^{*}h, g\right) = \left(h - U^{*}h, g\right)$$

$$\Rightarrow h = U^{*}h.$$

В силу леммы 2 $h = U^{*}h \Leftrightarrow Uh = h.$

Доказательство теоремы Дж. фон Неймана

Заметим, что если $Uh = h$, то по лемме $U^* h = h.$

Откуда получаем, что

$$\forall g \in L_2 \ \left(h, g - Ug\right) = \left(h - U^* h, g\right) = 0 \Rightarrow h \in E^\perp \Rightarrow F = E^\perp.$$

Таким образом, $L_2 = E \oplus F$ и для любого $f \in L_2$ существует единственное разложение

$$f = h_1 + h_2, h_1 \in E, h_2 = Pf \in E^\perp = F.$$

Доказательство теоремы Дж. фон Неймана

Кроме того,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}U^j h_1 = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}U^j h_2 = h_2 = Pf,$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}U^j f = Pf.$$

Индивидуальная эргодическая теорема

Определение. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ конечная система действительных чисел и $m \leq n$ натуральное число. Член a_k этой системы называется *m*-лидером, если существует такое натуральное число p, что $1 \leq p \leq m$ и

$$a_k + \ldots + a_{k+p-1} \geq 0.$$

Лемма 3 (о m-лидерах)

Сумма всех m-лидеров неотрицательна.

Доказательство. Если m-лидеров нет, то утверждение верно.

Пусть a_k первый из m- лидеров и пусть $1 \le p \le m$ наименьшее число такое, что $a_k + \ldots + a_{k+p-1} \ge 0$.

Заметим, что для $k \le h \le k+p-1$ справедливо $a_h + \ldots + a_{k+p-1} \ge 0$, т.е. a_h является m-лидером.

Доказательство леммы 3

Действительно, если $a_h + \ldots + a_{k+p-1} < 0$, то $a_k + \ldots + a_{h-1} > 0$, что противоречит выбору p. Рассматривая теперь систему $a_{k+p}, \ldots, a_n$ и повторяя рассуждения, получаем утверждение леммы.

Лемма 4 (максимальная эргодическая теорема)

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}$ абстрактная динамическая система, $f(x) \in L_1(M, \mu)$ и множество

$$E = \left\{ x \in M \,\middle|\, \exists n \geq 1 : f(x) + f(Tx) + \ldots + f\left(T^{n-1}x\right) \geq 0 \right\}.$$

Тогда

$$\int_E f(x)\mu(dx) \geq 0.$$

Доказательство леммы 4

Пусть $E_m = \left\{ x \in M \middle| \exists 1 \le p \le m : f(x) + f(Tx) + \ldots + f\left(T^{p-1}x\right) \ge 0 \right\}.$

Очевидно, что $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_m \subseteq \ldots$ и

что $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$

Достаточно доказать, что

$$\int_{E_m} f(x)\mu(dx) \ge 0.$$

Доказательство леммы 4

Зафиксируем произвольное натурально число m, пусть $n \geq 1$ и $s(x)$ сумма m-лидеров системы $f(x), f(Tx), \ldots, f\left(T^{n+m-1}x\right)$. Обозначим

$$D_k = \left\{ x \in M \middle| f\left(T^k x\right) \text{ m лидер системы } f(x), f(Tx), \ldots, f\left(T^{n+m-1}x\right) \right\},$$

$$\chi_{D_k}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in D_k, \\ 0, \text{ если } x \notin D_k. \end{cases}$$

Тогда $D_0 = E_m, s(x) = \sum_{k=0}^{n+m-1} f\left(T^k x\right) \chi_{D_k}(x).$

Доказательство леммы 4

Заметим, что если $k = 1, \ldots, n-1$, то следующие условия на x попарно эквивалентны:

$$(\mathrm{i})\ Tx \in D_{k-1}$$

$$(\mathrm{ii})\ f\left(T^k x\right) + \ldots + f\left(T^{k+p-1} x\right) \geq 0,\ 1 \leq p \leq m,$$

$$(\mathrm{iii})\ x \in D_k$$

Откуда получаем, что

$$D_k = T^{-1} D_{k-1}, \Rightarrow D_k = T^{-k} E_m \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Доказательство леммы 4

Следовательно,

$$\int_{D_k} f\left(T^k x\right)\mu(dx) = \int_{T^{-k}E_m} f\left(T^k x\right)\mu(dx) = \int_{E_m} f(x)\mu(dx),\ k = 1,\dots,n-1.$$

В силу леммы 1, имеем, что

$$0 \le \int_M s(x)\mu(dx) = \sum_{k=0}^{n+m-1} \int_{D_k} f\left(T^k x\right)\mu(dx)$$

Откуда получаем, что

$$n\int_{E_m} f(x)\mu(dx) + (m-1)\int_M \left|f(x)\right|\mu(dx) \ge 0.$$

Доказательство леммы 4

Разделим обе части неравенства на n

$$\int_{E_m} f(x)\mu(dx) + \frac{(m-1)}{n}\int_M |f(x)|\mu(dx) \geq 0$$

Устремляя $n \to +\infty$, получаем, что

$$\int_{E_m} f(x)\mu(dx) \geq 0.$$

Теорема Биркофа-Хинчина

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}$ абстрактная динамическая система, $f(x) \in L_1(M, \mu)$. Тогда для почти всех (по мере μ) $x \in M$ существует предел

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) = f^*(x).$$

Теорема Биркгофа-Хинчина

Причем предельная функция $f^*(x)$ интегрируема и инвариантна, т.е.

$f^*(Tx) = f^*(x)$ для почти всех (мере μ) $x \in M$.

Если $\mu(M) < \infty$, то

$$\int_M f^*(x)\mu(dx) = \int_M f(x)\mu(dx).$$

P.S. Приведите контрпример, когда $\mu(M) = \infty$.

Доказательство теоремы Биркгофа-Хинчина

Пусть $a < b$. Без ограничения общности $b > 0$.

Обозначим

$$Y(a,b) = \left\{ x \in M \left| \underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) < a < b < \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) \right. \right\}.$$

Множество $Y(a,b)$ измеримо и инвариантно относительно преобразования T , т.е. $\mu\left(Y \triangle T^{-1} Y\right) = 0.$

Доказательство теоремы Биркгофа-Хинчина

Покажем, что $\mu\big(Y(a,b)\big) < +\infty.$

Пусть $C \subseteq Y(a,b), \mu(C) < +\infty$ и

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in C, \\ 0, \text{ если } x \notin C. \end{cases}$$

Положим

$$F = \left\{ x \in M \,\middle|\, \exists n \geq 1 : \sum_{j=0}^{n-1} \Big(f\left(T^j x\right) - b\chi_C\left(T^j x\right) \Big) \geq 0 \right\}.$$

Доказательство теоремы Биркгофа-Хинчина

Покажем, что $Y(a,b) \subseteq F$. Если $x \in Y(a,b)$, то

$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) > b$ и, значит, $\exists \hat{n} \geq 1 : \frac{1}{\hat{n}}\sum_{j=0}^{\hat{n}-1} f\left(T^j x\right) > b$.

Откуда следует, что если $x \in Y(a,b)$, то
$\sum_{j=0}^{\hat{n}-1}\left(f\left(T^j x\right) - b\chi_C\left(T^j x\right)\right) \geq 0$, т.е $C \subseteq Y(a,b) \subseteq F$.

Доказательство теоремы Биркгофа-Хинчина

В силу максимальной эргодической теоремы (леммы 4) имеем, что

$$\int_F \left(f(x) - b\chi_C(x)\right)\mu(dx) \geq 0.$$

Откуда получаем, что

$$\int_F f(x)\mu(dx) \geq \int_F b\chi_C(x)\mu(dx) = b\mu(C) \Rightarrow \mu(C) \leq \frac{1}{b}\int_M |f(x)|\mu(dx).$$

В силу произвольности $C \subseteq Y(a,b), \mu(C) < \infty$ имеем, что $\mu\left(Y(a,b)\right) < \infty.$

Доказательство теоремы Биркгофа-Хинчина

Функция $\left(f\left(x\right)-b\right)\in L_1\left(Y\left(a,b\right),\mu\right)$.

Поскольку $x\in Y\left(a,b\right)\Rightarrow\exists n\geq 1:\sum\limits_{j=0}^{n-1}\left(f\left(T^j x\right)-b\right)\geq 0,$

по максимальной эргодической теореме (лемма 4) получаем, что

$$\int\limits_{Y\left(a,b\right)}\left(f\left(x\right)-b\right)\mu\left(dx\right)\geq 0. \qquad (1)$$

Доказательство теоремы Биргкофа-Хинчина

Аналогично, применяя лемму 4 к функции $\left(a-f(x)\right)\in L_1\left(Y(a,b)\right)$, получаем, что

$$\int\limits_{Y(a,b)}\left(a-f(x)\right)\mu(dx)\geq 0. \qquad (2)$$

Складывая (1) и (2), имеем, что

$$0\geq\int\limits_{Y(a,b)}(a-b)\mu(dx)\geq 0\Rightarrow\mu\left(Y(a,b)\right)=0.$$

Доказательство теоремы Биркгофа-Хинчина

Применяя полученный результат к всевозможным парам рациональных чисел $(a, b), a < b,$ получаем, что для п.в. (по мере μ) x

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) = f^*\left(x\right).$$

Из свойств сходимости по Чезаро следует, что $f^*\left(T\,x\right) = f^*\left(x\right)$ п.в. (по мере μ).

Доказательство теоремы Биркгофа-Хинчина

Заметим, что

$$\int_M \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) \right| \mu(dx) \le \frac{1}{n} \int_M \sum_{j=0}^{n-1} \left| f\left(T^j x\right) \right| \mu(dx) = \int_M \left| f(x) \right| \mu(dx) < +\infty.$$

По теореме Фату $f^*(x) \in L_1(M, \mu)$.

Доказательство теоремы Биркгофа-Хинчина

Пусть теперь $\mu\left(M\right) < +\infty$.

Если $f^*\left(x\right) \geq a$ п.в. (по мере μ), то $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \geq 1$

$$\sum_{j=0}^{n_\varepsilon - 1}\left(f\left(T^j x\right) - a + \varepsilon\right) \geq 0.$$

По максимальной эргодической теореме (лемма 4) получаем, что

$$\int_M f\left(x\right)\mu\left(dx\right) \geq \left(a-\varepsilon\right)\mu\left(M\right) \Rightarrow \int_M f\left(x\right)\mu\left(dx\right) \geq a\mu\left(M\right).$$

Доказательство теоремы Биркгофа-Хинчина

Аналогично, из $f^*(x) \le b$ п.в. по мере μ следует, что

$$\int_M f(x)\mu(dx) \le b\mu(M).$$

Обозначим $X(k,n) = \left\{ x \in M \,\middle|\, \frac{k}{2^n} < f^*(x) \le \frac{k+1}{2^n} \right\}.$

Множество $X(k,n)$ инвариантно относительно преобразования T.

Доказательство теоремы Биркгофа-Хинчина

Тогда

$$\frac{k}{2^n}\mu\left(X\left(k,n\right)\right)\le \int\limits_{X(k,n)} f\left(x\right)\mu\left(dx\right)\le \frac{k+1}{2^n}\mu\left(X\left(k,n\right)\right),$$

$$\frac{k}{2^n}\mu\left(X\left(k,n\right)\right)\le \int\limits_{X(k,n)} f^*\left(x\right)\mu\left(dx\right)\le \frac{k+1}{2^n}\mu\left(X\left(k,n\right)\right).$$

Откуда следует, что

$$\frac{-1}{2^n}\mu\left(X\left(k,n\right)\right)\le \int\limits_{X(k,n)} f^*\left(x\right)\mu\left(dx\right)-\int\limits_{X(k,n)} f\left(x\right)\mu\left(dx\right)\le \frac{1}{2^n}\mu\left(X\left(k,n\right)\right).$$

Доказательство теоремы Биркгофа-Хинчина

Суммируя по k, получаем, что

$$\left|\int_M f(x)\mu(dx) - \int_M f^*(x)\mu(dx)\right| \le \frac{1}{2^n}\mu(M).$$

Устремляя $n \to +\infty$, имеем, что

$$\int_M f^*(x)\mu(dx) = \int_M f(x)\mu(dx).$$

Следствие

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}$ абстрактная динамическая система, $\mu(M) < +\infty, f(x) \in L_1(M, \mu)$. Тогда

$$\lim_{n \to +\infty} \int_M \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) - f^*(x) \right| \mu(dx) = 0.$$

Доказательство

Зафиксируем $\varepsilon > 0.$ Выберем $g(x) \in L_\infty(M, \mu),$ такое, что $\left\| f(x) - g(x) \right\|_{L_1(M,\mu)} < \frac{\varepsilon}{3}.$ По теореме Биркгофа-Хинчина при п.в. по мере μ существует предел

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g\left(T^j x\right) = g^*(x)$$

и $\left\| f^*(x) - g^*(x) \right\|_{L_1(M,\mu)} = \left\| f(x) - g(x) \right\|_{L_1(M,\mu)} < \frac{\varepsilon}{3}.$

Доказательство

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g\left(T^j x\right) - g^*(x)\right| \mu(dx) = 0.$$

Откуда следует, что $\exists N > 0$ такое, что при $n \geq N$

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g\left(T^j x\right) - g^*(x)\right\|_{L_1(M,\mu)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Доказательство

Тогда при $n \geq N$ справедлива оценка

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) - f^*(x)\right\|_{L_1(M,\mu)} \leq \left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^j x\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g\left(T^j x\right)\right\|_{L_1(M,\mu)} + \left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g\left(T^j x\right) - g^*(x)\right\|_{L_1(M,\mu)} +$$

$$+\left\|f^*(x) - g^*(x)\right\|_{L_1(M,\mu)} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left\|f\left(T^j x\right) - g\left(T^j x\right)\right\|_{L_1(M,\mu)} + \left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g\left(T^j x\right) - g^*(x)\right\|_{L_1(M,\mu)} +$$

$$+\left\|f^*(x) - g^*(x)\right\|_{L_1(M,\mu)} \leq \left\|f(x) - g(x)\right\|_{L_1(M,\mu)} + \left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g\left(T^j x\right) - g^*(x)\right\|_{L_1(M,\mu)} + \left\|f^*(x) - g^*(x)\right\|_{L_1(M,\mu)} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Динамические системы в непрерывном времени

Заданы $\left\{M, \Sigma, T^t, \mu\right\}$, где отображение $T^t : M \times [0, +\infty) \to M$ обладает полугрупповым свойством, т.е. $T^t\left(T^s x\right) = T^{t+s} x$ п.в. по мере μ; отображение T^t измеримо, т.е. $\forall A \in \Sigma \ \left\{(x, t) \middle| T^t x \in A\right\}$ измеримо в б - алгебре декартова произведения Σ и б – алгебре борелевских подмножеств $[0, +\infty)$; μ инвариантная мера для T^t.

Теорема Биркгофа-Хинчина в непрерывном времени

Пусть $\left\{M, \Sigma, T^t, \mu\right\}$ абстрактная динамическая система в непрерывном времени, $\mu(M) < +\infty, f(x) \in L_1(M, \mu).$ Для п.в. (по мере μ) $x \in M$ существует предел

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \int_0^N f\left(T^t x\right) dt = f^*(x) \in L_1(M, \mu),$$

функция $f^*(x)$ инвариантна, т.е. $f^*\left(T^t x\right) = f^*(x)$ п.в. и $\int_M f(x)\mu(dx) = \int_M f^*(x) dx.$

Доказательство

Заметим, что п.в.

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\int_0^N f\left(T^t x\right)dt=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{[N]}{N}\frac{1}{[N]}\int_0^{[N]} f\left(T^t x\right)dt+\frac{1}{N}\int_{[N]}^N f\left(T^t x\right)dt\right)=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{[N]}\int_0^{[N]} f\left(T^t x\right)dt.$$

Достаточно доказать утверждение для натуральных N. Обозначим

$$F(x)=\int_0^1 f\left(T^t x\right)dt, F(x)\in L_1(M,\mu).$$

Доказательство

Тогда

$$\frac{1}{N}\int_0^N f\left(T^t x\right)dt = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} F\left(T^j x\right).$$

Применяя теорему Биркгофа-Хинчина к функции $F(x)$ получаем утверждение.

Теорема Биркгофа-Хинчина для автоморфизма

Пусть $\{M,\Sigma,T,\mu\}$ абстрактная динамическая система, отображение $T:M\to M$ автоморфизм,

$\forall A\in\Sigma,\ j\in Z\ \ \mu\left(T^{j}A\right)=\mu(A),\ \ \mu(M)<+\infty, f(x)\in L_1(M,\mu).$

Тогда для п.в. (по мере μ) $x\in M$ существуют и равны пределы

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f\left(T^{j}x\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f\left(T^{-j}x\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}f\left(T^{j}x\right).$$

Доказательство

Применим теорему Биркгофа-Хинчина к отображению T^{-1}. Получим, что п.в. существует предел

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^{-j}x\right)=\hat{f}(x).$$

Достаточно доказать, что $f^*(x)=\hat{f}(x)$ п.в. (по мере μ).

Доказательство

Допустим противное. Без ограничения общности можно считать, что $\exists \varepsilon > 0$ и множество $A = \left\{ x \in M \middle| f^*(x) \geq \hat{f}(x) + \varepsilon \right\}, \mu(A) > 0.$ Множество A инвариантно. По теореме Биркгофа-Хинчина имеем, что

$$\int_A f^*(x)\mu(dx) = \int_A f(x)\mu(dx), \int_A \hat{f}(x)\mu(dx) = \int_A f(x)\mu(dx).$$

С другой стороны, $\int_A \left(f^*(x) - \hat{f}(x)\right)\mu(dx) \geq \varepsilon\mu(A) > 0.$

Противоречие.