Введение в эргодическую теорию
Лекция 9

А.А.Шананин

Энтропия разбиения

Определение. Энтропией разбиения $\xi = \left\{ A_i \middle| i \in I_\xi \right\}$

называется $H(\xi) = -\sum_{i \in I_\xi} \mu(A_i) \log_2 \left(\mu(A_i) \right)$.

P.S. $H(\xi) = \int_M I_\xi(x) \mu(dx)$.

Определим функцию на отрезке [0,1]

$$z(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0, \\ -t \log_2 t, & \text{если } 0 < t \le 1. \end{cases}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\log_2 t - \log_2 e, \quad \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\frac{\log_2 e}{t} < 0, \quad e^{-1} = \operatorname*{Arg\,max}_{0<t\le t} \left(-t \log_2 t \right).$$

Условная энтропия разбиения

Определение. Условной энтропией разбиения $\xi = \left\{ A_i \middle| i \in I_\xi \right\}$ относительно разбиения $\eta = \left\{ B_j \middle| j \in I_\eta \right\}$ называется

$$H\left(\xi \middle| \eta\right) = \sum_{j \in I_\eta} \mu\left(B_j\right) \sum_{i \in I_\xi} z\left(\frac{\mu\left(B_j \cap A_i\right)}{\mu\left(B_j\right)}\right).$$

P.S.

$$H\left(\xi \middle| \eta\right) = -\sum_{j \in I_\eta} \mu\left(B_j\right) \sum_{i \in I_\xi} \left(\frac{\mu\left(B_j \cap A_i\right)}{\mu\left(B_j\right)}\right) \log_2 \left(\frac{\mu\left(B_j \cap A_i\right)}{\mu\left(B_j\right)}\right) =$$

$$= \sum_{j \in I_\eta} \sum_{i \in I_\xi} \mu\left(B_j \cap A_i\right)\left(\log_2 \mu\left(B_j \cap A_i\right) - \log_2 \mu\left(B_j\right)\right) = H\left(\xi \vee \eta\right) - H\left(\eta\right).$$

Свойства энтропии разбиения

Пусть $\{M, \Sigma, \mu\}, \mu(M) = 1$ вероятностное пространство, $\xi = \{A_i \,|\, i \in I_\xi\}, \eta = \{B_j \,|\, j \in I_\eta\}, \varsigma = \{C_k \,|\, j \in I_\varsigma\}$ разбиения. Тогда

1. $0 \le -\log_2\left(\sup\limits_{i \in I_\xi} \mu(A_i)\right) \le H(\xi) \le \log_2 |\xi|;$ если $|\xi| < \infty,$

то $H(\xi) = \log_2 |\xi|$ тогда и только тогда, когда меры всех элементов ξ равны.

Свойства энтропии разбиения

2. $0 \le H(\xi|\eta) \le H(\xi)$; $H(\xi|\eta) = H(\xi)$ тогда и только тогда, когда ξ и η независимы, т.е. $\forall A_i \in \xi, \forall B_j \in \eta \quad \mu(A_i \cap B_j) = \mu(A_i)\mu(B_j)$.

3. $H(\xi|\eta) = 0 \Leftrightarrow \xi \le \eta$.

4. $H(\xi \vee \eta|\varsigma) = H(\xi|\varsigma) + H(\eta|\xi \vee \varsigma)$.

5. Если $\xi \ge \eta$, то $H(\xi|\varsigma) \ge H(\eta|\varsigma)$.

6. Если $\xi \ge \eta$, то $H(\varsigma|\xi) \le H(\varsigma|\eta)$.

Свойства энтропии разбиения

7. $H(\xi\vee\eta|\varsigma)\le H(\xi|\varsigma)+H(\eta|\varsigma).$

8. $H(\xi|\eta)+H(\eta|\varsigma)\ge H(\xi|\varsigma).$

9. Если λ другая инвариантная мера $\lambda(M)=1$ для преобразования $T:M\to M$ и $p\in[0,1]$, то для любого разбиения $\xi=\{A_i\,|\,i\in I_\xi\}$ относительно μ и λ выполнено неравенство

$$pH_\mu(\xi)+(1-p)H_\lambda(\xi)\le H_{p\mu+(1-p)\lambda}(\xi).$$

Метрика Рохлина

Пусть Ψ множество разбиений с конечной энтропией. Определим на Ψ метрику

$$d_R(\xi,\eta) = H(\xi|\eta) + H(\eta|\xi) \geq 0.$$

Лемма 1

Множество конечных разбиений плотно в метрическом пространстве разбиений Ψ.

Метрика на конечных разбиениях

Пусть ξ и η разбиения, имеющие не более, чем m элементов. Дополнив разбиения множествами нулевой меры

$$\xi = \left\{ A_1, \ldots, A_m \right\}, \eta = \left\{ B_1, \ldots, B_m \right\},$$

определим

$$D(\xi, \eta) = \min_{\sigma} \sum_{i=1}^{m} \mu\left(A_i \vartriangle B_{\sigma(i)} \right),$$

где max берется по всем перестановкам б.

Лемма 2

Для любого ε>0 существует δ>0 такое, что если $\mathrm{D}(\xi, \eta) < \delta,$ *то* $\mathrm{d_R}(\xi, \eta) < \varepsilon.$

Лемма 3

Пусть $\{M, \Sigma, \mu\}, \mu(M) = 1$ вероятностное пространство и $\{\xi_j \mid j = 1, 2, \ldots\}$ последовательность разбиений, такая, что

$\xi_1 \le \xi_2 \le \ldots \le \xi_n \le \xi_{n+1} \le \ldots$ и $\Re\left(\bigvee_{j=1}^{+\infty} \xi_j\right) = \Sigma.$

Тогда множество разбиений $\{\eta \in \Psi \mid \exists n : \eta \le \xi_n\}$ всюду плотно в метрическом пространстве Ψ в метрике Рохлина.

Энтропия преобразования относительно разбиения

Обозначим $\quad \xi_{-n}^{T} = \xi \vee T^{-1}(\xi) \vee \ldots \vee T^{-n+1}(\xi).$

Предложение 1. Существуют и равны пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\xi_{-n}^{T}\right) = \lim_{n\to\infty} H\left(T^{-n}(\xi) \middle| \xi_{-n}^{T}\right).$$

Энтропия преобразования относительно разбиения

Определение. Метрической энтропией сохраняющего меру преобразования $T : M \to M$ относительно разбиения ξ называется величина

$$h(T, \xi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H\left(\xi_{-n}^{T}\right).$$

Неравенство Рохлина

Справедлива оценка $\left|h(T,\xi)-h(T,\eta)\right|\le d_R(\xi,\eta)$.

Доказательство. В силу свойства 4 энтропии разбиения имеем, что

$$H\left(\xi_{-n}^{T}\middle|\eta_{-n}^{T}\right)=H\left(\xi_{-n}^{T}\vee\eta_{-n}^{T}\right)-H\left(\eta_{-n}^{T}\right),$$

$$H\left(\eta_{-n}^{T}\middle|\xi_{-n}^{T}\right)=H\left(\xi_{-n}^{T}\vee\eta_{-n}^{T}\right)-H\left(\xi_{-n}^{T}\right).$$

Откуда следует, что

$$H\left(\xi_{-n}^{T}\middle|\eta_{-n}^{T}\right)-H\left(\eta_{-n}^{T}\middle|\xi_{-n}^{T}\right)=H\left(\xi_{-n}^{T}\right)-H\left(\eta_{-n}^{T}\right).$$

Доказательство

Следовательно,

$$\left|H\left(\xi_{-n}^{T}\right)-H\left(\eta_{-n}^{T}\right)\right|\le H\left(\xi_{-n}^{T}\middle|\eta_{-n}^{T}\right)+H\left(\eta_{-n}^{T}\middle|\xi_{-n}^{T}\right).$$

В силу свойства 7 энтропии разбиения имеем, что

$$H\left(\xi_{-n}^{T}\middle|\eta_{-n}^{T}\right)=H\left(\xi\vee T^{-1}(\xi)\vee\ldots\vee T^{-n+1}(\xi)\middle|\eta_{-n}^{T}\right)\le$$

$$\le H\left(\xi\middle|\eta_{-n}^{T}\right)+H\left(T^{-1}(\xi)\middle|\eta_{-n}^{T}\right)+\ldots+H\left(T^{-n+1}(\xi)\middle|\eta_{-n}^{T}\right).$$

Доказательство

Заметим, что

$$\eta_{-n}^{T} = \eta \vee T^{-1}(\eta) \vee \ldots \vee T^{-n+1}(\eta) \Rightarrow$$

$$\eta_{-n}^{T} \geq \eta, \eta_{-n}^{T} \geq T^{-1}(\eta), \ldots, \eta_{-n}^{T} \geq T^{-n+1}(\eta).$$

В силу свойства 7 энтропии разбиения имеем, что

$$H\left(\xi_{-n}^{T} \middle| \eta_{-n}^{T}\right) \leq H(\xi|\eta) + H\left(T^{-1}(\xi) \middle| T^{-1}(\eta)\right) + \ldots + H\left(T^{-n+1}(\xi) \middle| T^{-n+1}(\eta)\right)$$

$$= n\, H(\xi|\eta).$$

Доказательство

Аналогично доказывается, что $H\left(\eta_{-n}^{T}\middle|\xi_{-n}^{T}\right) \le n\,H(\eta|\xi)$.

Следовательно,

$$\left|H\left(\xi_{-n}^{T}\right) - H\left(\eta_{-n}^{T}\right)\right| \le n\left(H(\xi|\eta) + H(\eta|\xi)\right) = n\,d_R(\xi, \eta).$$

Откуда, разделив на n и устремив $n \to +\infty$,

получаем, что

$$\left|h(T, \xi) - h(T, \eta)\right| \le d_R(\xi, \eta).$$

Пример. Схема Бернулли $B(p_1,\dots,p_m)$.

Рассмотрим динамическую систему Бернулли $B(p_1,\dots,p_m)$. Положим

$$\mathbf{A}_i = \left\{\omega \in \Omega_m \,\middle|\, \omega_0 = i\right\}, i = 0,..,m-1.$$

Рассмотрим разбиение $\xi = \left\{A_i \,\middle|\, i = 0,\dots,m-1\right\}$.

Пример. Схема Бернулли $B(p_1,\ldots,p_m)$.

Тогда

$$H\left(\xi_{-n}^{T}\right)=-\sum_{k_1=0}^{m-1}\ldots\sum_{k_n=0}^{m-1}p_{k_1+1}\ldots p_{k_n+1}\log_2\left(p_{k_1+1}\ldots p_{k_n+1}\right)=$$

$$=-\sum_{k_1=0}^{m-1}\ldots\sum_{k_n=0}^{m-1}p_{k_1+1}\ldots p_{k_n+1}\left(\log_2\left(p_{k_1+1}\ldots p_{k_{n-1}+1}\right)+\log_2 p_{k_n+1}\right)=$$

$$=-\sum_{k_1=0}^{m-1}\ldots\sum_{k_n=0}^{m-1}p_{k_1+1}\ldots p_{k_{n-1}+1}\log_2\left(p_{k_1+1}\ldots p_{k_{n-1}+1}\right)-\sum_{k_n=0}^{m-1}p_{k_n+1}\log_2 p_{k_n+1}=$$

$$=H\left(\xi_{-n+1}^{T}\right)-\sum_{k=1}^{m}p_k\log_2 p_k=-n\sum_{k=1}^{m}p_k\log_2 p_k.$$

Пример. Схема Бернулли $B(p_1,\ldots,p_m)$.

Откуда

$$h(T,\xi)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(\xi_{-n}^{T}\right)=-\sum_{k=1}^{m}p_k\log_2 p_k.$$

Свойства энтропии преобразования относительно разбиения

1. $$0 \le \overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(-\frac{1}{n}\log_2\left(\sup_{A\in\xi_{-n}^{T}}\mu(A)\right)\right) \le h(T,\xi) \le H(\xi).$$

Доказательство. В силу свойства 1 энтропии разбиения имеем, что

$$0 \le -\log_2\left(\sup_{A\in\xi_{-n}^{T}}\mu(A)\right) \le H\left(\xi_{-n}^{T}\right),$$

Откуда $$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(-\frac{1}{n}\log_2\left(\sup_{A\in\xi_{-n}^{T}}\mu(A)\right)\right) \le h(T,\xi).$$

Доказательство

В силу свойства 4 энтропии разбиения имеем, что

$$H\left(\xi_{-n}^{T}\right) \le H(\xi) + H\left(T^{-1}(\xi)\right) + \ldots + H\left(T^{-n+1}(\xi)\right) = n\,H(\xi).$$

Откуда следует, что

$$h(T,\xi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(\xi_{-n}^{T}\right) \le H(\xi).$$

Свойства энтропии преобразования относительно разбиения

2. $h(T,\xi\vee\eta)\leq h(T,\xi)+h(T,\eta)$.

Доказательство. $(\xi\vee\eta)_{-n}^{T}=\xi_{-n}^{T}\vee\eta_{-n}^{T}$.

В силу свойства 4 энтропии разбиения имеем, что

$$H\left((\xi\vee\eta)_{-n}^{T}\right)\leq H\left(\xi_{-n}^{T}\right)+H\left(\eta_{-n}^{T}\right).$$

Откуда

$$h(T,\xi\vee\eta)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left((\xi\vee\eta)_{-n}^{T}\right)\leq$$

$$\leq\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(\xi_{-n}^{T}\right)+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(\eta_{-n}^{T}\right)=h(T,\xi)+h(T,\eta).$$

Свойства энтропии преобразования относительно разбиения

3. $h(T,\eta) \le h(T,\xi) + H(\eta|\xi)$. Если $\xi \ge \eta$, то $h(T,\eta) \le h(T,\xi)$.

Доказательство. В силу свойств 4 и 5 энтропии разбиения из $\eta_{-n}^{T} \le \xi_{-n}^{T} \vee \eta_{-n}^{T}$ имеем, что

$$H\left(\eta_{-n}^{T}\right) \le H\left(\xi_{-n}^{T} \vee \eta_{-n}^{T}\right) = H\left(\xi_{-n}^{T}\right) + H\left(\eta_{-n}^{T} \middle| \xi_{-n}^{T}\right).$$

Поскольку $H\left(\xi_{-n}^{T} \middle| \eta_{-n}^{T}\right) \le n\,H(\xi|\eta)$ (см. доказательство неравенства Рохлина) имеем

$$H\left(\eta_{-n}^{T}\right) \le H\left(\xi_{-n}^{T}\right) + n\,H(\eta|\xi).$$

Доказательство

Если $\xi \geq \eta$, то $H(\eta|\xi)=0 \Rightarrow H\left(\eta_{-n}^{T}\right) \leq H\left(\xi_{-n}^{T}\right)$.

Разделив на n и устремив $n \to +\infty$, завершаем доказательство утверждения.

Свойства энтропии преобразования относительно разбиения

4. $h\left(T, T^{-1}(\xi)\right) = h(T, \xi)$. Если T обратимое преобразование, то $h(T, \xi) = h\left(T, T(\xi)\right)$.

Доказательство. $H\left(\left(T^{-1}(\xi)\right)_{-n}^{T}\right) = H\left(T^{-1}\left(\xi_{-n}^{T}\right)\right) = H\left(\xi_{-n}^{T}\right)$.

Аналогично для обратимого преобразования

$$H\left(\left(T(\xi)\right)_{-n}^{T}\right) = H\left(T\left(\xi_{-n}^{T}\right)\right) = H\left(\xi_{-n}^{T}\right).$$

Разделив на n и $n \to +\infty$, получаем утверждение

Свойства энтропии преобразования относительно разбиения

5. $h(T,\xi)=h\left(T,\bigvee_{i=0}^{k}T^{-i}(\xi)\right)$. Если T обратимое преобразование, то $h(T,\xi)=h\left(T,\bigvee_{i=-k}^{k}T^{i}(\xi)\right)$.

Доказательство. $\left(\bigvee_{i=0}^{k}T^{-i}(\xi)\right)_{-n}^{T}=\xi_{-n-k}^{T}$.

Следовательно,

$$h\left(T,\bigvee_{i=0}^{k}T^{-i}(\xi)\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(\xi_{-n-k}^{T}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+k}H\left(\xi_{-n-k}^{T}\right)=h(T,\xi).$$

Свойства энтропии преобразования относительно разбиения

6. Если λ другая инвариантная вероятностная мера для преобразования $T:M\to M$ и $p\in[0,1]$, то для любого разбиения ξ справедливо неравенство

$$p\,h_{\mu}(T,\xi)+(1-p)\,h_{\lambda}(T,\xi)\le h_{p\mu+(1-p)\lambda}(T,\xi).$$

Энтропия динамической системы

Определение. Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ абстрактная динамическая система. Энтропией динамической системы называется

$$h(T) = \sup_{\xi \in \Psi} h(T, \xi).$$

Теорема

Если абстрактные динамические системы $\{M_1, \Sigma_1, T_1, \mu_1\}, \{M_2, \Sigma_2, T_2, \mu_2\}$ изоморфны, то $h(T_1) = h(T_2)$.

Доказательство. Пусть сохраняющее меру отображение $f : M_1 \to M_2$ порождает изоморфизм динамических $\{M_1, \Sigma_1, T_1, \mu_1\}, \{M_2, \Sigma_2, T_2, \mu_2\}$.

Доказательство

Если ξ разбиение $\{M_1, \Sigma_1, \mu_1\}$, то $f(\xi) = \{f(A_i) | A_i \in \xi\}$ разбиение $\{M_2, \Sigma_2, \mu_2\}$.

Поскольку $T_2 = f \circ T_1 \circ f^{-1}$, имеем, что

$$h\left(T_2, f(\xi)\right) = h\left(f \circ T_1 \circ f^{-1}, f(\xi)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(f(\xi) \vee f \circ T_1^{-1} \circ f^{-1} \circ f(\xi) \vee \ldots \vee f \circ T_1^{-n+1} \circ f^{-1}(\xi)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(f\left(\xi \vee T_1^{-1}(\xi) \vee \ldots \vee T_1^{-n+1}(\xi)\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(\xi \vee T_1^{-1}(\xi) \vee \ldots \vee T_1^{-n+1}(\xi)\right) = h\left(T_1, \xi\right).$$

Доказательство

Следовательно, $h(T_2) \geq h(T_1)$.

Аналогично доказывается, что $h(T_2) \leq h(T_1)$.

Достаточное семейство разбиений

Определение. Семейство $\Xi \subset \Psi$ измеримых разбиений с конечной энтропией называется достаточным относительно сохраняющего меру преобразования T, если

$$\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}(\xi), \xi \in \Xi, n = 0, 1, \dots$$

образуют плотное подмножество в метрическом пространстве Ψ с метрикой Рохлина.

Достаточное семейство разбиений

Определение. Семейство $\Xi \subset \Psi$ измеримых разбиений с конечной энтропией называется достаточным относительно сохраняющего меру автоморфизма T, если

$$\bigvee_{i=-n}^{n} T^{i}\left(\xi\right), \xi \in \Xi, n = 0,1,\ldots$$

образуют плотное подмножество в метрическом пространстве Ψ с метрикой Рохлина.

Теорема

Если Ξ достаточное семейство разбиений, то $h(T) = \sup\limits_{\xi \in \Xi} h(T, \xi)$.

Доказательство. Рассмотрим $\forall \eta \in \Psi$. Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$. В силу леммы 3 $\exists \varsigma \in \Psi$ такое, что $d_R(\eta, \varsigma) < \varepsilon$ и $\varsigma \le \bigvee\limits_{i=0}^{k} T^{-i}(\xi), \xi \in \Xi$, если T преобразование и $\varsigma \le \bigvee\limits_{i=-k}^{k} T^{-i}(\xi), \xi \in \Xi$, если T автоморфизм.

Доказательство

В силу свойства 3 энтропии преобразования относительно разбиения имеем, что

$$h(T,\eta) \le h(T,\varsigma) + H(\eta|\varsigma) \le h(T,\varsigma) + d_R(\eta,\varsigma).$$

Если T преобразование, то в силу свойства 5 энтропии преобразования относительно разбиения справедлива оценка

$$h(T,\eta) \le h(T,\varsigma) + d_R(\eta,\varsigma) \le h\left(T, \bigvee_{i=0}^{k} T^{-i}(\xi)\right) + \varepsilon = h(T,\xi) + \varepsilon.$$

Доказательство

Если T автоморфизм, то в силу свойства 5 энтропии преобразования относительно разбиения справедлива оценка

$$h(T,\eta) \le h(T,\varsigma) + d_R(\eta,\varsigma) \le h\left(T, \bigvee_{i=-k}^{k} T^i(\xi)\right) + \varepsilon = h(T,\xi) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что

$$h(T) = \sup_{\eta\in\Psi} h(T,\eta) = \sup_{\xi\in\Xi} h(T,\xi).$$

Образующее разбиение

Определение. Будем говорить, что разбиение $\xi \in \Psi$ является образующим для преобразования (или автоморфизма) T, если $\Xi = \{\xi\}$ достаточное семейство.

Теорема Колмогорова - Синая

Если ξ образующее разбиение для T, то

$$h(T) = h(T, \xi).$$

Пример. Энтропия схемы Бернулли $B(p_1, \dots, p_m)$ равна

$$-\sum_{j=1}^{m} p_j \log_2 p_j.$$

Замечание.

$$\max\left\{ h\big(B(p_1, \dots, p_m)\big) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{m} p_j = 1,\ p_j \ge 0,\ j = 1, \dots, m \right\} = \log_2 m.$$

Вопрос

Указать образующее разбиение для динамической системы «преобразование пекаря».

Символическая динамика

Обозначим

$$\Omega_N = \left\{ \omega = \left(\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots \right) \middle| \omega_i \in \{0,1,\ldots,N-1\} \text{ для } i \in Z \right\}$$

фазовое пространство. Пусть

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{0,1,\ldots,N-1\}.$$

Цилиндром k-го порядка называется множество $C^{n_1,\ldots,n_k}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = \left\{ \omega \in \Omega_N \middle| \omega_{n_i} = \alpha_i \text{ для } i = 1,\ldots,k \right\}.$

Обозначим Π_N наименьшую Б - алгебру, содержащую все цилиндры.

Моделирование динамической системы

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1,$ абстрактная динамическая система, $T : M \to M$ автоморфизм, набор подмножеств $\xi = \{A_0, \ldots, A_{N-1}\}$ является образующим разбиением M. Положим

$$\varphi : M \to \Omega_N, \varphi(x) = (\ldots\omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots),$$

$$\forall n \in Z \ \omega_n = j \Leftrightarrow T^n x \in A_j.$$

Тогда для п.в. (мере μ) $x \in M \ \ \varphi(Tx) = \sigma_N(\varphi(x)),$

$$\mu_N\left(C^{n_1,\ldots,n_k}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\right) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{k} T^{-n_j} A_{\alpha_j}\right).$$

Марковские системы

Определим отображение сдвига

$$\sigma_N : \Omega_N \to \Omega_N, \sigma_N(\omega) = \omega', \forall n \in Z \ \omega'_n = \omega_{n+1},$$

$$\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots), \omega' = (\dots, \omega'_{-1}, \omega'_0, \omega'_1, \dots).$$

Символическая динамическая система

$$\{\Omega_N, \Pi_N, \mu_N, \sigma_N\}, \mu_N(\Omega_N) = 1$$

называется марковской, если

$$\forall k, i, n_1, \dots, n_k, j_1, \dots, j_k$$

$$\mu_N\left(\{\omega : \omega_{n_k+1} = i\} \middle| C^{n_1, \dots, n_k}_{j_1, \dots, j_k}\right) = \mu_N\left(\{\omega : \omega_{n_k+1} = i\} \middle| C^{n_k}_{j_k}\right) = \pi_{ij_k}.$$

Энтропия марковской системы

Неотрицательная матрица переходных вероятностей $\left\|\pi_{ij}\right\|_{i,j=0,\ldots,N-1}$ является стохастической, т.е. $\sum_{i=1}^{N}\pi_{ij}=1 \; j=1,\ldots,N,$ а вектор

$$p=\left(p_0,\ldots,p_{N-1}\right), p_j=\mu_N\left(C_j^0\right), j=0,\ldots,N-1,$$

её вектором Фробениуса – Перрона. В силу предложения 1 энтропия марковской системы равна

$$h(T,\xi)=\lim_{n\to+\infty}H\left(\xi\middle|T^{-1}\left(\xi_{-n}^{T}\right)\right)=H\left(\xi\middle|T^{-1}(\xi)\right)=$$

$$=-\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}p_j\pi_{ij}\log_2\pi_{ij}$$

Задача: вычислить энтропию линейного автоморфизма тора

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = \pm 1, a_{11} + a_{22} > 2.$

Отображение $A: R^2 \to R^2, A(x) = Ax$ при условии,

что $a_{ij} \in Z \ i = 1, 2; \ j = 1, 2$ допускает факторизацию

$$T_A = \Psi \circ A \circ \Psi^{-1} : R^2/Z^2 \to R^2/Z^2.$$

Абстрактная динамическая система $\{R^2/Z^2, \Lambda, T_A, \lambda\}$

называется линейным автоморфизмом тора.

Предложение 2

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1,$ абстрактная динамическая система и ξ образующее разбиение. Если $\log_2 \left|\xi_{-n}^{T}\right| = o(n),$ то $h(T) = 0.$

Доказательство. По свойству 1 энтропии разбиения имеем, что $0 \le H\left(\xi_{-n}^{T}\right) \le \log_2 \left|\xi_{-n}^{T}\right|.$

Следовательно,

$$h(T) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H\left(\xi_{-n}^{T}\right) = 0.$$

Следствие

Энтропия динамической системы «поворот окружности на иррациональный угол» равна нулю.

Доказательство. Разбиение окружности на две полуокружности диаметрально противоположными точками является образующим разбиением. Заметим, что

$$\left|\xi_{-n}^{T}\right| = 2(n+1) \Rightarrow \log_2\left|\xi_{-n}^{T}\right| = o(n).$$

Задача

Пусть $S = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| = 1 \right\}, \varphi_k : S \to S, \varphi_k(z) = z^k, k \in \mathbb{N}.$

Вычислить энтропию динамической системы

$$\left\{ S, \Lambda, \varphi_k, \lambda \right\}.$$

Предложение 3

Если T автоморфизм и ξ одностороннее образующее разбиение (т.е. для T рассматриваемого как автоморфизм), то

$$h(T) = 0.$$

Доказательство. По теореме Колмогорова -Синая достаточно доказать, что $h(T, \xi) = 0$ или с учетом свойства 4 энтропии преобразования, что

$$h(T, T(\xi)) = 0.$$

Доказательство

Зафиксируем произвольное ε>0. Поскольку ξ одностороннее образующее разбиение, существует разбиение ζ, такое, что

$$d_R\left(T(\xi),\varsigma\right)<\varepsilon,\ \ \varsigma\le\bigvee_{j=0}^{k}T^{-j}(\xi).$$

Следовательно, в силу свойства 6 энтропии разбиения

$$H\left(T(\xi)\middle|\bigvee_{j=0}^{k}T^{-j}(\xi)\right)\le H\left(T(\xi)\middle|\varsigma\right)\le d_R\left(T(\xi),\varsigma\right)<\varepsilon.$$

Доказательство

В силу свойства 6 энтропии разбиения последовательность

$$\left\{ H\left(T(\xi) \middle| \bigvee_{j=0}^{n} T^{-j}(\xi) \right) \middle| n = 0,1,\ldots \right\}$$

монотонно не возрастает. Следовательно,

$$h\big(T, T(\xi)\big) = \lim_{n\to+\infty} H\left(T(\xi) \middle| \bigvee_{j=0}^{n} T^{-j}(\xi) \right) \le H\left(T(\xi) \middle| \bigvee_{j=0}^{k} T^{-j}(\xi) \right) < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε>0 получаем

$$h\big(T, T(\xi)\big) = 0.$$

Свойства энтропии динамической системы

1. Для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$h\left(T^k\right) = k\ h(T).$$

Доказательство. Пусть ξ образующее разбиение для отображения T. Тогда $\eta = \bigvee_{j=0}^{k-1} T^{-j}\xi \geq \xi$ образующее разбиение для отображения T^k и

$$\eta_{-n}^{T^k} = \left(\xi \vee \ldots \vee T^{-k+1}(\xi)\right) \vee \ldots \vee \left(T^{-k(n-1)+1}(\xi) \vee \ldots \vee T^{-kn+1}(\xi)\right) = \xi_{-kn}^{T}.$$

Следовательно,

$$h\left(T^k\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(\eta_{-n}^{T^k}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H\left(\xi_{-kn}^{T}\right) = kh(T).$$

Динамическая система в непрерывном времени

Определение. Абстрактная динамическая система $\{M, \Sigma, S^t, \mu\}$ называется непрерывной, если $\forall A \in \Sigma$ $\lim\limits_{t \to 0} \mu\left(S^t A \triangle A\right) = 0.$

Следствие. Если $\{M, \Sigma, S^t, \mu\}$ непрерывная динамическая система с $t \in (-\infty, +\infty)$, то

$$h\left(S^t\right) = |t|\, h\left(S^1\right).$$

Доказательство

Поскольку $h\left(S^{1}\right)=h\left(S^{-1}\right),$ можно считать, что t>0. Достаточно доказать, что

$$0<u<t\Rightarrow h\left(S^{u}\right)\le\frac{u}{t}h\left(S^{t}\right).$$

Действительно,

$$r\in\mathbb{N}:\frac{t}{r}<u\Rightarrow h\left(S^{u}\right)\ge\frac{ur}{t}h\left(S^{t/r}\right)=\frac{u}{t}h\left(S^{t}\right)\Rightarrow h\left(S^{u}\right)=\frac{u}{t}h\left(S^{t}\right).$$

Доказательство

Зафиксируем произвольное ε>0 и разбиение ξ. Пользуясь непрерывностью динамической системы и леммой 2, выберем

$$m \in \mathbb{N} : 0 < \tau < \frac{1}{m} \Rightarrow H\left(S^{\tau}\xi \middle| \xi\right) < \varepsilon.$$

Положим $\eta = \xi \vee S^{\frac{1}{m}}(\xi) \vee \ldots \vee S^{\frac{m-1}{m}}(\xi).$

Доказательство

Обозначим через $k(n)$ такое число $k \in \mathbb{N}$, что $nt \le ku < (n+1)t$, а через $r(p)$ такое число $r \in \mathbb{N}$, что $r\frac{u}{m} \le pt < (r+1)\frac{u}{m}$. Тогда

$$H\left(S^{pt}(\xi)\,\middle|\, S^{\frac{r(p)u}{m}}(\eta)\right) \le H\left(S^{pt}(\xi)\,\middle|\, S^{\frac{r(p)u}{m}}(\xi)\right) < \varepsilon.$$

Доказательство

Тогда

$$H\left(\xi \vee S^{t}(\xi) \vee \ldots \vee S^{nt}(\xi)\right) \leq$$

$$\leq H\left(\xi \vee S^{t}(\xi) \vee \ldots \vee S^{nt}(\xi) \vee \eta \vee S^{u}(\eta) \vee \ldots \vee S^{k(n)u}(\eta)\right) =$$

$$= H\left(\eta \vee S^{u}(\eta) \vee \ldots \vee S^{k(n)u}(\eta)\right) +$$

$$+ H\left(\xi \vee S^{t}(\xi) \vee \ldots \vee S^{nt}(\xi) \middle| \eta \vee S^{u}(\eta) \vee \ldots \vee S^{k(n)u}(\eta)\right) \leq$$

$$\leq H\left(\eta \vee S^{u}(\eta) \vee \ldots \vee S^{k(n)u}(\eta)\right) + \sum_{p=0}^{n} H\left(S^{pt}(\xi) \middle| S^{\frac{r(p)u}{m}}(\eta)\right) <$$

$$< H\left(\eta \vee S^{u}(\eta) \vee \ldots \vee S^{k(n)u}(\eta)\right) + n\varepsilon.$$

Доказательство

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{k(n)}{n}=\frac{t}{u}$, получаем при $n\to+\infty$,

Что

$$h\left(S^{t}\right)\le\frac{t}{u}h\left(S^{u}\right)+\varepsilon.$$

Откуда с учетом произвольности ε>0 имеем

$$h\left(S^{t}\right)\le\frac{t}{u}h\left(S^{u}\right).$$

Свойства энтропии динамической системы

2. Если A инвариантное множество абстрактной динамической системы $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M)=1,$ и $\mu(A)>0,$ то

$$h_{\mu}(T)=\mu(A)h_{\mu_A}(T)+\mu(M\setminus A)h_{\mu_{M\setminus A}}(T).$$

Доказательство. Пусть $\varsigma=\{A, M\setminus A\}$ и ξ разбиение такое, что $\xi \geq \varsigma.$ Тогда в силу инвариантности множества A имеем

$$H_{\mu}\left(\xi_{-n}^{T}\right)=\mu(A)H_{\mu_A}\left(\xi_{-n}^{T}\right)+\mu(M\setminus A)H_{\mu_{M\setminus A}}\left(\xi_{-n}^{T}\right).$$

Следствие

Если μ и λ две взаимно сингулярные инвариантные вероятностные меры преобразования T и $p \in [0,1]$, то

$$h_{p\mu+(1-p)\lambda}(T) = ph_{\mu}(T) + (1-p)h_{\lambda}(T).$$

Доказательство. Пусть $A \subset M$, такое, что $\mu(A) = \lambda(M \setminus A) = 1.$ Тогда

$$p\mu = \left(p\mu + (1-p)\lambda\right)_{A}, (1-p)\lambda = \left(p\mu + (1-p)\lambda\right)_{M \setminus A}.$$