Введение в эргодическую теории
Лекция 7

А.А.Шананин

Гомологическая лемма

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ эргодическая абстрактная динамическая система, $\Lambda_{pp}(T)$ множество собственных значений оператора Купмана U_T. Тогда можно так выбрать систему собственных функций $\left\{f_\lambda(x) \middle| \lambda \in \Lambda_{pp}(T)\right\}$, что $\forall \lambda \in \Lambda_{pp}(T) \ \left|f_\lambda(x)\right| \equiv 1$ и

$$\forall \lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall \lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T) \ f_{\lambda_1}(x) f_{\lambda_2}(x) = f_{\lambda_1 \lambda_2}(x).$$

Доказательство

Если $\left\{\tilde{f}_\lambda(x) \middle| \lambda \in \Lambda_{pp}(T)\right\}, \left|\tilde{f}_\lambda(x)\right| \equiv 1$ какая-то система собственных функций оператора Купмана, то

$$\forall\lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall\lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T)\ \tilde{f}_{\lambda_1}(x)\tilde{f}_{\lambda_2}(x) = c(\lambda_1, \lambda_2)\tilde{f}_{\lambda_1\lambda_2}(x),$$

где $\forall\lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall\lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T)\ \left|c(\lambda_1, \lambda_2)\right| = 1.$

Достаточно доказать, что

$$\exists a(\lambda), \left|a(\lambda)\right| = 1:\ \forall\lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall\lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T)\ c(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{a(\lambda_1\lambda_2)}{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}.$$

Тогда $\left\{f_\lambda(x) = a(\lambda)\tilde{f}_\lambda(x) \middle| \lambda \in \Lambda_{pp}(T)\right\}.$

Доказательство

Заметим, что

$$\forall\lambda_1 \in \Lambda_{pp}(T), \forall\lambda_2 \in \Lambda_{pp}(T), \forall\lambda_3 \in \Lambda_{pp}(T)$$

1. $c(1,\lambda_1) = 1,$

$$\tilde{f}_{\lambda_1}(x)\tilde{f}_{\lambda_2} = \tilde{f}_{\lambda_2}(x)\tilde{f}_{\lambda_1}(x),$$

$$\tilde{f}_{\lambda_1}(x)\tilde{f}_{\lambda_2}(x) = c(\lambda_1,\lambda_2)\tilde{f}_{\lambda_1\lambda_2}(x), \tilde{f}_{\lambda_2}(x)\tilde{f}_{\lambda_1} = c(\lambda_2,\lambda_1)\tilde{f}_{\lambda_1\lambda_2}(x), \Rightarrow$$

2. $c(\lambda_1,\lambda_2) = c(\lambda_2,\lambda_1),$

$$\left(\tilde{f}_{\lambda_1}(x)\tilde{f}_{\lambda_2}(x)\right)\tilde{f}_{\lambda_3}(x) = \tilde{f}_{\lambda_1}(x)\left(\tilde{f}_{\lambda_2}(x)\tilde{f}_{\lambda_3}(x)\right),$$

$$\left(\tilde{f}_{\lambda_1}(x)\tilde{f}_{\lambda_2}(x)\right)\tilde{f}_{\lambda_3}(x) = c(\lambda_1,\lambda_2)\tilde{f}_{\lambda_1\lambda_2}(x)\tilde{f}_{\lambda_3}(x) = c(\lambda_1,\lambda_2)c(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3)\tilde{f}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x),$$

$$\tilde{f}_{\lambda_1}(x)\left(\tilde{f}_{\lambda_2}(x)\tilde{f}_{\lambda_3}(x)\right) = \tilde{f}_{\lambda_1}(x)c(\lambda_2,\lambda_3)\tilde{f}_{\lambda_2\lambda_3}(x) = c(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3)c(\lambda_2,\lambda_3)\tilde{f}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(x), \Rightarrow$$

3. $c(\lambda_1,\lambda_2)c(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3) = c(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3)c(\lambda_2,\lambda_3).$

Доказательство

Запишем $\Lambda_{pp}(T)=\{1,\lambda_1,\dots,\lambda_n,\dots\}$.

Обозначим Λ_{pp}^n подгруппу, порождённую $1,\lambda_1,\dots,\lambda_n$ и предположим, что на Λ_{pp}^n определена функция $a(\lambda)$ такая, что

$$\forall\lambda\in\Lambda_{pp}^n,\forall\mu\in\Lambda_{pp}^n\ \ c(\lambda,\mu)=\frac{a(\lambda\mu)}{a(\lambda)a(\mu)}.$$

Далее доказательство по индукции.

Если $n=0$, то положим $a(1)=1$.

Доказательство. Шаг 1.

Предположим, что $\lambda_{n+1} \notin \Lambda_{pp}^{n}$. Если $\forall r \in Z \setminus \{0\}\ \lambda_{n+1}^{r} \notin \Lambda_{pp}^{n}$, то положим $a(\lambda_{n+1}) = 1.$

Если $\exists r \in Z \setminus \{0\}\ \lambda_{n+1}^{r} \in \Lambda_{pp}^{n}$, то множество $\left\{ r \in Z \middle| \lambda_{n+1}^{r} \in \Lambda_{pp}^{n} \right\}$ являются подгруппой Z.

Следовательно, $\exists h \in Z : \lambda_{n+1}^{r} \in \Lambda_{pp}^{n} \Leftrightarrow r = h \times m, m \in Z.$

Из индуктивного предположения следует, что уже определено $a(\lambda_{n+1}^{r})$, если $\lambda_{n+1}^{r} \in \Lambda_{pp}^{n}.$

Доказательство. Шаг 1.

Требуется, чтобы

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p}, \lambda_{n+1}\right) = \frac{a\left(\lambda_{n+1}^{p+1}\right)}{a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right) a\left(\lambda_{n+1}\right)} \Rightarrow \prod_{p=0}^{h-1} c\left(\lambda_{n+1}^{p}, \lambda_{n+1}\right) = \frac{a\left(\lambda_{n+1}^{h}\right)}{\left(a\left(\lambda_{n+1}\right)\right)^{h}}.$$

Поскольку

$$\left(a\left(\lambda_{n+1}\right)\right)^{h} = a\left(\lambda_{n+1}^{h}\right)\left(\prod_{p=0}^{h-1} c\left(\lambda_{n+1}^{p}, \lambda_{n+1}\right)\right)^{-1},$$

с учётом индуктивного предположения правая часть уже определена, положим $a\left(\lambda_{n+1}\right)$ равным некоторому корню этого уравнения.

Доказательство. Шаг 2.

Положим для m>0

$$a\left(\lambda_{n+1}^{m}\right)=\left(a\left(\lambda_{n+1}\right)\right)^{m}\prod_{p=0}^{m-1}c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}\right).$$

Положим для m<0

$$a\left(\lambda_{n+1}^{m}\right)=\left(a\left(\lambda_{n+1}^{-m}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{m},\lambda_{n+1}^{-m}\right)\right)^{-1}.$$

Доказательство. Шаг 2.1.

Покажем, что

$$a\left(\lambda_{n+1}^{p+q}\right)=a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q}\right). \qquad (1)$$

Будем доказывать по индукции по p.

Рассмотрим сначала случай $p\ge 0, q\ge 0.$

Для $p=0$ $a\left(\lambda_{n+1}^{q}\right)=a(1)a\left(\lambda_{n+1}^{q}\right)c\left(1,\lambda_{n+1}^{q}\right)\Leftrightarrow c\left(1,\lambda_{n+1}^{q}\right)=1.$

Подставляя выражения $a\left(\lambda_{n+1}^{p+q}\right), a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right), a\left(\lambda_{n+1}^{q}\right),$

получаем, что (1) эквивалентно

$$\prod_{s=0}^{p+q-1}c\left(\lambda_{n+1}^{s},\lambda_{n+1}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q}\right)\prod_{s=0}^{p-1}c\left(\lambda_{n+1}^{s},\lambda_{n+1}\right)\prod_{s=0}^{q-1}c\left(\lambda_{n+1}^{s},\lambda_{n+1}\right). \qquad (2)$$

Доказательство. Шаг 2.1.

Считая по индуктивному предположению, выполненным (2). Требуется доказать, что

$$\prod_{s=0}^{p+q} c\left(\lambda_{n+1}^{s}, \lambda_{n+1}\right) = c\left(\lambda_{n+1}^{p+1}, \lambda_{n+1}^{q}\right) \prod_{s=0}^{p} c\left(\lambda_{n+1}^{s}, \lambda_{n+1}\right) \prod_{s=0}^{q-1} c\left(\lambda_{n+1}^{s}, \lambda_{n+1}\right). \quad (3)$$

С учётом (2) равенство (3) эквивалентно

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p+q}, \lambda_{n+1}\right) c\left(\lambda_{n+1}^{p}, \lambda_{n+1}^{q}\right) = c\left(\lambda_{n+1}^{p+1}, \lambda_{n+1}^{q}\right) c\left(\lambda_{n+1}^{p}, \lambda_{n+1}\right). \quad (4)$$

Доказательство. Шаг 2.1.

Считая по индуктивному предположению, выполненным (2). Требуется доказать, что

$$\prod_{s=0}^{p+q} c\left(\lambda_{n+1}^{s}, \lambda_{n+1}\right) = c\left(\lambda_{n+1}^{p+1}, \lambda_{n+1}^{q}\right) \prod_{s=0}^{p} c\left(\lambda_{n+1}^{s}, \lambda_{n+1}\right) \prod_{s=0}^{q-1} c\left(\lambda_{n+1}^{s}, \lambda_{n+1}\right). \quad (3)$$

С учётом (2) равенство (3) эквивалентно

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p+q}, \lambda_{n+1}\right) c\left(\lambda_{n+1}^{p}, \lambda_{n+1}^{q}\right) = c\left(\lambda_{n+1}^{p+1}, \lambda_{n+1}^{q}\right) c\left(\lambda_{n+1}^{p}, \lambda_{n+1}\right). \quad (4)$$

Доказательство. Шаг 2.

Подставляя в $c(\lambda_1,\lambda_2)c(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3)=c(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3)c(\lambda_2,\lambda_3)$, $\lambda_1=\lambda_{n+1},\lambda_2=\lambda_{n+1}^p,\lambda_3=\lambda_{n+1}^q,$ получаем (4).

Рассмотрим теперь случай, когда $p\ge 0,-q\ge 0.$

Пусть сначала $p+q>0.$ Проверка (1) эквивалентна проверке

$$a\left(\lambda_{n+1}^p\right)c\left(\lambda_{n+1}^p,\lambda_{n+1}^q\right)=a\left(\lambda_{n+1}^{p+q}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^q,\lambda_{n+1}^{-q}\right)$$

или после постановки $a\left(\lambda_{n+1}^p\right),a\left(\lambda_{n+1}^{-q}\right),a\left(\lambda_{n+1}^{-p-q}\right),$

$$c\left(\lambda_{n+1}^p,\lambda_{n+1}^q\right)\prod_{s=0}^{p-1}c\left(\lambda_{n+1}^s,\lambda_{n+1}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{-q},\lambda_{n+1}^q\right)\prod_{s=0}^{p+q-1}c\left(\lambda_{n+1}^s,\lambda_{n+1}\right)\prod_{s=0}^{-q-1}c\left(\lambda_{n+1}^s,\lambda_{n+1}\right)$$

Доказательство. Шаг 2.2.

Будем доказывать по индукции по q.

Переходя от q к q-1, требуется проверить, что

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_{n+1}^{-q+1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-q},\lambda_{n+1}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q-1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+q-1},\lambda_{n+1}\right).$$

Подставляя в $c\left(\lambda_1,\lambda_2\right)c\left(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3\right)=c\left(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3\right)c\left(\lambda_2,\lambda_3\right),$

$\lambda_1=\lambda_{n+1}^{p},\lambda_2=\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_3=\lambda_{n+1},$ получаем, что

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q-1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+q-1},\lambda_{n+1}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_{n+1}\right)$$

и сводим к проверке

$$c\left(\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_{n+1}^{-q+1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-q},\lambda_{n+1}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_{n+1}\right).$$

Доказательство. Шаг 2.2.

Подставляя в $c(\lambda_1,\lambda_2)c(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3)=c(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3)c(\lambda_2,\lambda_3)$,

$\lambda_1=\lambda_{n+1},\lambda_2=\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_3=\lambda_{n+1}^{-q}$, получаем, что

$$c\left(\lambda_{n+1},\lambda_{n+1}^{q-1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{-q}\right)=c\left(\lambda_{n+1},\lambda_{n+1}^{-1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_{n+1}^{-q}\right),$$

аналогично, подставляя $\lambda_1=\lambda_{n+1},\lambda_2=\lambda_{n+1}^{-q},\lambda_3=\lambda_{n+1}^{q-1}$,

получаем, что

$$c\left(\lambda_{n+1},\lambda_{n+1}^{-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-q+1},\lambda_{n+1}^{q-1}\right)=c\left(\lambda_{n+1},\lambda_{n+1}^{-1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-q},\lambda_{n+1}^{q-1}\right).$$

Следовательно,

$$c\left(\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_{n+1}^{-q+1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-q},\lambda_{n+1}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_{n+1}\right).$$

Доказательство. Шаг 2.3.

Пусть теперь $p \geq 0, -q > 0,\ p+q \leq 0.$ Тогда проверка (1) эквивалентна проверке

$$a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-p-q},\lambda_{n+1}^{p+q}\right)=a\left(\lambda_{n+1}^{-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-q},\lambda_{n+1}^{q}\right)$$

или после постановки $a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right), a\left(\lambda_{n+1}^{-q}\right), a\left(\lambda_{n+1}^{-p-q}\right),$

$$c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{-q}\right)\prod_{s=0}^{-q-1}c\left(\lambda_{n+1}^{s},\lambda_{n+1}\right)=$$

$$=c\left(\lambda_{n+1}^{p+q},\lambda_{n+1}^{-q-p}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{p}\right)\prod_{s=0}^{-q-p-1}c\left(\lambda_{n+1}^{s},\lambda_{n+1}\right)\prod_{s=0}^{p-1}c\left(\lambda_{n+1}^{s},\lambda_{n+1}\right)$$

Доказательство. Шаг 2.3.

Будем доказывать по индукции по q.

Переходя от q к q-1, требуется проверить, что

$$c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+q-1},\lambda_{n+1}^{-p-q+1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_{n+1}^{p}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-p-q},\lambda_{n+1}\right)=$$

$$=c\left(\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_{n+1}^{-q+1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-q},\lambda_{n+1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+q},\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{p}\right).$$

Подставляя в $c\left(\lambda_1,\lambda_2\right)c\left(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3\right)=c\left(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3\right)c\left(\lambda_2,\lambda_3\right)$,

$\lambda_1=\lambda_{n+1},\lambda_2=\lambda_{n+1}^{-p-q},\lambda_3=\lambda_{n+1}^{p+q-1}$, получаем, что

$$c\left(\lambda_{n+1},\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-p-q+1},\lambda_{n+1}^{p+q-1}\right)=c\left(\lambda_{n+1},\lambda_{n+1}^{-1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-p-q},\lambda_{n+1}^{p+q-1}\right).$$

Доказательство. Шаг 2.3.

Аналогично, подставляя в

$$c(\lambda_1,\lambda_2)c(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3)=c(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3)c(\lambda_2,\lambda_3),$$

$\lambda_1=\lambda_{n+1},\lambda_2=\lambda_{n+1}^{-q},\lambda_3=\lambda_{n+1}^{q-1},$ получаем

$$c(\lambda_{n+1},\lambda_{n+1}^{-q})c(\lambda_{n+1}^{-q+1},\lambda_{n+1}^{q-1})=c(\lambda_{n+1},\lambda_{n+1}^{-1})c(\lambda_{n+1}^{-q},\lambda_{n+1}^{q-1})$$

и, сокращая на $c(\lambda_{n+1},\lambda_{n+1}^{-1})$, сводим к проверке

$$c(\lambda_{n+1}^{-q},\lambda_{n+1}^{q-1})c(\lambda_{n+1}^{p+q},\lambda_{n+1}^{-p-q})c(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{p})=$$

$$=c(\lambda_{n+1}^{p+q-1},\lambda_{n+1}^{-p-q})c(\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_{n+1}^{p})c(\lambda_{n+1}^{-q},\lambda_{n+1}^{q}).$$

Доказательство. Шаг 2.3.

Подставляя в $c(\lambda_1,\lambda_2)c(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3)=c(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3)c(\lambda_2,\lambda_3)$,

$\lambda_1=\lambda_{n+1}^{q},\lambda_2=\lambda_{n+1}^{p},\lambda_3=\lambda_{n+1}^{-p-q}$, получаем

$$c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{p}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+q},\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)$$

и, сокращая на $c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{-q}\right)$ сводим к проверке

$$c\left(\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_{n+1}^{p}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+q-1},\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_{n+1}^{-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{-p-q}\right).$$

Это равенство следует при $\lambda_1=\lambda_{n+1}^{q-1},\lambda_2=\lambda_{n+1}^{p},\lambda_3=\lambda_{n+1}^{-p-q}$

из $c(\lambda_1,\lambda_2)c(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3)=c(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3)c(\lambda_2,\lambda_3)$.

Доказательство. Шаг 2.4.

Поскольку p и q входят в (1) симметрично, остается рассмотреть случай $p<0, q<0$, который сводится к проверке

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+q},\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{-p}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{-q}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{-p}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{-q}\right)$$

или после подстановки $a\left(\lambda_{n+1}^{-p}\right), a\left(\lambda_{n+1}^{-q}\right), a\left(\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)$ к

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+q},\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)\prod_{s=0}^{-p-q-1}c\left(\lambda_{n+1}^{s},\lambda_{n+1}\right)=$$

$$=c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{-p}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{-q}\right)\prod_{s=0}^{-p-1}c\left(\lambda_{n+1}^{s},\lambda_{n+1}\right)\prod_{s=0}^{-q-1}c\left(\lambda_{n+1}^{s},\lambda_{n+1}\right).$$

Доказательство. Шаг 2.4.

Будем доказывать по индукции по p.

Переходя от p к p-1, требуется проверить, что

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{-p}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p-1},\lambda_{n+1}^{q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+q-1},\lambda_{n+1}^{-p-q+1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-p-q},\lambda_{n+1}\right)=$$

$$=c\left(\lambda_{n+1}^{p-1},\lambda_{n+1}^{-p+1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-p},\lambda_{n+1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+q},\lambda_{n+1}^{-p-q}\right).$$

Подставляя в $c\left(\lambda_1,\lambda_2\right)c\left(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3\right)=c\left(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3\right)c\left(\lambda_2,\lambda_3\right)$,

$\lambda_1=\lambda_{n+1}^{p-1},\lambda_2=\lambda_{n+1}^{q},\lambda_3=\lambda_{n+1}^{-p-q+1}$, получаем, что

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p-1},\lambda_{n+1}^{q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+q-1},\lambda_{n+1}^{-p-q+1}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{p-1},\lambda_{n+1}^{-p+1}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{-p-q+1}\right)$$

Доказательство. Шаг 2.4.

Подставляя в $c(\lambda_1,\lambda_2)c(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3)=c(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3)c(\lambda_2,\lambda_3)$

$\lambda_1=\lambda_{n+1}^{p},\lambda_2=\lambda_{n+1}^{q},\lambda_3=\lambda_{n+1}^{-p-q}$, получаем, что

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+q},\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{-p}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{q},\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)$$

и сводим к проверке

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{-p}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p-1},\lambda_{n+1}^{-p+1}\right)c\left(\lambda_{n+1},\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-p-q+1},\lambda_{n+1}^{q}\right)=$$

$$=c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{-p}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p-1},\lambda_{n+1}^{-p+1}\right)c\left(\lambda_{n+1},\lambda_{n+1}^{-p}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-p-q},\lambda_{n+1}^{q}\right).$$

Доказательство. Шаг 2.4.

Подставляя в $c(\lambda_1,\lambda_2)c(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3)=c(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3)c(\lambda_2,\lambda_3)$ $\lambda_1=\lambda_{n+1},\lambda_2=\lambda_{n+1}^{-p-q},\lambda_3=\lambda_{n+1}^{q}$, получаем, что

$$c\left(\lambda_{n+1},\lambda_{n+1}^{-p-q}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-p-q+1},\lambda_{n+1}^{q}\right)=c\left(\lambda_{n+1},\lambda_{n+1}^{-p}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{-p-q},\lambda_{n+1}^{q}\right)$$

и завершаем проверку.

Итак, построены

$$\left\{a\left(\lambda_{n+1}^{m}\right)\middle|m\in Z\right\}:\forall p\in Z,\forall q\in Z\,c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{q}\right)=\frac{a\left(\lambda_{n+1}^{p+q}\right)}{a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{q}\right)}.$$

Доказательство. Шаг 3.

Пусть $\lambda \in \Lambda_{pp}^{n+1}$, т.е. $\lambda = \lambda_{n+1}^{r}\mu, \mu \in \Lambda_{pp}^{n}$. Положим

$$a(\lambda) = c\left(\lambda_{n+1}^{r}, \mu\right) a\left(\lambda_{n+1}^{r}\right) a(\mu). \tag{5}$$

Докажем корректность определения $a(\lambda)$.

Допустим, что $\lambda = \lambda_{n+1}^{p}\hat{\mu}, \hat{\mu} \in \Lambda_{pp}^{n}$. Тогда $\lambda_{n+1}^{p-r} = \mu\hat{\mu}^{-1} \in \Lambda_{pp}^{n}$.

По индуктивному предположению имеем

$$a(\mu) = c\left(\lambda_{n+1}^{p-r}, \hat{\mu}\right) a\left(\lambda_{n+1}^{p-r}\right) a(\hat{\mu}). \tag{6}$$

Доказательство. Шаг 3.

Для доказательства корректности (5) требуется обосновать, что

$$c\left(\lambda_{n+1}^{r},\mu\right)a\left(\lambda_{n+1}^{r}\right)a(\mu)=c\left(\lambda_{n+1}^{p},\mu\right)a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right)a(\hat{\mu})$$

или, учитывая (6), что

$$c\left(\lambda_{n+1}^{r},\mu\right)a\left(\lambda_{n+1}^{r}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p-r},\hat{\mu}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{p-r}\right)a(\hat{\mu})=c\left(\lambda_{n+1}^{p},\hat{\mu}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right)a(\hat{\mu}).$$

Поскольку из (1) $a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{p-r},\lambda_{n+1}^{r}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{p-r}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{r}\right)$,

проверка сводится к

$$c\left(\lambda_{n+1}^{r},\lambda_{n+1}^{p-r}\hat{\mu}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p-r},\hat{\mu}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{r},\lambda_{n+1}^{p-r}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p},\hat{\mu}\right).$$

Доказательство. Шаг 3.

Подставляя в $c(\lambda_1,\lambda_2)c(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3)=c(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3)c(\lambda_2,\lambda_3)$
$\lambda_1=\lambda_{n+1}^{r},\lambda_2=\lambda_{n+1}^{p-r},\lambda_3=\hat{\mu},$ завершаем проверку.

Итак, корректно определены $\left\{a(\lambda)\middle|\lambda\in\Lambda_{pp}^{n+1}\right\}$.

Остается проверить, что

$$\forall\lambda\in\Lambda_{pp}^{n+1},\forall\tilde{\lambda}\in\Lambda_{pp}^{n+1}\ c(\lambda,\tilde{\lambda})=\frac{a(\lambda\tilde{\lambda})}{a(\lambda)a(\tilde{\lambda})}.$$

Доказательство. Шаг 4.

Пусть $\lambda = \lambda_{n+1}^{p}\mu, \tilde{\lambda} = \lambda_{n+1}^{r}\tilde{\mu}, \mu \in \Lambda_{pp}^{n}, \tilde{\mu} \in \Lambda_{pp}^{n}, p \in Z, r \in Z.$

Тогда

$$a(\lambda) = c\left(\lambda_{n+1}^{p}, \mu\right)a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right)a(\mu),$$

$$a\left(\tilde{\lambda}\right) = c\left(\lambda_{n+1}^{r}, \tilde{\mu}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{r}\right)a(\tilde{\mu}),$$

$$a\left(\lambda\tilde{\lambda}\right) = c\left(\lambda_{n+1}^{p+r}, \mu\tilde{\mu}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{p+r}\right)a(\mu\tilde{\mu}).$$

По индуктивному предположению

$$a(\mu\tilde{\mu}) = c(\mu, \tilde{\mu})a(\mu)a(\tilde{\mu}).$$

Доказательство. Шаг 4.

Из (1) имеем, что $a\left(\lambda_{n+1}^{p+r}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{r}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{p}\right)a\left(\lambda_{n+1}^{r}\right).$

Таким образом, обоснование сводится к проверке равенства

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p}\mu,\lambda_{n+1}^{r}\tilde{\mu}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p},\mu\right)c\left(\lambda_{n+1}^{r},\tilde{\mu}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{p+r},\mu\tilde{\mu}\right)c\left(\mu,\tilde{\mu}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{r}\right).$$

Подставляя в $c\left(\lambda_1,\lambda_2\right)c\left(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3\right)=c\left(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3\right)c\left(\lambda_2,\lambda_3\right)$ $\lambda_1=\lambda_{n+1}^{p},\lambda_2=\mu,\lambda_3=\lambda_{n+1}^{r}\tilde{\mu},$ получаем, что

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p},\mu\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p}\mu,\lambda_{n+1}^{r}\tilde{\mu}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{r}\mu\tilde{\mu}\right)c\left(\mu,\lambda_{n+1}^{r}\tilde{\mu}\right).$$

Доказательство. Шаг 4.

Следовательно,

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p}\mu,\lambda_{n+1}^{r}\tilde{\mu}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p},\mu\right)c\left(\lambda_{n+1}^{r},\tilde{\mu}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{r}\mu\tilde{\mu}\right)c\left(\mu,\lambda_{n+1}^{r}\tilde{\mu}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{r},\tilde{\mu}\right).$$

Подставляя в $c\left(\lambda_1,\lambda_2\right)c\left(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3\right)=c\left(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3\right)c\left(\lambda_2,\lambda_3\right)$

$\lambda_1=\mu,\lambda_2=\tilde{\mu},\lambda_3=\lambda_{n+1}^{r},$ получаем, что

$$c\left(\mu,\tilde{\mu}\right)c\left(\mu\tilde{\mu},\lambda_{n+1}^{r}\right)=c\left(\mu,\lambda_{n+1}^{r}\tilde{\mu}\right)c\left(\tilde{\mu},\lambda_{n+1}^{r}\right).$$

Следовательно,

$$c\left(\lambda_{n+1}^{p}\mu,\lambda_{n+1}^{r}\tilde{\mu}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p},\mu\right)c\left(\lambda_{n+1}^{r},\tilde{\mu}\right)=c\left(\mu,\tilde{\mu}\right)c\left(\mu\tilde{\mu},\lambda_{n+1}^{r}\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p},\lambda_{n+1}^{r}\mu\tilde{\mu}\right)$$

Доказательство. Шаг 4.

Поставляя в $c(\lambda_1,\lambda_2)c(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3)=c(\lambda_1,\lambda_2\lambda_3)c(\lambda_2,\lambda_3)$

$\lambda_1=\lambda_{n+1}^p,\lambda_2=\lambda_{n+1}^r,\lambda_3=\mu\tilde{\mu}$, получаем, что

$$c\left(\lambda_{n+1}^p,\lambda_{n+1}^r\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+r},\mu\tilde{\mu}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^p,\lambda_{n+1}^r\mu\tilde{\mu}\right)c\left(\lambda_{n+1}^r,\mu\tilde{\mu}\right)$$

Следовательно,

$$c\left(\lambda_{n+1}^p\mu,\lambda_{n+1}^r\tilde{\mu}\right)c\left(\lambda_{n+1}^p,\mu\right)c\left(\lambda_{n+1}^r,\tilde{\mu}\right)=c\left(\lambda_{n+1}^p,\lambda_{n+1}^r\right)c\left(\lambda_{n+1}^{p+r},\mu\tilde{\mu}\right)c(\mu,\tilde{\mu}),$$

что и требовалось доказать.

Обобщенные собственные значения

Пусть $\{M, \Sigma, T, \mu\}, \mu(M) = 1$ эргодическая абстрактная динамическая система и

$$G = \left\{ g(x) \in L_2(M, \mu) \middle\| g(x) \right| \equiv 1 \right\}.$$

Определим

$$G' = \left\{ f(x) \in L_2(M, \mu) \middle| f(Tx) = g(x) f(x) \text{ п.в. по мере } \mu, g(x) \in G \right\}.$$

Очевидно, что если $H \subset G$, то $H' \subset G'$.

Положим $G_1(T) = \left\{ e^{2\pi i t} \middle| t \in [0,1) \right\}$ и определим по индукции $G_{n+1}(T) = G_n'(T)$.

Обобщенные собственные значения

Тогда $G_2(T)$ множество собственных функций оператора Купмана U_T с точностью до постоянного множителя. Поскольку $1 \in G_2(T)$, $G_1(T) \subset G_2(T)$. Следовательно,

$$G_1(T) \subset G_2(T) \subset \ldots \subset G_n(T) \subset \ldots$$

Если $G_n(T) = G_{n+1}(T)$, то $G_n(T) = G_{n+k}(T), k = 1, 2, \ldots$

Определим $n(T) = \min\left\{ n \middle| G_n(T) = G_{n+1}(T) \right\}$.

Задача

Пусть $\left\{R/Z, \Lambda, T_g, \lambda\right\}$ поворот окружности на иррациональный угол g. Доказать, что $n\left(T_g\right) = 2.$

Решение. $G_2\left(T_g\right) = \left\{e^{2\pi inx} \,\middle|\, n \in Z\right\}.$ Пусть $f\left(x\right) \in G_3\left(T_g\right).$

Тогда $U_{T_g} f\left(x\right) = be^{2\pi imx} f\left(x\right), \left|b\right| = 1, m \in Z.$

Разложим $f\left(x\right)$ в ряд Фурье

$$f\left(x\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi inx}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|a_n\right|^2 < +\infty.$$

Решение

Тогда

$$U_{T_g} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n(x+g)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n g} e^{2\pi i n x},$$

$$b e^{2\pi i m x} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b a_{n-m} e^{2\pi i n x},$$

$$\Rightarrow \forall n \in Z \ a_n e^{2\pi i n g} = b a_{n-m}$$

$$\Rightarrow \forall n \in Z \ |a_n| = |a_{n-m}| \Rightarrow m = 0 \Rightarrow f(x) \in G_2.$$

Обобщенные собственные значения

Теорема. Если эргодические абстрактные динамические системы $\left\{M_1, \Sigma_1, T_1, \mu_1\right\}, \mu_1\left(M_1\right)=1$ и $\left\{M_2, \Sigma_2, T_2, \mu_2\right\}, \mu_2\left(M_2\right)=1$ изоморфны, то $n\left(T_1\right)=n\left(T_2\right)$.

Доказательство. Пусть отображение $\varphi: M_1 \to M_2$ порождает изоморфизм динамических систем. Покажем по индукции, что

$$G_n\left(T_1\right) \supset \left\{f\left(\varphi(x)\right) \middle| f\left(y\right) \in G_n\left(T_2\right)\right\}, G_n\left(T_2\right) \supset \left\{f\left(\varphi^{-1}(x)\right) \middle| f\left(y\right) \in G_n\left(T_1\right)\right\}. \quad (7)$$

Обобщенные собственные значения

Соотношения (7) эквивалентны

$$G_n\left(T_1\right)=U_\varphi G_n\left(T_2\right), G_n\left(T_2\right)=U_{\varphi^{-1}}G_n\left(T_1\right).$$

Действительно,

$$G_1\left(T_1\right)=\left\{e^{2\pi it}\,\middle|\,t\in\left[0,1\right)\right\}=\left\{U_\varphi e^{2\pi it}\,\middle|\,t\in\left[0,1\right)\right\}=U_\varphi G_1\left(T_2\right).$$

Будем считать по индуктивному предположению, что $G_n\left(T_1\right)=U_\varphi G_n\left(T_2\right)$. Пусть

$$f\left(x\right)\in G_{n+1}\left(T_2\right)\Rightarrow f\left(T_2x\right)=g\left(x\right)f\left(x\right), g\left(x\right)\in G_n\left(T_2\right)\Rightarrow$$

$$f\left(T_1\varphi\left(x\right)\right)=f\left(\varphi\left(T_2x\right)\right)=g\left(\varphi\left(x\right)\right)f\left(\varphi\left(x\right)\right), g\left(\varphi\left(x\right)\right)\in G_n\left(T_1\right).$$

Обобщенные собственные значения

Следовательно,

$$f\left(\varphi(x)\right) \in G_{n+1}\left(T_1\right) \Rightarrow U_\varphi G_{n+1}\left(T_2\right) \subset G_{n+1}\left(T_1\right).$$

Аналогично доказывается, что

$$U_{\varphi^{-1}} G_{n+1}\left(T_1\right) \subset G_{n+1}\left(T_1\right).$$

Следовательно,

$$G_n\left(T_1\right) = U_\varphi G_n\left(T_2\right), G_n\left(T_2\right) = U_{\varphi^{-1}} G_n\left(T_1\right)$$

и, значит, $n\left(T_1\right) = n\left(T_2\right)$.

Пример

Рассмотрим абстрактные динамические системы $\left\{R^2/Z^2, \Lambda, T_1, \lambda\right\}$ и $\left\{R^2/Z^2, \Lambda, T_2, \lambda\right\}$, где

$$T_1\left(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}\right) = \left(e^{2\pi i(x+g)}, e^{2\pi i(x+y)}\right),$$

$$T_2\left(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}\right) = \left(e^{2\pi i(x+g)}, e^{4\pi iy}\right).$$

Здесь g иррациональное число.

Пример 1

Положим

$$f_{n,0}(x,y)=e^{2\pi inx}, f_{n,m}(x,y)=e^{2\pi i\left(nx+my+\frac{(2n-m)^2}{8m}\right)} \text{ при } m\neq 0.$$

Рассмотрим ортонормированный базис

$\left\{f_{n,m}(x,y)\middle| n\in Z, m\in Z\right\}$ в $L_2\left(R^2/Z^2\right).$

Заметим, что $U_{T_1}f_{n,0}(x,y)=e^{2\pi ing}f_{n,0}(x,y),$

$$U_{T_1}f_{n,m}(x,y)=f_{n+m,m}(x,y) \text{ при } m\neq 0.$$

Перенумеруем элементы базиса

$$(n,m), n=0,\pm1,\pm2,\ldots, m=\pm1,\pm2,\ldots$$

$$(k,j), k|m|=|n|, j=1,2,\ldots, j\leftrightarrow(\pm1,m(j))$$

Пример 1

Перенумеруем элементы базиса так, чтобы

$$U_{T_1}\tilde{f}_{n,0}(x,y)=e^{2\pi ing}\tilde{f}_{n,0}(x,y),\, n\in Z.$$

$$U_{T_1}\tilde{f}_{k,j}(x,y)=\tilde{f}_{k+1,j}(x,y)\ k=0,1,\ldots,\ j=1,2,\ldots.$$

Пусть

$$f(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_{n,0}\tilde{f}_{n,0}(x,y)+\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}a_{k,j}\tilde{f}_{k,j}(x,y),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|a_{n,0}\right|^2+\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\left|a_{k,j}\right|^2<+\infty.$$

Пример 1

Заметим, что

$$U_{T_1} f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n,0} e^{2\pi i n g} \tilde{f}_{n,0}(x,y) + \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{k+1,j} \tilde{f}_{k,j}(x,y),$$

$$f(x,y) \in G_2(T_1) \Rightarrow U_{T_1} f(x,y) = \lambda f(x,y) \Rightarrow a_{n,m} = 0 \text{ при } m > 0.$$

Следовательно, $G_2(T_1) = \left\{ \lambda_n e^{2\pi i n x} \,\middle\|\, \lambda_n \right| = 1, n \in Z \left. \right\}.$

Тогда $\left\{ e^{2\pi i (nx+my)} \,\middle|\, n \in Z, m \in Z \right\} \subset G_3(T_1)$, т.к

$$U_{T_1} e^{2\pi i (nx+my)} = e^{2\pi i n g} e^{2\pi i m x} e^{2\pi i (nx+my)}, e^{2\pi i n g} e^{2\pi i m x} \in G_2(T_1) \Rightarrow$$

$$G_2(T_1) \neq G_3(T_1) \Rightarrow n(T_1) \geq 3.$$

Пример 2

Заметим, что

$$U_{T_2} e^{2\pi i\left(nx+2^k my\right)} = e^{2\pi i n g} e^{2\pi i\left(nx+2^{k+1} my\right)}, n=0,\pm1,\pm2,\ldots, m=\pm1,\pm2,\ldots, k=0,1,\ldots$$

$$U_{T_2} e^{2\pi inx} = e^{2\pi ing} e^{2\pi inx}, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Пусть $f(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{nm} e^{2\pi i(nx+my)}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left|a_{nm}\right|^2 < +\infty.$

Если $U_{T_2} f(x,y)=\lambda f(x,y) \Leftrightarrow e^{2\pi ing} a_{n,2n} = \lambda a_{n,m}, n\in Z, m\in Z,$

то $\left|a_{n,2m}\right| = |\lambda|\left|a_{n,m}\right|.$ Откуда получаем $a_{n,m}=0$ при $m\neq 0.$

Следовательно, $G_2(T_2)=\left\{b_n e^{2\pi inx} \,\middle\|\, b_n\right| = 1, n\in Z\right\}.$

Пример 2

Перенумеруем

$$\left(n, 2^k m\right), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, m = \pm 1, \pm 3, \ldots, k = 0, 1, \ldots$$

$$(k, j), k = 0, 1, \ldots, j = 1, 2, \ldots, j \leftrightarrow \left(n(j), m(j)\right)$$

Положим

$$g_{k,j}(x, y) = e^{2\pi i n(j) k g} e^{2\pi i \left(n(j)x + 2^k m(j) y\right)}, k = 0, 1, \ldots, j = 1, 2, \ldots$$

$$g_{n,0}(x, y) = e^{2\pi i n x}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Тогда $U_{T_2} g_{n,0}(x, y) = e^{2\pi i n g} g_{n,0}(x, y), n = 0, \pm 1, \ldots$

$$U_{T_2} g_{k,j}(x, y) = g_{k+1,j}(x, y), k = 0, 1, \ldots, j = 1, 2, \ldots$$

Пример 2

Система $\left\{g_{n,0}(x,y) \middle| n \in Z\right\} \cup \left\{g_{k,j}(x,y) \middle| k = 0,1,\ldots,\ j = 1,2,\ldots\right\}$ образует ортонормированный базис в $L_2\left(R^2/Z^2\right)$.

Пусть

$$f(x,y) \in G_3(T_2),\ f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n,0} g_{n,0}(x,y) + \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j} g_{k,j}(x,y),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|a_{n,0}\right|^2 + \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \left|a_{k,j}\right|^2 < +\infty.$$

Пример 2

Тогда

$$U_{T_2} f(x,y) = b e^{2\pi i t x} f(x,y), |b| = 1, t \in Z,$$

$$U_{T_2} f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n,0} e^{2\pi i n g} g_{n,0}(x,y) + \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j} g_{k+1,j}(x,y),$$

$$b e^{2\pi i t x} f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n,0} b e^{2\pi i t x} g_{n,0}(x,y) + \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j} b e^{2\pi i t x} g_{k+1,j}(x,y).$$

Откуда

$$|a_{k,j}| = |a_{k+1,\tilde{j}}| \;\; j = 1, 2, \ldots \Rightarrow a_{k,j} = 0 \;\; j = 1, 2, \ldots$$

$$|a_{n,0}| = |a_{n+t,0}| \, n \in Z \Rightarrow t = 0.$$

Пример 2

Следовательно, $G_3\left(T_2\right) = G_2\left(T_2\right) \Rightarrow n\left(T_2\right) = 2.$

Утверждение

Операторы Купмана U_{T_1} и U_{T_2} унитарно эквивалентны.

Доказательство. Замена ортонормированного базиса в пространстве $L_2\left(R^2/Z^2\right)$, при которой

$$\tilde{f}_{n,0}\left(x,y\right) \leftrightarrow g_{n,0}\left(x,y\right),\ n \in Z,$$

$$\tilde{f}_{k,j}\left(x,y\right) \leftrightarrow g_{k,j}\left(x,y\right), k = 0,1,2,\dots,\ j = 1,2,\dots,$$

устанавливает унитарную эквивалентность U_{T_1} и U_{T_2}.

Измеримые разбиения

Определение. Пусть $\{M, \Sigma, \mu\}, \mu(M) = 1$ вероятностное пространство. Разбиением называется совокупность множеств $\xi = \{A_i \mid i \in I_\xi\}$, такая, что $\forall i \in I_\xi \quad A_i \in \Sigma, \mu(A_i) > 0,$

$$\mu(A_i \cap A_j) = 0 \text{ при } i \neq j, \; \mu\left(M \setminus \bigcup_{i \in I_\xi} A_i\right) = 0.$$

Здесь I_ξ конечное или счетное множество,

Измеримые разбиения

Определение. Пусть $\xi = \left\{ A_i \,\middle|\, i \in I_\xi \right\}, \eta = \left\{ B_j \,\middle|\, j \in I_\eta \right\}$, разбиения. Будем говорить, что разбиения ξ и η совпадают $(\xi = \eta)$, если

$$\forall A_i \in \xi\ \exists B_j \in \eta : \mu\left(A_i \vartriangle B_j\right) = 0.$$

P.S. Тогда $\forall B_j \in \eta\ \exists A_i \in \xi : \mu\left(A_i \vartriangle B_j\right) = 0$,

т.е. если $\xi = \eta$, то $\eta = \xi$.

Измеримые разбиения

Определение. Пусть $\xi = \left\{ A_i \middle| i \in I_\xi \right\}, \eta = \left\{ B_j \middle| j \in I_\eta \right\}$, разбиения. Будем говорить, что $\xi \geq \eta$, если

$$\forall A_i \in \xi \, \exists B_j \in \eta : \mu\left(A_i \setminus B_j\right) = 0.$$

P.S. Заметим, что

$$\xi \geq \eta, \eta \geq \xi \Rightarrow \xi = \eta;$$

$$\xi \geq \eta, \eta \geq \varsigma \Rightarrow \xi \geq \varsigma.$$

Измеримые разбиения

Определение. Пусть $\xi = \left\{ A_i \middle| i \in I_\xi \right\}, \eta = \left\{ B_j \middle| j \in I_\eta \right\}$, разбиения. Положим

$$\xi \vee \eta = \left\{ A_i \cap B_j \middle| A_i \in \xi, B_j \in \eta, \mu\left(A_i \cap B_j\right) > 0 \right\}.$$

P.S. Заметим, что $\xi \vee \eta = \eta \vee \xi; (\xi \vee \eta) \vee \varsigma = \xi \vee (\eta \vee \varsigma);$

$$\xi \vee \eta \geq \xi, \xi \vee \eta \geq \eta;$$

$$\varsigma \geq \xi, \varsigma \geq \eta \Rightarrow \varsigma \geq \xi \vee \eta;$$

$$\xi \geq \eta \Rightarrow \xi \vee \varsigma \geq \eta \vee \varsigma.$$

Измеримые разбиения

Пусть $T: M \to M$ сохраняющее меру преобразование, $\xi = \left\{ A_i \middle| i \in I_\xi \right\}$ разбиение.

Тогда $T^{-1}(\xi) = \left\{ T^{-1} A_i \middle| i \in I_\xi \right\}$ разбиение.

Действительно,

$$\mu\left(T^{-1}A_i \cap T^{-1}A_j\right) = \mu\left(T^{-1}\left(A_i \cap A_j\right)\right) = \mu\left(A_i \cap A_j\right) = 0 \ \text{ при } i \neq j,$$

$$\mu\left(M \setminus \bigcup_{i \in I_\xi} T^{-1} A_i \right) = \mu\left(M \setminus T^{-1}\left(\bigcup_{i \in I_\xi} A_i \right)\right) =$$

$$= 1 - \mu\left(T^{-1}\left(\bigcup_{i \in I_\xi} A_i \right)\right) = 1 - \mu\left(\bigcup_{i \in I_\xi} A_i \right) = 0.$$

Измеримые разбиения

Пусть $\xi = \left\{ A_i \middle| i \in I_\xi \right\}$ разбиение. Множество конечных или счетных объединений элементов ξ называется алгеброй $\mathfrak{R}(\xi)$ порождённой разбиением ξ.

Заметим, что $\xi = \eta \Leftrightarrow \mathfrak{R}(\xi) = \mathfrak{R}(\eta)$,

$$\xi \geq \eta \Leftrightarrow \mathfrak{R}(\xi) \supset \mathfrak{R}(\eta),$$

$$\mathfrak{R}\left(\bigvee_{k \in J} \xi_k \right) = \bigvee_{k \in J} \mathfrak{R}(\xi_k).$$

Информация разбиения

Пусть $\xi = \left\{ A_i \middle| i \in I_\xi \right\}$ разбиение, $x \in M$.
Обозначим $A_\xi(x)$ элемент разбиения ξ,
содержащий x.
Информацией разбиения ξ называется
функция

$$I_\xi(x) = -\log_2 \mu\big(A_\xi(x)\big).$$

Энтропия разбиения

Определение. Энтропией разбиения $\xi = \left\{A_i \middle| i \in I_\xi\right\}$ называется $H(\xi) = -\sum_{i \in I_\xi} \mu(A_i)\log_2\left(\mu(A_i)\right)$.

P.S. $H(\xi) = \int_M I_\xi(x)\mu(dx)$.

Определим функцию на отрезке [0,1]

$$z(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0, \\ -t\log_2 t, & \text{если } 0 < t \le 1. \end{cases}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\log_2 t - \log_2 e,\ \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\frac{\log_2 e}{t} < 0,\ e^{-1} = \operatorname*{Arg\,max}_{0<t\le t}\left(-t\log_2 t\right).$$